MATEMATICA (GRATUITA) PER LE SCUOLE SUPERIORI

(UNITÀ 28-88)

ESERCIZI E COMPLEMENTI – 1

U30 / U31 – Similitudine nel piano

1. Due circonferenze disuguali γ e γ', di centri O ed O' rispettivamente, sono tangenti internamente nel punto T. Presi sulla circonferenza maggiore γ due punti distinti A e B, siano nell'ordine A' e B' i punti in cui le rette TA e TB intersecano ulteriormente la circonferenza γ'.

a) Dimostrare che le rette AB e A'B' sono parallele.

b) Calcolare il rapporto fra i perimetri e quello fra le aree dei triangoli TAB e TA'B' sapendo che è k il rapporto fra il segmento TO e il segmento O'O.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a)} \dots;\ \text{b)}\ \frac{k}{k-1}, \dots\right]$$

2. Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa BC è lunga il doppio del cateto AB. Si prenda, sul prolungamento di AB, dalla parte di B, il punto D in modo che risulti $BD=AC/2$. Si costruisca quindi, da parte opposta del triangolo ABC rispetto alla retta AB, il triangolo BED simile al triangolo ABC in modo che i vertici B, E, D siano omologhi rispettivamente dei vertici A, B, C.

a) Descrivere una similitudine che trasformi il triangolo ABC nel triangolo BED.

b) Calcolare l'area del quadrilatero convesso ACDE sapendo che il segmento AD è lungo $a(2+\sqrt{3})$, essendo a una lunghezza assegnata.

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{R.}\ \text{a) Una similitudine è } \sigma=\rho\circ s\circ\omega\text{, essendo } \rho,\ s,\ \omega \text{ rispettivamente una rotazione, una simmetria} \\ \quad \text{assiale, un'omotetia; b) } \dfrac{a^2}{2}\left(8+5\sqrt{3}\right)\end{array}\right]$$

3. È dato il triangolo equilatero ABC di lato lungo a. Si prendano il punto L internamente al lato BC, il punto M internamente al lato CA e il punto N internamente al lato AB, in modo che anche il triangolo LMN sia equilatero ed inoltre i suoi lati LM, MN, NL siano perpendicolari rispettivamente ai lati BC, CA, AB del triangolo dato.

a) Calcolare la lunghezza del lato del triangolo LMN.

b) Spiegare in modo esauriente perché il baricentro G del triangolo ABC coincide con il baricentro del triangolo LMN o, viceversa, perché non coincide.

c) Calcolare l'area e il perimetro del quadrilatero AGLM.

d) Descrivere una similitudine che trasformi il triangolo ABC nel triangolo LMN.

$$\left[\textbf{R.}\ \dots;\ \text{c)}\ \frac{\sqrt{3}}{18}a^2,\ \ \frac{2a}{3}\left(\sqrt{3}+1\right); \dots\right]$$

4. Sia dato il rettangolo ABCD di lati AB e AD lunghi rispettivamente 26 cm e $\frac{65}{3}$ cm. Indicati con M ed N i punti medi dei lati CD e AD rispettivamente, sia P il punto comune ai segmenti AM e BN e sia Q il punto comune ai segmenti AM e CN. Inoltre le rette AM e BN siano perpendicolari.

a) Spiegare in modo esauriente se la misura dell'angolo $A\widehat{M}B$ è uguale, maggiore o minore di 60°.

b) Dimostrare che gli angoli $M\widehat{B}N$ e $C\widehat{Q}M$ sono uguali.

c) Calcolare il perimetro e l'area del triangolo NPQ.

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{R.}\ \text{a) ... ; b) Si suggerisce di tracciare anche il segmento AH, dove H è il punto medio del ... ;} \\ \quad \text{c) il triangolo NPQ è simile al triangolo ... , } NP=25/6\text{ cm, } PQ=500/119\text{ cm, ...}\end{array}\right]$$

5. Considerata una circonferenza γ di diametro AB, siano C e D due punti distinti presi su una delle due semicirconferenze in cui AB divide γ, in modo che i punti A, D, C, B si susseguano in quest'ordine. Siano inoltre P e Q le proiezioni ortogonali di D sulle rette CA e CB rispettivamente. Siano infine E il punto simmetrico di D rispetto al centro della circonferenza ed N un qualsiasi punto preso sulla retta EC da parte opposta di E rispetto a C. Dimostrare che:

a) la circonferenza di diametro CD passa per i punti P e Q;

b) la retta EN è tangente a tale circonferenza;

c) gli angoli $B\widehat{A}E$ e $B\widehat{C}E$ sono uguali e parimenti sono uguali gli angoli $Q\widehat{P}C$ e $Q\widehat{C}N$;

d) i triangoli BAE e QPC sono simili.

6. COMPLEMENTI. IL TEOREMA DI TOLOMEO.

Sia ABCD un quadrilatero qualsiasi inscrivibile in un cerchio. Vale la seguente relazione: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.

[N.B. : Questa proprietà è conosciuta come **teorema di Tolomeo**, dal nome del matematico alessandrino ***Claudio Tolomeo***, vissuto nel II sec. d.C., ideatore della teoria che pone la Terra al centro dell'Universo e detta per questo *teoria geocentrica* o *tolemaica*]

DIMOSTRAZIONE. Sia ABCD il quadrilatero in questione (Fig. N1). Si prenda sulla diagonale AC il punto E tale che l'angolo $B\widehat{E}C$ sia uguale all'angolo $B\widehat{A}D$. Si constata che sono uguali gli angoli $A\widehat{E}B$ e $D\widehat{C}B$ in quanto angoli supplementari degli angoli uguali $B\widehat{E}C$ e $B\widehat{A}D$; e sono uguali sia gli angoli $B\widehat{C}E$ e $A\widehat{D}B$ sia gli angoli $B\widehat{A}E$ e $B\widehat{D}C$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

Si desume che sono simili sia i triangoli ABE e BCD sia i triangoli EBC e ABD. In conseguenza di ciò si hanno le seguenti proporzioni: $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AE}:\overline{CD}$ e $\overline{BC}:\overline{BD}=\overline{EC}:\overline{AD}$, da cui seguono le uguaglianze:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{BD}\cdot\overline{AE} \quad \text{e} \quad \overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{BD}\cdot\overline{EC}\,.$$

Da qui, sommando membro a membro, si ottiene:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{BD}\cdot\overline{AE}+\overline{BD}\cdot\overline{EC} \quad \text{o anche:} \quad \overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{BD}\cdot\left(\overline{AE}+\overline{EC}\right)$$

e infine:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}\,.$$

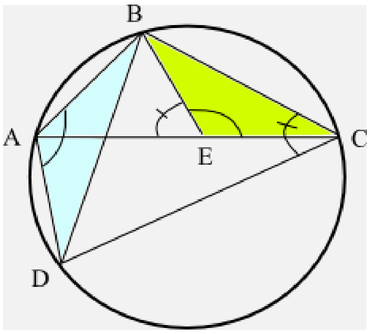


FIG. N1

COROLLARIO (del teorema di Tolomeo). Sia ABC un triangolo equilatero e sia P un punto del minore degli archi AB del cerchio circoscritto al triangolo. Si ha: PC=PA+PB.

La dimostrazione è lasciata al lettore.

U35 – Nozioni di calcolo matriciale

1. Sono date le matrici A e B tali che:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1/2 & -1\\ 2 & 2/3\end{bmatrix}$$

Determinare la matrice X del 2° ordine tale che:

a) $A+X=B$. b) $B+X=A$. c) $AX=B$. d) $BX=A$.

2. È dato il seguente sistema, in forma matriciale: AX=B, dove A, B, X sono le matrici seguenti:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 7\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

La sua soluzione è costituita dalla seguente terna:

[A] $(2,-2,-1)$. [B] $(1,-1,2)$. [C] $(1,1,1)$. [D] $(3,-1,2)$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

3. Risolvere il seguente sistema, dato in forma matriciale AX=B, dove A, B, X sono le matrici seguenti:

(a) $A=\begin{bmatrix}2&3&-5\\1&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$. (b) $A=\begin{bmatrix}2&3&-5\\1&-2&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

[**R.** a) $(x, x-1, x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}$; b) $(x,x,x),\ \forall x\in\mathbb{R}$]

4. PROBLEMA RISOLTO. I tre amici Aldo, Giovanni e Giacomo giocano tre partite mettendo in palio le figurine dei calciatori. Nella prima partita Aldo perde, a favore di Giovanni e Giacomo, tante figurine quante ne possiede ciascuno di loro. Nella seconda partita Giovanni perde, a favore di Giacomo e Aldo, tante figurine quanto ne possiede ognuno dei due attualmente. Nella terza partita Giacomo perde, a favore di Aldo e Giovanni, tante figurine quante ciascuno dei due ne possiede a questo punto del gioco.

a) Qual è il massimo numero di figurine, inferiore a 300, possedute complessivamente dai tre amici?

b) In tal caso, quante figurine possedeva ciascuno di loro all'inizio del gioco?

[Problema ispirato ad uno simile proposto dal matematico svizzero Leonhard Euler (1707-1783)]

RISOLUZIONE. La seguente tabella (Tab. N1) illustra la situazione nelle varie fasi del gioco.

	Numero di figurine posseduta da:		
	Aldo	Giovanni	Giacomo
A inizio gioco	x	y	z
Dopo la 1ª partita	x–(y+z) = x–y–z	2y	2z
Dopo la 2ª partita	2(x–y–z) = 2x–2y–2z	2y–[2z+(x–y–z)] = –x +3y–z	2·2z = 4z
Dopo la 3ª partita	2(2x–2y–2z) = 4x–4y–4z	2(–x +3y–z) = –2x+6y–2z	4z–[(2x–2y–2z)+(–x +3y–z)] = –x–y+7z

TAB. N1

Si capisce che x, y, z sono numeri naturali. Se ora indichiamo con N il numero delle figurine possedute da ciascuno dei tre amici alla fine del gioco ($3N<300$ e perciò $N<100$), vale a dire dopo la terza partita, deve risultare contemporaneamente:

$$4x-4y-4z=N,\quad -2x+6y-2z=N,\quad -x-y+7z=N.$$

Risolvendo il sistema di queste tre equazioni nelle incognite x, y, z, si trova:

$$x=\frac{13}{8}N,\quad y=\frac{7}{8}N,\quad x=\frac{1}{2}N.$$

Ribadiamo che x, y, z sono numeri naturali. Ragion per cui il massimo valore di N, inferiore a 100, perché questo accada, è 96, che è il più grande multiplo di 8, che sia minore di 100. Il numero complessivo di figurine possedute dai tre amici è pertanto $96\times3=288$. Nel qual caso si ha: $x=156$, $y=84$, $z=48$. La tabella sottostante (Tab. N2) visualizza la situazione reale nelle varie fasi del gioco:

	Numero di figurine posseduta da:		
	Aldo	Giovanni	Giacomo
A inizio gioco	156	84	48
Dopo la 1ª partita	24	168	96
Dopo la 2ª partita	48	48	192
Dopo la 3ª partita	96	96	96

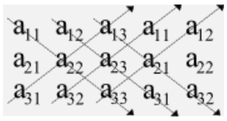
TAB. N2

5. COMPLEMENTI. LA REGOLA DI SARRUS.

È dato il seguente determinante D di ordine 3:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

Calcolarne il valore.
Dopo di ciò verificare che tale valore si può determinare applicando la cosiddetta *regola di Sarrus* [1], vale a dire: si scrivono, alla destra della terza colonna, la prima e la seconda nell'ordine, in questo modo:



poi si eseguono i sei prodotti (ciascuno di tre fattori) indicati dalle frecce, si calcola quindi la somma dei tre prodotti che stanno sulle frecce orientate verso il basso e da tale somma si sottrae la somma dei tre prodotti che stanno sulle frecce orientate verso l'alto. Di modo che si ha:

$$D=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{12})-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{13}a_{21}a_{12})\,.$$

6. È dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z, sapendo che a, b, c sono parametri reali assegnati:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=a \\ 3x+2y-4z=b \\ -5x+y+3z=c \end{cases}$$

a) Risolverlo e discuterlo al variare di a, b, c.
b) Risolverlo, in particolare, quando a=1, b=−1, c=0.

[**R.** a) se $a+b+c=0$ il sistema è indeterminato, se $a+b+c\neq 0$ il sistema è impossibile; b) si hanno le infinite soluzioni $\left(x,\frac{11x-3}{10},\frac{13x+1}{10}\right), \forall x\in\mathbb{R}$]

7. COMPLEMENTI.
IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS. Sia dato il seguente sistema lineare di 3 equazioni in altrettante incognite:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ \quad\quad 2y+z=7 \\ \quad\quad\quad 2z=6 \end{cases}$$

La sua risoluzione è del tutto banale: dalla 3ª equazione si ricava z=3; questo valore, sostituito nella 2ª equazione, permette di trovare subito y=2; infine, dalla 1ª equazione, dopo aver sostituito al posto di y e z i valori già trovati, si trova x=−1.
Osserviamo che la matrice dei coefficienti del sistema ha una forma particolare, chiamata *matrice a gradini* (o *matrice a scalini*), nella quale sono uguali a 0 il primo termine della seconda riga e i primi due della terza:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

Ebbene, dato un sistema lineare di n equazioni in altrettante incognite, se fosse possibile trasformarlo in modo che la matrice dei suoi coefficienti sia una matrice a gradini, la sua soluzione sarebbe cosa fatta.
Lo scopo si ottiene con il cosiddetto metodo di eliminazione di Gauss [2]. Descriviamo qui appresso come si procede, ma lo facciamo con riferimento a tre particolari sistemi, ciascuno di 3 equazioni in altrettante incognite.
Siano allora i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ 2x+y-z=8 \\ -x+3y-2z=2 \end{cases}\qquad \begin{cases} y+z=0 \\ x-2y+3z=-2 \\ -x+3y-2z=2 \end{cases}\qquad \begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ 2x+y-z=8 \\ x+3y-4z=-1 \end{cases}$$

Si scrive prima di tutto la cosiddetta *matrice completa* (o *matrice orlata*) del sistema, vale a dire la matrice che si ottiene affiancando a destra della matrice dei coefficienti il vettore dei termini noti:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{Vmatrix}\qquad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{Vmatrix}\qquad \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{Vmatrix}$$

A questo punto si osserva se c'è qualche riga che ha un numero di zeri maggiore del numero di zeri presenti

[1] **Pierre-Frédéric Sarrus**, matematico francese (1798-1861)
[2] **Carl Friedrich Gauss**, matematico tedesco (1777-1855)

nella riga successiva. Se è così (come nella seconda matrice), si scambiano di posto le due righe; e così pure per le righe successive. Ragion per cui la matrice (solo la seconda, mentre le altre rimangono immutate) diventa:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Si procede facendo in modo che, con un'opportuna combinazione lineare fra le prime due righe, diventi uguale a 0 il primo coefficiente della seconda riga. Nel caso specifico (con riferimento alla 1ª e alla 3ª matrice) basta moltiplicare per 2 la prima riga e sottrarre da essa la seconda; mentre per la 2ª matrice è sufficiente sommare la prima e la seconda riga. Cosicché le matrici diventano le seguenti:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -12 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -12 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Si ripete l'operazione affinché diventino uguali a 0 il primo ed il secondo coefficiente della terza riga, se già non lo sono (per la 1ª e la 3ª matrice questo avviene in due tempi):

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cosicché i tre sistemi di partenza risultano trasformati in questi altri, ad essi equivalenti:

$$\begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ -5y+7z=-12 \\ 12z=-12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ y+z=0 \\ 0\,z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ -5y+7z=-12 \\ 0\,z=-11 \end{cases}$$

Il primo sistema è determinato e fornisce la soluzione seguente: $x=3,\ y=1,\ z=-1$.
Il secondo sistema è indeterminato e fornisce le seguenti soluzioni: $x=-5z-2,\ y=-z,\ z=z,\ \forall z \in \mathbb{R}$.
Il terzo sistema è impossibile.

ESERCIZIO. Per concludere con questo argomento, proponiamo a chi legge di risolvere con il metodo di eliminazione di Gauss i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} y+4z=4 \\ x+2z=4 \\ 2x-y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=4 \\ y+4z=4 \\ x-2z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2z=3 \\ 2x-y=4 \\ y+4z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2z+2t=-2 \\ x+2z=5 \\ 2x-z+4t=2 \\ 4x-y+6t=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y-z+2t=1 \\ x+2y-4z=-1 \\ -3x+2y+2t=-6 \\ x+z-2t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2z=5 \\ y-2z+2t=-2 \\ x-y+z+2t=1 \\ 2x-z+4t=2 \end{cases}$$

U36 / U37 – Goniometria e trigonometria

1. Siano α, β, γ gli angoli di un triangolo generico. Si considerino le seguenti proposizioni:
[A] $\sin\alpha > \sin\beta + \sin\gamma$; [B] $\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma$;
[C] $\sin\alpha < \sin\beta + \sin\gamma$; [D] non si ha certezza di alcuna delle tre proposizioni precedenti.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

2. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(1,3)$ e $B(5,-5)$.
a) Determinare le coordinate di un punto C equidistante dai punti O, A, B.
b) Calcolare il coseno di ciascuno degli angoli convessi $O\hat{C}A, O\hat{C}B, A\hat{C}B$.

3. Sia dato un parallelogramma di cui i due lati non paralleli misurino a, b e le diagonali misurino p, q.
a) Dimostrare che si ha: $p^2+q^2=2(a^2+b^2)$.
b) Posto che i valori di a e b, considerati rispetto alla medesima unità di misura, siano rispettivamente 6 e 8 e che il coseno dell'angolo acuto formato dalle due diagonali sia $\frac{\sqrt{14}}{12}$, calcolare le ampiezze degli angoli del parallelogramma, espresse in gradi sessagesimali e approssimate ad 1".

[**R.** a) ... ; b) $\approx 62°43'13''$, ...]

4. Le misure dei lati di un triangolo sono espresse, rispetto alla medesima unità di misura, da numeri consecutivi nella successione dei numeri naturali pari. Inoltre, l'angolo maggiore del triangolo misura il doppio del minore. Calcolare:

a) le misure dei lati del triangolo;

b) le misure dei suoi angoli, espresse in gradi sessagesimali e approssimate ad $1''$.

[**R.** Siano α e γ le misure dell'angolo maggiore e di quello minore. Si esprime l'area del triangolo in funzione sia di α sia di γ. Siccome $\sin\alpha=\sin 2\gamma=\cdots$ e $\cos\gamma=\cdots$, allora .... Si trova: a) $8, 10, 12$; b) $\gamma\approx 41°24'34''$, ...]

5. L'esagono ABCDEF è equilatero, i suoi angoli di vertici A e D sono retti e gli altri 4 angoli sono uguali.

a) Le diagonali dell'esagono uscenti da A dividono l'angolo $F\hat{A}B$ in tre parti: calcolarne le ampiezze.

b) Calcolare le misure di tali diagonali sapendo che l'area dell'esagono è $4\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm^2.

c) Spiegare in maniera esauriente perché l'esagono è inscrivibile in un cerchio o, viceversa, perché non lo è.

[R. a)...; b) $2\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm, $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ cm, ...; c)...]

6. Due circonferenze uguali, k' e k", di centri rispettivamente nei punti A e B, sono secanti ed è C uno dei loro punti comuni. Sia D un punto preso, esternamente alla circonferenza k', su quella delle due semicirconferenze in cui k" è divisa dalla retta AB e situata dalla stessa parte di C. Posto che sia r la lunghezza del segmento AB e che l'area del quadrilatero convesso ABDC sia $\frac{1}{4}r^2\left(1+\sqrt{3}\right)$, calcolare:

a) le ampiezze degli angoli interni di tale quadrilatero;

b) le misure degli angoli in cui la semiretta uscente da B e passante per E divide che l'angolo $C\hat{B}D$, essendo E il punto in cui il segmento AD interseca il minore degli archi BC della circonferenza k'.

[**R.** a) $60°, 90°, 75°, 135°$; b) $7°30', 22°30'$]

7. I cateti AB e AC del triangolo rettangolo ABC sono lunghi rispettivamente 3a e $a\sqrt{3}$, essendo a una lunghezza assegnata. Si costruiscano, sui lati AB, AC, BC del triangolo ed esternamente ad esso, tre triangoli equilateri e siano rispettivamente H, K, L i loro centri.

a) Calcolare le ampiezze degli angoli $K\hat{A}H$, $H\hat{B}L$, $L\hat{C}K$.

b) Verificare che il triangolo HKL è equilatero calcolando le lunghezze dei suoi lati e facendo vedere che sono uguali.

[**R.** a) $150°, 120°, 90°$; b) $a\sqrt{7}$]

8. PROBLEMA RISOLTO (parzialmente). Sia ABC un triangolo qualunque e siano rispettivamente a, b, c le lunghezze dei suoi lati BC, CA, AB e α,β,γ le ampiezze degli angoli di vertici rispettivamente A, B, C. Sia prendano in esame le seguenti proposizioni.

(a) se $a<b+c$ allora $\alpha<\beta+\gamma$;

(b) se $a<\dfrac{b+c}{2}$ allora $\sin\alpha<\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{2}$; (c) se $a<\dfrac{b+c}{2}$ allora $\alpha<\dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

Dimostrare che la prima di esse è falsa mentre le altre due sono vere.

DIMOSTRAZIONE (parziale). La dimostrazione della falsità della prima proposizione (basta un controesempio) e quella della verità della seconda (è utile tener presente un noto teorema sul triangolo) sono abbastanza agevoli: le lasciamo a chi legge. Meno agevole, tutt'altro, è la dimostrazione della verità della proposizione (c). Ce ne occupiamo diffusamente.

Intanto bisogna far vedere (anche questo è lasciato a chi legge) che dire $\alpha<(\beta+\gamma)/2$ equivale a dire $\alpha<60°$. Sicché basta dimostrare che, sotto l'ipotesi $a<(b+c)/2$, risulta: $\alpha<60°$.

Si chiama in causa il teorema del coseno relativo all'angolo α:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \quad \text{da cui segue:} \quad \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Ora, da $a<\frac{b+c}{2}$ segue: $a^2<\frac{(b+c)^2}{4}$ e perciò risulta:

$$\cos\alpha > \frac{b^2+c^2-\frac{(b+c)^2}{4}}{2bc} \quad \text{ossia:} \quad \cos\alpha > \frac{3(b^2+c^2)-2bc}{8bc}\,.$$

D'altro canto, dalla evidente disuguaglianza $(b-c)^2\ge 0$ segue $b^2+c^2\ge 2bc$. Pertanto, a più forte ragione, risulta:

$$\cos\alpha > \frac{3\cdot 2bc-2bc}{8bc}\,, \quad \text{ossia: } \cos\alpha > \frac{1}{2} \quad \text{e quindi } \alpha < 60°\,.$$

U38 – Misure di circonferenza e cerchio. Il numero π

1. Sono date due circonferenze secanti, di centri H e K e raggi rispettivamente 2r ed r, dove r è una lunghezza assegnata. Siano inoltre A e B i punti comuni alle due circonferenze e sia infine $A\widehat{H}B=60°$ e $A\widehat{K}B=45°$.
   a) Dimostrare che la differenza tra le parti non sovrapposte dei cerchi delimitati dalle due circonferenze non dipende dall'area della regione S comune ai due cerchi. Quanto vale questa differenza?
   b) Calcolare l'area della regione S.
   c) Calcolare infine la lunghezza del segmento intercettato dalla regione S sul segmento HK.

$$\left[\textbf{R. } a)\ 3\pi r^2;\ \ b)\ \frac{r^2}{12}\left(11\pi-12\sqrt{3}-6\right);\ \ c)\ \frac{r}{2}\left(6-2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]$$

2. Considerata una circonferenza di raggio r, siano P_n e p_n i perimetri dei poligoni regolari di n lati rispettivamente circoscritto e inscritto nella circonferenza.
   A) Dimostrare che:
      1. $P_n = 2\,n\,r\,\tan\frac{180°}{n}$, $\ p_n = 2\,n\,r\,\sin\frac{180°}{n}$;
      2. supponendo n=96 si ottiene la disuguaglianza $3{,}1410<\pi<3{,}1427$, ritrovando così, a parte approssimazioni irrilevanti, il risultato di Archimede, vale a dire $3{,}1408<\pi<3{,}1428$, in base al quale il valore di π, esatto fino alla seconda cifra decimale, è 3,14.
   B) Dimostrare che:
      1. P_{2n} è uguale alla media armonica di P_n e p_n ;
      2. p_n è uguale alla media geometrica di P_{2n} e p_n .

3. Quattro circonferenze uguali sono tangenti ciascuna a due lati di un quadrato e ad una quinta circonferenza, che è uguale alle altre. Quest'ultima ha lo stesso centro del quadrato (Fig. N2).
   Sapendo che il lato del quadrato misura 1 m, calcolare:
   a) la misura del raggio delle circonferenze;
   b) l'area ombreggiata in verde, approssimata per difetto a meno di 1 cm^2.

$$\left[\textbf{R. } a)\ \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,m\,,\ \ b)\ \approx 723\ cm^2\right]$$

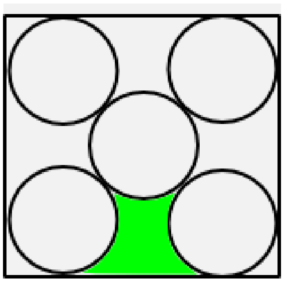


FIG. N2

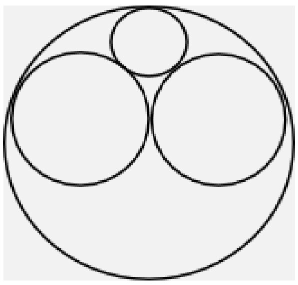


FIG.N3

4. Due circonferenze C_1 e C_2, di raggi r e 4r, dove r è una lunghezza assegnata, sono tangenti internamente. Due altre circonferenze uguali fra loro, C_3 e C_4, sono tangenti esternamente e ciascuna di esse è tangente

esternamente alla circonferenza C_1 e internamente alla C_2 (Fig. N3).

a) Calcolare la lunghezza di ciascuna di queste due circonferenze.

b) Spiegare in modo esauriente perché il quadrilatero, avente per vertici i centri delle 4 circonferenze, è inscrivibile in un cerchio o, viceversa, perché non lo è.

[**R.** a) Indicato con x il raggio di C_3 e C_4, si ottiene l'equazione irrazionale:
$$\sqrt{16r^2-8rx}+\sqrt{r^2+2rx}=3r$$
la quale, una volta risolta, fornisce $x=\frac{48}{25}r$, per cui … ; b) …]

5. Considerato il rettangolo ABCD, di centro O, e condotta per B la retta perpendicolare alla diagonale AC, sia E il punto in cui essa interseca il lato AD. Si sa che l'angolo $O\hat{P}B$ è bisecato dalla parallela ad AB condotta per P.

a) Dimostrare che il quadrilatero OEAB è inscrivibile in un cerchio.

b) Calcolare le ampiezze degli angoli in cui la diagonale AC divide l'angolo $B\hat{A}D$.

c) Sapendo che l'area del cerchio suddetto è $\pi a^2/3$, dove a è una lunghezza assegnata, calcolare l'area del rettangolo dato.

[**R.** a) Si ha: $E\hat{O}B=E\hat{O}A+A\hat{O}B=…=90°$, per cui … ; b) 30°, 60°; c)…]

6. Attorno a due pulegge è avvolta una cinghia (Fig. N4 – la cinghia è colorata in rosso). I centri delle due pulegge distano 50 cm ed i loro raggi misurano 6 cm e 24 cm. Ammesso che la puleggia più piccola impieghi 4 secondi per compiere un giro completo, calcolare quanto tempo impiega:

a) la puleggia più grande a compiere un giro completo:

b) il punto P della cinghia a ritornare per la prima volta nella medesima posizione.

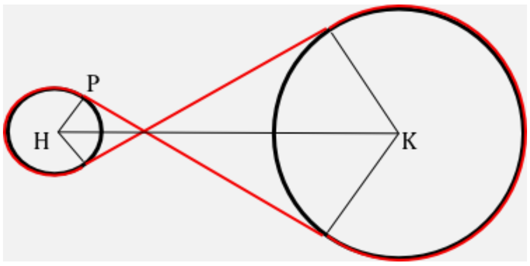


FIG. N4

[**R.** a) 16 s; b) ≈ 22,5 s]

U39 – Il principio d'induzione

1. PROBLEMA RISOLTO. È assegnato il numero $N(n)$ tale che:

(a) $N(n)=3^{2n+1}+4^{n+2}$. (b) $N(n)=5^{2n+1}+7^{n+1}$.

(c) $N(n)=3^{n+2}+5^{2n+1}$. (d) $N(n)=2^{n+3}+5^{2n+1}$.

Al variare di n nell'insieme N dei numeri naturali anche $N(n)$ varia assumendo infiniti valori: calcolare il loro massimo comune divisore.

RISOLUZIONE (parziale). Ci occupiamo dei primi due casi lasciando a chi legge di occuparsi degli altri due.

(a) Occupiamoci allora di $N(n)=3^{2n+1}+4^{n+2}$.
Osserviamo anzitutto che si ha $N(0)=3+4^2=19$, un numero primo. Questo implica che il massimo comune divisore dei numeri $N(n)$ al variare di n o è 19 oppure è 1. Proseguiamo calcolando $N(1)$. Si ha: $N(1)=91=7\cdot 13$. Non c'è 19 fra i divisori di $N(1)$, ragion per cui 19 non può essere il massimo comune divisore cercato. Dobbiamo concludere che esso è 1.

(b) Occupiamoci adesso di $N(n)=5^{2n+1}+7^{n+1}$.
Osserviamo anzitutto che si ha $N(0)=5+7=12$. Questo implica che il massimo comune divisore dei numeri $N(n)$ è da ricercarsi fra i numeri seguenti: 12, 6, 4, 3, 2, 1, che sono tutti i possibili divisori di

$N(0)$. Proviamo col maggiore di essi, cioè 12. Calcoliamo $N(1)$. Si ha: $N(1)=174=2·3·39$. Non è divisibile per 12. Quindi 12 non può essere il massimo comune divisore cercato.
Proviamo con 6. $N(0)$ ed $N(1)$ sono divisibili per 6, l'abbiamo già visto. Calcoliamo $N(2)$. Si ha: $N(2)=3.468=2^2·3·17^2$. Anche $N(2)$ è divisibile per 6. È forse proprio 6 il massimo comune divisore cercato? Assumiamo questa congettura e proviamo che è vera ricorrendo al principio d'induzione. La base dell'induzione è già provata: $N(0)$ è divisibile per 6. Ammettiamo, ora, che $N(n)=5^{2n+1}+7^{n+1}$ sia divisibile per 6 e proviamo che lo è anche $N(n+1)$. Si ha:

$$N(n+1)=5^{2(n+1)+1}+7^{(n+1)+1}=5^{2n+1}\cdot 25+7^{n+1}\cdot 7\,.$$

D'altro canto, essendo $N(n)$ divisibile per 6, esiste un numero naturale m tale che $5^{2n+1}+7^{n+1}=6m$, ossia: $5^{2n+1}=6m-7^{n+1}$, per cui si ha:

$$N(n+1)=(6m-7^{n+1})\cdot 25+7^{n+1}\cdot 7=6\cdot(25m-3\cdot 7^{n+1})\,.$$

Siccome la quantità dentro parentesi nell'ultima espressione è certamente un numero intero, dobbiamo concludere che $N(n+1)$ è divisibile per 6.
In definitiva proprio 6 è il massimo comune divisore cercato.

2. Secondo lo storico e matematico statunitense Carl B. Boyer (1906-1976) si deve al logico inglese **Richard Suiseth** (soprannominato **Calculator**, che Boyer considera operante nel 1350) il primo esempio di somma di infiniti numeri avente un valore finito. L'esempio è basato sulla seguente relazione:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}\,.$$

ESERCIZIO. Dimostrare la precedente uguaglianza mediante il principio d'induzione.

3. Confrontare i due numeri $2n!$ e n^n, dove n è un qualsiasi numero naturale non nullo. Stabilire cioè se $2n!$ è maggiore, minore o uguale a n^n.

4. I prossimi due esercizi sono strettamente connessi. Il primo di essi, che dimostriamo, è infatti propedeutico al secondo, la cui dimostrazione lasciamo invece a chi legge.

ESERCIZIO 1. Dimostrare, mediante il principio d'induzione, che per $n≥3$ si ha: $2n^3>3n^2+3n+1$.
DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la disuguaglianza utilizzando il principio d'induzione.
Osserviamo prima di tutto che la base dell'induzione è vera. Si ha infatti:

$$(2n^3)_{n=3}=54\,,\quad (3n^2+3n+1)_{n=3}=37\,.$$

Dimostriamo adesso che è vero il passo induttivo, vale a dire che, ammesso per ipotesi che la disuguaglianza sia vera per n, essa è vera per $n+1$, vale a dire che risulta: $2(n+1)^3>3(n+1)^2+3(n+1)+1$.
Si ha:

$$2(n+1)^3=2(n^3+3n^2+3n+1)=2n^3+2(3n^2+3n+1)$$

e perciò, tenendo presente l'ipotesi:

$$2(n+1)^3>(3n^2+3n+1)+(6n^2+6n+3).$$

D'altro canto:

$$3(n+1)^2+3(n+1)+1=(3n^2+3n+1)+(6n+6)$$

e poiché, come si giustifica facilmente, per ogni numero naturale n non nullo è: $6n^2+6n+3>6n+6$, possiamo concludere che, a più forte ragione, risulta:

$$2(n+1)^3>(3n^2+3n+1)+(6n+6)$$

e, di conseguenza, è dimostrato ciò che si doveva dimostrare.

ESERCIZIO 2. Dimostrare, mediante il principio d'induzione, che per $n>3$ si ha: $3^n>n^3$.

5. Dimostrare, mediante il principio d'induzione, che per $n>3$ si ha: $n^3-n^2-4n>6$.

U42 / U43 / U44 / U45 – Coniche, luoghi geometrici, equazioni polinomiali

1. È dato il seguente polinomio:

$$6x^3-17x^2+6x+8\,.$$

Può essere fattorizzato nel modo seguente:

[A] $(1-2x)(2-x)(3x-4)$. [B] $(2x+1)(2-x)(4-3x)$.

[B] $(2x-1)(x+2)(3x+4)$. [C] $(1-2x)(x+2)(3x+4)$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

[N.B.: Non sono consentiti strumenti di calcolo automatico]

2. Dimostrare che esiste almeno una terna di numeri naturali consecutivi (o, viceversa, dimostrare che non esiste alcuna terna di numeri siffatti) tali che la somma delle quarte potenze dei primi due sia uguale alla quarta potenza del terzo.

3. PROBLEMA RISOLTO. Sia $\mathrm{P(x)}$ un polinomio di grado n tale che si abbia $\mathrm{P(x)=x{\cdot}f(x)}$, essendo $\mathrm{f(x)}$ una funzione che assume il valore $1/\mathrm{x}$ quando ad x si attribuiscono i valori 1, 2, 3, ..., $\mathrm{n}-1$, n.

a) Dimostrare che si ha:

$$\mathrm{P(x)}=1-\frac{1}{\mathrm{n!}}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{k})\quad \text{se n è pari}\,,\qquad \mathrm{P(x)}=1+\frac{1}{\mathrm{n!}}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{k})\quad \text{se n è dipari}\,,$$

dove, usando il simbolo di "produttoria", l'espressione $\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{k})$ è un modo sintetico per indicare il prodotto dei fattori $\mathrm{x}-\mathrm{k}$ quando a k si attribuiscono via via i valori 1, 2, 3, ... , n.

b) Scrivere, in particolare, l'espressione esplicita dei polinomi $\mathrm{P(x)}$ dei gradi 2 e 3.

c) Verificare che si ha $\mathrm{P(n+1)=0}$ se n è pari e $\mathrm{P(n+1)=2}$ se n è dispari.

RISOLUZIONE.

a) Dalla condizione $\mathrm{f(x)}=1/\mathrm{x}$, valida per $\mathrm{x}=1,2,3,\dots,\mathrm{n}$, segue $\mathrm{x{\cdot}f(x)-1=0}$, ossia, essendo $\mathrm{P(x)=x{\cdot}f(x)}$, anche $\mathrm{P(x)-1=0}$. Ovviamente, come $\mathrm{P(x)}$, anche $\mathrm{P(x)-1}$ è un polinomio di grado n. Più esattamente è un polinomio che ammette come zeri i numeri 1, 2, 3, ... , n ed anche 0. Quindi, chiamata a una costante non nulla, deve essere identicamente:

$$\mathrm{P(x)}-1=\mathrm{a}(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2)\ \dots(\mathrm{x}-\mathrm{n})=\mathrm{a}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{k})\quad \text{ossia:}\quad \mathrm{P(x)}=1+\mathrm{a}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{k})\,.$$

Siccome $\mathrm{P(0)=0}$, deve essere:

$$0=1+\mathrm{a}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(-\mathrm{k})\quad \text{ovvero:}\quad \mathrm{a}(-1)(-2)\dots(-\mathrm{n})=-1.$$

Vale a dire:

$$\mathrm{a}\cdot\mathrm{n!}=-1\ \text{ e perciò }\ \mathrm{a}=-\frac{1}{\mathrm{n!}}\ \text{ se n è pari;}\quad \mathrm{a}\cdot(-\mathrm{n!})=-1\ \text{ e perciò }\ \mathrm{a}=\frac{1}{\mathrm{n!}}\ \text{ se n è dipari.}$$

In conclusione, a seconda che n sia pari o dispari si ha rispettivamente:

$$\mathrm{P(x)}=1-\frac{1}{\mathrm{n!}}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{k})\,,\qquad \mathrm{P(x)}=1+\frac{1}{\mathrm{n!}}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x}-\mathrm{k}).$$

b) Nei casi particolari in cui $\mathrm{n}=2$ oppure $\mathrm{n}=3$, si ha rispettivamente:

$$\mathrm{P(x)}-\frac{1}{2}\mathrm{x}^2+\frac{3}{2}\mathrm{x}\,;\qquad \mathrm{P(x)}=\frac{1}{6}\mathrm{x}^3-\mathrm{x}^2+\frac{11}{6}\mathrm{x}\,.$$

c) Calcoliamo $\mathrm{P(n+1)}$. A seconda che n sia pari o dispari si ha rispettivamente (nel segno $\mp$ il segno – vale per n pari, il segno + per n dispari):

$$\mathrm{P(n+1)}=1\mp\frac{1}{\mathrm{n!}}\prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{n}+1-\mathrm{k})=1\mp\frac{1}{\mathrm{n!}}[\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}-1)\cdot(\mathrm{n}-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1]=1\mp\frac{1}{\mathrm{n!}}\cdot\mathrm{n!}=\left[\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.\,.$$

4. Dimostrare che esistono due numeri razionali a, b tali che risulti:

$$\text{(a)}\ \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\mathrm{a}+\mathrm{b}\sqrt{2}\,;\qquad \text{(b)}\ \sqrt[3]{2+11\,i}=\mathrm{a}+\mathrm{b}\,i\,,$$

essendo i l'unità immaginaria.

RISOLUZIONE (traccia). Ci occupiamo solamente della prima equazione. L'altra si risolve allo stesso modo. Dopo aver elevato al cubo entrambi i membri dell'equazione proposta e dopo alcune elementari elaborazioni si constata che deve essere soddisfatto il seguente sistema nelle incognite a, b:

$$\begin{cases} a^3 + 6ab^2 = 7 \\ 3a^2b + 2b^3 = 5 \end{cases}$$

Da qui, dividendo membro a membro, dopo qualche altra elaborazione segue:

$$5\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 21\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 30\left(\frac{a}{b}\right) - 14 = 0\,.$$

Quest'equazione di 3° grado nell'incognita a/b ammette l'unica soluzione razionale 1, mentre le altre due soluzioni sono complesse coniugate, per cui … la continuazione è semplice.

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le seguenti equazioni:

$$x^2 + y^2 - 5y = 0, \quad x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0, \quad x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0..$$

a) Verificare che ognuna di esse rappresenta una circonferenza passante per O e che le tre circonferenze sono uguali fra loro.

b) Una volta trovate le coordinate dei punti in cui le tre circonferenze, prese due a due, si intersecano, oltre che nel punto O, trovare l'equazione della circonferenza passante per tali punti e verificare che è uguale alle circonferenze assegnate.

6. PROBLEMA RISOLTO (parzialmente). In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si prendano un punto A sul semiasse positivo delle x, un punto B sul semiasse positivo delle y e il punto C tale che il quadrilatero OACB sia un rettangolo. Sia poi D un punto interno al rettangolo in modo che risulti: $\overline{AD}=4\sqrt{10}$, $\overline{BD}=\sqrt{34}$, $\overline{CD}=5$.

a) Calcolare la lunghezza di OD.

b) Supposto quindi che l'ascissa di A sia 9, determinare le coordinate dei punti B, C, D.

c) Trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti A, C, D.

d) Stabilire com'è disposta questa circonferenza rispetto alla retta OB.

RISOLUZIONE (parziale). Ci limitiamo a risolvere il solo punto a), che presenta qualche aspetto interessante, lasciando a chi legge la risoluzione degli altri punti.

Disegnata una figura coerente con i dati (compito che lasciamo a chi legge), si chiamino H e K i punti in cui la parallela ad OB, condotta per D, interseca rispettivamente OA e BC, e si chiamino L e M i punti in cui la parallela ad OA, condotta per D, interseca rispettivamente OB e AC. Si ottengono facilmente le seguenti relazioni:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HD}^2,\ \ \overline{AD}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{HD}^2,\ \ \overline{CD}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{KD}^2,\ \ \overline{BD}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{KD}^2,$$

da cui segue:

$$\overline{OD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{HD}^2 - \overline{KD}^2 \quad \text{e} \quad \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{HD}^2 - \overline{KD}^2$$

e perciò:

$$\overline{OD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2.$$

Da qui, tenendo presenti i dati assegnati, si ricava subito che $\overline{OD}=13$.

Il resto è ordinaria amministrazione, almeno sotto l'aspetto concettuale. I calcoli infatti si rivelano noiosi, soprattutto se fatti con carta e penna, mentre sono molto semplici e immediati se fatti con l'ausilio di un software matematico.

7. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(a,0) e B(0,a).

a) Una circonferenza, passante per A, varia mantenendosi tangente all'asse y: trovare l'equazione del luogo geometrico α descritto dal centro di questa circonferenza.

b) Una circonferenza, passante per B, varia mantenendosi tangente all'asse x: trovare l'equazione del luogo geometrico β descritto dal centro di questa circonferenza.

c) Verificare che i due luoghi trovati, α e β, sono tangenti. Quale retta è la loro tangente comune?

8. Siano fissate due circonferenze α e β, la seconda interna alla prima, rispettivamente di centri A e B e di raggi a e b. Una terza circonferenza γ varia mantenendosi tangente ad entrambe le circonferenze fisse: sia C il suo centro.

A) 1. Dimostrare che, al variare della circonferenza γ si ha comunque: $\overline{CA}+\overline{CB}$ = costante.
2. Quanto vale la suddetta costante?
3. Cosa si può concludere riguardo al luogo λ descritto da C al variare della circonferenza γ ?

B) Si supponga che i valori, espressi rispetto ad una medesima unità di misura, delle lunghezze $\overline{AB}$, a, b siano nell'ordine: 2, 7, 3. Dopo aver riferito il piano della figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), tale che l'origine O coincida col punto medio del segmento AB e l'asse x sia la retta AB orientata da B verso A:
1. trovare l'equazione del luogo λ ;
2. rappresentare sullo stesso piano (Oxy) il luogo λ e le circonferenze α e β .

U47 / U48 / U49 – Figure geometriche nello spazio: proprietà e misure

1. Una piramide ha per base il triangolo equilatero ABC di lato lungo a e per altezza il segmento VA lungo h. Per il centro del triangolo si conduca la retta r, parallela al lato BC, e siano M ed N rispettivamente i punti in cui r interseca i lati AB e AC. Si conduca quindi per r il piano α, perpendicolare al piano del triangolo ABC, e siano rispettivamente P e Q i punti in cui α interseca gli spigoli VB e VC. Calcolare a ed h sapendo che il quadrilatero MNQP ha perimetro 14 cm e area 12 cm^2. [**R.** 2 sol.: a=6 cm, h=9 cm; a=4,5 cm, h=12 cm]

2. Una piramide di vertice V ha per base il triangolo equilatero ABC di lato lungo a. Anche la faccia VAB è un triangolo equilatero e forma con il piano della base un angolo di 30°.
a) Spiegare in modo esauriente perché la piramide è retta o, viceversa, perché non lo è.
b) Calcolare la lunghezza dello spigolo VC.

$$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ \dots;\ \text{b)}\ \frac{a}{4}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\right]$$

3. PROBLEMA RISOLTO. Dimostrare che in ogni poliedro convesso la media aritmetica M delle ampiezze degli angoli delle sue facce, espresse in gradi sessagesimali, è compresa fra 60° incluso e 120° escluso.
DIMOSTRAZIONE. Prima di andare alla dimostrazione, verifichiamo questo fatto in un paio di casi particolari.
- In una piramide quadrangolare ci sono 4 facce laterali triangolari e la base quadrangolare, quindi il numero complessivo degli angoli delle facce della piramide è 4×3+4=16. La somma degli angoli di ogni faccia laterale è 180° mentre la somma degli angoli della base è 360°, per cui la media aritmetica M delle ampiezze degli angoli delle facce è: $M=\frac{4\times 180°+360°}{16}=67°30'$.
- In un tronco di piramide a base quadrata ci sono 4 facce laterali che sono dei trapezi e 2 quadrilateri per basi e quindi il numero complessivo degli angoli del poliedro è 4×6=24. Siccome la somma degli angoli di ogni faccia è 360°, la media aritmetica M è in questo caso: $M=\frac{6\times 360°}{24}=90°$.

Mentre invitiamo chi legge a fornire altri esempi particolari di verifica, andiamo alla dimostrazione della proprietà.
Incominciamo a dimostrare che M≥60°. Al riguardo supponiamo che sia n il massimo numero di angoli di una faccia del poliedro (ovviamente n≥3). Siccome la somma delle ampiezze degli angoli di una tale faccia è (n–2)·180°, la loro media aritmetica è: $M=\frac{n-2}{n}\,180°$.
Ora, constatato che $\frac{n-2}{n}=1-\frac{2}{n}$, possiamo osservare che se n>m risulta $1-\frac{2}{n}>1-\frac{2}{m}$. Siccome per n=3 si ha $\frac{n-2}{n}=\frac{1}{3}$, la media aritmetica M delle ampiezze degli angoli delle facce del poliedro è almeno 180°/3=60°. Come dire: M≥60°.
Passiamo adesso alla seconda parte della proprietà: dimostrare che M<120°. Osserviamo anzitutto che la somma degli angoli che confluiscono in uno stesso vertice del poliedro è certamente minore di 360°. Siccome in uno stesso vertice del poliedro confluiscono almeno 3 angoli, la media aritmetica μ delle ampiezze degli angoli che confluiscono in uno stesso vertice del poliedro è tale che $\mu<\frac{360°}{3}$, vale a dire μ<120°. Supponiamo adesso che sia h il numero dei vertici del poliedro e sia k il numero complessivo degli angoli delle sue facce. Di questi k angoli siano

- k_1 quelli che confluiscono nel vertice V_1;
- k_2 quelli che confluiscono nel vertice V_2;
- ……………. ;
- k_h quelli che confluiscono nel vertice V_h.

Ovviamente $k_1+k_2+\ldots+k_h=k$. Indicata ora con S_i (i=1,2,…,h) la somma delle ampiezze degli angoli che confluiscono nel vertice V_i e detta M_i la loro media aritmetica, si ha evidentemente:

$$M_i=\frac{S_i}{k_i} \quad \text{con } i=1,2,\ldots,h\,.$$

Siccome ciascuna di queste medie è minore di 120°, come visto poco sopra, risulta:

$$\frac{S_i}{k_i}<120°\,, \quad \text{vale a dire:} \quad S_i<k_i\cdot 120°\,,$$

ovvero, scritto per esteso:

$$S_1<k_1\cdot 120°\,,\ \ S_2<k_2\cdot 120°\,,\ \ \ldots\,,\ \ S_h<k_h\cdot 120°\,.$$

Da qui, sommando membro a membro, segue:

$$S_1+S_2+\ldots+S_h<(k_1+k_2+\ldots+k_h)\cdot 120° \quad \text{ossia:} \quad S<k\cdot 120°\,,$$

essendo S la somma delle ampiezze degli angoli delle facce del poliedro. Pertanto:

$$\frac{S}{k}<120°\,,\ \text{ o anche: } \ M<120°\,.$$

In definitiva, come si voleva dimostrare: $60°\leq M<120°$.

4. Le facce laterali e la base di una piramide quadrangolare regolare sono poligoni equivalenti.
a) Dimostrare che l'apotema della piramide è lungo il doppio dello spigolo di base.
b) Calcolare l'area totale e il volume della piramide, sapendo che la sua altezza è h.
c) Spiegare che esistono sia la sfera inscritta nella piramide sia quella circoscritta e calcolare i raggi delle due sfere in funzione di h.

$$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)} \ldots;\ \text{b)}\ \frac{4}{3}h^2,\ \frac{4}{45}h^3;\ \text{c)}\ \frac{1}{5}h\,,\frac{17}{30}h\right]$$

5. Il raggio di una sfera aumenta del 10%.
a) Calcolare gli aumenti percentuali dell'area della superficie sferica e del volume della sfera.
b) Se al posto della sfera si prende un cubo e ogni suo spigolo aumenta del 10% la propria lunghezza, gli aumenti percentuali dell'area totale e del volume del cubo cambiano rispetto a quelli della sfera?
c) E se solamente 4 spigoli aventi la medesima direzione aumentano del 10% la loro lunghezza, quali sono gli aumenti percentuali dell'area totale e del volume del solido ottenuto?

[**R.** a) 21%, 33,1%; b) … ; c) …]

6. Un trapezio isoscele, ruotando di un giro completo intorno alla base maggiore, genera il solido S' e, ruotando di un giro completo intorno alla base minore, genera il solido S".
a) Fornire una descrizione completa dei due solidi.
b) Spiegare se i due solidi sono equivalenti o se non lo sono e, in quest'ultimo caso, quale dei due ha volume maggiore.

7. È dato un tetraedro regolare. Dimostrare che:
a) il solido avente per vertici i punti medi dei suoi spigoli è un ottaedro regolare;
b) il volume dell'ottaedro è la metà del volume del tetraedro.

8. Sia k la circonferenza intersezione del piano α con la superficie sferica Σ. Sia poi ABCD un quadrato di lato a inscritto nella circonferenza k. Siano infine P e Q i punti in cui la superficie sferica è intersecata dalla retta r, condotta perpendicolarmente al piano α nel centro della circonferenza k. Sapendo che il volume della piramide, avente vertice in P e per base il quadrato ABCD, è uguale a $\frac{2}{3}a^2b$, essendo a, b lunghezze assegnate, trovare i valori del rapporto a/b per i quali:
a) questa piramide ha volume maggiore della piramide avente la stessa base e vertice in Q;

b) il volume della sfera è $\frac{9}{16}\pi a^3$.

[**R.** a) $a/b<2$; b) $a/b=1, a/b=2$].

9. È dato il parallelepipedo rettangolo ABCDEFGH nel quale lo spigolo AE è lungo h.

a) Determinare un piano contenente lo spigolo AD, il quale intersechi la faccia BCGF secondo il segmento PQ, e un piano contenente lo spigolo FG, il quale intersechi la faccia ADHE secondo il segmento RS, in modo che questi due piani ed il piano PQSR dividano il parallelepipedo in 4 parti equivalenti (Fig. N5a)

b) Determinare un piano α contenente lo spigolo AD e un piano β contenente lo spigolo FG, in modo che questi due piani dividano il parallelepipedo in 3 parti equivalenti (Fig. N5b)

c) Sapendo che, sia nel caso (a) sia nel caso (b), la base ABCD del parallelepipedo è un quadrato e l'angolo dei piani ADQP e ABCD misura 45°, calcolare il volume del parallelepipedo.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)} \ldots;\ \text{b)}\ BP=\frac{2}{3}h, \ldots;\ \text{c)}\ \frac{1}{4}h^3, \frac{4}{9}h^3\right]$

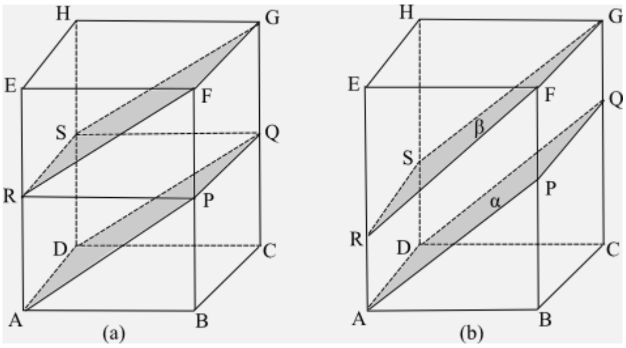


FIG. N5

10. Un serbatoio, lungo L, ha la forma schematizzata in figura (Fig. N6). La sua sezione con un qualsiasi piano perpendicolare alla direzione della lunghezza è un segmento parabolico la cui base, lunga 2a, è perpendicolare all'asse di simmetria della parabola, mentre la distanza del vertice della parabola dalla base è b. L, a, b sono lunghezze note. Nel serbatoio è contenuto del gasolio fino ad un'altezza h rispetto al piano d'appoggio.

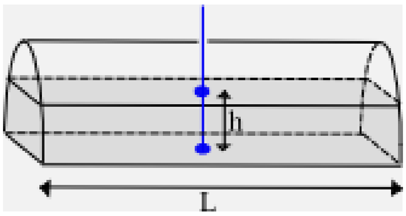


FIG. N6

Trovare:

a) la funzione $V=V(h)$ che esprime il volume del serbatoio per mezzo di h;

b) la relazione che lega a e b nel caso in cui il volume di gasolio contenuto nel serbatoio è uguale a $L\left(4-\sqrt{2}\right)$ ed $h=b/2$;

c) il valore di h per il quale la quantità di gasolio contenuta nel serbatoio è esattamente la metà della quantità massima che il serbatoio medesimo può contenere.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ V(h)=\frac{4}{3}a\,L\left(b-\sqrt{\frac{(b-h)^3}{b}}\right),\ \text{con}\ 0\leq h\leq b;\ \text{b)}\ ab=3;\ \text{c)}\ h=\frac{b}{2}\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\right]$

U57 – Formula di Bayes

Lewis Carroll, pseudonimo dello scrittore, logico e matematico inglese Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), è celebre principalmente per due famose opere: *Alice nel paese delle meraviglie* (1865) e *Attraverso lo specchio* (1871). Ma egli fu autore anche di opere di logica e di matematica. Una di queste porta il titolo *Problemi del cuscino* (1893). Si tratta di 72 problemi che Carroll sostiene di aver risolto mentalmente mentre giaceva insonne nel proprio letto. Che questo sia vero o che si tratti di una storia inventata, quello che è certo è che i problemi proposti da lui sono veramente interessanti e stimolanti, in particolare quelli di probabilità. Ed è ad essi che ci siamo ispirati per formulare in questo paragrafo alcuni problemi per la risoluzione dei quali è utile la formula di Bayes.

1. Sono disponibili 2 urne e 5 palline, di cui 3 bianche e 2 nere. Si vogliono distribuire le palline tra le 2 urne in modo che, scelta un'urna a caso ed estratta a caso da essa una pallina, sia massima la probabilità che questa sia bianca.

a) Verificare che la distribuzione con cui si consegue lo scopo è di introdurre una pallina bianca in un'urna e le rimanenti palline nell'altra.

b) Verificare inoltre che fornisce la minima probabilità di estrarre pallina bianca la distribuzione in base alla quale tutte le palline sono introdotte in una sola urna e, poi, come prima, si sceglie a caso una delle due urne e da essa si estrae, sempre a caso, una pallina.

c) Si ammetta che la distribuzione delle palline fra le due urne sia quella che assicura la massima probabilità di estrarre una pallina bianca. Scelta allora un'urna a caso ed estratta da essa, sempre a caso, una pallina, si constata che è bianca. Calcolare la probabilità che provenga dall'urna che contiene solamente una pallina bianca.

[**R.** … ; c) 2/3]

2. (Dal n° 72 di Carroll) PROBLEMA RISOLTO. Un'urna contiene 2 palline, ciascuna delle quali può essere bianca o nera. Non si sa altro.

a) Qual è la probabilità di estrarre dall'urna una pallina bianca? Quale quella di estrarre una pallina nera?

b) Qual è la composizione dell'urna? In altri termini, le due palline contenute in essa sono entrambe bianche, entrambe nere o una bianca e l'altra nera?

RISOLUZIONE. In realtà questo problema può essere risolto senza ricorrere alla formula di Bayes, ma è ugualmente interessante, anche per quelli che seguono.

Incominciamo a constatare che ognuna delle due palline ha probabilità $1/2$ di essere bianca e uguale probabilità di essere nera. Se ne desume che la probabilità che nell'urna ci siano 2 palline bianche è $1/4$, uguale a quella che ci siano 2 palline nere, mentre la probabilità che le due palline siano una bianca e una nera è $1/2$.

A questo punto siamo in grado di calcolare la probabilità di estrarre dall'urna una pallina bianca, $p(B)$, e quella di estrarre una pallina nera, $p(N)$. Si ha precisamente:

$$p(B)=p(BB)\cdot p(B|BB)+p(NN)\cdot p(B|NN)+p(BN)\cdot p(B|BN)=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ ;\quad p(N)=\frac{1}{2}\ .$$

Questa situazione si verifica però solamente nel caso in cui nell'urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Infatti, se ci fossero due palline bianche si avrebbe: $p(B)=1$ e $p(N)=0$; e se ci fossero due palline nere si avrebbe: $p(B)=0$ e $p(N)=1$.

3. Nell'urna U è contenuta una sola pallina, che è bianca; nell'urna V sono contenute due palline, ciascuna delle quali può essere bianca o nera; nell'urna W sono contenute tre palline, di cui una bianca e due nere. Si sceglie un'urna a caso e da essa si estrae una pallina a caso: si constata che è bianca. a) Qual è la probabilità che provenga dall'urna U ? b) Quale che provenga dall'urna V ? c) Quale infine che provenga dall'urna W ?

$\left[\mathbf{R.}\ \ a)\ \frac{6}{11}\ ,\ \ b)\frac{3}{11}\ ,\ \ \ldots\right]$

4. (Dal n° 5 di Carroll) PROBLEMA RISOLTO. Un'urna contiene una pallina, che può essere bianca o nera. S'introduce nell'urna una pallina bianca e, a questo punto, si estrae a caso una pallina: è bianca.

a) Qual è la probabilità che nell'urna sia rimasta una pallina bianca? Quale quella che sia rimasta una pallina nera?

b) Qual è la probabilità di estrarre a questo punto una pallina bianca? Quale quella di estrarre una pallina nera?

RISOLUZIONE. La probabilità che l'unica pallina presente nell'urna sia bianca è uguale a quella che sia nera, vale a dire $1/2$. Dopo aver introdotto nell'urna una pallina bianca, nell'urna ci sono o 2 palline bianche (probabilità $1/2$) o una pallina bianca e una pallina nera (probabilità $1/2$). Quindi la probabilità di estrarre dall'urna una pallina bianca è adesso:

$$\mathrm{p(B)} = \mathrm{p(BB)} \cdot \mathrm{p(B|BB)} + \mathrm{p(BN)} \cdot \mathrm{p(B|BN)} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Un diagramma (Fig. N7) aiuta a capire meglio la situazione (un diagramma analogo sarebbe potuto servire per risolvere l'esercizio 2a). Si sa però che la pallina estratta è bianca e bisogna valutare qual è la probabilità che nell'urna sia rimasta una pallina bianca o che sia rimasta una pallina nera. Ciò equivale in sostanza a stabilire qual è la probabilità che la pallina bianca estratta provenga dalla situazione BB oppure che provenga dalla situazione BN. A ciò soccorre la formula di Bayes:

$$\mathrm{p(BB|B)} = \frac{\mathrm{p(B|BB)} \cdot \mathrm{p(BB)}}{\mathrm{p(B)}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\,, \quad \mathrm{p(BN|B)} = 1 - \mathrm{p(BB|B)} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

In conclusione, dopo aver introdotto nell'urna una pallina bianca ed aver successivamente estratto da essa una pallina bianca, la probabilità che nell'urna sia rimasta una pallina bianca è $2/3$, quella che sia rimasta una pallina nera è $1/3$.

Di conseguenza, a questo punto in maniera del tutto banale, la probabilità di estrarre dall'urna pallina bianca è 2/3, quella di estrarre pallina nera è 1/3

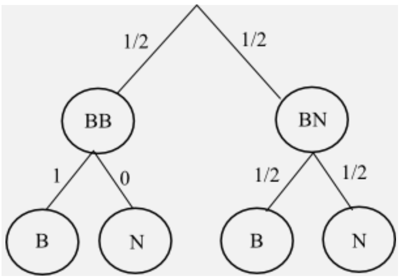


FIG. N7

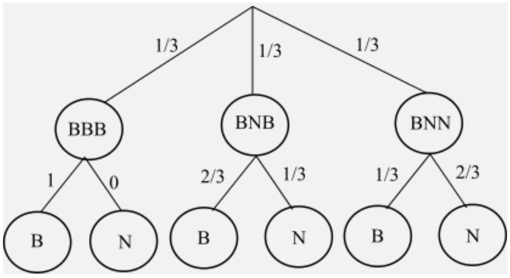


FIG. N8

5. Un'urna contiene 2 palline, ciascuna delle quali può essere bianca o nera. S'introduce nell'urna una pallina bianca e, fatto ciò, si estrae a caso una pallina: si constata che è bianca.

Qual è la probabilità che nell'urna siano rimaste due palline bianche? Quale che siano rimaste una pallina bianca e una pallina nera? Quale che siano rimaste due palline nere?

RISOLUZIONE (traccia). Ragionando più o meno come nel precedente esercizio e aiutandoci con un idoneo diagramma (Fig. N8), si trova:

$$\mathrm{p(B)} = \mathrm{p(BBB)} \cdot \mathrm{p(B|BBB)} + \mathrm{p(BNB)} \cdot \mathrm{p(B|BNB)} + \mathrm{p(NNB)} \cdot \mathrm{p(B|NNB)} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ed a seguire, mediante la formula di Bayes:

$$\mathrm{p(BBB|B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\ ; \quad \mathrm{p(BBN|B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\ ; \quad \mathrm{p(BNN|B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}.$$

Le conclusioni sono immediate.

6. (Dal n° 16 di Carroll) PROBLEMA RISOLTO. Un'urna U contiene una pallina, che può essere bianca o nera. Una seconda urna V contiene tre palline, di cui una bianca e due nere. S'introduce nell'urna U una pallina bianca e, fatto ciò, si estrae a caso da essa una pallina: è bianca. Si scommette, a questo punto, sull'estrazione di una pallina bianca e la cosa può avvenire in due modi: (1) si sceglie a caso una delle due urne e da questa si estrae, sempre a caso, una pallina; (2) si versano tutte le palline in una medesima urna è da questa si estrae a caso una pallina. Quale di queste due strategie è quella che assicura la maggiore probabilità di estrarre una pallina bianca?

RISOLUZIONE. Sappiamo, dal precedente problema 1, che dopo l'estrazione di una pallina bianca, la probabilità che nell'urna U sia rimasta una pallina bianca è $2/3$, quella che sia rimasta una pallina nera è $1/3$.

La strategia (1) porta alla seguente probabilità di estrarre una pallina bianca:

$$p_1(B) = p(U) \cdot p(B|U) + p(V) \cdot p(B|V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Con la strategia (2) bisogna valutare la composizione dell'urna dopo il rimescolamento delle palline, sia nel caso in cui nell'urna U sia rimasta pallina bianca (prob. $2/3$) sia nel caso in cui sia rimasta pallina nera (prob. $1/3$). Nel primo di questi due casi la composizione dell'urna è BBNN (stato α, prob. $2/3$), nel secondo è NBNN (stato β, prob. $1/3$). Pertanto, la probabilità di estrarre pallina bianca è adesso:

$$p_2(B) = p(\alpha) \cdot p(B|\alpha) + p(\beta) \cdot p(B|\beta) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Siccome $p_1(B) > p_2(B)$, la strategia (1) assicura la maggiore probabilità di estrarre una pallina bianca.

7. Un'urna U contiene 2 palline, ciascuna delle quali può essere bianca o nera. Una seconda urna V contiene tre palline, di cui una bianca e due nere. S'introduce nell'urna U una pallina bianca e, fatto ciò, si estrae a caso da essa una pallina: è bianca. Si scommette, a questo punto, sull'estrazione di una pallina bianca e la cosa può avvenire in due modi: (1) si sceglie a caso una delle due urne e da questa si estrae, sempre a caso, una pallina; (2) si versano tutte le palline in una medesima urna è da questa si estrae a caso una pallina. Quale di queste due strategie è quella che assicura la maggiore probabilità di estrarre una pallina bianca?

RISOLUZIONE (traccia). Sappiamo, dal precedente problema 2, che la probabilità che nell'urna U siano rimaste palline BB è $3/8$, quella che siano rimaste palline BN è $1/2$, quella infine che siano rimaste palline NN è $1/8$.

Ne consegue che la probabilità di estrarre pallina bianca dall'urna U è la seguente:

$$p(B|U) = \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot 0 = \frac{5}{8}.$$

La strategia (1) porta perciò alla seguente probabilità di estrarre una pallina bianca:

$$p_1(B) = p(U) \cdot p(B|U) + p(V) \cdot p(B|V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{23}{48}.$$

Con la strategia (2) bisogna valutare la composizione dell'urna dopo il rimescolamento delle palline, sia nel caso in cui nell'urna U siano rimaste palline BB (prob. $3/8$) sia nel caso in cui siano rimaste palline BN (prob. $1/2$), sia infine nel caso in cui siano rimaste palline NN. Nel primo di questi due casi la composizione dell'urna è BBBNN (stato α, prob. $3/8$), nel secondo è BNBNN (stato β, prob. $1/2$), nel terzo è NNBNN (stato γ, prob. $1/8$). Pertanto, la probabilità di estrarre pallina bianca è adesso:

$$p_2(B) = p(\alpha) \cdot p(B|\alpha) + p(\beta) \cdot p(B|\beta) + p(\gamma) \cdot p(B|\gamma) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{20}.$$

Siccome $p_1(B) > p_2(B)$, la strategia (1) è quella che assicura la maggiore probabilità di estrarre una pallina bianca.

8. Un'urna U contiene una pallina e un'urna V ne contiene due. Ciascuna delle tre palline può essere bianca o nera. S'introduce una pallina bianca sia nell'urna U sia nell'urna V e, ciò fatto, si estrae una pallina a caso sia dall'urna U sia dall'urna V: in entrambi i casi si constata che la pallina estratta è bianca. A questo punto si sceglie un'urna a caso e si estrae da essa, sempre a caso, una pallina.

a) Qual è la probabilità che questa pallina sia bianca? Quale quella che sia nera?

b) Constatato che la pallina estratta è bianca, qual è la probabilità che provenga dall'urna U? Quale quella che provenga dall'urna V?

c) Constatato che la pallina estratta è nera, qual è la probabilità che provenga dall'urna U? Quale quella che provenga dall'urna V?

[**R.** a) $p(B) = \frac{31}{48}$, ...; b) $p(U|B) = \frac{16}{31}$, ...; c) ...]

9. Due urne, U e V, contengono entrambe due palline, ciascuna delle quali può essere bianca o nera. S'introduce una pallina bianca nell'urna U e, a seguire, si estrae a caso da essa una pallina, che si constata essere bianca. S'introduce una pallina nera nell'urna V e, a seguire, si estrae a caso da essa una pallina, che si constata essere nera. A questo punto si sceglie un'urna a caso e si estrae da essa, sempre a caso, una pallina.

a) Qual è la probabilità che questa pallina sia bianca? Quale quella che sia nera?

b) Constatato che la pallina estratta è bianca, qual è la probabilità che provenga dall'urna U? Quale quella che provenga dall'urna V?
c) Constatato che la pallina estratta è nera, qual è la probabilità che provenga dall'urna U? Quale quella che provenga dall'urna V?

$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } p(B)=\frac{1}{2}, \ldots ; \text{b) } p(U|B)=\frac{5}{8}, \ldots ; \text{ c) } \ldots\right]$

U63 – Lo spazio cartesiano

1. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), è assegnato il punto $A(2,3,4)$.
a) Rappresentare graficamente il parallelepipedo rettangolo avente O ed A come vertici opposti e scrivere le coordinate degli altri suoi vertici.
b) Trovare le equazioni parametriche della retta OA.
c) Indicati con H il centro del parallelepipedo e con B l'altro suo vertice, distinto da O, situato sull'asse z, trovare l'equazione del piano α individuato dalle rette OA e BH.
d) Trovare le equazioni del piano β e della retta r, entrambi passanti per H ed entrambi perpendicolari al piano α, e verificare che la retta r è contenuta nel piano β.

2. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati i punti $A(3\sqrt{3}, 3, 0)$, $B(3\sqrt{3}, -3, 0)$, $C(0, 0, 9)$.
a) Verificare che il triangolo OAB è equilatero.
b) Condotta per il centro di questo triangolo la retta r, parallela ad AB, siano M ed N i punti in cui essa interseca rispettivamente le rette OA e OB: determinare le coordinate di M ed N.
c) Condotta per la retta r il piano perpendicolare al piano del triangolo OAB, siano P e Q i punti in cui esso interseca rispettivamente le rette CA e CB: determinare le coordinate di P e Q.
d) Trovare l'equazione del piano OPQ e la distanza di C da tale piano.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } \ldots ; \text{ b) } M(2\sqrt{3}, 2, 0), N(2\sqrt{3}, -2, 0); \text{ c) } \ldots ; \text{ d) } 3x-2\sqrt{3}z=0, \frac{6}{7}\sqrt{63}\right]$

3. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati i punti $A(1,1,0)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,0,1)$.
a) Determinare un punto P equidistante dai punti O, A, B, C.
b) Preso un ulteriore punto $D(1,0,1)$, dimostrare che non esiste un punto equidistante dai punti O, A, B, C, D.
c) Dimostrare che i punti A, B, C, D sono complanari o, viceversa, dimostrare che non lo sono.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a) } P\left(0,1,\frac{1}{2}\right), \text{ b) } \ldots\right]$

4. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), è assegnato il piano α di equazione:

$$x-2y-2z+9=0\,.$$

a) Trovare l'equazione della sfera avente il centro in O e tangente al piano α.
b) Indicati con V il punto in cui il piano α tocca la sfera e con A, B, C i punti in cui la sfera interseca i semiassi positivi Ox, Oy, Oz, spiegare perché il punto V appartiene al piano dei punti A, B, C o, viceversa, spiegare perché non vi appartiene.
c) Calcolare infine il volume della piramide avente vertice in O e per base il triangolo ABC.

[**R.** a) $x^2+y^2+z^2-9=0$, b)…; c)…]

5. PROBLEMA (parzialmente risolto). Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati:

il punto $A(1,0,2)$, il vettore $\vec{v}(2,1,1)$, la retta r di equazioni $\{x+y+1=0,\ 2x-y+z=0\}$.

a) Trovare le equazioni della retta s passante per A e parallela a $\vec{v}$.
b) Trovare l'equazione del piano α passante per A e parallelo al vettore $\vec{v}$ e alla retta r.
c) Verificare che la retta s è contenuta nel piano α.

RISOLUZIONE (parziale). Vogliamo soffermarci sul punto b) per un paio di considerazioni.

Una prima considerazione riguarda la condizione di parallelismo tra il piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ e il vettore di componenti (v_x,v_y,v_z). Ebbene, condizione necessaria e sufficiente affinché il piano e il vettore siano paralleli è che risulti: $av_x+bv_y+cv_z=0$.

Imponendo allora che il piano soddisfi alle condizioni poste, si ottengono le seguenti equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$a+2c+d=0,\quad 2a+b+c=0,\quad a-b-3c=0.$$

Ricavando tre di esse (per esempio: b, c, d) in funzione di a, si trova:

$$b=-\frac{7}{2}a,\quad c=\frac{3}{2}a,\quad d=-4a.$$

L'equazione del piano è pertanto: $2x-7y+3z-8=0$.

La seconda considerazione che andiamo a fare riguarda un altro modo di pervenire a quest'equazione. Al riguardo, associamo alle tre precedenti equazioni nelle incognite a, b, c, d l'equazione $ax+by+cz+d=0$ del piano. Si ottiene il seguente sistema nelle incognite a, b, c, d:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a+\qquad 2c+d=0 \\ 2a+b+c\qquad =0 \\ a-b-3c\qquad =0 \end{cases}$$

Fermiamo l'attenzione sul determinante D del sistema:

$$D=\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Se fosse $D\neq 0$ il sistema sarebbe determinato ma ammetterebbe l'unica soluzione $a=b=c=d=0$, non accettabile dal momento che i parametri a, b, c, d non possono essere contemporaneamente nulli. Ne discende che deve essere D=0, vale dire:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

È questa l'equazione del piano, come chi legge può facilmente verificare. Cosa che può esser fatta rapidamente con un idoneo software matematico, ma anche con carta e penna non è complicato.

ATTENZIONE. Ad un'equazione del medesimo tipo si perviene in situazioni analoghe, nelle quali si deve determinare l'equazione $ax+by+cz+d=0$ di un piano che soddisfi a tre condizioni che si traducano in equazioni lineari nei parametri a, b, c, d, come per esempio:

- piano passante per tre punti,
- piano passante per un punto e parallelo a due rette,
- piano passante per due punti e parallelo ad una retta,
- piano passante per due punti e perpendicolare ad un piano, eccetera.

U64 / U65 / U66 / U67 / U68 – Calcolo differenziale

1. Si può calcolare facilmente che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2}=1\,.$$

Verificare il limite ricorrendo alla definizione.

2. Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=+\infty\,.$$

Un idoneo software matematico mostra che esso è uguale a $+\infty$.

a) Eseguire i vari passaggi idonei al calcolo. b) Verificare il limite ricorrendo alla definizione.

3. Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{per} \quad x\le 2 \\ \dfrac{1}{2}x^2-bx & \text{per} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Verificare se è derivabile o no in tutto il suo dominio per i seguenti valori dei parametri a, b:

(1) $a=b=0$; (2) $a=-2, b=0$.

b) Dimostrare che esiste una coppia di valori reali a, b o, viceversa, che non esiste alcuna coppia siffatta, tale che la funzione sia derivabile per ogni x reale.

4. Si prenda in esame la funzione reale di variabile reale $f(x)=x$, continua e derivabile su $\mathbb{R}$.. Si può constatare che si ha: $f\big(f(x)\big)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Trovare altre due funzioni reali di variabile reale che soddisfano alla medesima condizione – vale a dire $f\big(f(x)\big)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ – entrambe continue su $\mathbb{R}$, ma una derivabile e una non derivabile.

5. La curva k disegnata nella figura sottostante (Fig. N9) è il grafico di un polinomio nell'indeterminata x e mostra, fra l'altro, che nell'origine O del sistema di riferimento k presenta un flesso con tangente l'asse x.

a) Qual è il grado minimo di questo polinomio?

b) Si ammetta che il grado minimo trovato sia esattamente il grado del polinomio. Determinare il polinomio sapendo inoltre che la curva k è simmetrica rispetto all'origine O, passa per il punto $A\big(\sqrt{5},0\big)$ e presenta nel punto B un massimo relativo uguale a $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

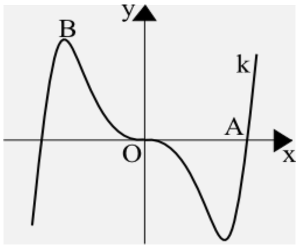


FIG. N9

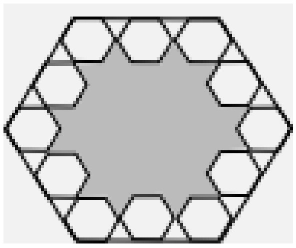


FIG. N10

6. Si consideri un esagono regolare di lato unitario. Si costruiscano, su ogni lato ed internamente al poligono, n esagoni regolari uguali in modo che, presi due a due, abbiano un vertice in comune (Fig. N10 – dove n=3).

a) Determinare la lunghezza del lato degli esagoni così costruiti.

b) Calcolare l'area A_n della porzione di piano esterna agli esagoni così costruiti e delimitata da essi (è ombreggiata in figura).

c) Calcolare il limite di A_n quando $n\to\infty$.

d) Al valore del limite si può pervenire anche intuitivamente con considerazioni di carattere geometrico: in che modo?

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ \frac{1}{2n-1},\quad \text{b)}\ A_n=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4n^2-11n+8}{(2n-1)^2},\ \dots\right]$$

7. PROBLEMA RISOLTO (parzialmente). Nella figura sottostante (Fig. N11) è disegnato il grafico di una funzione reale di variabile reale f(x).

La funzione è continua nell'intervallo [0,9] e del grafico sono evidenziati alcuni punti e precisamente:

- in ciascuno dei punti A e G il grafico ha come tangente una retta parallela all'asse y;
- il punto B è un punto di minimo relativo, mentre il punto F è un punto di massimo relativo;
- il punto E è un punto di flesso con tangente parallela all'asse x.
- nel punto C la tangente sinistra ha equazione $3x-y-4=0$ e nel punto D la tangente destra ha equazione $2x-y-8=0$;
- il tratto CD è un segmento di retta, mentre la funzione è derivabile sia nell'intervallo]0,3[sia nell'intervallo]4,9[.

Fornire una rappresentazione grafica indicativa delle seguenti funzioni:

$$f'(x), \quad |f'(x)|, \quad \frac{1}{f(x)}.$$

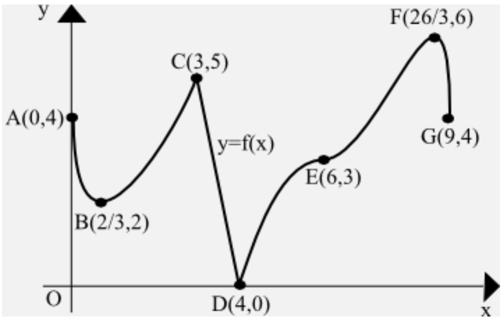


FIG. N11

RISOLUZIONE (Traccia). Se della funzione f(x) si conoscesse la sua espressione analitica, si potrebbero calcolare sia $f'(x)$ sia $\frac{1}{f(x)}$ e studiare queste funzioni per tracciarne l'andamento. Ma così non è. Ragion per cui dobbiamo percorrere altre strade.

- Riguardo alla funzione $f'(x)$ basta ricordarne il significato geometrico. Un andamento indicativo di questa funzione è rappresentato in figura N11A.
- Per quanto attiene alla funzione $|f'(x)|$, è sufficiente ribaltare intorno all'asse x i tratti del grafico di $f'(x)$ che stanno al di sotto dell'asse x (Fig. N11B).
- Riguardo infine al grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$, basta trovare alcuni punti critici, utilizzando quelli forniti dal testo del problema ed in particolare:

$$\left(0,\frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right), \quad \left(3,\frac{1}{5}\right), \quad \left(6,\frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{26}{3},\frac{1}{6}\right), \quad \left(9,\frac{1}{4}\right)$$

e tener presenti alcuni fatti importanti:

– $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$ per $x \to 4$;

– essendo $D_x \frac{1}{f(x)} = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$, la funzione $\frac{1}{f(x)}$ è derivabile negli stessi intervalli in cui lo è f(x), eccezion fatta per i punti in cui f(x)=0, ed ha derivata nulla, positiva o negativa negli stessi punti in cui è rispettivamente nulla, negativa o positiva la derivata di f(x); per cui nei punti in cui f(x) è massima o minima, 1/(f(x)) è rispettivamente minima o massima ;

Un andamento intuitivo di questa funzione è rappresentato in figura N11C.

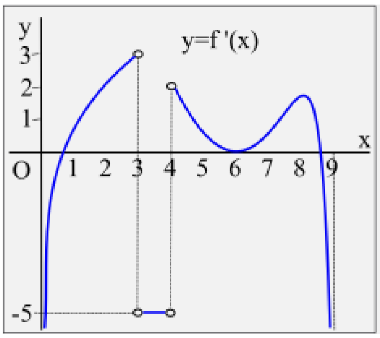


FIG. N11A

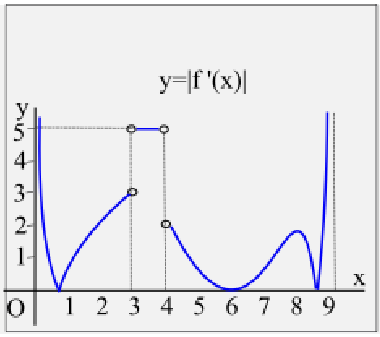


FIG. N11B

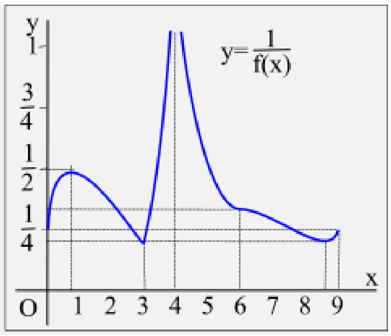


FIG. N11C

Una spiegazione più dettagliata ed esauriente delle rappresentazioni grafiche delle tre funzioni è lasciata a chi legge.

Al lettore medesimo proponiamo poi di risolvere il seguente problema.

È assegnata la seguente funzione:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{per} \quad 0\le x\le 3\\ 10-2x & \text{per} \quad 3<x\le 5\\ -(x-5)^2 & \text{per} \quad 5<x\le 7\end{cases}$$

Dopo averne disegnato l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), utilizzare tale andamento e le informazioni che si possono ottenere dall'espressione analitica di f(x) per fornire una rappresentazione grafica indicativa delle seguenti funzioni:

$$f'(x), \quad |f'(x)|, \quad \frac{1}{f(x)}.$$

Utilizzare successivamente la forma analitica della funzione f(x) per determinare le espressioni analitiche di queste tre funzioni e, dopo averne tracciato gli andamenti, eventualmente con l'uso di un idoneo software matematico, verificare che "assomigliano" a quelli ottenuti intuitivamente.

COMPLEMENTI. Con ragionamenti simili a quelli descritti sopra, si possono ottenere rappresentazioni grafiche indicative delle seguenti funzioni:

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

note le rappresentazioni grafiche di f(x) e g(x). Si tratta, infatti: a) di trovare le coordinate di alcuni punti critici effettuando l'operazione idonea allo scopo: un'addizione, una sottrazione, una moltiplicazione, una divisione; b) di tener presente fatti fondamentali suggeriti dall'analisi matematica

In realtà, se il procedimento è abbastanza agevole nel caso delle prime due operazioni, lo è un po' meno negli altri due casi.

Il lettore può verificare quanto testé detto per disegnare dapprima intuitivamente le funzioni:

$$(x^2-1)+(x+2), \quad (x^2-1)-(x+2), \quad (x^2-1)(x+2), \quad \frac{x^2-1}{x+2},$$

s'intende dopo aver disegnato i grafici delle funzioni x^2-1 e $x+2$. E può controllare successivamente la bontà dei risultati ottenuti disegnando i grafici delle stesse funzioni utilizzando le loro espressioni analitiche.

U72 / U73 / U74 / U76 – Calcolo integrale

1. È assegnata la funzione seguente:

$$\text{(a)}\ f(x)=x^2(x+1)^{50}\,; \qquad \text{(b)}\ f(x)=(\ln x)^2.$$

Un idoneo software matematico fornisce una sua primitiva F(x):

$$\text{(a')}\ F(x)=\frac{(x+1)^{51}}{70.278}(1326\,x^2-51\,x+1)\ ; \qquad \text{(b')}\ F(x)=x(\ln x)^2-2\,x\ln x+2\,x\,.$$

Eseguire i passaggi idonei a spiegare tale risultato, utilizzando al più una calcolatrice non programmabile.

2. La sezione verticale di un tunnel, lungo 50 m, ha, per tutta la sua lunghezza, la sagoma disegnata in figura (Fig. N12). Le misure dei segmenti AB, BC, BD, espresse in metri, sono tali che AB=BC=π e BD=$3\sqrt{2}$.

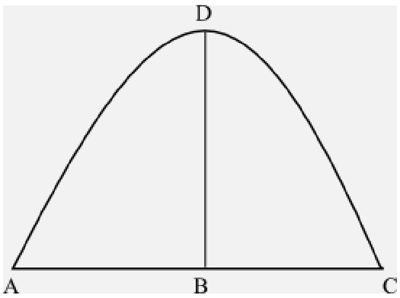


FIG. N12

a) Dopo aver riferito il piano della figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente l'origine nel punto A e l'asse x coincidente con la retta AB orientata da A verso B, individuare quale fra le seguenti funzioni descrive la sagoma sopraddetta nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$f(x) = 3\sqrt{2}\sin(x - 2\pi)\ ,\quad f(x) = 3\sqrt{1 - \cos x}\ ,\quad f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}x(x - 2\pi)\ .$$

b) Individuata la funzione giusta, calcolare un valore approssimato dell'area della sezione verticale del tunnel, utilizzando il metodo dei trapezi relativo ad una suddivisione dell'intervallo $[0, 2\pi]$ in 8 parti uguali.

c) Utilizzare il risultato trovato sopra per calcolare un valore approssimato del volume del tunnel, spinto fino ai decimetri cubi.

d) Considerato che il valore esatto del volume del tunnel è $600\sqrt{2}\ \mathrm{m}^3$, calcolare quale errore relativo si commette nell'assumere per vero il valore approssimato trovato sopra.

e) Si ipotizzi che nel tunnel debba passare un treno che viaggia su rotaie parallele ed equidistanti dalla linea di mezzeria del tunnel. Posto che la larghezza massima del treno sia di $2{,}8\ \mathrm{m}$ determinare la distanza massima del tetto del treno rispetto al suolo, approssimata ad 1 dm.

[N.B.: È consentito l'uso di una calcolatrice non programmabile né grafica. Può essere tuttavia usato un idoneo software matematico per controllare la correttezza dei risultati ottenuti]

[**R.** a) … ; b) $\approx 16{,}7519\ \mathrm{m}^2$; c) … ; d) $\approx 1{,}3\%$; e) $\approx 3{,}2\ \mathrm{m}$]

3. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazioni:

$$y = x^2 + 2\ln x \quad e \quad y = x^2 - 2\ln x\ .$$

a) Disegnarle sullo stesso piano dopo aver determinato, fra l'altro, gli eventuali asintoti rettilinei e gli eventuali punti comuni, punti di massimo o minimo relativi, punti di flesso e relative tangenti inflessionali.

b) Dimostrare che la regione piana compresa fra le due curve e l'asse y ha un'area finita o, viceversa, dimostrare che ha un'area infinita.

c) Calcolare infine il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta di equazione x=2 quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

[**R.** … ; c) $32\pi((\ln 2)^2 - \ln 4 + 1)$]

4. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C' e C" di equazioni rispettivamente:

$$y = \frac{1}{27}x^3,\qquad y = \frac{1}{4}x^2\ .$$

a) Trovare un punto P sulla curva C' e un punto Q sulla curva C" in modo che la retta PQ sia parallela all'asse y, le ascisse dei due punti appartengano all'intervallo $\left[0, \frac{27}{4}\right]$ e la loro distanza sia massima.

b) Calcolare quindi le aree delle due porzioni in cui la retta PQ divide la regione finita di piano delimitata dalle due curve.

5. Esercizio risolto. È noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

a) Stabilire se il numero reale u, tale che $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}dx = 1$ è positivo oppure negativo.

b) Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2}dx\ ,\quad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2}dx\ ,\quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}dx\ .$$

[Tratto dall'esame di Stato 2016, sessione ordinaria, indirizzo scientifico]

Risoluzione.

a) La funzione integranda è simmetrica rispetto all'asse y del sistema di riferimento cartesiano (Oxy). E siccome è integrabile su ℝ, ne consegue che, appunto per ragioni di simmetria, è:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}8\ .$$

Il numero reale u, di cui alla traccia, deve essere pertanto maggiore di 0.

b) Circa il calcolo degli integrali proposti:

- Riguardo all'integrale A, siccome sia la funzione integranda, integrabile su ℝ, sia gli estremi d'integrazione sono simmetrici rispetto all'origine O, il suo valore è 0.
- Per il calcolo dell'integrale B bisogna tener presente che, per ragioni di simmetria (rispetto all'asse y), si ha:

$$B=\int_{-u}^{u}e^{-x^2}dx=2\int_{0}^{u}e^{-x^2}dx=2\left\{\int_{-\infty}^{u}e^{-x^2}dx-\int_{-\infty}^{0}e^{-x^2}dx\right\}=2\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=2-\sqrt{\pi}\,.$$

- Infine, per il calcolo dell'integrale C, posto $t=x\sqrt{5}$, da cui segue: $dx=dt/\sqrt{5}$, si ottiene:

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-5x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5\pi}}{5}\,.$$

6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y=x^4+ax^3+bx^2+1\,,$$

dove a, b sono parametri reali.

a) Determinare, fra tali curve, la curva K che ha in comune con l'asse x due soli punti di ascisse razionali e disegnarne l'andamento.

b) Determinare quindi una retta r, parallela all'asse x, sulla quale la curva K intercetti tre segmenti di uguale lunghezza e calcolare tale lunghezza.

c) Calcolare infine le aree delle regioni finite di piano delimitate dalla curva K e dalla retta r.

[**R.** a) $y=x^4-2x^2+1$, b) $y=\frac{16}{25}, \frac{2}{5}\sqrt{5}$, c) ...]

7. PROBLEMA RISOLTO. È data la successione di termine generale $b_n(k)$ tale che:

$$b_n(k)=1^k+2^k+\cdots+n^k=\sum_{i=1}^{n}i^k\,,$$

essendo n un intero positivo e k un numero reale positivo.

Dimostrare che la successione di termine generale $a_n(k)=\frac{b_n(k)}{n^{k+1}}$ converge al valore $\frac{1}{k+1}$, vale a dire che si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}i^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{1+k}\,.$$

DIMOSTRAZIONE.

Prima di andare ad una dimostrazione generale (valida cioè per ogni k reale positivo), osserviamo che lo studente dovrebbe essere in grado di effettuare tale dimostrazione nei casi particolari k=1, k=2, k=3. Affidiamo a lui questo compito e andiamo ad occuparci del caso generale. Non prima di aver precisato che di dimostrazioni ne esistono diverse e che noi ne proporremo una che utilizza il concetto di sottografico di una funzione e il teorema del confronto.

Incominciamo allora ad osservare che i punti di coordinate (i,i^k), con i=1,2,...,n, si trovano sulla curva di equazione $y=x^k$. Disegniamo questa curva in un riferimento cartesiano (Oxy), per comodità non monometrico (Fig. N13).

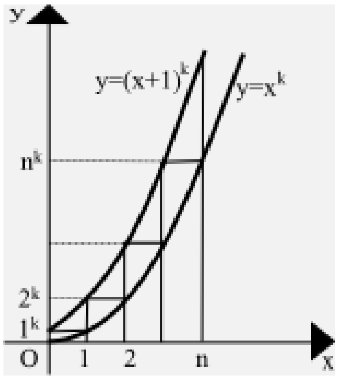


FIG. N13

Possiamo constatare che il plurirettangolo, formato dagli n rettangoli aventi come basi gli intervalli $[i-1, i]$, tutti di ampiezza 1, e come altezze i^k, ha area non minore dell'area del sottografico della funzione $y=x^k$, relativa alla base $[0, n]$. Vale a dire:

$$\int_0^n x^k\,dx \le \sum_{i=1}^n i^k .$$

D’altra parte, se si considerano i vertici liberi (cioè non situati sull’asse x né sulla curva di equazione $y=x^k$) dei rettangoli che formano il plurirettangolo suddetto, le cui coordinate sono $\left(i,\,(i+1)^k\right)$, con $i=0,1,2,\dots,n-1$, è evidente che essi sono situati sulla curva di equazione $y=(x+1)^k$. Disegnata anche questa curva nello stesso piano (Fig. 3), possiamo constatare che l’area del plurirettangolo, questa volta, non supera quella del sottografico della funzione $y=(x+1)^k$, relativa alla base $[0,n]$. Vale a dire:

$$\sum_{i=1}^n i^k \le \int_0^n (x+1)^k\,dx .$$

Si ha dunque la seguente relazione:

$$\int_0^n x^k\,dx \le \sum_{i=1}^n i^k \le \int_0^n (x+1)^k\,dx$$

da cui, una volta calcolati i semplici integrali definiti che vi compaiono, segue:

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} \le \sum_{i=1}^n i^k \le \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}$$

e quindi, dividendo tutto per n^{k+1}:

$$\frac{1}{k+1} \le \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{k+1} \le \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1}}{k+1} .$$

Siccome le due successioni fra le quali è compresa la successione $a_n(k)$ convergono entrambe al valore $1/(k+1)$, allora, in virtù del teorema del confronto, anche la successione $a_n(k)$ converge allo stesso valore. In definitiva, come volevamo dimostrare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{1+k} .$$

8. È data la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} ,$$

essendo n un numero naturale. Dimostrare che converge al valore $\ln 2$, vale a dire che si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \ln 2 .$$

[AVVERTENZA. Una dimostrazione è del tutto simile a quella esposta nel precedente esercizio]

9. Si consideri la funzione $f(x)=x(1-x)^{20}$.

A) Al fine della sua rappresentazione grafica in un piano cartesiano ortogonale (Oxy):
   1. studiarne il segno;
   2. trovare i suoi punti di massimo e/o di minimo relativi e i suoi punti di flesso.

B) 1. Determinare la funzione $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.
   2. Calcolare l’area sotto il grafico della funzione relativamente all’intervallo [0,1].

Il tutto va fatto senza ricorrere a strumenti di calcolo automatico, che tuttavia possono essere utilizzati per verificare la correttezza dei risultati ottenuti.

9. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la parabola p e la retta r di equazioni rispettivamente:

$$y = 2x - x^2, \quad y = mx,$$

dove m è un parametro reale.

a) Calcolare l'area $A=A(m)$ del segmento parabolico delimitato dalla parabola e dalla retta e disegnarne l'andamento al variare di m.
b) Dimostrare che per due valori di m l'area A è uguale a $125/48$.
c) Per il più piccolo dei due valori di m così trovati il segmento parabolico corrispondente, ruotando di un giro completo intorno all'asse y, genera un solido: calcolarne il volume.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ldots;\ \text{b)}\ A(m)=\frac{1}{6}|2-m|^3;\ \text{c)}\ldots;\ \text{d)}\ \frac{137}{96}\pi\right]$

10. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve P_a e C_a di equazioni rispettivamente:

$$y=-\frac{1}{2}x^2+ax\,,\qquad y=\frac{1}{6}x^3-x^2+\left(a+\frac{1}{3}\right)x\,,$$

dove a è un parametro reale.

A) 1. Dimostrare che, indipendentemente dal valore di a, le due curve P_a e C_a hanno in comune tre punti, di cui uno fisso e due, indicati con A e B, variabili al variare di a.
2. Dimostrare inoltre che le due regioni finite di piano delimitate dalle curve P_a e C_a non solo sono equivalenti ma la loro area è costante al variare di a.

B) 1. Indicate con P e C le due curve corrispondenti al valore di a per il quale la retta AB è parallela all'asse x, disegnare queste due curve sullo stesso piano.
2. Le due regioni finite di piano delimitate dalle curve P e C, ruotando di un giro completo intorno all'asse y, generano altrettanti solidi: calcolare i loro volumi.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{A1)}\ \ldots,\text{A2) area}=\frac{1}{24}\ ;\ \text{B1)}\ a=\frac{3}{2}\ ,\ \text{B2)}\ \frac{7\pi}{180}\,,\frac{23\pi}{180}\right]$

11. È noto che la derivata del rapporto di due funzioni è diversa dal rapporto delle derivate delle due funzioni. Questo perlomeno in generale. Esistono infatti coppie di funzioni per le quali questo non vale. Un esempio è fornito dalle seguenti funzioni:

$$f(x)=\frac{h(x+1)}{x},\quad g(x)=\frac{k}{x},$$

dove $h,\ k$ sono costanti arbitrarie non nulle. Si può provare in effetti (cosa che è lasciata a chi legge) che si ha:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=D\frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Ci proponiamo di trovare altre coppie di funzioni $f(x)$ e $g(x)$, derivabili, per le quali vale la precedente uguaglianza e lo andiamo a fare con la collaborazione del lettore.

Osserviamo, in via preliminare, che $g(x)$ non può essere una costante poiché $g'(x)$ sarebbe identicamente nulla e l'uguaglianza precedente non avrebbe più significato. Quindi $g(x)$ deve essere una funzione variabile al variare di x. D'altro canto, se $f(x)$ fosse identicamente nulla, l'uguaglianza in questione sarebbe banalmente vera. Si desume da tutto ciò che la funzione $f(x)$ identicamente nulla ed una generica funzione $g(x)$, non costante, soddisfano all'uguaglianza in esame.

Accantoniamo questo caso banale e andiamo a vedere cosa succede se $f(x)$ non è identicamente nulla. Intanto possiamo constatare che l'uguaglianza può essere scritta in quest'altro modo:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{[g'(x)]^2}\,.$$

Consideriamo questa relazione come un'equazione nell'incognita $f'(x)$ e risolviamola. Otteniamo:

$$f'(x)=\frac{[g'(x)]^2f(x)}{g(x)[g'(x)-g(x)]}\quad\text{da cui segue:}\quad\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{[g'(x)]^2}{g(x)[g'(x)-g(x)]}\,.$$

Supponiamo ora che sia $g(x)=kx$, dove k è una costante non nulla. L'ultima relazione, dopo qualche semplice elaborazione, diventa:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x(1-x)}\,.$$

Da qui, integrando entrambi i membri, segue:

$$\ln|f(x)| = \ln\left|\frac{hx}{x-1}\right|,$$

dove h è una costante non nulla. Pertanto deve essere:

$$f(x) = \frac{hx}{x-1}.$$

Dunque la coppia di funzioni $f(x)=hx/(x-1)$ e $g(x)=kx$ soddisfa alla richiesta. Ad ulteriore conferma di ciò, chi legge può verificarlo.

Il lettore può inoltre cercare da sé altre coppie di funzioni adatte allo scopo. Può provare, per esempio, a supporre che sia $g(x)=kx^{\alpha}$, essendo k una costante non nulla ed α un qualsiasi numero reale diverso da zero.

12. Trovare almeno una coppia di funzioni $f(x)$ e $g(x)$, derivabili, in modo che il prodotto delle loro derivate sia uguale alla derivata del loro prodotto.

[**R.** Basta procedere come nel precedente problema: si trova, per esempio, che le funzioni $f(x)=\dfrac{1}{k(1-x)}$ e $g(x)=kx$, dove k è una costante non nulla, rispondono alla richiesta.]

U79 / U80 / U81 – Dati e previsioni

1. Un'urna contiene sei palline numerate: una pallina è contrassegnata col numero 1, due palline sono contrassegnate col numero 2, tre palline col numero 3. Si estraggono a caso due palline e sia X la somma dei due numeri che le contrassegnano.

a) Disegnare un istogramma che rappresenti la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X.

b) Calcolare la probabilità che, estratte a caso due palline, la somma dei numeri che le contrassegnano sia compresa fra 3 e 5 inclusi.

c) Calcolare la media μ e la deviazione standard σ della variabile aleatoria X.

d) Considerata infine la variabile aleatoria Z tale che:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

dimostrare che ha media 0 e deviazione standard 1.

[**R.** a) … ; b) $\dfrac{13}{18}$; c) $\dfrac{14}{3}$, $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$; d) …]

2. Ci sono tre monete TESTA-CROCE: due monete sono "oneste", nel senso che, in un lancio delle stesse, ciascuna delle loro facce ha la medesima probabilità di uscire; una è "truccata" in un modo speciale: su 4 lanci della moneta 3 volte esce TESTA e una sola volta esce CROCE. Si lanciano le tre monete e sia Y il numero delle TESTE uscite, Si consideri quindi la variabile aleatoria X tale che: $X=Y^2+Y$.

a) Costruire una tabella che rappresenti la distribuzione di probabilità di X.

b) Calcolare la mediana e la moda di X.

c) Calcolare la media μ e la deviazione standard σ di X.

d) Considerata infine la variabile aleatoria Z tale che:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

dimostrare che ha media 0 e deviazione standard 1.

[**R.** a) … ; b) … ; c) $\mu=7{,}25$, $\sigma\approx4{,}52$; d) …]

3. COMPLEMENTI. Nell'ultimo quesito dei due precedenti esercizi è stato proposto di dimostrare che la media e la deviazione standard della variabile aleatoria $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ sono rispettivamente 0 e 1, essendo μ e σ nell'ordine la media e la deviazione standard della variabile aleatoria X ivi presa in considerazione.

Questo vale in realtà qualunque sia la variabile aleatoria X ed è ciò che andiamo a dimostrare.

DIMOSTRAZIONE. Sia X una variabile aleatoria qualsiasi:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right).$$

Com'è noto, si ha: $\mu=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\ ,\ \ \sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i-\mu)^2}\ .$

Prendiamo ora in esame la variabile aleatoria Z tale che: $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

Calcoliamone la media $M(Z)$ e la deviazione standard $\sigma(Z)$. Si ha:

$$M(Z)=\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{x_i-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i-\mu\sum_{i=1}^{n} p_i\right)=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu\cdot 1)=0\ ;$$

$$\sigma(Z)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}-M(Z)\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i-\mu)^2}=\frac{1}{\sigma}\cdot\sigma=1\ .$$

4. Si consideri la seguente funzione:

$$f_a(x)=\begin{cases} 6x(a-x) & \text{per } x\in[0,a] \\ 0 & \text{per } x\notin[0,a] \end{cases}\ ,$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Per un determinato valore $\bar{a}$ di a essa rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria X: trovare questo valore.

b) Calcolare la media e la deviazione standard di X.

c) Calcolare la mediana e la moda di X.

d) Stabilire se la funzione $f_{\bar{a}}(x)$ è continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

[**R.** a) … ; b) 0,5; ≈ 0,22; c) … ; d) …]

5. Si consideri la seguente funzione:

$$f_a(x)=\frac{2}{x^2+a^2}\ ,$$

dove a è un parametro reale.

a) Per un determinato valore $\bar{a}$ di a essa rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria X: trovare questo valore.

b) Rappresentare la funzione $f_{\bar{a}}(x)$ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo averne determinato, fra l'altro, gli eventuali asintoti, punti estremanti e flessi.

c) Calcolare quindi la probabilità che la variabile aleatoria X assuma un valore compreso fra 0 e 1.

d) La regione finita di piano delimitata dal grafico trovato, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x=-1$ ed $x=1$ genera, in una rotazione di 180° intorno all'asse y, un solido: calcolarne il volume.

$\left[\text{R. a) } \bar{a}^2=4\pi^2;\ \text{b) Si consiglia un riferimento non monometrico; c) } \approx 5{,}02\%\ ;\ \text{d) } 2\pi\ln\left(1+\frac{1}{4\pi^2}\right)\right]$

6. Sono misurate le altezze di un gruppo di n persone e si trova che sono distribuite normalmente con media $\mu=173{,}5$ cm e deviazione standard $\sigma=2{,}8$ cm.

a) Calcolare la probabilità che nel gruppo ci sia una persona la cui altezza è:
(1) minore di 170 cm; (2) compresa fra 170 cm e 173,5 cm;
(3) compresa fra 173,5 cm e 180 cm; (4) maggiore di 180 cm.

b) Verificare che le probabilità calcolate hanno somma uguale ad 1.

c) Ammesso che sia $n=400$, calcolare quante persone del gruppo hanno un'altezza:
(1) compresa fra $\mu-\sigma$ e $\mu+\sigma$; (2) non compresa fra $\mu-3\sigma$ e $\mu+3\sigma$.

7. Sulle confezioni di spaghetti esposte al supermercato c'è scritto: "peso netto 500 g". In realtà la quantità di pasta contenuta in una confezione è prossima a 500 g ma il suo peso esatto varia da confezione a confezione.

Ammettiamo che sia una variabile aleatoria distribuita normalmente con media $\mu=499$ g e deviazione standard $\sigma=2$ g .

a) Presa una confezione a caso, calcolare la probabilità che la pasta in essa contenuta pesi almeno 500 g .
b) Qual è la percentuale di confezioni che contengono pasta il cui peso è compreso fra 497 g e 501 g ?
c) Supponendo che sia ammessa una tolleranza dell'1% rispetto al peso netto dichiarato sulla confezione, calcolare la percentuale di confezioni che dovrebbero essere scartate perché il loro peso netto è inferiore a quello consentito.

[**R.** a) $\approx 30{,}35\%$; b) … ; c) $\approx 2{,}27\%$]

8. All'esame di Diritto Privato si presentarono, in quella sessione, ben 315 studenti, ma solamente 152 di loro superarono l'esame. Tra coloro che ci riuscirono sono stati scelti a caso 30 studenti e i loro voti sono stati rappresentati graficamente mediante un istogramma (Fig. N14).

a) Calcolare la probabilità che, scelti a caso 10 dei 315 studenti che hanno affrontato l'esame, non più di 5 siano coloro che lo hanno superato.
b) Trovare un intervallo di confidenza al 90% per la media dei voti riportati dai 152 studenti che hanno superato l'esame.

[**R.** a) $\approx 66{,}52\%$; b) $23{,}7 \le \mu \le 25{,}1$]

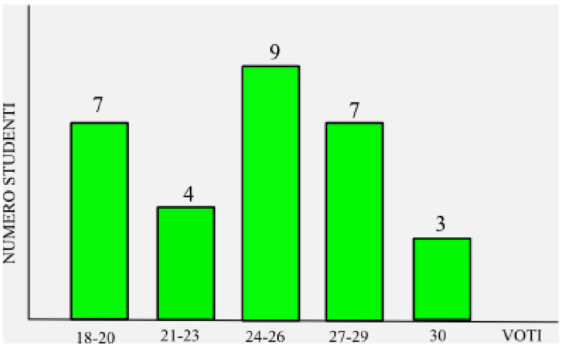


FIG. N14

9. Alla gara di nuoto, 50 metri stile libero maschile, partecipavano 86 atleti. I tempi da loro ottenuti sono distribuiti normalmente con media $\mu=23''{,}18$ e deviazione standard $\sigma=1''{,}35$. Calcolare:

a) la probabilità che, prendendo a caso 10 concorrenti, tra di essi ci sia almeno uno dei 16 atleti qualificati per le semifinali;
b) la probabilità che un atleta, scelto a caso fra tutti i concorrenti, abbia realizzato un tempo compreso fra 22" e 23";
c) quanti atleti hanno realizzato un tempo inferiore a 22",5;
d) il tempo massimo che un atleta ha dovuto realizzare per classificarsi tra i 16 concorrenti che avrebbero disputato le semifinali.

[**R.** a) $\approx 87{,}23\%$; b) $\approx 25{,}59\%$; c) ≈ 30; d) $\le 21''{,}976$]

U88 – Forme e figure di ragionamento

10. PROBLEMA RISOLTO. Sia n un numero naturale maggiore di 1 e siano le seguenti proposizioni:

a) *Se* 2^n-1 *è un numero primo anche* n *lo è* ;

e la sua inversa:

b) *Se* n *è un numero primo anche* 2^n-1 *lo è* .

Dimostrare che la prima proposizione è vera mentre la seconda è falsa.

DIMOSTRAZIONE.

Per dimostrare che la b) è falsa basta fornire un controesempio. Non è facile trovarlo, specialmente se la ricerca è condotta con carta e penna. Ma se si ricorre ad un idoneo software matematico, si trova agevolmente che: per n=23 si ha: $2^{23}-1=47\times 178.481$. La dimostrazione che b) è falsa è così conclusa.

Per dimostrare che la a) è vera conviene dimostrare che è vera la sua contronominale, vale a dire:

a') *Se* n *non è primo (ossia se è composto) allora anche* 2^n-1 *è composto*.

Ora, se n è un numero composto, significa che esistono due numeri naturali a, b (entrambi maggiori di 1) tali che n=ab. Sicché si ha:

$$2^n-1=2^{ab}-1=(2^a)^b-1.$$

Posto $2^a=x$ e constatato che x è un numero naturale, si ha:

$$(2^a)^b-1=x^b-1=(x-1)\left(x^{b-1}+x^{b-2}+\ldots+x+1\right).$$

Considerato che i due fattori posti entro parentesi tonde, nell'ultima espressione, sono certamente numeri naturali, possiamo concludere che il numero $(2^a)^b-1$ è un numero composto e perciò anche 2^n-1 lo è.

Essendo così dimostrata la proposizione contronominale della proposizione a), anche la a) risulta dimostrata.

11. Si consideri la seguente proposizione:

Ogni funzione reale di variabile reale continua in un determinato punto è ivi derivabile.

a) Metterla nella forma "se … allora …".

b) Dimostrarla o dimostrare che è falsa.

c) Formulare di essa le proposizioni opposta, contronominale, inversa e contraria.

d) Di ciascuna di queste proposizioni fornire una dimostrazione o dimostrare che è falsa.

12. Capita a volte che per spiegare che risulta $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ si ricorra alla regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1\,.$$

In realtà questa spiegazione non è convincente dal momento che si incorre in un *ragionamento circolare* (o *circolo vizioso* o, per usare un termine greco, *diallele*), vale a dire che per dimostrare una certa "cosa" questa stessa "cosa" si suppone già nota. Prova a chiarire questo fatto in modo esauriente.

Il *ragionamento circolare* è un caso particolare di una forma di ragionamento errato, nota come *petizione di principio*, una forma di ragionamento in cui ciò che deve essere dimostrato è assunto come premessa.

Si può ricorrere alla regola di De L'Hôpital per spiegare che si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$, senza cadere in un circolo vizioso?

E per spiegare che $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=1$, essendo a un numero reale positivo e diverso da 1?

13. PROBLEMA RISOLTO. Siano x, y, z, t, w cinque numeri naturali consecutivi, ma non necessariamente nell'ordine scritto, soddisfacenti alle seguenti condizioni:

1) la somma di x ed y è 20 oppure 21;

2) z supera x di una unità e supera t di tre unità;

3) w è uguale alla media aritmetica dei cinque numeri.

Scrivere in ordine crescente i cinque numeri determinando i loro valori.

RISOLUZIONE. Accantoniamo ogni proposito di risolvere il problema per tentativi e descriviamo due procedimenti generali ai quali si può ricorrere in situazioni anche più complesse di questa.

- Un primo procedimento è quello classico di impostare un sistema di equazioni nelle cinque incognite x, y, z, t, w, che, lo ricordiamo, sono numeri naturali consecutivi. Le condizioni imposte si traducono nelle seguenti equazioni:

$$x+y=20\ (\text{o, in alternativa: } x+y=21),\ \ z=x+1,\ \ z=t+3,\ \ w=\frac{x+y+z+t+w}{5}.$$

Abbiamo così quattro equazioni in cinque incognite. Dobbiamo provvisoriamente supporre che una delle incognite (per esempio x) sia nota e ricavare le altre in funzione di essa.

Nel caso in cui si suppone x+y=20, si trova $w=\frac{2x+19}{4}$ e perciò w per nessun valore naturale di x potrà essere un numero naturale. Questa condizione non è compatibile con le altre. Il problema in questo caso non ha soluzione, è impossibile.

Nel caso in cui, invece, è x+y=21, si trova:

$$y=21-x,\ \ z=x+1,\ \ t=x-2,\ \ w=\frac{x+10}{2}.$$

L'espressione di w in funzione di x ci dice che x deve essere un numero pari. Non dobbiamo dimenticare poi che i 5 numeri sono numeri naturali consecutivi, per cui la differenza fra due qualsiasi di essi non può che essere inferiore a 5. In particolare:

$$|y-t|<5 \quad \text{ossia, a conti fatti:} \quad 9<x<14\,.$$

Dunque x deve essere un numero pari compreso fra 9 e 14, estremi esclusi. Come dire che può essere $x=10$ oppure $x=12$.

Ora, per $x=10$ si ottiene: $y=11,\ z=11,\ t=8,\ w=10$. Situazione che non risponde alle condizioni imposte. Va scartata.

Per $x=12$ si ottiene: $y=9,\ z=13,\ t=10,\ w=11$. È la soluzione che cercavamo e i numeri, scritti in ordine crescente, sono ovviamente i seguenti:

$$y=9,\ \ t=10,\ \ w=11,\ \ x=12,\ \ z=13.$$

- Il secondo procedimento, che andiamo a descrivere, non implica la risoluzione di un sistema di equazioni ma soltanto considerazioni di buonsenso supportate da idonei schemi illustrativi. Si tratta in sostanza di riempire, passo dopo passo, 5 caselle poste in sequenza con i numeri che devono rispettare le condizioni poste dal problema. Le 5 caselle vuote si presentano come nel seguente schema:

Utilizziamo a questo punto quelle, fra le condizioni poste, che ci forniscono informazioni decisive. Così, il fatto di sapere che w è media aritmetica dei cinque numeri ci dice (cosa che il lettore può giustificare agevolmente) che w occupa la posizione centrale nello schema precedente, che pertanto diventa il seguente:

		w		

Siccome poi z supera x di 1, i numeri x e z sono consecutivi e x precede z. Di modo che x e z occupano le prime due caselle dello schema o le ultime due. D'altro canto, z supera t di 3 unità e pertanto non può che trovarsi nelle ultime due caselle, anzi, per quanto già spiegato, esattamente nell'ultima casella. Mettendo assieme tutti questi elementi, comprese le informazioni relative a t, che è superato da z di 3 unità, i cinque numeri devono essere disposti nell'ordine indicato nello schema seguente:

y	t	w	x	z

A questo punto si constata che x ed y sono di parità diversa (uno di essi è pari e l'altro è dispari) e perciò la condizione $x+y=20$ è incompatibile con tale fatto dal momento che da essa si desume che x ed y sono o entrambi pari o entrambi dispari. Va scartata. Rimane la condizione $x+y=21$, la quale, unita alla condizione $x=y+3$, ricavata dallo schema precedente, fornisce: $x=12,\ y=9$. Lo schema completo è infine il seguente:

y	t	w	x	z
9	10	11	12	13

14. I prossimi due esercizi sono ispirati ad altri proposti dallo scrittore, matematico, logico e pianista statunitense **Raymond Merrill Smullyan** (n. 1919) nel suo libro dal titolo *Donna o Tigre?* (1982).

A) Su ciascuna di due urne c'è un cartellino con una scritta come indicato qui appresso:

URNA 1		URNA 2
In quest'urna c'è una pallina bianca e nell'altra c'è una pallina nera		In una di queste due urne c'è una pallina bianca e in una c'è una pallina nera

Uno dei due cartellini dice il vero, l'altro dice il falso.
Quale pallina c'è nell'urna 1? Quale nell'urna 2?

B) Su ciascuna di due urne c'è un cartellino con una scritta come indicato qui appresso:

URNA 1		URNA 2
Almeno una di queste due urne contiene una pallina bianca		Nell'altra urna c'è una pallina nera

I due cartellini dicono entrambi il vero o entrambi il falso.
Quale pallina c'è nell'urna 1? Quale nell'urna 2?

15. Il seguente problema, a parte dettagli irrilevanti, è stato proposto da **Martin Gardner** (1914-2010) nel suo libro *Enigmi e giochi matematici*, vol. V (1971).
PROBLEMA. Dei tre amici Aldo, Giovanni e Giacomo, uno dice sempre il vero, uno dice sempre il falso ed uno risponde a caso. È possibile individuare chi dice il vero, chi il falso e chi risponde a caso esattamente con tre domande, ognuna delle quali però può essere rivolta ad uno soltanto dei tre amici (non necessariamente lo stesso) ed alla quale l'interpellato può rispondere solamente con un SÌ oppure con un NO. Quali sono queste domande e a chi vanno rivolte?
[Problema ad alto coefficiente di difficoltà]
RISOLUZIONE. Non sapendo chi dei tre amici dice il vero, chi il falso e chi risponde a caso, dobbiamo esaminare tutte le possibili situazioni, che elenchiamo nella tabella sottostante, dove abbiamo indicato con V l'amico che dice il vero, con F quello che dice il falso e con C quello che risponde a caso.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Aldo	V	V	F	F	C	C
Giovanni	F	C	V	C	V	F
Giacomo	C	F	C	V	F	V

Passiamo adesso alle possibili domande (in realtà se ne potrebbero proporre diverse e/o in ordine diverso):

- **Domanda 1** – rivolta ad Aldo – : «***Fra Giovanni e Giacomo è più probabile che sia Giovanni anziché Giacomo a dire il vero*?**»
  Ammettiamo che la risposta di Aldo sia SÌ. Se egli dice il vero, la situazione (1) non può presentarsi. In essa infatti sarebbe Giacomo (cioè l'amico che risponde a caso) ad avere più probabilità di dire il vero e non Giovanni (che dice sempre il falso). Se invece Aldo dice il falso, è ora la situazione (3) a non potersi verificare, in quanto in essa Giovanni effettivamente ha più probabilità di dire il vero rispetto a Giacomo. Allora, per quanto detto sulle situazioni (1) né la (3), dobbiamo concludere che non è Giacomo l'amico che risponde a caso. Questo, lo ribadiamo, se Aldo ha risposto SÌ alla domanda 1.
  Ammettiamo invece che la risposta di Aldo sia NO. Se egli dice il vero, non può verificarsi la situazione (2) nella quale in realtà è proprio Giovanni che ha la maggiore probabilità di dire il vero e non Giacomo. Se Aldo dice il falso, avendo risposto NO alla domanda, dovrebbe essere Giovanni ad avere maggiore probabilità di dire il vero rispetto a Giacomo, in contrasto con la situazione (4), che perciò non può verificarsi. Allora, per quanto detto sulle situazioni (2) e (4), dobbiamo concludere che non è Giovanni l'amico che risponde a caso. Questo, ovviamente, se Aldo ha risposto NO alla domanda 1.
  Ma Aldo potrebbe essere colui che risponde a caso e perciò il suo SÌ o il suo NO avrebbero poco senso. Ebbene, questo è irrilevante giacché, essendolo Aldo, ovviamente né Giovanni né Giacomo sono coloro che rispondono a caso.
  In conclusione, dopo la prima domanda, rivolta ad Aldo, questa è la situazione: se Aldo risponde SÌ, non è Giacomo quello che risponde a caso; se risponde NO, non è Giovanni quello che risponde a caso.
- **Domanda 2 –** rivolta a quello dei due amici Giovanni o Giacomo, del quale si è certi che NON risponde a caso. Ossia rivolta a Giovanni se la risposta di Aldo alla prima domanda è stata NO (è stato stabilito che Giovanni non è l'amico che risponde a caso); oppure rivolta a Giacomo se la risposta di Aldo alla prima domanda è stata SÌ (non è Giacomo l'amico che risponde a caso) – : «***Sei tu che rispondi a caso*?**»
  Se la risposta dell'interpellato è SÌ, egli (che non è colui che risponde a caso) sta dicendo ovviamente il falso e perciò è F; se la risposta è NO sta invece dicendo il vero e perciò è V.

- **Domanda 3 –** rivolta alla stessa persona cui è stata rivolta la domanda 2 (Giovanni o Giacomo) dopo aver stabilito se è V o F – : «***È Aldo colui che risponde a caso*?**»
  E, in base alla risposta della persona interpellata trarre le conclusioni.

Il seguente schema riassume la situazione attraverso la disamina dei vari casi che si possono presentare.

<table>
<tr><td>Domanda 1
rivolta ad Aldo:
« Fra Giovanni e Giacomo è più probabile che sia Giovanni anziché Giacomo a dire il vero? »</td><td>Domanda 2
rivolta a Giovanni
(che non è colui che risponde a caso):
« Sei tu che rispondi a caso? »</td><td>Domanda 3
rivolta a Giovanni:
« È Aldo colui che risponde a caso? »</td><td>Domanda 2
rivolta a Giacomo
(che non è colui che risponde a caso):
« Sei tu che rispondi a caso? »</td><td>Domanda 3
rivolta a Giacomo:
« È Aldo colui che risponde a caso? »</td></tr>
<tr><td>Risposta di
Aldo</td><td>Risposta di
Giovanni</td><td>Risposta di
Giovanni</td><td>Risposta di
Giacomo</td><td>Risposta di
Giacomo</td></tr>
<tr><td rowspan="4">NO
(Non è Giovanni colui che risponde a caso)</td><td rowspan="2">SÌ
(Giovanni è F)</td><td>SÌ
(Aldo è V e Giacomo è C)</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>NO
(Aldo è C e Giacomo è V)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">NO
(Giovanni è V)</td><td>SÌ
(Aldo è C e Giacomo è F)</td></tr>
<tr><td>NO
(Aldo è F e Giacomo è C)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">SÌ
(Non è Giacomo colui che risponde a caso)</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">SÌ
(Giacomo è F)</td><td>SÌ
(Aldo è V e Giovanni è C)</td></tr>
<tr><td>NO
(Aldo è C e Giovanni è V)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">NO
(Giacomo è V)</td><td>SÌ
(Aldo è C e Giovanni è F)</td></tr>
<tr><td>NO
(Aldo è F e Giovanni è C)</td></tr>
</table>