MATEMATICA (GRATUITA) PER LE SCUOLE SUPERIORI

(UNITÀ 28-88)

ESERCIZI E COMPLEMENTI – 2

U30 / U31 – Similitudine nel piano

1. Due quadrilateri ABCD e A'B'C'D' sono tali che :

$$\widehat{A}=\widehat{A}',\ \widehat{B}=\widehat{B}',\ \widehat{C}=\widehat{C}',\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Dimostrare che i due quadrilateri sono simili o, in alternativa, dimostrare che non si può concludere alcunché circa la loro similitudine.

2. Due quadrilateri ABCD e A'B'C'D' sono tali che :

$$\widehat{A}=\widehat{A}',\ \widehat{B}=\widehat{B}',\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AD}{A'D'}.$$

Dimostrare che i due quadrilateri sono simili o, in alternativa, dimostrare che non si può concludere alcunché circa la loro similitudine.

3. Due pentagoni ABCDE e A'B'C'D'E' sono tali che :

$$\widehat{A}=\widehat{A}',\ \widehat{B}=\widehat{B}',\ \widehat{C}=\widehat{C}',\ \widehat{D}=\widehat{D}',\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Dimostrare che i due pentagoni sono simili o, in alternativa, dimostrare che non si può concludere alcunché circa la loro similitudine.

4. Siano r, s due rette incidenti e sia O il loro punto comune. Si prendano sulla retta r, da parti opposte di O, i punti A e B e sulla retta s, da parti opposte di O, i punti C e D, in modo che risulti $OA{:}OC=OD{:}OB$. Dimostrare che il quadrilatero convesso avente per vertici i punti A, B, C, D è inscrivibile in una circonferenza.

[**R.** Si costruisce la circonferenza passante per i punti A, C, B. Sia E il punto in cui la retta s la interseca ultriormente. Risulta … per cui E coincide con …]

5. Risolvere la medesima questione precedente, ma supponendo questa volta che i punti A e B siano situati dalla stessa parte di O e così pure i punti C e D.

U36 / U37 – Goniometria e trigonometria

1. Il pavimento rettangolare di una stanza è ricoperto da mattonelle di tre tipi diversi: mattonelle aventi la forma di pentagoni regolari uguali di lato lungo $\left(\sqrt{5}-1\right)$ dm, mattonelle aventi la forma di rombi uguali di un primo tipo (più "schiacciato"), mattonelle aventi la forma di rombi uguali di un secondo tipo. Su lato più lungo del pavimento sono disposte N° 30 mattonelle pentagonali, mentre su quello più corto ne sono disposte N° 20. (Una figura – fig. 1 – dove nel lato più lungo sono disposte N° 6 mattonelle pentagonali e in quello più corto N° 4 mattonelle pentagonali, fornisce un'idea della disposizione delle mattonelle sul pavimento.)

a) Calcolare la lunghezza dei lati del pavimento.
b) Calcolare quante sono le mattonelle aventi la forma di rombo di ciascuno dei due tipi.
c) Quale area ricoprono le mattonelle pentagonali? Quale quelle romboidali del primo tipo? Quale quelle romboidali del secondo tipo?

[**R.** a) ≈5,7 m, 4 m; b) 300, 301; c) ≈15,77 m^2, ≈2,69 m^2, ≈4,37 m^2]

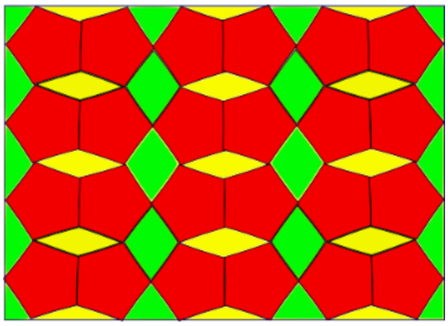

FIG. 1

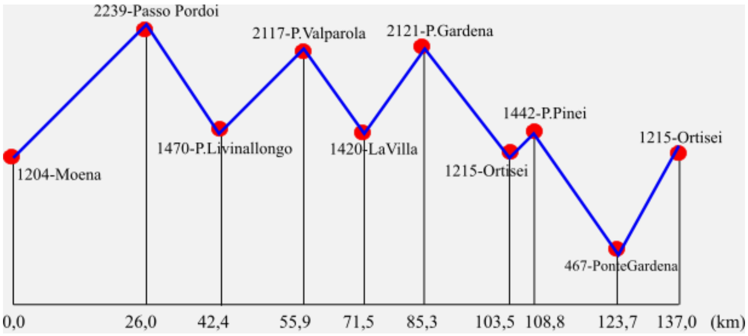

FIG. 2

2. In figura 2 è rappresentata la planimetria di una tappa del giro ciclistico d'Italia. Tappa che si sviluppa per 137 km dai 1204 m di quota di Moena ai 1215 m di Ortisei attraverso una serie di saliscendi.

a) Quale dei 5 tratti in salita è quello di massima pendenza e qual è questa pendenza?
b) Qual è la pendenza media dei 5 tratti in salita?
c) Quale dei 4 tratti in discesa è quello più ripido?

[**R.** a) … ; b) ≈4,67% ; c) ...]

3. Nel trapezio ABCD la base maggiore AB è lunga $5/2$ della base minore DC. Si sa che l'area del triangolo ABC è 25 cm² e che gli angoli $B\widehat{A}C$ e $A\widehat{B}C$ hanno tangenti rispettivamente uguali a 4/3 e 4/5.

a) Calcolare l'area del trapezio.
b) Stabilire la natura dell'angolo $B\widehat{A}D$ (vale a dire se è retto, acuto o ottuso).

[**R.** a) 35 cm^2; b) ottuso]

4. Il quadrilatero convesso ACBD è formato dai due triangoli rettangoli ABC e ABD, aventi l'ipotenusa AB in comune e i cateti tali che $AC<BC$, $AD<BD$, $AD<AC$. Si sa inoltre che l'ipotenusa AB misura 50 m e che le misure dei cateti, espresse in metri, sono numeri interi.

a) Trovare le misure dei lati del quadrilatero.
b) Calcolare il coseno degli angoli $C\widehat{A}D$ e $C\widehat{B}D$.
c) Calcolare un valore, approssimato ad 1 cm, della misura della diagonale CD del quadrilatero.
d) La perpendicolare alla retta BD, condotta per C, divide il quadrilatero in due parti: calcolare le loro aree.

[**R.** a) AC=30 m, BC=40 m, AD=14 m, BD=48 m; b) $\cos C\widehat{B}D=3/5$, … ; c) ≈ 34,59 m; d) 384 m^2, …]

5. Nel trapezio rettangolo ABCD siano AD e BC nell'ordine la base minore e quella maggiore. Il lato obliquo CD è visto dal vertice A sotto un angolo α tale che $\tan\alpha=3/4$ e dal vertice B sotto un angolo β tale che $\tan\beta=4/3$.

a) Dimostrare che il lato AB è medio proporzionale fra le basi AD e BC.
b) Calcolare le misure, approssimate ad 1", degli angoli sotto cui la base minore del trapezio è vista dal vertice.C e la base maggiore è vista dal vertice D.
c) Dimostrare che il trapezio è circoscrivibile ad un cerchio o, viceversa, dimostrare che non lo è.

[**R.** a) … ; b) ≈22°52'25", … ; c) …]

6. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, l'angolo in C misura 30°. Indicato con M il punto medio del cateto AB, tracciare la corda MD del triangolo parallela alla mediana AL e la corda ME parallela alla mediana BN.

a) Dimostrare che il quadrilatero CDME è inscrivibile in un cerchio o, viceversa, dimostrare che non lo è. Parimenti, dimostrare che il quadrilatero è circoscrivibile ad un cerchio o, viceversa, dimostrare che non lo è.
b) Indicato con F il punto in cui s'intersecano le mediane AL e DN, dimostrare che il quadrilatero CLFN è simile al quadrilatero CDME e descrivere una similitudine che trasformi il primo nel secondo.
c) Calcolare il rapporto fra l'area del triangolo BMD e quella del quadrilatero CLFN.
d) Calcolare le misure degli angoli interni del quadrilatero CLFN, espresse in gradi sessagesimali ed eventualmente approssimate ad 1".

[**R.** a) … ; b) … ; c) 3/8; d) ≈139°6'24'', ≈70°53'36'', …]

7. COMPLEMENTI: IL TEOREMA DEL COSENO E IL TEOREMA DEI SENI DIMOSTRATI CON I VETTORI.

A) Teorema del coseno. Dato il triangolo ABC (Fig. 3), consideriamo la relazione $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ ed eleviamo al quadrato entrambi i membri. Si ha: $\overrightarrow{BC}^{\,2}=\overrightarrow{BA}^{\,2}+\overrightarrow{AC}^{\,2}+2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$. Da qui, constatando che l'angolo dei vettori $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$ è il supplementare dell'angolo $B\hat{A}C=\alpha$, segue: $a^2=b^2+c^2+2bc\cos(180°-\alpha)$, ossia:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

Ragionando allo stesso modo sugli altri due lati oppure, più semplicemente, ricorrendo ad opportune permutazioni cicliche, si ottengono le altre due formule che, assieme a quella già dimostrata, esprimono il teorema del coseno.

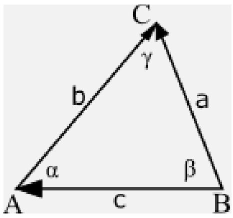

FIG. 3

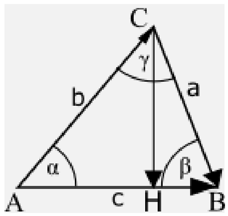

FIG. 4

B) Teorema dei seni. Dato il triangolo ABC (Fig. 4), consideriamo la relazione $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ e moltiplichiamo scalarmente entrambi i suoi membri per il vettore $\overrightarrow{CH}$, essendo H il piede dell'altezza relativa al lato AB. Otteniamo: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CH}$. Da qui, dopo aver constatato che i due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CH}$ sono ortogonali e pertanto il loro prodotto scalare è nullo, segue: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$. Osserviamo adesso che l'angolo dei due vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CH}$ è il supplementare dell'angolo $A\hat{C}H=90°-\alpha$ e che l'angolo dei due vettori $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{CH}$ è l'angolo $H\hat{C}B=90°-\beta$. Dalla relazione precedente si ricava pertanto:

$\overline{AC}\cdot\overline{CH}\cdot\cos\big(180°-(90°-\alpha)\big)+\overline{CB}\cdot\overline{CH}\cdot\cos(90°-\beta)=0$, da cui segue: $-b\sin\beta+a\sin\alpha=0$, ossia:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\,.$$

Ragionando allo stesso modo sul lato BC, si ottiene la relazione:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

E pertanto è provato il teorema dei seni.

8. COMPLEMENTI: IL TEOREMA DI NAPOLEONE.

Nel testo base, nella sezione "verifiche" dell'unità 42 – Circonferenza nel piano cartesiano, abbiamo proposto un esercizio, come caso particolare di una proprietà dei triangoli, nota come *teorema di Napoleone*. Sì, proprio lui, Napoleone Bonaparte (1769-1821). Durante la sua campagna in Italia, nell'anno 1796, egli incontrò il matematico bergamasco Lorenzo Mascheroni (1750-1800) e i due diventarono amici. A tal punto che, secondo molti studiosi, Mascheroni avrebbe denominato col nome del futuro imperatore il teorema di cui ci stiamo occupando. Qualche studioso, per la verità, attribuisce la dimostrazione del teorema proprio a Napoleone, che effettivamente si dilettava di questioni matematiche. Ma pochi ci credono davvero, mentre sono molti coloro che ritengono che la dimostrazione sia effettivamente di Mascheroni. Non mancano inoltre altre ipotesi. Comunque sia, andiamo ad occuparci del teorema, del quale forniamo, oltre all'enunciato, una delle possibili dimostrazioni, forse la più semplice, per la quale però chiediamo la collaborazione di chi legge.

TEOREMA DI NAPOLEONE. *I baricentri dei triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di un qualunque triangolo sono vertici di un triangolo equilatero*.

DIMOSTRAZIONE. Sia ABC un triangolo qualunque (Fig. 5) e siano ABD, BCE, CAF i triangoli equilateri costruiti, esternamente al triangolo dato, sui suoi lati. Siano inoltre G, H, K nell'ordine i baricentri di questi tre triangoli equilateri.

Bisogna dimostrare che il triangolo GHK è un triangolo equilatero.

Seguendo le solite notazioni, indichiamo rispettivamente con a, b, c le lunghezze dei lati BC, CA, AB del triangolo ABC e con α, β, γ le ampiezze degli angoli interni dello stesso triangolo di vertici A, B, C.

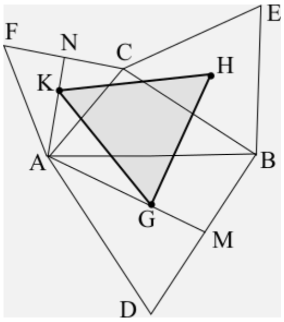

FIG. 5

Tenendo presenti le proprietà del baricentro di un triangolo, ed in particolare di un triangolo equilatero, e precisato che M è il punto medio di BD ed N lo è di CF, constatiamo che si ha:

$$\mathrm{AG}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{2}\sqrt{3}=\frac{c}{3}\sqrt{3}\,,\quad \mathrm{AK}=\frac{2}{3}\mathrm{AN}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{2}\sqrt{3}=\frac{b}{3}\sqrt{3}\,.$$

Si ha inoltre:

$$\mathrm{G\hat{A}K}=\mathrm{M\hat{A}N}=\mathrm{M\hat{A}B}+\mathrm{B\hat{A}C}+\mathrm{C\hat{A}N}=\frac{\pi}{6}+\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+\alpha\,.$$

Risulta pertanto, in base al teorema del coseno:

$$\overline{\mathrm{GK}}^2=\overline{\mathrm{AG}}^2+\overline{\mathrm{AK}}^2-2\,\overline{\mathrm{AG}}\cdot\overline{\mathrm{AK}}\cdot\cos\mathrm{G\hat{A}K}=\cdots=\frac{1}{3}(b^2+c^2)-\frac{1}{3}bc\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}bc\sin\alpha\,.$$

D'altronde si ha pure:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \quad \text{da cui segue:}\quad bc\cos\alpha=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

e inoltre, indicata con S l’area del triangolo ABC:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha \quad \text{da cui segue:}\quad bc\sin\alpha=2S\,.$$

Di conseguenza, dopo aver sostituito e semplificato:

$$\overline{\mathrm{GK}}^2=\cdots=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2}{3}S\sqrt{3}\,.$$

Si constata che questa espressione, la quale fornisce la lunghezza di GK, ha un ben determinato valore, una volta fissate le lunghezze a, b, c; e non c’è motivo di pensare che essa cambi se il ragionamento è fatto, invece che sulla lunghezza di GK, su quella di HK o HG. Cosa che, comunque, se si vuole, può essere controllata eseguendo tutti i calcoli necessari.

Insomma si ha: GH=HK=GK. Come dire che il triangolo GHK è equilatero. [c.v.d.]

Si possono poi dimostrare altre proprietà, legate al teorema di Napoleone, sulle quali però non ci soffermiamo, salvo che per enunciarle, lasciando la dimostrazione a chi legge, se vuole:

- Il teorema continua a valere se i triangoli equilateri sono costruiti verso la parte interna del triangolo dato.
- I triangoli aventi per vertici i baricentri dei triangoli equilateri (sia “esterni” sia “interni”) hanno lo stesso baricentro del triangolo dato.
- La differenza fra l’area del triangolo equilatero avente per vertici i baricentri dei triangoli “esterni” e l’area del triangolo equilatero avente per vertici i baricentri dei triangoli “interni” è uguale a quella del triangolo dato.

U38 – Misure di circonferenza e cerchio. Il numero π

1. Le diagonali AB e CD di un rombo misurano rispettivamente $2r$ e $2r\sqrt{3}$, essendo r una lunghezza assegnata. La circonferenza di diametro AB divide il rombo in tre regioni : calcolare le loro aree e le lunghezze dei loro contorni.

$$\left[\textbf{R.}\ A_1=\frac{r^2}{6}\left(3\sqrt{3}-\pi\right),\ A_2=\cdots,\ A_3=\frac{r^2}{3}\left(3\sqrt{3}+\pi\right);\ \ L_1=\frac{r}{3}(12+\pi),\ L_2=\cdots,\ L_3=\frac{2r}{3}(6+\pi)\right]$$

2. Nel cerchio C_1 è inscritto un esagono regolare E’, il quale è circoscritto al cerchio C_2, nel quale a sua volta è inscritto un esagono regolare E”, il quale infine è circoscritto al cerchio C_3.

a) Dimostrare che l'area di C_2 è la media geometrica delle aree di C_1 e C_3.
b) Posto che C_1 e C_3 abbiano aree rispettivamente $81\pi\ m^2$ e $16\pi\ m^2$, calcolare le aree dei due esagoni.

3. Sulla semiretta r di origine P si prendano due punti A e B e sulla semiretta s, essa pure di origine P, si prenda il punto C, in modo che il segmento PC sia medio proporzionale fra i segmenti PA e PB.
a) Dimostrare che la circonferenza γ passante per i punti A, B, C è tangente in C alla retta s.
b) Posto che i segmenti PA e PB misurino rispettivamente 2 cm e 8 cm, verificare che il punto medio del segmento AB è il centro della circonferenza γ.
c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla circonferenza γ e dalle rette r ed s, approssimata a meno di 1 mm^2.

[**R.** a) … ; b) … ; c) ≈1,83 cm^2]

4. Le diagonali di un rombo sono lunghe $2a$ e $2b$. Due corde parallele alla diagonale lunga $2a$ dividono il rombo in tre parti equivalenti : due triangoli e un esagono.
a) Dimostrare che la lunghezza di tali corde dipende da a ma non da b.
b) Trovare quale relazione lega a e b nel caso in cui l'esagono sia inscrivibile in un cerchio e calcolare l'area di tale cerchio.
c) Nell'ipotesi in cui l'esagono sia inscrivibile in un cerchio, calcolare le misure dei suoi angoli interni, espresse in gradi sessagesimali e approssimate ad 1".

$\left[\textbf{R}.\ \ a)\ldots;\ \ b)\ \frac{a}{b}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\,,\ \ldots;\ \ c)\ \approx 107°37'56'',\ \approx 144°44'8''\right]$

U46 – Trasformazioni geometriche nel piano cartesiano

1. È assegnato il rettangolo ABCD, i cui lati AB e AD misurano rispettivamente 8 e 4 rispetto ad una medesima unità di misura.
a) Determinare un punto E sul lato AB e un punto F sul lato DC in modo che il quadrilatero EFDA sia un rettangolo simile al rettangolo dato.
b) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), trovare le equazioni di una similitudine che trasformi il rettangolo ABCD nel rettangolo EFDA in modo che i vertici dei due rettangoli si corrispondano secondo la seguente tabella: $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & D & A \end{pmatrix}$.

2. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la seguente equazione:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}\,,$$

dove n è un numero naturale primo.
a) Dimostrare che la curva che la rappresenta ha tre punti, e tre soltanto, le cui coordinate sono espresse entrambe da numeri interi.
b) Trovare le coordinate dei tre punti suddetti quando $n=2$.
c) Dimostrare che la curva assegnata, considerata per $n=2$, è simile alla curva di equazione $xy=2$.

[**R.** a) Dopo aver spiegato perché si può porre $x=n+u$, $y=n+v$, l'equazione diventa $uv=n^2$ e siccome n è un numero primo, ci sono tre possibilità: … ; b) (3,6), (4,4), (6,3); c) Occorre dimostrare che esiste almeno una similitudine che trasforma l'una curva nell'altra. Per esempio, una similitudine (ma non è l'unica) che trasforma la curva $xy=2$ nell'altra è quella di equazioni $x'=x\sqrt{2}+2,\ y'=y\sqrt{2}+2$]

3. Nella figura sottostante (Fig. 6) sono disegnati due quadrati, l'uno interno all'altro.
a) Calcolare la somma delle aree colorate in verde e quella delle aree bianche e verificare che le due somme sono uguali.
b) Trovare le equazioni di una similitudine che trasformi il quadrato più piccolo in quello più grande.
c) Dimostrare che la somma delle aree colorate in verde è uguale a quella delle aree bianche comunque siano scelti i due quadrati e comunque siano posizionati l'uno rispetto all'altro, purché uno sia completamente contenuto nell'altro e i quattro segmenti che congiungono (in modo opportuno) i vertici dei due quadrati non intersechino il quadrato interno e non s'intersechino fra loro.

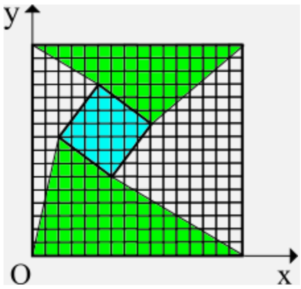

FIG. 6

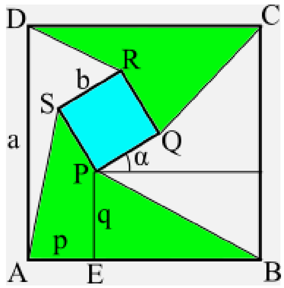

FIG. 7

RISOLUZIONE (traccia).

a) Ciascuna delle due somme vale 115,5.

b) Una similitudine ha le seguenti equazioni: $x' = \frac{48}{25}x + \frac{64}{25}y - \frac{672}{25}$, $y' = -\frac{64}{25}x + \frac{48}{25}y + \frac{96}{25}$.

c) Indicate con a e con b le lunghezze dei lati rispettivamente del quadrato grande e di quello piccolo (Fig. 7), bisogna anzitutto fissare la posizione di quest'ultimo quadrato rispetto al primo. Per questo è sufficiente porre AE=p e EP=q e chiamare α l'angolo che la retta del lato PQ forma con la direzione del lato AB. Si trova allora, dopo alcuni calcoli (forse un po' noiosi), che l'area del quadrilatero concavo ABPS è:

$$S_1 = \frac{1}{2}aq + \frac{1}{2}bp\cos\alpha + \frac{1}{2}bq\sin\alpha \ ;$$

mentre l'area del quadrilatero concavo CDRQ è:

$$S_2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}aq - \frac{1}{2}bp\cos\alpha - \frac{1}{2}bq\sin\alpha \, .$$

La prosecuzione è del tutto elementare.

4. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole p' e p" di equazioni rispettivamente:

$$y = 2x^2 + 1, \quad y = 3x^2 - 2x - 2.$$

a) Com'è noto, le due parabole sono simili, ragion per cui esiste almeno una similitudine che trasforma la parabola p' nella parabola p". Trovare le equazioni di una siffatta trasformazione geometrica.

b) Stabilire se la trasformazione trovata ha punti uniti e/o rette unite.

c) Utilizzare la regola di Archimede per calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle due parabole.

[**R.** a) $x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $y' = \frac{2}{3}y - 3$; b) punto unito: A(1,–9), rette unite: rette del fascio con centro in A; c) $\frac{32}{3}$]

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il rettangolo OACB, i cui vertici A e B hanno coordinate rispettivamente (30,0) e (0,40). Indicati con D, E, F, G nell'ordine i punti medi dei lati OA, AC, CB, BO, le rette AG, OF, BE, CD, intersecandosi due a due, individuano un quadrilatero Q.

a) Dimostrare che tale quadrilatero è un parallelogramma.

b) Dimostrare che il quadrilatero Q è simile al rettangolo OACB o, viceversa, dimostrare che non lo è.

c) Il quadrilatero Q e il rettangolo OACB sono figure affini. Per provarlo, dimostrare che esiste almeno un'affinità che trasforma il quadrilatero Q nel rettangolo OACB, determinando di tale affinità le equazioni in forma matriciale.

d) Calcolare il rapporto fra l'area del quadrilatero Q e quella del quadrilatero OACD.

[**R.** ... ; c) un'affinità ha le seguenti equazioni: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3/4 \\ 4/3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -40 \end{bmatrix}$; ...]

U42 / U43 / U44 / U45 – Coniche, luoghi geometrici, equazioni polinomiali

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'equazione seguente:

$$(x + 2y)^2 + (2x - y)^2 = 100 \, .$$

a) Dimostrare che sulla curva che la rappresenta graficamente esistono solo ed esclusivamente 8 punti con coordinate espresse entrambe da numeri interi.

b) Questi 8 punti siano i vertici di un ottagono convesso: calcolarne perimetro e area.

[**R.** a) …. ; b) perimetro$=8\left(2+\sqrt{2}\right)$, area$=56$]

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(1,0) e B(1,2).

a) Chiamato P un generico punto del piano, trovare il luogo geometrico del circocentro del triangolo PAB, al variare di P.

b) Determinare, sul luogo trovato, un punto C tale che il triangolo ABC sia equilatero, dimostrando che di punti siffatti ne esistono due: C_1 e C_2.

c) Posto che, di questi due punti, C_1 abbia ascissa maggiore, indicare con H il centro del triangolo ABC_1 e dimostrare che il quadrilatero $AHBC_2$ è inscrivibile in un cerchio.

[**R.** a) … ; b) $C_1\left(1+\sqrt{3},1\right)$, $C_2\left(1-\sqrt{3},1\right)$; c) …]

3. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2,0) e B(0,1).

a) Chiamato P un generico punto situato sulla retta a di equazione $x=1$, trovare le coordinate del punto R in cui la retta AP interseca l'asse y e quelle del punto S in cui la retta BP interseca l'asse x.

b) Dopo aver spiegato perché la circonferenza di diametro AR e la circonferenza di diametro BS s'intersecano in O, trovare le loro equazioni.

c) Calcolare la pendenza della retta r passante per i punti comuni alle due circonferenze trovate, e fornire una rappresentazione grafica che descriva la sua variazione al variare del punto P sulla retta a.

d) Calcolare le posizioni di P per le quali la pendenza della retta r è compresa fra 0 ed 1 inclusi.

[**R.** a) Sia t l'ordinata di P. Si ha: R(0,2t), S(1−t, 0); b) … ; c) $\frac{1+t}{1-2t}$; d) $-1\leq t\leq 0$]

4. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2,0) e B(1,2).

a) Indicato con P un generico punto interno al segmento OA, trovare l'equazione della circonferenza k passante per i punti P, A, B.

b) Trovare l'equazione del luogo geometrico del centro della circonferenza k al variare di P sul segmento]A,B[.

c) Chiamato C il punto in cui la retta AB interseca l'asse y e indicato con Q l'ulteriore punto in cui la retta PC interseca la circonferenza k, trovare l'equazione del luogo geometrico del punto Q al variare di P sul segmento]A,B[.

[**R.** a) … ; b) segmento aperto della retta $2x-4y+1=0$, avente come estremi i punti di ascisse 1 e 2; c) arco della circonferenza $2x^2+2y^2-11y+12=0$, avente come estremi i punti (1,2) e (0,2) e situato al di sotto della retta di questi due punti]

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2,0) e B(−2,0).

a) Trovare, sulla retta di equazione $y=2$, due punti C e D, tali che il trapezio ABDC sia isoscele ed abbia area 6.

b) Preso, internamente al segmento AB, un arbitrario punto P, trovare le equazioni della circonferenza passante per i punti A, C, P, di quella passante per i punti B, P, D e della retta r che congiunge i loro punti comuni P e Q.

c) Verificare che le rette r, AC e BD passano per uno stesso punto.

d) Trovare l'equazione del luogo geometrico del punto Q al variare di P sul segmento]A,B[.

[**R.** a) … ; b) … , r ha equazione $4x+ty-4t=0$, dove t è l'ascissa di P; c) … ; d) arco della circonferenza di equazione $2x^2+2y^2-11y+12=0$ interno al trapezio e avente per estremi i punti C e D]

6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(0,1) e B(2,1).

a) Indicato con P un generico punto della parabola p di equazione $y=x^2$, trovare il luogo geometrico λ dell'ortocentro del triangolo PAB al variare di P sulla parabola p.

b) Studiare il luogo trovato e fornirne una rappresentazione grafica.

c) La tangente alla curva λ nel punto C in cui interseca l'asse x ha in comune con λ un ulteriore punto D. Calcolare l'area del quadrilatero convesso ACBD.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } y=\frac{2x-1}{x^2-1}\ ;\ \text{b)}\ldots;\ \text{c) } \frac{8}{3}\right]$

7. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le coniche di equazione:

$$kx^2 - y^2 + x - ky = 0\,,$$

dove k è un parametro reale.

a) Stabilire che conica rappresenta l'equazione per i seguenti valori di k:

$$k=0,\ \ k\to\pm\infty,\ \ k=1,\ \ k=-1.$$

b) Per ogni valore di k diverso dai precedenti l'equazione rappresenta un'ellisse o un'iperbole. Per stabilirlo con esattezza, anche se la risposta è immediata, proponiamo di determinare la traslazione che muta l'equazione assegnata in una del tipo seguente:

$$aX^2 + bY^2 = c$$

e di trarre le debite conclusioni.

c) Trovare per quali valori di k l'equazione assegnata rappresenta un'ellisse avente l'asse maggiore parallelo all'asse x e per quali valori un'ellisse avente l'asse maggiore parallelo all'asse y. Operare qualche verifica.

d) Nel caso in cui l'equazione rappresenta una conica con centro (ellissi o iperboli), trovare il luogo del centro della conica al variare di k.

[**R.** a) parabola, parabola, due rette incidenti, circonferenza; b) $X=x+\frac{1}{2k}$, $Y=y+\frac{k}{2}$, … ; c) per $-1<k<0$ asse maggiore parallelo asse x, per $x<-1$ asse maggiore parallelo asse y, … ; d) $4xy=1$]

8. COMPLEMENTI: LE CONICHE DI APOLLONIO.

Com'è noto (cfr.: Unità 45 del testo base) il nome *coniche*, attribuito alle curve espresse da equazioni algebriche di 2° grado in due indeterminate, è dovuto al fatto che queste curve si ottengono sezionando un cono con un piano. E, a seconda dell'inclinazione del piano rispetto all'asse di rotazione del cono, si hanno parabole, ellissi o iperboli.

Ci proponiamo qui di far vedere come scaturiscano queste denominazioni, attribuite alle tre curve da **Apollonio Pergeo** nell'opera che tratta dell'argomento, intitolata per l'appunto ***Coniche***.

Lo faremo seguendo il ragionamento di Apollonio, ma con un linguaggio e un simbolismo a noi più familiare.

A) PARABOLA. Dato un cono circolare, si prenda in esame una sua sezione parabolica (Fig. 8).

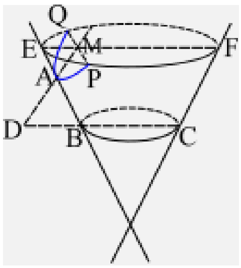

FIG. 8

Se BC è il diametro della circonferenza ottenuta sezionando il cono con un piano perpendicolare al suo asse di rotazione, si dica D il punto in cui il piano della parabola interseca la retta BC. Chiamato P un qualsiasi punto della parabola, si consideri il piano passante per P e perpendicolare all'asse del cono: esso interseca il cono secondo la circonferenza di diametro EF e la parabola nei punti P e Q. La corda PQ, per evidenti ragioni di simmetria, risulta perpendicolare ad EF in M. Allora, per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo EFP rettangolo in P, si ha: $\overline{PM}^2=\overline{EM}\cdot\overline{MF}$. D'altro canto, dalla similitudine dei triangoli AEM e ABD segue:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\,,\quad \text{da cui: } \overline{EM}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}}\,;$$

inoltre $MF=DC$ (si fa notare che DM è parallelo a CF). Pertanto: $\overline{PM}^2=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}}\cdot\overline{AM}$.

Osserviamo che la quantità $\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}}$, pur dipendendo dalla parabola considerata, è invariante al variare di P sulla parabola stessa: la indichiamo con k. Ne discende che la precedente relazione, ponendo per comodità $\overline{AM}=p$,

$\overline{PM}$=q, può essere scritta nel modo seguente:

$$q^2 = kp\,.$$

E si comprende facilmente che questa relazione, interpretata come un'equazione nelle indeterminate p, q, è l'equazione di una parabola riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente A come origine e la retta AM come asse delle ascisse.

La relazione q^2=kp ne richiamava ad Apollonio un'altra del tipo S=ax, la quale traduce il problema della costruzione di un rettangolo di area data S su una base di lunghezza assegnata a. La costruzione richiede di *applicare* il rettangolo cercato ABCD esattamente sul segmento AB lungo a. Siccome il termine *applicazione* è espresso in greco dalla parola *παραβολή* (*parabolé*), ecco la denominazione di ***parabola*** attribuita da Apollonio alla curva caratterizzata dalla relazione q^2=kp.

B) <u>Ellisse</u>. Dato un cono circolare, si consideri una sua sezione ellittica (Fig. 9). Con considerazioni analoghe a quelle esposte trattando della parabola, si desume che si ha: $\overline{PM}^2=\overline{EM}\cdot\overline{MF}$. D'altro canto, dalla similitudine dei triangoli AEM e ABD segue:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\,,\ \ \text{da cui:}\ \ \overline{EM}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}}\,,$$

e dalla similitudine dei triangoli A'FM e A'CD segue:

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{A'M}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{A'D}}\,,\ \ \text{da cui:}\ \ \overline{FM}=\frac{\overline{A'M}\cdot\overline{CD}}{\overline{A'D}}\,.$$

Pertanto: $\overline{PM}^2=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{A'D}}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{A'M}\,.$

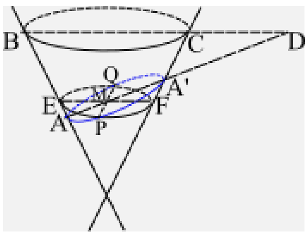

FIG. 9

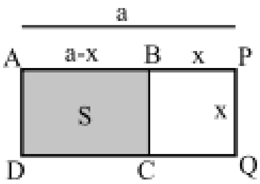

FIG. 10

Osserviamo che la quantità $\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{A'D}}$, pur dipendendo dall'ellisse considerata, è invariante al variare di P sull'ellisse stessa: la indichiamo con k. Osserviamo inoltre che A'M=AA'–AM. Ragion per cui la precedente relazione, ponendo per comodità $\overline{AA'}$=2a, $\overline{AM}$=p, $\overline{PM}$=q, può essere scritta nel modo seguente:

$$q^2 = kp(2a-p)\,.$$

E non ci vuol molto a comprendere che questa relazione, interpretata come un'equazione nelle indeterminate p, q, è l'equazione della curva riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente A come origine e la retta AA' come asse delle ascisse. La relazione stessa, mediante la traslazione di equazioni x=p–a, y=q, dopo aver posto $ka^2=b^2$, diventa la nota equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

La relazione q^2=kp(2a–p) ne richiamava ad Apollonio un'altra del tipo S=x(a–x), la quale traduce il problema della costruzione di un rettangolo di area data S, sapendo che la somma della sua base con la sua altezza è una lunghezza assegnata a. La costruzione, illustrata in figura 10, comporta che il rettangolo cercato ABCD abbia per base una parte (AB) del segmento AP lungo a in maniera che sia *mancante*, rispetto al rettangolo APQD, del quadrato BPQC. Siccome il termine *mancanza* è espresso in greco dalla parola *ἔλλειψις* (*elleipsis*), ecco la denominazione di ***ellisse*** attribuita da Apollonio alla curva caratterizzata dalla relazione q^2=kp(2a–p).

C) <u>Iperbole</u>. Dato un cono circolare, si consideri una sua sezione iperbolica (Fig. 11). Con le solite considerazioni, si desume che si ha: $\overline{PM}^2=\overline{EM}\cdot\overline{MF}$. Inoltre, per la similitudine dei triangoli AEM e ADC e per quella dei triangoli A'FM e A'DB, segue rispettivamente:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\ ,\ \text{da cui: }\ \overline{EM}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}}\ ,\ \text{e}\ \ \frac{\overline{FM}}{\overline{A'M}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{A'D}}\ ,\ \text{da cui: }\ \overline{FM}=\frac{\overline{A'M}\cdot\overline{BD}}{\overline{A'D}}\,.$$

Pertanto: $\overline{PM}^2=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{A'D}}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{A'M}$.

Osserviamo che la quantità $\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{A'D}}$, pur dipendendo dall'iperbole considerata, è invariante al variare di P sull'iperbole stessa: la indichiamo con k. Osserviamo inoltre che A'M=AA'+AM. Ragion per cui la precedente relazione, ponendo per comodità $\overline{AA'}=2a$, $\overline{AM}=p$, $\overline{PM}=q$, può essere scritta nel modo seguente:

$$q^2 = kp(2a + p)\,.$$

E non ci vuol molto a comprendere che questa relazione, interpretata come un'equazione nelle indeterminate p, q, è l'equazione della curva riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente A come origine e la retta A'A come asse delle ascisse. La relazione stessa, mediante la traslazione di equazioni $x=p-a$, $y=q$, dopo aver posto $ka^2=b^2$, diventa la nota equazione canonica dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

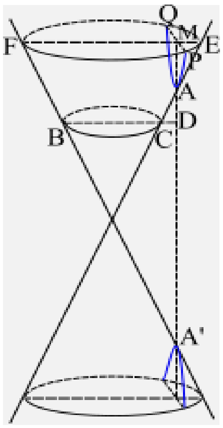

FIG. 11

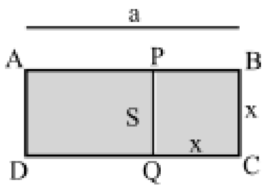

FIG. 12

La relazione $q^2=kp(2a+p)$ ne richiamava ad Apollonio un'altra del tipo S=x(a+x), la quale traduce il problema della costruzione di un rettangolo di area data S, sapendo che la differenza tra la sua base e la sua altezza è una lunghezza assegnata a. La costruzione, illustrata in figura 12, comporta che il rettangolo cercato ABCD abbia per base un segmento AB, lungo a e contenente il segmento AP, in maniera che sia *eccedente*, rispetto al rettangolo APQD, del quadrato BCQP. Siccome il termine *eccesso* è espresso in greco dalla parola *ὕπερβολή* (*yperbolé*), ecco la denominazione di ***iperbole*** attribuita da Apollonio alla curva caratterizzata dalla relazione $q^2=kp(2a+p)$.

U47 / U48 / U49 – Figure geometriche nello spazio: proprietà e misure

1. I tre problemi che seguono sono in stretta connessione tra loro.

PROBLEMA 1. Da un punto di una strada rettilinea si diramano due tronchi stradali, pure rettilinei, formanti un angolo di 60°. Uno di questi due tronchi è perpendicolare alla strada da cui si dirama ed ha una pendenza del 15%. Calcolare la pendenza dell'altro tronco. [**R.** ≈ 7,5%]

[NOTA BENE. Se non si riesce a impostare e risolvere questo problema, si propone di occuparsi dapprima del successivo problema 2 e quindi del problema 3 e di ritornare poi sul problema 1]

PROBLEMA 2. Una piramide di vertice O ha per base il rettangolo ABCD. Si sa che sono retti gli angoli $O\hat{A}B$, $O\hat{C}B$, $O\hat{D}A$, mentre gli angoli $A\hat{O}D$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ misurano rispettivamente x, y, z. Trovare una relazione che leghi le tre misure x, y, z. [**R.** $\sin z = \sin x \cos y$]

PROBLEMA 3. Sia dato il diedro $\widehat{\alpha\beta}$ di spigolo s. Preso sulla retta s un qualsiasi punto O, si traccino due semirette Oa e Ob, contenute nella faccia α del diedro, in modo che Oa risulti perpendicolare alla retta s e formi un angolo di ampiezza x con la faccia β e un angolo di ampiezza y con la retta Ob.

a) Trovare una relazione che permetta di determinare la misura z dell'angolo che la semiretta Ob forma con la faccia β del diedro. b) Calcolare il valore di z, espresso in gradi sessagesimali e approssimato per difetto a meno di 1', sapendo che x=60° e y=30°.

[**R.** a) Si suggerisce di scegliere un qualsiasi punto A sulla semiretta Oa e un punto B sulla semiretta Ob in modo che la retta AB sia parallela allo spigolo s del diedro. Considerate poi le proiezioni ortogonali di A e B sulla faccia β e indicate con D e C rispettivamente tali proiezioni, si può prendere in esame la piramide di vertice O e base ABCD, riconducendosi così al problema precedente. b) z≈48°35']

2. [Questo problema è ispirato ad uno proposto dal matematico cinese **Ch'in Chiu-Shao** (ca. 1202-1261) nell'opera ***Shu Shu Chiu Chang (Le nove sezioni della matematica***), risalente all'anno 1247]

Su un terreno pianeggiante s'innalza una torre cilindrica di altezza 10 m, la cui base circolare ha diametro AB. Sul prolungamento di AB, dalla parte di B, nel punto C, posto alla distanza BC=3 m, è situato un osservatore. Sulla retta tangente in A alla circonferenza di base, in una determinata posizione D, è collocato un paletto in modo che risulti visibile da C e la distanza CD sia minima. Sapendo che AD=9 m, calcolare:

a) la distanza CD;
b) il volume della torre;
c) le misure degli angoli, orizzontale e verticale, sotto cui la torre è vista dal punto C, espresse in gradi sessagesimali e approssimate ad 1".

[**R.** a) La distanza CD è minima quando la retta CD è … alla circonferenza di base. Sono possibili due procedimenti: uno utilizza la similitudine dei triangoli, l'altro le proprietà trigonometriche dei triangoli. Ponendo uguale ad x la misura del raggio della circonferenza, con il primo procedimento si perviene alla seguente equazione: $(2x-9)(2x+3)(x^2+6x+27)=0$. Con il secondo procedimento, posto $A\widehat{D}C=2\alpha$, dopo aver constatato che $x=9\tan\alpha$ e $2x=9\tan 2\alpha$, si perviene alla seguente equazione: $(2x-9)(x^2+6x+27)=0$. In ogni caso si ricava una sola soluzione accettabile: $x=9/2$. Si ottiene pertanto $CD=15$ m; b) $202{,}5\pi$ m³: c) ≈16°41'57", ≈73°44'28"]

3. Nella piramide retta di vertice V, la base ABC è un triangolo rettangolo in cui AC è il cateto maggiore e BC il cateto minore. Inoltre la faccia laterale VAB forma un angolo di 30° con la base ABC. L'area di ABC è 24 cm², mentre il volume della piramide è $16\sqrt{3}$ cm³. Calcolare:

a) l'area totale della piramide;
b) le misure degli spigoli laterali;
c) le distanze del vertice A dalla faccia VBC, del vertice B dalla faccia VCA, del vertice C dalla faccia ABC.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } 72\ \text{cm}^2;\ \text{b) } 2\sqrt{13}\ \text{cm}, 4\sqrt{2}\ \text{cm}, 2\sqrt{5}\ \text{cm};\ \text{c) } 4\sqrt{3}\ \text{cm}, 3\sqrt{3}\ \text{cm}, \frac{12}{5}\sqrt{3}\ \text{cm}\right]$

4. Due recipienti, aventi uno la forma di un cilindro e l'altro la forma di un tronco di cono, comunicano mediante un tubo e sono disposti in modo che una base del cilindro e la base minore del tronco siano situate su uno stesso piano orizzontale α (Fig. 13). I due recipienti, collocati dalla parte superiore rispetto ad α, contengono complessivamente $0{,}364\,\pi$ litri d'acqua. Indicata con h la distanza della superficie libera dell'acqua dal piano α, si sa che il raggio di base del recipiente cilindrico misura $h/3$, mentre i raggi delle basi del tronco di cono, occupato dall'acqua, misurano uno 6 cm e l'altro 1 cm.

a) Verificare che per h=12 cm e per nessun altro valore di h tutti i dati sono compatibili.
b) Calcolare la quantità d'acqua contenuta in ciascuno dei due recipienti.
c) Quanta acqua bisogna aggiungere nei due recipienti affinché essi risultino colmi, supponendo che i recipienti medesimi abbiano la stessa altezza, uguale a 18 cm ?

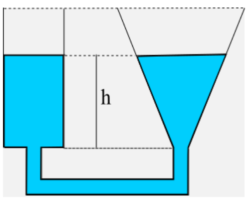

FIG. 13

[**R.** a) … ; b) $192\,\pi$ cm³, … ; c) $924{,}5\,\pi$ cm³]

5. In un cono circolare retto è inscritta una sfera. L'area laterale e l'area totale del cono sono rispettivamente πa^2 e πb^2, essendo a, b lunghezze assegnate. a) Trovare quale relazione sussiste fra tali lunghezze. b) Sotto tale condizione trovare l'area della sfera. $\left[a)\ a < b < a\sqrt{2}\,,\ b)\ \frac{4\pi}{b^2}(b^2-a^2)(2a^2-b^2)\right]$

6. PROBLEMA (parzialmente risolto). Dimostrare che:

a) l'area di un rettangolo non supera quella di un quadrato il cui lato ha una lunghezza uguale alla media aritmetica delle dimensioni del rettangolo. In quale caso le due aree sono uguali?

b) il volume di un parallelepipedo rettangolo non supera quello di un cubo il cui spigolo ha una lunghezza uguale alla media aritmetica delle dimensioni del parallelepipedo. In quale caso i due volumi sono uguali?

RISOLUZIONE. La risoluzione è immediata se si tiene presente la seguente proprietà: *la media geometrica* $\mathrm{m_g}$ *di un qualsiasi numero di numeri positivi, comunque scelti, non supera la loro media aritmetica* $\mathrm{m_a}$ *, vale a dire:* $\mathrm{m_g} \le \mathrm{m_a}$.

Lasciamo a chi legge la risoluzione del problema sulla base di questa proprietà.

Noi invece intendiamo soffermarci proprio su questa proprietà per fornirne una delle possibili dimostrazioni.

Ci proponiamo dunque di dimostrare che, dati n numeri positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$, comunque scelti, risulta:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Prendiamo le mosse da una nota proprietà sui massimi e minimi assoluti [1]: *Se* n *numeri reali variano in modo che la loro somma si mantenga costante allora il loro prodotto è massimo quando essi sono uguali.* Come dire che, presi n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$, variabili ma in modo che la loro somma abbia valore costante na, il prodotto $P=x_1x_2\dots x_n$ risulta massimo quando $x_1=x_2=\dots=x_n$. Cosicché, essendo ovviamente a il valore di tali numeri uguali, il prodotto P assume il valore $P_{max}=a^n$. In ogni altro caso risulta: $P<a^n$. D'altro canto, a è anche la media aritmetica degli n numeri (indipendentemente dal fatto che siano uguali o no), ragion per cui possiamo scrivere:

$$x_1x_2\dots x_n=\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^n.$$

Ma, lo ribadiamo, solamente se $x_1=x_2=\dots=x_n$. In ogni altro caso, essendo questo il valore massimo di P, risulta:

$$x_1x_2\dots x_n<\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^n.$$

Pertanto:

$$x_1x_2\dots x_n\le\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^n.$$

Ovvero:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$ [c. v. d.]

U63 – Lo spazio cartesiano

1. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati il piano α di equazione $x+y+z=0$ e la retta r di equazioni parametriche $\{x=2t-1,\ y=t+2,\ z=t\}$.

a) Dopo aver verificato che la retta r non è perpendicolare al piano α, dimostrare analiticamente che esiste uno ed un solo piano β contenente la retta r e perpendicolare al piano α, trovandone l'equazione.

b) Trovare le equazioni parametriche della retta s proiezione ortogonale della retta r sul piano α.

c) Indicato con P il punto della retta r di ascissa -1, trovare le equazioni parametriche della retta p condotta per P perpendicolarmente al piano α e verificare che è contenuta nel piano β.

d) Indicato con Q il punto intersezione delle rette r ed s, verificare che il piano individuato dal punto Q e dalla retta p s'identifica con il piano β.

[**R.** a) … , $\beta\equiv y-z-2=0$; b) $s\equiv\{x=-2t-2,\ y=t+2,\ z=t\}$; …]

2. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati il punto $H(1,-2,0)$ e il piano α di equazione $2x+y-z-2=0$.

[1] Cfr.: Testo base, Unità 69 – Estremi assoluti di una funzione, N° 69.2.1, Proprietà 3.

a) Trovare l'equazione della sfera σ avente il centro in H e tangente al piano α e indicare con T il punto di contatto.
b) Determinare, sulla retta HT, un punto A, esterno al segmento HT e situato dalla parte di H, in modo che risulti 2TA=3TH e spiegare in maniera esauriente che questo punto è interno alla sfera o, viceversa, che è esterno ad essa.
c) Dopo aver verificato che il punto B(0,–2,1) non appartiene alla retta HT, trovare l'equazione del piano β individuato da questa retta e dallo stesso punto B.
d) Trovare le equazioni parametriche della retta r, passante per il punto A, contenuta nel piano β e perpendicolare alla retta HT.

[**R.** a) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+\frac{13}{3}=0$, $T\left(\frac{5}{3},-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$; b) $A\left(\frac{2}{3},-\frac{13}{6},\frac{1}{6}\right)$, … ; c) … , $x-y+z-3=0$; d) $x=\frac{2}{3}$, $y=t-\frac{13}{6}$, $z=t+\frac{1}{6}$]

3. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnate la retta r di equazioni $x=1,\ y=z$ e la retta s di equazioni $x-y-2=0,\ z=0$.
a) Verificare che le due rette sono sghembe.
b) Calcolare la loro distanza.

[**R.** a) Basta far vedere che il sistema delle equazioni delle due rette è impossibile, quantunque esse non siano parallele; b) Occorre determinare due pian paralleli, uno contenente la retta r ed uno contenente la retta s e calcolare la loro distanza; si trova $\sqrt{3}/3$]

4. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnate le rette r, s tali che:

la retta r ha equazioni $x=h+1,\ y=h,\ z=-h+1$; la retta s ha equazioni $x=-k+1,\ y=k,\ z=k+1$,

essendo h, k parametri reali.
a) Verificare che le due rette sono incidenti e determinare il loro punto comune.
b) Trovare l'equazione del piano α individuato dalle due rette.
c) Considerata la retta di equazioni $x+y+z=0,\ y+2z-1=0$, dimostrare che è possibile condurre per essa un piano parallelo al piano α o, viceversa, dimostrare che questo non è possibile.

[**R.** a) (1,0,1); b) x+z–2=0; c) …]

5. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati:

il punto $A(1,-1,0)$ e i vettori $\vec{u}(0,1,1)$ e $\vec{v}(1,1,0)$.

a) Trovare l'equazione del piano α passante per A e parallelo ai due vettori assegnati.
b) Trovare le equazioni delle rette r ed s passanti entrambe per A e parallele rispettivamente ai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
c) Verificare che entrambe le rette r ed s giacciono nel piano α.
d) Indicato con B il punto in cui il piano α interseca l'asse z, verificare che la retta AB non coincide con alcuna delle rette r ed s.
e) Determinare il punto C in cui la retta p passante per B e parallela alla retta r interseca la retta s e il punto D in cui la retta q passante per B e parallela alla retta s interseca la retta r.
f) Calcolare l'area del quadrilatero convesso ACBD.

[**R.** a) $x-y+z-2=0$; b) riguardo alla retta r bisogna osservare che, indicato con P(x,y,z) un generico punto dello spazio, il vettore $\overrightarrow{AP}$ deve risultare parallelo al vettore $\vec{u}$, per cui deve risultare $\overrightarrow{AP}=k\vec{u}$ ossia $(x-x_A=ku_x,\ y-y_A=ku_y,\ z-z_A=ku_z)$, essendo k un parametro reale non nullo, e perciò … la retta r ha equazioni $\{x=1,\ y\text{-}z+1=0\}$; analogamente per la retta s, che ha equazioni $\{x-y-2=0,\ z=0\}$; c) … ; d) … ; e) $C(0,-2,0)$, $D(1,1,2)$; f) $2\sqrt{3}$]

6. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), è assegnato il piano α di equazione x+y–2z+2=0. a) Trovare l'equazione della sfera σ avente il centro sul piano x e tangente al piano α nel punto in cui esso interseca l'asse z. b) Indicata con γ la circonferenza intersezione della sfera con il piano xy, trovare le coordinate dei punti in cui essa interseca gli assi coordinati.

$$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } x^2+y^2+z^2-x-y-1=0\,;\ \text{b) } \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},0,0\right),\left(0,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},0\right)\right]$$

U64 / U65 / U66 / U67 / U68 – Calcolo differenziale

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola di equazione:

$$y=3x^2+3x+1\,.$$

Ogni retta di equazione $x=n$, dove n è un qualunque numero naturale, interseca la parabola nel punto A_n, il quale ha distanza d_n dall'asse x.

a) Trovare per quale valore di n la somma delle distanze suddette, vale a dire $\sum_{k=0}^{n} d_k$, è uguale a 4.096.

b) Indicato con R_n il rapporto fra la distanza d_n e la distanza d_{n-1}, calcolare per quali valori di n tale rapporto risulta massimo e per quali valori risulta minimo.

c) Calcolare per quali valori di n il medesimo rapporto è minore di 1,5.

[**R.** a) n=15; b) max(R_n)=7 per n=1, min(R_n)=1 per n=0 o n→∞; c) n=0 o n>4]

2. È data la funzione:

$$f(x)=\frac{1}{16}(4x^2-1)(4x^2-9)+1\,.$$

a) Dopo aver dimostrato che può mettersi sotto forma di quadrato perfetto, studiarne l'andamento e disegnarne il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b) Trovare le ascisse dei punti in cui il grafico di f(x) è intersecato dal grafico di f'(x).

c) Nella regione finita di piano delimitata dal grafico di f(x) e dall'asse x inscrivere il rettangolo di area massima, avente un lato sull'asse x.

$$\left[\mathbf{R.}\;\; a)\;\dots;\; b)\;\; \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\,,2\pm\frac{\sqrt{21}}{2}\;;\;\; c)\;\; \max=1\right]$$

3. È data la funzione:

$$f(x)=x^x\,.$$

a) Studiarla e disegnarne l'andamento in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, con quale tangente esce dal punto di ascissa 0.

b) Calcolare le coordinate dei punti comuni al grafico di f(x) e al grafico di f '(x).

c) Determinare la cifra delle unità del numero f(198).

d) Si sa che il logaritmo decimale di 198 è 2,29667. Di quante cifre è composto il numero f(198)?

[**R.** a) tangente di equazione x=0, … ; b) (1,1); c) 4; d) 455]

4. I lati AB e AC di un foglio di cartone avente la forma di un rettangolo ABCD misurano rispettivamente a e b+c, dove a, b, c sono misure espresse, rispetto alla stessa unità di misura, da numeri primi tali che a>b>c. Il foglio copre un'area pari a 132.

a) Calcolare i valori di a, b, c.

b) Indicati con E il punto di AD e con F il punto di BC tali che AE=BF=b e indicato con G il punto comune ai segmenti AC e EF, e preso un punto a caso interno al rettangolo ABCD, calcolare la probabilità che esso sia interno al triangolo GFC e quella che sia interno al triangolo GEA.

c) Dai quattro angoli del foglio di cartone si ritagliano altrettanti quadrati in modo che, ripiegando opportunamente i bordi sporgenti del foglio, si ottenga una scatola di volume massimo. Calcolare le misure dei lati di tali quadrati.

[**R.** a) 11, 7, 5; b) … ; c) ≈1,91]

5. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la circonferenza di diametro OA, essendo A il punto di coordinate (a,0), dove a è una lunghezza assegnata. Una retta passante per l'origine O interseca ulteriormente la circonferenza in un punto B e la retta t, tangente ad essa in A, nel punto C.

a) Trovare l'equazione del luogo geometrico γ del punto P tale che $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{BC}$.

b) La curva γ è chiamata ***cissoide di Diocle*** [(2)]: disegnarla dopo averne determinato le caratteristiche essenziali.

---

[2] **Diocle** di Caristo, matematico vissuto fra il III e il II secolo a.C., ma del quale si sa molto poco. Il punto c) della traccia illustra sostanzialmente il procedimento da lui seguito per costruire lo spigolo di un cubo avente volume doppio di un

c) Indicato con D il punto dell'asse y di ordinata 2a, chiamare E l'intersezione della cissoide con la retta AD ed F l'intersezione delle rette t ed OE. Dimostrare che il segmento AF è lo spigolo di un cubo di volume doppio del cubo di spigolo OA, vale a dire che si ha: $\overline{AE}^3 = 2\,\overline{OA}^3$.

[**R**. a) $x^3=y^2(a-x)$; …]

6. Si consideri la seguente successione numerica: 1 – 2 – ? – 4 – 5. Se è richiesto di completarla sostituendo al posto del punto di domanda il numero adatto, la prima e più immediata risposta è evidentemente 3. E tuttavia 3 non è l'unica risposta. In effetti, ogni numero (intero, razionale, irrazionale) va bene, nel senso che esiste almeno una legge matematica che permette di ottenerlo. Cosicché, detto a titolo di esempio, se è vero che la legge:

$$f(x) = x$$

fornisce $f(3)=3$, è altrettanto vero che la legge:

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 6x^3 - \frac{49}{2}x^2 + 40x - 20$$

fornisce $g(3)=1$, pur essendo ancora $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(4)=4$, $g(5)=5$.
Trovare una legge $p(x)$ che, dando sempre $p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(4)=4$, $p(5)=5$, fornisce invece $p(3)=-1$.
Rappresentare in un medesimo piano cartesiano (Oxy) le tre funzioni f(x), g(x), p(x) – magari usufruendo di uno strumento di calcolo automatico – facendo vedere in particolare che i loro grafici hanno in comune i punti (1,1), (2,2), (4,4), (5,5).

7. Nella figura sottostante (Fig. 14) è disegnato il grafico di una funzione reale di variabile reale f(x).
La funzione è continua nell'intervallo [0,7] e del suo grafico sono evidenziati alcuni punti e inoltre:

- il tratto OA è un segmento di retta;
- la tangente destra nel punto A ha equazione $3x+y-5=0$;
- nei punti B(2,1) e D(4,3) il grafico ha tangente parallela all'asse x e così pure a sinistra del punto F;
- i punti C ed E sono punti di flesso, il primo con tangente $3x-y-7=0$, il secondo con tangente $3x+y-16=0$.

Fornire una rappresentazione grafica indicativa delle seguenti funzioni: $f'(x)$, $|f'(x)|$, $\frac{1}{f(x)}$.

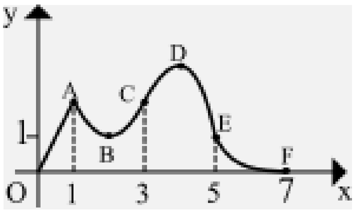

FIG. 14

U69 – Estremi assoluti di una funzione

1. Nel testo base, N° 69.2.1, abbiamo enunciato le cosiddette "proprietà elementari" per la ricerca degli estremi assoluti di una funzione e le abbiamo utilizzate più volte, ma senza dimostrarle. Orbene, a beneficio di chi volesse saperne di più, proprio su queste dimostrazioni vogliamo qui soffermarci. Non prima di averle ricordate, ma con una modifica riguardante le proprietà 4 e 5, le quali sono adesso enunciate non già con riferimento a due sole variabili ma ad un numero qualunque n di variabili.

---

cubo di spigolo dato. Problema noto come ***problema della duplicazione del cubo***. Gli antichi si sforzarono di risolverlo utilizzando solo ed esclusivamente riga e compasso, ma senza riuscirci, giacché, come si scoprì però solamente nell'Ottocento, tale risoluzione era impossibile. Mentre era possibile con altri strumenti, come, per esempio, utilizzando per l'appunto la cissoide di Diocle.
Un altro procedimento che risolve lo stesso problema è dovuto a ***Cartesio.*** Si tratta di intersecare la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2ax-ay=0$ con la parabola $x^2=ay$, essendo a il lato del cubo assegnato. Si trova, oltre all'origine O del sistema di riferimento cartesiano (Oxy), il punto P, la cui ascissa x_P risolve il problema. Infatti: $x_P^3=2a^3$.

- PROPRIETÀ 1. **Se la somma di due variabili positive è costante, il loro prodotto è massimo quando esse sono uguali.**
- PROPRIETÀ 2. **Se il prodotto di due variabili positive è costante, la loro somma è minima quando esse sono uguali.**
- PROPRIETÀ 3. **Se la somma di n variabili positive è costante, il loro prodotto è massimo quando esse sono uguali.**
- PROPRIETÀ 4. **Se il prodotto di n variabili positive è costante, la loro somma è minima quando esse sono uguali.**
- PROPRIETÀ 5. **Se n numeri reali positivi $\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n}$ variano in modo che la loro somma si mantenga costante allora il prodotto $\mathbf{{x_1}^{r_1} \cdot {x_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{r_n}}$ – dove $\mathbf{r_1, r_2, \dots, r_n}$ sono numeri razionali positivi – è massimo quando è verificata la seguente condizione:**
$$\mathbf{\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cdots = \frac{x_n}{r_n}}.$$
- PROPRIETÀ 6. **Se n numeri reali positivi $\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n}$ variano in modo che il prodotto $\mathbf{{x_1}^{r_1} \cdot {x_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{r_n}}$ – dove $\mathbf{r_1, r_2, \dots, r_n}$ sono numeri razionali positivi – si mantenga costante allora la loro somma è minima quando è verificata la seguente condizione:**
$$\mathbf{\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cdots = \frac{x_n}{r_n}}.$$

Le proprietà 1 e 2 sono evidentemente casi particolari rispettivamente delle proprietà 3 e 4, per cui non ce ne occupiamo, anche se potrebbero essere dimostrare direttamente con un facile ragionamento, che non dovrebbe essere sconosciuto a chi legge.

2. DIMOSTRAZIONE DELLA PROPRIETÀ 3.
Presi n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$, variabili ma in modo che la loro somma abbia valore costante na, vogliamo dimostrare che il prodotto $P=x_1x_2\dots x_n$ risulta massimo quando $x_1=x_2=\dots=x_n$, nel qual caso ciascuna delle variabili è evidentemente uguale ad a. Ragion per cui il valore massimo di P è $P_{max}=a^n$.
Supponiamo, per incominciare, che le n variabili abbiano valori non tutti uguali ad a. Questo significa che se qualcuno di essi, mettiamo x_1, è maggiore di a, qualche altro, mettiamo x_2, è minore di a. Per fissare le idee, sia:
$$x_1 = a + d_1 \ \text{ e } \ x_2 = a - d_2, \quad \text{dove } \ d_1 > 0, d_2 > 0.$$
Se ora, lasciando immutati gli n−2 numeri $x_3, x_4, \dots, x_n$, sostituiamo a al posto di x_1 e $y_1=a+(d_1-d_2)$ al posto di x_2, la somma degli n numeri vale ancora na giacché $x_1+x_2=a+y_1$. Il loro prodotto, invece, assume il valore P_1 maggiore di P, dal momento che $x_1x_2<ay_1$. Infatti:
$$x_1x_2 = (a + d_1)(a - d_2) = a^2+(d_1 - d_2)a - d_1d_2 < a\big(a + (d_1 - d_2)\big) = ay_1\,.$$
Giunti a questo punto, potrebbe verificarsi la circostanza, invero poco probabile, che gli n valori $a, y_1, x_3, x_4, \dots, x_n$ siano tutti uguali fra loro e quindi uguali ad a e la dimostrazione sarebbe conclusa.
Supponiamo, più realisticamente, che questo non succeda. Ciò significa che qualcuno degli n−1 numeri $y_1, x_3, x_4, \dots, x_n$ è maggiore di a: ammettiamo che esso sia y_1; allora qualche altro valore, poniamo x_3, è minore di a. Sia, tanto per fissare le idee:
$$y_1 = a + d_3 \ \text{ e } \ x_3 = a - d_4, \quad \text{dove } \ d_3 > 0, \ d_4 > 0.$$
Se, lasciando immutati gli n−2 valori $a, x_4, x_5, \dots, x_n$, sostituiamo i valori a e $y_2=a+(d_3-d_4)$ rispettivamente al posto di y_1 e x_3, e ragioniamo come prima, concludiamo che la somma degli n numeri continua ad essere na, mentre il prodotto assume un nuovo valore P_2 maggiore di P_1.
In questo modo, eseguendo per due volte lo stesso procedimento, otteniamo che le n variabili acquistino valori tali che almeno due di essi sono uguali ad a e, nello stesso tempo, la loro somma si mantiene uguale ad na mentre il loro prodotto aumenta. Cosicché, eseguendo al più n−2 volte il procedimento, le n variabili assumono i seguenti valori:
$$\underbrace{a}_{(1)} \quad \underbrace{a}_{(2)} \quad \dots \quad \underbrace{a}_{(n-2)} \quad y_{n-2} \quad x_n$$

la cui somma continua a conservarsi uguale ad na, mentre il loro prodotto aumenta ancora, assumendo un valore P_{n-2} maggiore dei precedenti valori $P_{n-3}, P_{n-4}, \dots, P_2, P_1$.
A questo punto è evidente che i due numeri y_{n-2} e x_n sono o entrambi uguali ad a o uno maggiore e l'altro minore di a, dovendo essere comunque $y_{n-2}+x_n=2a$. Nel primo caso la dimostrazione sarebbe conclusa, nel secondo, ammesso che il primo dei due numeri sia il maggiore, deve essere, tanto per fissare le idee:

$$y_{n-2} = a + d \quad e \quad x_n = a - d, \quad \text{dove } d > 0.$$

Se finalmente sostituiamo a al posto sia di y_{n-2} sia di x_n, tutti i numeri diventano uguali ad a, la loro somma rimane uguale ad na, mentre il prodotto aumenta ulteriormente diventando a^n. Valore che evidentemente è il massimo che può assumere P. Che è ciò che volevamo dimostrare.

3. DIMOSTRAZIONE DELLA PROPRIETÀ 4.
Presi n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$, variabili ma in modo che il loro prodotto abbia valore costante p^n, vogliamo dimostrare che la loro somma $S=x_1+x_2+\dots+x_n$ risulta minima quando $x_1=x_2=\dots=x_n$, nel qual caso ciascuna delle variabili è evidentemente uguale a p. Ragion per cui il valore minimo di S è $S_{min}=np$.
Costruiamo anzitutto i seguenti numeri:

$$y_1 = \frac{x_1}{S}, \quad y_2 = \frac{x_2}{S}, \quad \dots, \quad y_n = \frac{x_n}{S}.$$

La loro somma è evidentemente uguale ad 1, per cui possiamo scrivere:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = n \cdot \frac{1}{n}.$$

Di modo che, per la proprietà precedente, dove al posto di a figura adesso $1/n$, si ha:

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n \le \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Il segno di uguaglianza vale solamente nel caso in cui $y_1=y_2=\dots=y_n$ e perciò anche $x_1=x=\dots=x_n$. Considerato che il valore comune alle variabili x_i è p e tenute presenti le relazioni fra le x_i e le y_i dalla precedente relazione segue:

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{S^n} \le \left(\frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{ossia: } p^n \le S^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n. \quad \text{ovvero infine: } S \ge np.$$

Cosicché la somma delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ non è mai minore di np, che è pertanto il suo minimo valore e si ottiene quando le variabili sono uguali fra loro. Come volevamo dimostrare.

4. DIMOSTRAZIONE DELLE PROPRIETÀ 5 e 6.
Condurremo contestualmente le dimostrazioni di queste due proprietà. A tal fine, considerati i numeri reali x_1, x_2, ..., x_n, poniamo:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S \quad e \quad {x_1}^{r_1} \cdot {x_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot {x_n}^{r_n} = P.$$

Supponiamo dapprima che i numeri r_i (i=1,2,...,n) siano interi e poniamo $r_1+r_2+\dots+r_n=r$. Allora si ha:

$$
\begin{aligned}
{x_1}^{r_1} \cdot {x_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot {x_n}^{r_n} &= \left[{r_1}^{r_1} \cdot \left(\frac{x_1}{r_1}\right)^{r_1}\right] \cdot \left[{r_2}^{r_2} \cdot \left(\frac{x_2}{r_2}\right)^{r_2}\right] \cdot \dots \cdot \left[{r_n}^{r_n} \cdot \left(\frac{x_n}{r_n}\right)^{r_n}\right] = \\
&= \left({r_1}^{r_1} \cdot {r_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot {r_n}^{r_n}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_1}{r_1} \cdot \dots \cdot \frac{x_1}{r_1}\right)}_{r_1 \text{ fattori}} \cdot \underbrace{\left(\frac{x_2}{r_2} \cdot \frac{x_2}{r_2} \cdot \dots \cdot \frac{x_2}{r_2}\right)}_{r_2 \text{ fattori}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(\frac{x_n}{r_n} \cdot \frac{x_n}{r_n} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{r_n}\right)}_{r_n \text{ fattori}}
\end{aligned}
$$

D'altro canto risulta:

$$\underbrace{\left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_1}{r_1} + \dots + \frac{x_1}{r_1}\right)}_{r_1 \text{ addendi}} + \underbrace{\left(\frac{x_2}{r_2} + \frac{x_2}{r_2} + \dots + \frac{x_2}{r_2}\right)}_{r_2 \text{ addendi}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{x_n}{r_n} + \frac{x_n}{r_n} + \dots + \frac{x_n}{r_n}\right)}_{r_n \text{ addendi}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n = S.$$

Di modo che, prescindendo dal fattore costante ${r_1}^{r_1} \cdot {r_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot {r_n}^{r_n}$:

- se S è costante, in virtù della proprietà 3, il prodotto P risulta massimo quando risultano uguali le quantità x_i/r_i (i=1,2,...,n), cioè quando:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \dots = \frac{x_n}{r_n};$$

- se P è costante, in virtù della proprietà 4, la somma S risulta minima quando risultano uguali le quantità

x_i/r_i (i=1,2,...,n), cioè quando:

$$\frac{x_1}{r_1}=\frac{x_2}{r_2}=\cdots=\frac{x_n}{r_n}.$$

Se i numeri razionali positivi r_i (i=1,2,...,n) non sono tutti interi, chiamiamo m il loro minimo comune denominatore e poniamo:

$$r_1=\frac{a_1}{m},\quad r_2=\frac{a_2}{m},\quad \ldots,\quad r_n=\frac{a_n}{m}.$$

essendo gli a_i numeri interi positivi. Si ha allora:

$$P^m=(x_1^{r_1}\cdot x_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n})^m=x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}$$

e, a questo punto, basta ripetere il ragionamento precedente e osservare che P è massimo o costante se lo è P^m, e osservare inoltre che le condizioni:

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_n}{a_n}$$

sono equivalenti a queste altre:

$$\frac{x_1}{r_1}=\frac{x_2}{r_2}=\cdots=\frac{x_n}{r_n}.$$

U72 / U73 / U74 / U76 – Calcolo integrale

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(4,3) e B(4, –3).

a) Trovare il luogo geometrico λ del punto P tale che O sia il circocentro del triangolo PAB.

b) Indicata con C l'intersezione del luogo trovato con il semiasse negativo delle ascisse, determinare l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse x e passante per i punti A, B, C.

c) La parabola divide la superficie delimitata da λ in tre regioni, due delle quali sono uguali fra loro: calcolare le loro aree.

d) Una delle due regioni uguali, di cui al punto precedente, ruotando di un giro completo intorno all'asse x, descrive un solido: calcolarne il volume.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a})\ldots;\ \text{b})\ x=y^2-5;\ \text{c})\ A_1=\frac{25}{4}\pi-\frac{25}{2}\operatorname{asin}\left(\frac{4}{5}\right)+30\approx 38{,}04,\ A_2=A_3=\ldots;\ \text{d})\ 121{,}5\,\pi\right]$$

2. È dato il trapezio OABC nel quale siano nell'ordine 5, 3, 3 le misure, espresse rispetto ad una medesima unità di misura, della base maggiore OA, della base minore BC e dell'altezza.

a) Indicato con M il punto medio della diagonale AC, calcolare le aree dei triangoli OMC e BMA.

b) Posto che sia $\tan A\hat{O}C=-3$, una volta riferito il piano del trapezio ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dove O è un vertice del trapezio, mentre l'asse x è la semiretta OA orientata da O verso A, trovare le coordinate dei vertici A, B, C.

c) Tra le curve di equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ determinare quella che passa per i 4 vertici del trapezio.

d) Calcolare le aree delle regioni in cui il trapezio è diviso dalla curva trovata.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a})\ \frac{15}{4},\frac{9}{4};\ \text{b})\ldots,\ B(2,3),\ C(-1,3);\ \text{c})\ y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{6}x^2-\frac{5}{6}x;\ \text{d})\ldots\right]$$

3. P(x) è un polinomio di 3° grado tale che $P(x)=1/x$ quando ad x si assegnano i valori 1, −1, 2, −1/2.

a) Calcolare $P(-2)$ e $P(1/2)$.

b) Una volta riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), trovare le equazioni delle due tangenti al grafico di P(x) condotte per il punto di ascissa −1.

c) Ciascuna delle tangenti trovate delimita, con il grafico di P(x), una regione finita di piano: calcolarne l'area.

[**R.** a) Si può seguire un procedimento ordinario oppure spiegare dapprima perché $xP(x)-1$ è un polinomio di 4° grado che si annulla, oltre che per x=0, anche per $x=1, x=-1, x=2, x=-1/2$, per cui $xP(x)-1=\ldots$. In ogni caso si trova: $P(-2)=17/2$, $P(1/2)=-1/4$; b) $y=-4x-5$, $y=\frac{17}{16}x+\frac{1}{16}$; c) $\frac{2187}{64}, \frac{2187}{1024}$]

4. ESERCIZIO RISOLTO. Dimostrare che si ha:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!\,,$$

dove n è un naturale non nullo ed "e" è il numero di Nepero.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione esula dai limiti consueti di un insegnamento pre-universitario e tuttavia non è preclusa ad un liceale che abbia sufficienti nozioni di matematica e capacità di ragionamento. Essa richiede di saper utilizzare il metodo d'integrazione per parti e il principio di induzione, oltre ad altre conoscenze elementari di analisi.

Calcoliamo anzitutto l'integrale indefinito:

$$I_n = \int x^n e^{-x} dx\,.$$

Procediamo per gradi, calcolando a seguire: I_1, I_2, I_3, I_4. Ricorriamo al metodo d'integrazione per parti e prescindiamo dalla costante d'integrazione. Troviamo (il calcolo è lasciato a chi legge):

$I_1 = -e^{-x}(x+1)$,

$I_2 = -x^2e^{-x} + 2\,I_1 = -e^{-x}(x^2 + 2\,x + 2\cdot 1)$,

$I_3 = -x^3e^{-x} + 3\,I_2 = -e^{-x}(x^3 + 3\,x^2 + 3\cdot 2\,x + 3\cdot 2\cdot 1)$,

$I_4 = -x^4e^{-x} + 4\,I_3 = -e^{-x}(x^4 + 4\,x^3 + 4\cdot 3\,x^2 + 4\cdot 3\cdot 2\,x + 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)$.

Sembra di poter congetturare che sia:

$I_n = -x^ne^{-x} + n\,I_{n-1} = -e^{-x}(x^n + n\,x^{n-1} + n\cdot(n-1)\,x^{n-2} + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1)$.

Per convalidare la congettura ricorriamo al principio d'induzione.

Sappiamo già che la base dell'induzione è vera: la formula è infatti vera per $n=1$. Bisogna dimostrare il passo induttivo, far vedere cioè che, ammesso che la formula sia valida per n, è valida anche per $n+1$. Si ha in effetti (anche adesso la prima parte del calcolo, vale a dire la prima uguaglianza, è lasciata a chi legge; segnaliamo soltanto che ancora una volta è necessario il ricorso al metodo d'integrazione per parti):

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)\,I_n = \\ &= -e^{-x}[x^{n+1} + (n+1)\,x^n + (n+1)\cdot n\,x^{n-1} + (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\,x^{n-2} + \cdots + \\ &\quad +(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1]\,. \end{aligned}$$

In conclusione la formula di I_n è valida per ogni n.

A questo punto possiamo calcolare il valore dell'integrale definito. Si ha:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{\alpha\to+\infty}\left\{\left[-\frac{1}{e^\alpha}\left(\alpha^{n+1} + \cdots\right)\right] - \left[(-1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\right]\right\} = 0 + n! = n!$$

5. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri la parabola di equazione $2x=y^2-2y$.

c) Disegnarla assieme alla sua simmetrica rispetto alla retta r di equazione y=x.

d) Le due parabole sono contenute in uno stesso semipiano, il quale ha come origine una retta tangente ad entrambe le parabole: qual è la rappresentazione analitica di questo semipiano?

e) Calcolare l'area della regione finita di piano R delimitata dalle due parabole.

f) Fra i rettangoli inscritti nella regione R (aventi cioè i vertici sul contorno di tale regione e aventi perciò due lati paralleli alla retta r) determinare il quadrato, trovando le coordinate dei suoi vertici.

g) Fra i medesimi rettangoli determinare quello di area massima, trovando le coordinate dei suoi vertici.

h) Verificare che effettivamente l'area del rettangolo di area massima supera quella del quadrato.

[**R.** a)… ; b) $x+y\geq 0$; c) $\frac{32}{3}$; d) $\left(\frac{2}{5}(5+\sqrt{5}),\ \frac{2}{5}(1+\sqrt{5})\right)$, $\left(\frac{2}{5}(5-\sqrt{5}),\ \frac{2}{5}(1-\sqrt{5})\right)$, … ;
e) $(2+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$, $(2-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$, … ; f) …]

6. Sia f(x) una funzione polinomiale. La figura sottostante (Fig. 15) ne rappresenta l'andamento nell'intervallo $[-1,5]$ e l'area ombreggiata è 64/5.

a) Spiegare in modo esauriente qual è il grado minimo della funzione polinomiale.

b) Posto che tale grado sia quello effettivo della funzione, stabilire quale delle seguenti funzioni è la reale funzione in questione e disegnarne l'andamento completo:

$$[A]\ f(x)=\frac{1}{4}(2x+1)(x-4)^2;\quad [B]\ f(x)=\frac{1}{16}(x+2)^2(x-4)^2;\quad [C]\ f(x)=\frac{1}{16}(x+1)^2(4-x)^3 .$$

c) Utilizzare il grafico completo della funzione f(x) per fornire una rappresentazione grafica indicativa delle seguenti funzioni:

$$f'(x),\quad \frac{1}{f(x)} .$$

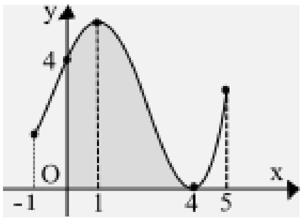

FIG. 15

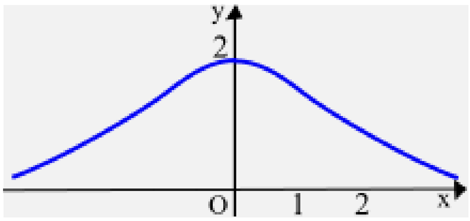

FIG. 16

7. Nella figura sovrastante (Fig. 16) è disegnata una curva di equazione:

$$y=\frac{8\,r^3}{x^2+4r^2}$$

dove r è un numero reale positivo assegnato.

a) Dimostrare che l'equazione si ottiene come luogo geometrico così descritto:
Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è data la circonferenza γ di diametro OA, dove A(0,2r). Si traccia la retta t tangente a γ in A e si chiamano B e C i punti in cui una generica retta p passante per O interseca la circonferenza γ (oltre che in O) e la retta t. Si considera quindi il punto P avente ascissa uguale a quella di C e ordinata uguale a quella di B. La curva assegnata è il luogo geometrico del punto P al variare della retta p nel fascio di centro O.

b) Calcolare per quale valore di r la regione R compresa fra la curva assegnata e l'asse x ha area uguale a π.

c) Per il valore di r così trovato, dimostrare che il solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x ha volume finito e calcolare questo volume.

d) Dimostrare che il solido generato dalla stessa regione R quando ruota di mezzo giro intorno all'asse y ha volume infinito.

[**R**. a) … ; b) r=1/2; c) Per il calcolo dell'integrale si suggerisce la sostituzione x = tan t; si trova $V=\pi^2/2$; d) …]

[NOTA BENE. La curva assegnata è nota (in Italia) come **versiera di Agnesi**. Prende il nome dalla matematica milanese Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), che l'ha descritta nell'opera *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (1748). Ad onor del vero, la curva era già stata oggetto di studio da parte di altri matematici, ma alla Agnesi si deve la denominazione di "versiera". Abbiamo voluto precisare che questa denominazione vale per l'Italia, giacché all'estero, a causa di errate interpretazioni del traduttore dell'opera di Agnesi, è usata la denominazione *strega di Agnesi*]

8. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è disegnata la curva γ (Fig. 17).

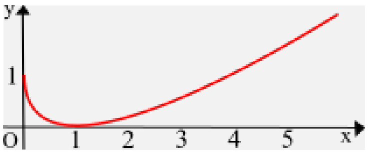

FIG. 17

a) Individuare quale delle seguenti equazioni la rappresenta:

$$y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2;\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=1;\quad y=\left(1-\sqrt{x}\right)^3 .$$

b) Calcolare l'area della regione finita R delimitata dalla curva γ e dalla retta di equazione y=1.

c) Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo intorno all'asse x la regione R.

d) Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo intorno all'asse y la regione R.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)} \ldots;\ \text{b)}\ \frac{8}{5};\ \text{c)}\ \frac{16}{5}\pi;\ \text{d)}\ \frac{64}{3}\pi\right]$

U79 / U80 / U81 – Dati e previsioni

1. In un'urna sono contenute palline di due colori diversi: bianco e nero. Le palline bianche sono 2 in più di quelle nere. Si estraggono a caso due palline, senza reinserimento, e si sa che è uguale a $10/3$ il rapporto fra la probabilità che siano entrambe bianche e quella che siano entrambe nere.

a) Calcolare quante palline bianche e quante palline nere sono contenute nell'urna.

b) Se si esegue l'esperimento di estrarre dall'urna due palline senza reinserimento per sei volte, qual è la probabilità che siano estratte due palline bianche:
1) solamente alla 6ª prova? 2) almeno una volta? 3) esattamente due volte?

[**R.** a) 5 bianche, 3 nere; b1) ≈3,9%; b2) ≈92,9%; b3) ≈32,6%]

2. Si prendano in esame i numeri primi p minori di 30, tali che anche i numeri 2p+1 siano numeri primi [3].

a) Scrivere l'insieme di tali numeri.

b) Se si prendono a caso due distinti di tali numeri, diversi fra loro, qual è la probabilità che la loro somma sia ancora un numero primo?

c) Se si esegue per 5 volte l'esperimento di prendere a caso due dei numeri suddetti, diversi fra loro, qual è la probabilità che al più 2 volte la somma dei due numeri sia ancora un numero primo?

[**R.** a) … ; b) … ; c) ≈87,8%]

3. Si faccia riferimento allo stesso insieme di numeri primi di Germain considerato nel precedente esercizio.

a) Se si prendono a caso due di tali numeri, diversi fra loro, qual è la probabilità che la loro somma sia ancora un numero primo di Germain?

b) Se si esegue per 5 volte l'esperimento di prendere a caso due dei numeri suddetti, diversi fra loro, calcolare la probabilità che la somma dei due numeri sia ancora un numero primo di Germain:
(1) al più una volta; (2) nel 5° esperimento ma non nei 4 precedenti.

[**R.** a) … ; b1) ≈96,1%, b2) ≈5,0%]

4. Tre insiemi – A, B, C – sono costituiti ciascuno da 4 elementi, mentre la loro intersezione è un insieme formato da un solo elemento.

a) Calcolare il minimo e il massimo numero di elementi che può contenere l'insieme unione dei tre insiemi?

b) Si ammetta che l'insieme unione dei tre insiemi A, B, C contenga il minimo numero possibile di elementi:
1) scelto a caso un elemento dell'insieme A, qual è la probabilità che esso sia elemento anche di B?
2) scelti a caso due elementi dell'insieme A, qual è la probabilità che almeno uno di essi sia elemento anche di B? Quale che entrambi siano elementi anche di B?

c) Sempre sotto l'ipotesi che l'insieme unione dei tre insiemi contenga il minimo numero di elementi, si esegue per 5 volte l'esperimento di scegliere a caso due elementi dell'insieme A. Calcolare la probabilità che essi siano entrambi elementi di B:
1) solamente alla 5ª prova; 2) almeno una volta; 3) esattamente una volta.

[**R.** a) MIN=7, MAX=10; b1) 1/2; b2) 5/6, 1/6; c1) ≈8,0%, c2) ≈59,8%, c3) ≈40,1%]

5. Alcuni gettoni sono disposti su n righe e altrettante colonne in modo da formare una sorta di quadrato. I gettoni sono di due colori diversi, bianco e nero, e sono distribuiti in due regioni, i bianchi da una parte e i neri dall'altra, separate da una corda parallela ad uno dei lati del quadrato. I gettoni bianchi sono 5 in più di quelli neri.

a) Quanti sono i gettoni bianchi? Quanti quelli neri?

b) Si prendano a caso due gettoni: qual è la probabilità che siano di colore diverso?

c) Si esegue per 4 volte l'esperimento di prendere due gettoni a caso. Calcolare la probabilità che essi siano

---

[3] Ogni numero primo p tale che anche 2p+1 è un numero primo si chiama ***numero primo di Germain***. Prende il nome dalla matematica francese Marie Sophie Germain (1776-1831), la quale se ne occupò per prima. Si ipotizza che il numero dei numeri primi di Germain sia infinito, ma è solo una congettura non dimostrata. È una delle tante questioni aperte della matematica.

di colore diverso:
1) solamente al 4° esperimento; 2) una sola volta; 3) non più di una volta.

[**R.** a) 15, 10; b) … ; c1) 6,25%, c2) 25%, c3) 31,35%]

6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la parabola e la cubica di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2 - 2x + 1, \quad y = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x + 1.$$

a) Disegnarle dopo aver dimostrato che hanno in comune due punti A e B.
b) La retta AB e la parabola delimitano una regione finita di piano S, mentre la parabola e la cubica delimitano una regione finita di piano R. Calcolare la probabilità che, scelto a caso un punto interno alla regione S, esso sia interno anche alla regione R.
c) Se si esegue per 4 volte l'esperimento di scegliere a caso un punto interno alla regione S, qual è la probabilità che esso risulti almeno una volta interno ad R?

[**R.** a) … ; b) ≈18,67%; c) ≈56,24%]

7. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la parabola p e la circonferenza γ di equazioni rispettivamente:

$$x = y^2 - y\,, \quad x^2 + y^2 - x - y = 0\,.$$

a) Disegnare la parabola e la sua simmetrica p' rispetto alla retta di equazione y=x.
b) Disegnare sullo stesso piano anche la circonferenza, dopo aver dimostrato che risulta tangente in due punti sia alla parabola p sia alla parabola p'-
c) Chiamato P un punto scelto a caso internamente alla regione finita R di piano delimitata dalle due parabole, calcolare la probabilità che P sia interno alla circonferenza γ.
d) Se si esegue per 3 volte l'esperimento di scegliere a caso un punto interno alla suddetta regione R, qual è la probabilità che esso non risulti mai interno alla circonferenza?

7[**R.** a) … ; b) … ; c) ≈58,9%; d) ≈6,9%]

8. Si prenda in esame la funzione:

$$f(x) = \frac{k}{(1+x^2)^2}$$

dove k è un parametro reale.

a) Verificare che una sua primitiva è la funzione:

$$F(x) = \frac{k}{2}\left(\operatorname{atan} x + \frac{x}{1+x^2}\right).$$

b) Trovare per quale valore di k la funzione f(x) può essere considerata la funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria A.
c) Calcolare la probabilità che la variabile aleatoria A assuma un valore non inferiore ad 1.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)} \ldots; \text{b)}\ \frac{2}{\pi}:\ \ \text{c)}\ \frac{\pi-1}{2\pi} \approx 34\%\right]$