Capitolo 1 (Integrazione a unità 28)

Algoritmi e calcolabilità

1. 1 Quesiti a risposta chiusa.

1. 1. 1 Da cosa deriva il termine “algoritmo”?
[A] Dalla parola greca *arithmòs* (numero), per indicare “il trattamento dei numeri”.
[B] Dalle parole *algebra* e *ritmo*, per indicare “il ritmo delle regole” ovvero “l’ordine in cui si succedono le regole di calcolo”.
[C] Dalle parole greche *alché* (forza) e *arithmòs* (numero), per indicare “la forza dei numeri”.
[D] Da una radice diversa dalle precedenti.

1. 1. 2 Quale dei seguenti schemi di calcolo non è un algoritmo?

```
[A] inizio
      x = 2
      mentre x<10 esegui
         x = (2·x)–1
      scrivi(x)
    fine
```

```
[B] inizio
      x = 4
      mentre x<15 esegui
         x = 2·(x–2)
      scrivi(x)
    fine
```

```
[C] inizio
      x = 4
      mentre x<10 esegui
         x = 3·(x div 2)
      scrivi(x)
    fine
```

```
[D] inizio
      x = 2
      mentre x<15 esegui
         x = 2·(x+2)
      scrivi(x)
    fine
```

1. 1. 3 Si consideri il seguente algoritmo:

```
inizio
   a := 1
   b := 1
   mentre a<5 esegui
   inizio
     a := a+1
     b := a·b
   fine
   scrivi(b)
fine
```

Quale dei seguenti problemi risolve?
[A] Calcola il prodotto dei primi 4 numeri interi a partire da 1.
[B] Calcola il prodotto dei primi 5 numeri interi a partire da 1.
[C] Calcola la somma dei primi 4 numeri interi a partire da 1.
[D] Calcola la somma dei primi 5 numeri interi a partire da 1.

1. 1. 4 Si consideri la seguente funzione:

$$f(n)=\begin{cases}1 \text{ se } n=1\\ f(n-1)+2 \text{ se } n>1\end{cases}$$

Quanto vale f(100)?
[A] 99. [B] 101. [C] 199. [D] 201.

1. 2 Quesiti a risposta aperta.

1. 2. 1 È vero o è falso che il minimo comune multiplo di tre numeri naturali è uguale al rapporto fra il prodotto dei tre numeri ed il loro massimo comune divisore?

1. 2. 2 Si consideri il seguente algoritmo e la tabella sottostante:

```
inizio
    leggi(a)
    a := 2·a+1
    b := 2·a–1
    c := a+b
    scrivi(c)
fine
```

a	1	2	3	4
b	5			
c	8			

Dopo aver verificato che sono esatti i valori di b e c corrispondenti ad a=1, completare la tabella.

1. 2. 3 Sulla base del seguente algoritmo completare la tabella sottostante.

```
inizio
    leggi(a)
    b := 3·a–2
    se b>6 allora
      c := a+b
    altrimenti
    c := b–a
    scrivi(c)
fine
```

a	1	2	3	4
b				
c				

1. 2. 4 Scrivere in forma ricorsiva la seguente funzione:

$$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2.$$

1. 3 Risposte commentate: **quesiti a risposta chiusa**.

Quesito 1. 1. 1. Il termine “algoritmo” deriva dal nome di un matematico arabo, Mohammed ibn-Musa al-Khwarīzmi, o meglio da una sua opera *sui numeri degli Indiani*, che fu tradotta in latino nel modo seguente: *Algorithmi de numero indorum* (cioè: *Intorno al numero degli Indiani di al-Khwarīzmi*). Siccome l’opera fu largamente diffusa in Occidente nel XII sec., si diffuse con essa anche il termine "algoritmo", per indicare però non già il matematico arabo, bensì "una procedura di calcolo". [D] è pertanto l'alternativa corretta.

Quesito 1. 1. 2. [B] è l'alternativa corretta. In effeti, lo schema di calcolo ivi descritto fornisce in uscita sempre il numero 4 che, essendo minore di 15, determina una situzione di loop. È semplice constatare poi che l'algoritmo [A] dà luogo alla seguente successione di numeri: 3, 5, 9; l'algoritmo [C] a quest'altra: 6, 9; l'algoritmo [D] infine genera il solo numero 8.

Quesito 1. 1. 3. Andiamo a vedere qual è l'uscita del programma di calcolo. Lo facciamo mediante una tabella che espliciti alcuni passaggi.

a	1	2	3	4
a+1	2	3	4	5
b	2	6	24	120

Dunque in uscita abbiamo il numero 120, che è uguale ad $1\times2\times3\times4\times5$, vale a dire il prodotto dei primi 5 numeri interi a partire da 1

Quesito 1. 1. 4. È sufficiente constatare, magari dopo qualche caso particolare che aiuti ad indovinare la formula giusta, che si ha: $f(n)=2n-1$. Ragion per cui $f(100)=2\times100-1=199$. [C] è l'alternativa corretta.

1. 4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 1. 2. 1. È falso. Per provarlo basta un controesempio. Si prendano allora i numeri 2, 3, 4. È facile constatare che $mcm(2,3,4)=12$. Invece, stabilito che $MCD(2,3,4)=1$, risulta $\frac{2\times3\times4}{1}=24$. Solo se i tre numeri sono due a due primi fra loro il loro mcm è uguale al rapporto fra il loro prodotto ed il loro massimo comune divisore, che è 1.

Ed allora, ci si potrebbe domandare, non si può ricorrere all'algoritmo di Euclide per la ricerca del minimo comune multiplo di tre numeri? Si può fare, ma bisogna procedere per gradi: dapprima si calcola il minimo comune multiplo di due numeri come rapporto fra il loro prodotto ed il loro massimo comune divisore e poi si trova il minimo comune multiplo fra quello trovato ed il terzo numero. In questo modo, ritornando all'esempio dei numeri 2, 3, 4, dapprima si trova m.c.m.$(2,3)=\frac{2\times3}{1}=6$; quindi si trova m.c.m.$(6,4)=\frac{6\times4}{2}=12$.

Quesito 1. 2. 2. La tabella completa è la seguente:

a	1	2	3	4
b	5	9	13	17
c	8	14	20	26

Quesito 1. 2. 3. La tabella completa è la seguente:

a	1	2	3	4
b	1	4	7	10
c	2	6	10	14

Quesito 1. 2. 4. È facile constatare che per n>1 risulta $f(n)=f(n-1)+n^2$, per cui la forma cercata è la seguente:

$$f(n)=\begin{cases}1 \text{ se } n=1\\ f(n-1)+n^2 \text{ se } n>1\end{cases}$$

1.5 Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi: vita ed opere.

al-Khwarizmi

La Biblioteca di Alessandria era la più fornita biblioteca del mondo antico e conteneva oltre 500 mila rotoli. Ad un certo momento fu distrutta, ma le notizie al riguardo sono incerte.
Sembra che abbia subìto quattro distruzioni parziali, avvenute la prima nel 47 a.C. ad opera dei legionari di Giulio Cesare, la seconda nel 275 d.C., sotto l'impero di Aureliano, la terza nel 295 essendo imperatore Diocleziano e la quarta nel 415 ad opera dei monaci seguaci di San Cirillo. Durante quest'ultima distruzione avrebbe trovato la morte Ipatia, matematica, astronoma e filosofa greca, figlia del matematico Teone di Alessandria, autore di un commento agli *Elementi* di Euclide.
La biblioteca sarebbe stata poi totalmente distrutta nel 641, per ordine del califfo Omar ibn al-Khattab (successore di Abu Bakr, che era succeduto a Maometto). Al generale che gli chiese cosa avrebbe dovuto fare dei libri che essa ospitava pare abbia dato la seguente risposta: «*Se i libri non riportano quanto scritto dal Corano allora vanno distrutti, poiché non dicono il vero. Se riportano quanto scritto dal Corano vanno distrutti ugualmente perché sono inutili*».
Dopo circa 150 anni, gli Arabi, placata la loro sete di conquista, pensarono di costruire a Baghdad una grande biblioteca, che fu poi denominata la "Casa della Sapienza" e divenne, forse senza che essi lo volessero, l'autentica erede della biblioteca di Alessandria. L'opera, iniziata sotto il califfo al-Mansur negli ultimi decenni del secolo VIII, proseguita col califfo Harum al-Rashid, fu completata dal figlio di costui, il califfo al-Mamun. Questi nominò responsabile della biblioteca il matematico e astronomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi, vissuto all'incirca fra il 780 e l'850. Il suo nome significa letteralmente "Maometto, figlio di Musa, della regione del Kwarizm (o Chorasmia, nell'attuale Uzbekistan)" che ne suggerisce la regione di provenienza, anche se non si è certi di questo. Qualcuno sostiene infatti che, se è vero che i suoi antenati provenissero da quella regione, egli era nato invece in una località vicino a Baghdad. Ad ogni modo al-Khwarizmi trascorse molto del suo tempo nella biblioteca di Baghdad e sotto la sua direzione furono tradotti in arabo, fra l'altro, le principali opere greche di matematica, ed in particolare gli *Elementi* di Euclide.
Al-Khuwarizmi fu anche autore di varie opere, per lo più di genere astronomico, ma due libri a contenuto matematico ci interessano particolarmente.

Il primo ci è pervenuto in una traduzione latina del XII sec., attribuita al filosofo, matematico e astrologo britannico Adelardo di Bath (ca. 1080 – ca. 1152) col titolo *Algorithmi de numero Indorum* (*Intorno al numero degli Indiani di al-Khwarizmi*): fece conoscere nel mondo occidentale la numerazione indo-araba e introduceva nel linguaggio matematico il termine "algoritmo", oggi inteso come insieme di regole di calcolo con caratteristiche determinate, ma in origine riferito solamente al nome dell'autore dell'opera, al-Khwarizmi per l'appunto.

Il secondo libro ha per titolo *al-jabr wa'l muqabalah*, che nella versione latina pervenutaci diventò *Liber algebrae et almucabala*. È un vero e proprio manuale di algebra e proprio da tale libro deriva la parola "algebra", come oggi la intendiamo. In realtà i termini "al-jabr" ed "al-muqabalah" pare che significhino "soppressione" e "trasporto". Vale a dire soppressione di termini opposti nello stesso membro (di un'equazione) o di termini uguali in due membri diversi e trasporto di un termine da un membro all'altro dell'equazione ovviamente con segno cambiato.

Crediamo che possa far piacere a chi legge avere almeno un'idea del modo in cui al-Khwarizmi risolve le equazioni di 2° grado. Quantomeno quelle che si possono mettere nella forma $x^2+ax=b$, essendo a, b numeri positivi. Per quelle che hanno forme differenti da questa al-Khwarizmi propose altri procedimenti.

Si voglia allora risolvere l'equazione $x^2+10x=39$.

Nella prima parte della sua opera l'autore indica meticolosamente tutte le operazioni che bisogna eseguire per giungere alla soluzione (quella positiva, che è l'unica che egli riconosce). Lo fa con le parole del linguaggio comune, giacché non dispone di alcun simbolismo. In realtà anche l'equazione che abbiamo scritto sopra è descritta a parole e non nel modo simbolico da noi seguito. Il procedimento descritto, comunque, si può sintetizzare nella seguente formula:

$$x=\frac{\sqrt{10^2+4\times 39}}{2}-\frac{10}{2}\ \left(=\frac{16}{2}-\frac{10}{2}=3\right).$$

Nella seconda parte al-Khwarizmi spiega, con considerazioni di natura geometrica, la validità del procedimento. È su questa spiegazione che fermiamo la nostra attenzione.

Si costruisce dapprima un quadrato di lato x (Fig. 1.2) e, quindi, esternamente ad esso, e con un vertice in ciascuno dei suoi vertici, si costruiscono 4 quadrati uguali di lato 10/4 (cioè 1/4 del coefficiente di x – Fig. 1.3). Infine la figura viene completata formando un nuovo quadrato di lato $x+2\cdot\frac{10}{4}$ (Fig. 1.4).

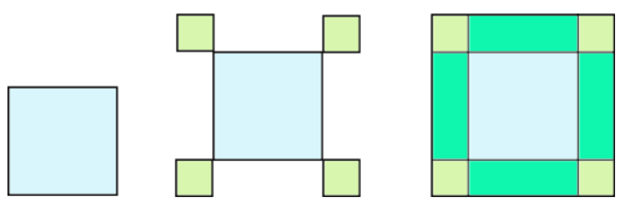

FIG. 1.2 FIG. 1.3 FIG. 1.4

Si constata subito che l'area dell'ultimo quadrato è:

$$\mathrm{S}=\mathrm{x}^2+4\left(\frac{10}{4}\right)^2+4\left(\frac{10}{4}\mathrm{x}\right)\quad \text{ossia:}\quad \mathrm{S}=\mathrm{x}^2+10\mathrm{x}+25\,.$$

Siccome, per i dati, $x^2+10x=39$, allora: S=39+25=64. Ragion per cui il lato dell'ultimo quadrato è 8.

Di conseguenza: $x=8-2\cdot\frac{10}{4}=3$.

Se si riflette sui vari passaggi, si constata che l'intero procedimento porta alla seguente equazione:

$$\left(x+\frac{10}{2}\right)^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2+39\,.$$

Equazione che, riferita al caso generale $x^2+ax=b$, diventa:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b\,,$$

d cui (prendendo la sola radice positiva) segue:

$$x=\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}-\frac{a}{2}\,.$$

Alcune considerazioni a margine.

Si può constatare, riflettendo sul procedimento di al-Khwarizmi, che la risoluzione dell’equazione implica la costruzione geometrica di un idoneo quadrato.

In realtà, anche il procedimento di risoluzione algebrica, che potremmo seguire oggigiorno se non volessimo usufruire della formula risolutiva, implica la costruzione di un quadrato. Infatti, riprendendo l’equazione precedente, possiamo scrivere in successione:

$$x^2+10x=39,\quad x^2+10x+25=39+25,\quad \mathbf{(x+5)^2}=64,\quad x+5=8,\quad x=3.$$

Naturamente ci siamo soffermati sulla sola radice positiva, come avrebbe fatto al-Khwarizmi.