Capitolo 1 (Integrazione a unità 1-2-3-4)

Calcolo numerico e primo approccio col calcolo letterale

1.1 Quesiti a risposta chiusa.

1.1.1 Quanti numeri di due cifre, scritti nel consueto sistema decimale di numerazione, si ottengono moltiplicando due numeri naturali pari consecutivi?

[A] 3 [B] 4 [C] 5 [D] 6

1.1.2 Quale dei seguenti modi di interpretare il numero 18 è sbagliato ?

[A] È il prodotto di un numero naturale per il suo doppio.

[B] Ammette 4 divisori propri.

[C] Si può scrivere come somma di due numeri primi.

[D] Si può scrivere utilizzando il solo numero 2 e soltanto per 4 volte.

1.1.3 La cifra delle unità, nello sviluppo della potenza $2^{1.000.000}$ scritto nell'usuale sistema decimale di numerazione, è:

[A] 2 [B] 4 [C] 6 [D] 8

1.1.4 Quale dei seguenti numeri è divisibile per 11?

[A] 67.827.572 [B] 67.827.573 [C] 67.827.574 [D] 67.827.575

1.1.5 In un torneo di calcio a 16 squadre, con partite di andata e ritorno, una squadra guadagna 3 punti se vince, 1 punto se pareggia e 0 punti se perde. Alla fine del torneo la squadra del Borgorosso ha vinto tante partire quante ne ha pareggiate ed ha realizzato uno solo dei seguenti punteggi. Quale?

[A] 34. [B] 44. [C] 54. [D] 64.

1.1.6 Considerati due qualsiasi numeri razionali, quale delle seguenti affermazioni è esatta?

[A] La loro somma è maggiore di ciascuno degli addendi.

[B] Se sono negativi, il loro prodotto è minore di ciascuno dei fattori.

[C] Se sono positivi, il loro prodotto è maggiore di ciascuno dei fattori.

[D] Le tre affermazioni precedenti sono tutte false.

1.1.7 Indicati con q ed r rispettivamente il quoziente e il resto della divisione di -17 per -3, quale delle seguenti conclusioni è quella corretta?

[A] $q = 5,\ r = 2$ [B] $q = 5,\ r = -2$ [C] $q = -5,\ r = 2$ [D] $q = -5,\ r = -2$

1.1.8 Qual è la caratteristica del valore dell'espressione $2a^2+b^2+1$ quando ad a e b si sostituiscono numeri razionali negativi?

[A] È positivo per qualunque scelta di a, b.

[B] È negativo per qualunque scelta di a, b.

[C] Può essere nullo per qualche coppia a, b.

[D] Ha un segno che non è possibile determinare poiché i dati forniti sono insufficienti.

1.1.9 Quale delle seguenti affermazioni è quella esatta?

[A] Il quadrato di un numero razionale è concorde col numero.

[B] Il prodotto di due numeri razionali concordi è concorde con essi.

[C] Se il numero razionale a è minore del numero razionale b allora $a^2<b^2$.
[D] Le precedenti affermazioni sono tutte e tre false.

1.1.10 Sia a un numero razionale positivo diverso da 1. Quale delle seguenti affermazioni è quella esatta?
[A] Risulta $a^2>a$ per ogni scelta di a.
[B] Risulta $2^a<2$ per qualche a.
[C] Risulta $a^0\neq 1$ per ogni a.
[D] Le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

1.1.11 Precisato che con la scrittura E(x) si indica la parte intera del numero x, quanti sono esattamente i numeri interi positivi n, non maggiori di 1000, tali che:

$$E\left(\frac{n}{2}\right)+E\left(\frac{n}{5}\right)=\frac{n}{2}+\frac{n}{5} \ ?$$

[A] 50 [B] 100 [C] 150 [D] 200

1.1.12 Indicati con a, b due numeri reali qualsiasi, quale delle seguenti uguaglianze è corretta?
[A] $|a+b|=|a|+|b|$
[B] $|a-b|=|a|-|b|$
[C] $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$
[D] Le uguaglianze precedenti sono tutte e tre false.

1.1.13 Quale frazione bisogna sottrarre alla somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ per ottenere 1?

[A] $\frac{1}{2}$ [B] $\frac{1}{3}$ [C] $\frac{1}{5}$ [D] $\frac{1}{6}$

1.1.14 Quella volta 1 euro era quotato 1,5871 dollari americani. Quanti euro all'incirca era quotato un dollaro?
[A] 0,8254 [B] 0,6300 [C] 0,7972 [D] 0,5544

1.1.15 Il prezzo di un cappotto, che era € 950, durante la stagione dei ribassi è scontato del 18%. Qual è ora il prezzo dell'abito?
[A] € 171 [B] € 932 [C] € 779 [D] Un valore diverso

1.1.16 Quale delle seguenti uguaglianze è FALSA?

[A] $\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ [B] $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ [C] $\sqrt{6}-\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$ [D] $\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{7}{\sqrt{7}}$

1.1.17 Le due dimensioni di un foglio di carta A4 hanno le seguenti misure: (29,70±0,02) cm e (21,00±0,02) cm. Qual è approssimativamente l'errore relativo da cui è affetto il perimetro del foglio ?
[A] 0,02% [B] 0,04% [C] 0,06% [D] 0,08%

1.2 Quesiti a risposta aperta.

1.2.1 Prova a completare la tabella sottostante. Si rivelerà una curiosa proprietà del numero 37. Quale? Sapresti darne una spiegazione?

$37\times$	3	6	9	12	15	18	21	24	27
$=$									

1.2.2 I matematici sanno che i numeri a e a^5, dove a è un numero naturale, hanno uguale la cifra delle unità. Provare a verificarlo completando la tabella sottostante, con l'aiuto, se occorre, di una calcolatrice.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^5									

1.2.3 Un numero, scritto nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, è formato da 11 cifre, tali che la somma di 3 cifre consecutive, comunque scelte, è costante. Si sa che questa costante è 12 e che la 3ª e la 7ª cifra, leggendo a partire da sinistra, sono rispettivamente 5 e 3. Trovare il numero e verificare che la somma delle sue 11 cifre è un numero primo.

1.2.4 Conosci qualche proprietà che non si conserva nel passaggio dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali all'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi?

1.2.5 È vero che, considerati due qualsiasi numeri interi a, b, risulta $|a+b|=|a|+|b|$ e $|ab|=|a||b|$?

1.2.6 È vero che la somma di due interi qualsiasi è maggiore di ciascuno degli addendi?

1.2.7 È vero che, quali che siano i numeri interi a, b, c, d purché $b\neq 0$, $d\neq 0$ e $b+d\neq 0$, risulta:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}\ ?$$

1.2.8 Sia a un qualsiasi numero razionale positivo diverso da 1 e sia b un qualsiasi numero naturale maggiore di 1. È vero che $a^b>a$?

1.2.9 È vero che, essendo $49>9$, si ha: $0{,}49>0{,}9$?

1.2.10 Scrivi la frazione $\frac{101}{23}$ come somma di un numero naturale e di una frazione propria.

1.2.11 Scrivi la frazione che genera il numero decimale periodico $5,\overline{5}$.

1.2.12 Il numero 0,22333…, dove i puntini di sospensione indicano una successione infinita di 3, è razionale o irrazionale?

1.2.13 Sia il numero 0,090990999…, dove i puntini di sospensione indicano uno "0" seguito da quattro "9" e poi ancora uno "0" seguito da cinque "9" e così via con la stessa alternanza di cifre. È un numero razionale o irrazionale?

1.2.14 Si sa che tra due qualsiasi numeri razionali è sempre possibile inserire almeno un numero irrazionale. Costruire un numero irrazionale compreso fra i numeri razionali $1,\overline{24}$ e $1,\overline{25}$.

1.2.15 Si sa che fra due qualsiasi numeri irrazionali è sempre possibile inserire almeno un numero razionale. Costruire un numero razionale compreso fra i numeri irrazionali 0,20200200020000… e 0,20220222022220… .

1.2.16 È vero che, quale che sia il numero reale a, risulta $\sqrt{a^2}=a$?

1.2.17 Di una lunghezza è stata trovata la seguente misura: L = (80,0±0,8) cm. È vero che l'errore relativo di cui è affetta questa misura è all'incirca 1,0% cm?

1.2.18 In apogeo (punto più lontano dalla Terra) la distanza Luna-Terra è di circa 405.696 km. È corretto affermare che un valore arrotondato di tale distanza è $4{,}1\times10^5$ km? Qual è il suo ordine di grandezza?

1.2.19 Il sig. Giulio ha tre figli: due sono gemelli, il maggiore è biondo. Le età dei tre figli sono tali che il loro prodotto è uguale a 36 mentre la loro somma è un numero dispari. Quali sono queste età?

1.3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 1.1.1. Basta elencare i prodotti di due numeri naturali pari consecutivi:

$$0\times2,\ 2\times4,\ 4\times6,\ 6\times8,\ 8\times10,\ 10\times12,\ \dots,$$

vale a dire: 0, 8, 24, 48, 80, 120, … . I numeri cercati sono allora 3. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 1.1.2. L'alternativa corretta è [B], dal momento che i divisori propri di 18 sono 5 e precisamente i numeri: 1, 2, 3, 6, 9.
Le altre alternative sono da scartare poiché ciascuna di esse è un modo esatto di interpretare il numero 18. Infatti: $18=3\times6$; $18=7+11$; $18=2^{2^2}+2$.

Quesito 1.1.3. Bisogna tener presente che si può scrivere: $2^{1.000.000}=(2^4)^{250.000}=16^{250.000}$.
D'altra parte, moltiplicando 16 per se stesso quante volte si vuole, l'ultima cifra del numero che si ottiene è invariabilmente 6, per cui l'alternativa corretta è [C].

Quesito 1.1.4. Diciamo subito che l'alterntiva corretta è [B]. Può essere trovata con un idoneo strumento di calcolo automatico, oppure con carta e penna, ma in questo secondo caso può far comodo conoscere preventivamente la regola di divisibilità per 11, che è la seguente: «Si sommano le cifre che formano il numero, prendendole però alternativamente col segno "+" e col segno "–": se e solo se la somma algebrica è divisibile per 11 anche il numero assegnato lo è». Nel caso specifico, riguardo all'alternativa [B], la somma algebrica delle cifre del numero 67.827.573, prese con segni "più" e "meno" alternati, è la seguente:

$$(+6)+(-7)+(+8)+(-2)+(+7)+(-5)+(+7)+(-3)=11,$$

ed è evidente che è divisibile per 11. Pertanto anche il numero da cui essa deriva lo è. In effetti:

$$67.827.573=3^2\times11\times499\times1373.$$

Naturalmente nessuno degli altri tre numeri ha questa proprietà.

Quesito 1.1.5. Il punteggio realizzato dalla squadra del Borgorosso deve essere un multiplo di 4. Perché? Tra le alternative proposte vi sono due soli numeri siffatti: 64 e 44. Ma il primo è da scartare dal momento che supera il massimo punteggio ottenibile dalla squadra (che avrebbe vinto tante partite quante ne ha pareggiate). Infatti, tenuto presente che le partite giocate sono 30, la squadra del Borgorosso ne avrebbe vinte al più 15 e pareggiate altrettante e quindi avrebbe totalizzato 60 punti. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 1.1.6. L'alternativa [A] è errata: $(-1)+(+1)=0$ e 0 non è maggiore di ciascuno dei due addendi.

Anche l'alternativa [B] è errata: il prodotto di due numeri negativi è positivo e, quindi, maggiore di entrambi i fattori.
Così pure è errata l'alternativa [C]: $\frac{1}{2}\times 2=1$ ed 1 non è maggiore di ciascuno dei fattori.
In conclusione, l'alternativa corretta è [D].

Quesito 1.1.7. Com'è noto, nella divisione del naturale a per il naturale $b\neq 0$, il quoziente q ed il resto r sono due numeri naturali tali che $r<b$ ed $a=bq+r$ e q è il massimo numero tale che $bq\leq a$, per cui $b(q+1)>a$. Quando invece i numeri a, b sono interi, è ancora $a=bq+r$, dove però il quoziente q è il numero tale che $|q|$ è il massimo numero per cui si ha $|b|\cdot|q|\leq|a|$ e il resto r è tale che $|r|<|b|$. Ne consegue che l'alternativa corretta è [B]. D'altro canto, basta una semplice verifica per accertare che $a=bq+r$, vale a dire: $-17=(-3)\cdot(5)+(-2)$. E questo solamente per l'alternativa [B].

Quesito 1.1.8. La risposta a questo quesito è immediata: l'alternativa corretta è [A] dal momento che, per qualsiasi scelta di a e b, i numeri a^2 e b^2 sono non negativi e, pertanto, anche $2a^2+b^2$ è un numero non negativo e, di conseguenza, $2a^2+b^2+1$ è un numero positivo.

Quesito 1.1.9. L'alternativa [A] è errata: $(-1)^2=1$.
Anche l'alternativa [B] è errata: $(-4)(-2)=8$.
Così pure l'alternativa [C]: $-1<1$ eppure $(-1)^2$, cioè 1, non è minore di 1^2, che è ancora 1.
L'alternativa corretta è [D].

Quesito 1.1.10. L'affermazione [A] è falsa. Infatti:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}.$$

Siccome $2^{1/2}<2$, la [B] è vera.
La [C] è falsa, dal momento che $a^0=1$ se a è diverso da 0.
La [D] è falsa poiché non tutte le precedenti affermazioni sono false.
L'alternativa corretta è, in definitiva, la [B].

Quesito 1.1.11. Affinché valga l'uguaglianza proposta è necessario (e sufficiente) che il numero n sia multiplo tanto di 2 quanto di 5. Come dire che n deve essere multiplo di 10. Ora, di multipli di 10 non maggiori di 1.000 ve ne sono tanti quanti ne indica il quoziente intero di 1.000 per 10, vale a dire 100.
L'alternativa corretta è [B].

Quesito 1.1.12. L'alternativa [A] è errata: $|(+2)+(-2)|=0$, mentre $|+2|+|-2|=4$.
Anche l'alternativa [B] è errata: $|(+2)-(-3)|=5$, mentre $|+2|-|-3|=-1$.
Così pure l'alternativa [C], dal momento che $\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$.
L'alternativa corretta è [D].

Quesito 1.1.13. La somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ è uguale ad 1. Pertanto la frazione che bisogna sottrarre alla somma assegnata per ottenere 1 è $\frac{1}{5}$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 1.1.14. Basta calcolare il reciproco di 1,5871. Se, infatti, € x rappresenta il valore cercato, deve valere la seguente proporzione: € 1 / \$ 1,5871 = € x / \$ 1 . Si trova 0,6300. Pertanto 1 dollaro americano equivaleva a circa 0,6300 euro. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 1.1.15. Il prezzo scontato del cappotto è 950 – 0,18×950 = 779 (€).
[C] è l'alternativa corretta.

Quesito 1.1.16. Le prime tre uguaglianze sono vere, come si può facilmente controllare.
L'ultima uguaglianza è invece falsa. Si ha infatti:

$$\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}}\neq\frac{7}{\sqrt{7}}.$$

[D] è l'alternativa corretta.
Detto per inciso, se n è un qualsiasi intero positivo, risulta:

$$\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n-1}{\sqrt{n}}.$$

Quesito 1.1.17. Si tratta di sommare 4 grandezze, affette tutte da un errore assoluto di 0,02 cm. L'errore assoluto che si commette è, pertanto, di 4 volte 0,02 cm, vale a dire di 0,08 cm. Il perimetro del foglio è, allora: (101,4±0,08) cm. Di modo che l'errore relativo è:

$$\varepsilon_r=\frac{0{,}08}{101{,}4}\approx 0{,}08\%\,.$$

[D] è l'alternativa corretta.

1.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 1.2.1. La curiosità sta nel fatto che 37×3=111, cioè un numero di tre cifre tutte uguali ad 1. Da qui in poi, constatando che i numeri 6, 9, …, 27 sono nell'ordine i multipli di 3 secondo i numeri 2, 3, …, 9, si ottiene facilmente, senza eseguire calcoli complicati, che il prodotto di 37 per ciascuno di questi numeri è uguale ancora ad un numero di tre cifre uguali fra loro e uguali rispettivamente a 2 (ossia: 111×2), o 3 (ossia: 111×3), …, o 9 (ossia: 111×9).

Quesito 1.2.2. Vedere il breve commento che segue la "Antologia".

Quesito 1.2.3. Fermiano l'attenzione sulle cifre di posti 4 e 5, a partire d sinistra. La loro somma è evidentemente uguale a 7, per cui la cifra di posto 6 è 5. Ne consegue che quella di posto 5 è 4. Da qui in poi il procedimento è semplice.

Quesito 1.2.4. Per la verità ce n'è più d'una. Per esempio
- L'insieme ℕ ha un minimo, che è 0, mentre l'insieme ℤ non ce l'ha.
- Mentre nell'insieme ℕ, per ogni scelta di a, b ed m (con m≠0) si ha che:
  $$a>b\ \rightarrow\ am>bm,$$
  nell'insieme ℤ questa proprietà vale solo se m>0.
- Se nell'insieme ℕ la somma di due addendi qualsiasi, entrambi non nulli, è maggiore di ciascuno degli addendi, ciò non vale nell'insieme ℤ: (−2)+(+1)<(+1).

Quesito 1.2.5. Delle due uguaglianze solo la seconda è vera per ogni scelta di a, b.
Infatti, sia |ab| sia |a||b| sono interi non negativi che hanno come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei due numeri.
Nel caso della somma, invece, la relazione è falsa. Basta constatare che si ha: |−3+2|=1, mentre si ha: |−3|+|+2|=5. La relazione corretta è la seguente: |a+b|≤|a|+|b|. Quando vale il segno di uguaglianza?

Quesito 1.2.6. È falso. Vedere le considerazioni che chiudono la risposta al precedente quesito 1.2.3.

Quesito 1.2.7. È falso. Basta constatare che si ha: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, mentre $\frac{1+1}{2+2}=\frac{1}{2}$.

Quesito 1.2.8. È falso. Basta constatare che si ha: $\left(\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$.

Quesito 1.2.9. È vero che 49>9, ma è falso che 0,49>0,9. D'altra parte è evidente che si passa da 49 a 0,49 dividendo per 100, mentre si passa da 9 a 0,9 dividendo per 10: il confronto è improponibile. Per effettuare un confronto che abbia senso, bisognava dividere entrambi i membri per 100, ottenendo la relazione vera 0,49>0,09 oppure per 10, ottenendo ancora la relazione vera 4,9>0,9. Invece, per un confronto diretto dei numeri 0,49 e 0,9 bisogna tener presente che 0,9=0,90, per cui 0,49<0,90. In altre parole, il numero 0,49 indica 4 decimi e 9 centesimi, mentre il numero 0,9 indica 9 decimi e il primo è certamente minore del secondo.

Quesito 1.2.10. Bisogna effettuare la divisione di 101 per 23: si ottiene quoziente 4 e resto 9, per cui: $101 = 23\times 4 + 9$. Si ha pertanto:

$$\frac{101}{23}=\frac{23\times 4+9}{23}=4+\frac{9}{23}.$$

Quesito 1.2.11. Si ha: $5,\overline{5}=\frac{55-5}{9}=\frac{50}{9}$.

Quesito 1.2.12. Si tratta di un numero decimale illimitato periodico misto con periodo 3 ed antiperiodo 22 con parte intera nulla. Vale a dire del numero $0,22\overline{3}$, che è perciò un numero razionale. Esso si può mettere sotto forma di frazione, nel seguente modo:

$$0,22\overline{3}=\frac{223-22}{900}=\frac{201}{900}=\frac{67}{300}.$$

Quesito 1.2.13. Si tratta di un allineamento decimale illimitato non periodico e perciò di un numero irrazionale.

Quesito 1.2.14. Poiché $1,\overline{24}$=1,242424… e $1,\overline{25}$=1,252525…, basta prendere il numero 1,245, certamente compreso fra di essi, e costruire su di esso un idoneo allineamento decimale illimitato non periodico, come per esempio:

1 , 245 01 011 0111 01111… ,

la cui legge di formazione è evidente.

Quesito 1.2.15. Basta prendere la semisomma di 0,2020 e 0,2022 che è 0,2021 ed è esattamente un numero razionale compreso fra i due numeri irrazionali assegnati.

Quesito 1.2.16. È falso. Solo se a è non negativo risulta vera l'uguaglianza. Se, al contrario, a<0, risulta: $\sqrt{a^2}=|a|$.

Quesito 1.2.17. È falso. L'errore relativo è un numero senza "etichette", vale a dire un numero puro. Nel caso specifico è circa 1,0% e non 1,0% cm.

Quesito 1.2.18. Sì, $4,1\times 10^5$ km è il valore arrotondato, con due cifre significative, della grandezza 405.696 km. Il suo ordine di grandezza è 10^5 km.

Quesito 1.2.19. Considerato che il prodotto delle tre età è uguale a 36 e constatato che $36=1\cdot2^2\cdot3^2$ e che due età sono uguali, le età possibili sono le seguenti:

1, 1, 36;   1, 6, 6;   2. 2, 9;   4, 3, 3.

Siccome però la loro somma è un numero dispari, rimangono solamente queste due possibilità:

1, 6, 6;   2, 2, 9.

D'altro canto, si sa che il figlio maggiore (non importa che sia biondo o bruno) non può essere uno dei due gemelli. Le età dei figli del sig. Giulio sono pertanto: 2, 2, 9.

1.5 Antologia.

Riportiamo un breve brano tratto da un romanzo per ragazzi [(1)]. Racconta «una vacanza straordinaria, non priva di brividi e colpi di scena, in cui si scopre che i geni matematici sono in realtà degli artisti e che la matematica non è solo 'l'arte di fare i calcoli', ma una materia piena di misteri e di sorprese».
«Il professor Primo non perse la sua flemma. Guardò Christian e lo esortò: "Scegli un numero [intero, n.d.A.] tra 1 e 9 senza dirmi qual è".
«Fin qui non era un problema. Scelse il numero 7.
«"Ora elevalo alla quinta potenza, […]"
«Christian aveva capito perfettamente quello che doveva fare, ma era un calcolo difficile da eseguire a mente. Laura aveva con sé una calcolatrice tascabile e gliela porse. Christian digitò i numeri e, una volta ottenuto il risultato, annuì.
«"Adesso vieni qui e scrivi il numero alla lavagna" gli disse il professore facendogli un cenno, "e io ti saprò dire subito qual è il numero che hai scelto. Sarò in grado cioè di estrarre immediatamente la radice quinta del numero che scriverai alla lavagna".
«Il professor Primo gli porse il suo gessetto, ancora inutilizzato. Christian scrisse sulla lavagna 16.807.
«Di botto il professore disse: "Facile. Hai scelto il numero 7". Christian annuì. Il pubblico era sbalordito e applaudì entusiasta.
«"Facciamo un altro tentativo". Guardò una studentessa in prima fila e le fece un cenno. La ragazza, che aveva la calcolatrice tascabile già pronta, digitò i numeri e scrisse alla lavagna 59.049.
«"La radice quinta di questo numero è 9" disse subito il professor Primo.
«Di nuovo ottenne un meritato applauso. Tutti erano ansiosi di scoprire come funzionasse il trucco, e lui non li deluse. "Non ho bisogno di fare nessun calcolo, mi basta guardare l'ultima cifra. L'ultima cifra del numero è la soluzione. […]".
«Nella sala vi fu un mormorio generale. Gli studenti volevano provare il trucco con altri numeri, ma il professor Primo non diede loro tregua: "Ciò dipende dal fatto che ogni numero ha la stessa cifra finale della sua quinta potenza". Lo scrisse alla lavagna:

« x e x^5 hanno la stessa cifra finale ».

La spiegazione di questo fatto è implicita nella compilazione della tabella proposta nel precedente quesito N°1.2.2, dove si mostra che i numeri interi da 1 a 9, elevati alla 5ª potenza, terminano con le stesse cifre rispettivamente da 1 a 9. Per quanto riguarda, poi, i numeri interi maggiori di 9, basta constatare che, riguardo all'ultima cifra, si comportano esattamente come i numeri da 1 a 9. Nel

[1] Albrecht Beutelspacher, *Gli artisti dei numeri* (trad. di Alessandro Peroni), Milano, Salani Editore, 2008, pag. 72 e segg.

senso che, considerato un qualsiasi numero inaturale x, che termina con la cifra a, il numero x^n termina con la medesima cifra con cui termina a^n, qualunque sia il numero naturale n. Così, per esempio, 129^n termina con la stessa cifra di 9^n.
In particolare, preso un qualsiasi numero naturale x, che termina con la cifra a, il numero x^5 termina con la stessa cifra con cui termina a^n, cifra che è esattamente a, come mostrato dalla tabella succitata.