Capitolo 10 (Integrazione a unità 46)

Trasformazioni nel piano: rappresentazione analitica

10.1 Quesiti a risposta chiusa.

10.1.1 Tra le isometrie:
[A] non ne esiste alcuna che conservi la direzione;
[B] solamente la traslazione e la simmetria centrale conservano la direzione;
[C] solamente la simmetria assiale conserva la direzione;
[D] tutte conservano la direzione.

10.1.2 Quale proprietà delle figure geometriche si conserva in un'isometria e non si conserva invece in una similitudine?
[A] Allineamento dei punti. [B] Parallelismo delle rette.
[C] Distanza dei punti. [D] Ampiezza degli angoli.

10.1.3 Le equazioni della trasformazione geometrica, ottenuta effettuando dapprima la traslazione di componenti (1,3) e, di seguito, l'omotetia avente centro nell'origine O del sistema cartesiano (Oxy) di riferimento e caratteristica $-\frac{1}{2}$, sono le seguenti:

[A] $x'=-\frac{1}{2}x+3,\ \ y'=-\frac{1}{2}y+1$; [B] $x'=-\frac{1}{2}x+1,\ \ y'=-\frac{1}{2}y+3$;
[C] $x'=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ \ y'=-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$; [D] $x'=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2},\ \ y'=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$.

10.1.4 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la trasformazione T di equazioni:

$$x'=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y,\ \ y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y.$$

La trasformazione T^3, vale a dire la trasformazione $T\circ T\circ T$ è:
[A] l'identità;
[B] la stessa trasformazione T;
[C] la trasformazione T^{-1} inversa di T;
[B] una trasformazione diversa dalle precedenti.

10.1.5 La trasformazione geometrica, ottenuta effettuando dapprima l'omotetia avente centro nell'origine O del sistema di riferimento cartesiano e caratteristica 2 e, di seguito, la traslazione di componenti $(3,-2)$, ha come punto unito il punto di coordinate:
[A] $(-3,2)$; [B] $(3,-2)$; [C] $(-6,4)$; [D] $(6,-4)$.

10.1.6 Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$x'=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y+1,\ \ y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y-1.$$

Essa trasforma il cerchio di equazione $5x^2+5y^2-6x=0$ in una superficie di area:
[A] $\frac{\pi}{4}$; [B] $\frac{3\pi}{10}$; [C] $\frac{9\pi}{25}$; [D] $\frac{5\pi}{3}$.

10.1.7 Quante affinità trasformano l'ellisse di equazione $x^2+2\,y^2=1$ nell'iperbole di equazione $x^2-2\,y^2=1$?
[A] Nessuna. [B] Una. [C] Due. [D] Infinite.

10.1.8 Quale proprietà delle figure geometriche si conserva in una similitudine e non si conserva invece in un'affinità?
[A] Allineamento dei punti. [B] Parallelismo delle rette.
[C] Direzione delle rette. [D] Ampiezza degli angoli.

10.1.9 Quale delle seguenti proprietà è FALSA?
[A] Ogni glissosimmetria trasforma ogni parallelogramma in un parallelogramma.
[B] Ogni omotetia conserva la direzione delle rette.
[C] Ogni similitudime trasforma ogni parabola in una parabola.
[D] Ogni affinità trasforma ogni circonferenza in una circonferenza.

10.1.10 Si consideri l'affinità di equazioni:

$$x' = 2\,x,\ \ y' = x + \frac{1}{2}y.$$

Essa trasforma il triangolo di vertici O(0,0), A(2,0), B(0,3) nel triangolo O'A'B'. Indicata con α l'ampiezza dell'angolo A'Ô'B', si ha che:
[A] $\alpha=90°$; [B] $\alpha=45°$; [C] $\tan\alpha=\frac{1}{2}$; [D] $\tan\alpha=2$.

10.2 Quesiti a risposta aperta.

10.2.1 Ci sono trasformazioni isometriche che trasformano ogni retta in una retta parallela?

10.2.2 Ci sono similitudini in cui si conserva la direzione delle rette?

10.2.3 Considerate le parabole:

$$p_1 \equiv y = \frac{1}{2}x^2,\ \ p_2 \equiv x = -\frac{1}{3}y^2 + 2\,y - \frac{1}{2}\ ,$$

far vedere che esiste almeno una similitudine che trasforma p_2 in p_1 e trovarne le equazioni.

10.2.4 È vero o è falso che ogni affinità trasforma ogni triangolo rettangolo in un triangolo rettangolo?

10.2.5 Trovare le equazioni dell'affinità che trasforma il punto O(0,0) nel punto A(1,0), il punto A nel punto B(0,1) ed il punto B in O.

10.2.6 Stabilire se l'affinità di equazioni $x'=-x-y+1,\ \ y'=x$ ha punti uniti.

10.2.7 Stabilire se la precedente affinità ha rette unite.

10.2.8 Cos'è una glissosimmetria? Ha punti uniti? Ha rette unite?

10.2.9 Si consideri l'isometria ottenuta eseguendo dapprima la rotazione di 30° intorno all'origine del riferimento cartesiano (Oxy) e successivamente la traslazione di vettore $(2,-3)$. Scrivere le sue equazioni.

10.2.10 È assegnato il quadrato di vertici O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1). Disegnarlo nel piano cartesiano assieme alla figure che si ottengono da esso in base all'affinità di equazioni: (x'=2 x, y'=y) ed all'affinità di equazioni: $\left(x'=x,\ \ y'=-\frac{1}{2}y\right)$.

10.3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 10.1.1. Ogni isometria trasforma una retta in una retta, ma solamente la traslazione e la simmetria centrale trasformano ogni retta in una retta parallela e quindi solo queste isometrie conservano la direzione. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 10.1.2. L'allineamento dei punti, il parallelismo delle rette e l'ampiezza degli angoli si conservano sia in un'isometria sia in una similitudine. La distanza dei punti si conserva in un'isometia ma non in una similitudine. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 10.1.3. La traslazione di componenti (1,3) trasforma il punto (x,y) nel punto (X,Y), per cui ha le seguenti equazioni: X=x+1, Y=y+3. L'omotetia di caratteristica $-\frac{1}{2}$, trasformando il punto (X,Y) nel punto (x',y'), ha le seguenti equazioni: $x'=-\frac{1}{2}X,\ y'=-\frac{1}{2}Y$. Ragion per cui la trasformazione ottenuta effettuando prima la traslazione e di seguito l'omotetia, ha le seguenti equazioni:

$$x'=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ \ y'=-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}.$$

L'alternativa corretta è [B].

Quesito 10.1.4. Si constata facilmente che la trasformazione T è una simmetria assiale e che è una trasformazione involutoria, ragion per cui T⎿T è l'identità I, mentre T⎿T⎿T non è altro che la trasformazione T giacché essa è uguale alla trasformazione T⎿I=T. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 10.1.5. Una volta trovate le equazioni della trasformazione: $x'=2x+3,\ \ y'=2y-2$, si giunge subito alle coordinate dell'unico punto unito: (– 3,2). L'alternativa corretta è [A].

Quesito 10.1.6. La trasformazione è una similitudine di modulo $m=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{25}{36}$. Il cerchio dato ha raggio uguale a $\frac{3}{5}$, per cui la sua area è $A=\frac{9}{25}\pi$. La similitudine lo trasforma ancora in un cerchio di area S tale che:

$$\frac{S}{A}=|m| \text{ e perciò: } S=\frac{9\pi}{25}\cdot\frac{25}{36}=\frac{\pi}{4}\ .$$

[A] è l'alternativa corretta.

Quesito 10.1.7. Ogni affinità tasforma una qualsiasi conica in una conica dello stesso tipo e quindi un'ellisse in un'ellisse e mai in un'iperbole. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 10.1.8. L'allineamento dei punti si corserva sia in una similitudine sia in un'affinità, così come il parallelismo delle rette. La direzione non si conserva né in una generica similitudine né in un'affinità. L'ampiezza degli angoli si conserva in una similitudine ma non in un'affinità. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 10.1.9. È vero che ogni glissosimmetria, che è una particolare isometria, trasforma ogni parallelogramma in un parallelogramma dal momento che trasforma due rette parallele in due rette parallele. Così come è vero che ogni omotetia trasforma una retta in una retta parallela e quindi conserva la direzione delle rette ed ogni similitudine trasforma ogni parabola in una parabola. Invece è falso che ogni affinità trasformi una circonferenza in una circonferenza dal momento che essa non conserva l'ampiezza degli angoli. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 10.1.10. Una volta trovato che l'affinità trasforma il punto O(0,0) in se stesso, per cui O'=O, il punto A(2,0) nel punto A'(4,0) ed il punto B(0,3) nel punto $B'\left(3,\frac{3}{2}\right)$, si trova facilmente che $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. [C] è l'alternativa corretta.

10.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 10.2.1. Le isometrie che trasformano una retta generica in una retta parallela sono la traslazione e la simmetria centrale. Non ci sono altre isometrie che hanno questa proprietà.

Quesito 10.2.2. Tra le similitudini quella che conserva la direzione delle rette, vale a dire che trasforma una retta in una retta parallela, è l'omotetia. Nessun'altra similitudine ha questa proprietà, a meno che non si considerino le isometrie (che poi sono particolari similitudini) e fra esse la traslazione e la simmetria centrale, che com'è stato precisato sopra, hanno per l'appunto la proprietà suddetta.

Quesito 10.2.3. Di similitudini che trasformano p_2 in p_1 ce n'è più d'una. Consideriamo quella che si ottiene eseguendo dapprima la traslazione T che porta il vertice V della parabola p_2 nell'origine O del sistema di riferimento cartesiano (Oxy), poi la simmetria S rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante e infine l'omotetia Ω di centro O e caratteristica opportuna.
Considerato che il punto V ha coordinate $\left(\frac{5}{2},3\right)$, le equazioni di T sono: $x'=x-\frac{5}{2},\ y'=y-3$. Le equazioni di S sono invece: $x'=-y,\ y'=-x$. Le equazioni dell'isometria (speculare) $T\llcorner S$ sono pertanto: $x'=-y+3,\ \ y'=-x+\frac{5}{2}$. In base ad esse (dopo aver espresso x, y per mezzo di x', y', vale a dire: $x=-y'+\frac{5}{2},\ y=-x'+3$) l'equazione $x=-\frac{1}{3}y^2+2y-\frac{1}{2}$ di p_2 diventa:

$$-y'+\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(-x'+3\right)^2+2\left(-x'+3\right)-\frac{1}{2}\ .$$

Ossia, dopo aver semplificato ed essere ritornati alle coordinate correnti x, y: $y=\frac{1}{3}x^2$. Basta, a questo punto, trovare la trasformata di questa parabola mediante l'omotetia Ω di centro O e caratteristica $\frac{2}{3}$, le cui equazioni sono: $x'=\frac{2}{3}x,\ y'=\frac{2}{3}y$. In base ad esse (dopo aver trovato $x=\frac{3}{2}x',\ y=\frac{3}{2}y'$) la precedente equazione diventa:

$$\frac{3}{2}y'=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x'\right)^2$$

ossia, dopo aver semplificato ed essere ritornati alle coordinate correnti x, y: $y=\frac{1}{2}x^2$, cioè l'equazione di p_1. Le equazioni della similitudine $(T\llcorner S)\llcorner\Omega$ sono le seguenti:

$$x' = -\frac{2}{3}y+2,\quad y' = -\frac{2}{3}y+\frac{5}{3}.$$

A riprova, si può far vedere che queste equazioni trasformano l'equazione di p_2 direttamente in quella di p_1. Cosa che proponiamo al lettore per esercizio.

Quesito 10.2.4. È falso. Infatti l'affinità non conserva l'ampiezza degli angoli.

Quesito 10.2.5. Una generica affinità ha equazioni: $x'=ax+by+c$, $y'=a'x+b'y+c'$, dove a, b, c, a', b', c' sono numeri reali tali che $ab'-a'b\neq 0$.

Il fatto che essa trasformi il punto (0,0) nel punto (1,0) implica le seguenti condizioni:

$$1=c,\ 0=c'.$$

Il fatto che essa trasformi il punto (1,0) nel punto (0,1) implica le seguenti condizioni:

$$0=a+c,\ 1=a'+c'.$$

Il fatto che essa trasformi il punto (0,1) nel punto (0,0) implica le seguenti condizioni:

$$0=b+c,\ 0=b'+c'.$$

Si ha pertanto: $a=-1$, $b=-1$, $c=1$, $a'=1$, $b'=0$, $c'=0$. Cosicché le equazioni cercate sono le seguenti:

$$x'=-x-y+1,\quad y'=x.$$

Quesito 10.2.6. Basta porre nelle equazioni dell'affinità: $x'=x$ ed $y'=y$. Si ottiene il sistema delle seguenti equazioni nelle incognite x, y: $x=-x-y+1$, $y=x$. Una volta risolto tale sistema, si trova: $x=y=\frac{1}{3}$. Il punto di coordinate $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ è pertanto l'unico punto unito della trasfomazione.

Quesito 10.2.7. L'equazione della generica retta è $ax+by+c=0$, con a, b, c parametri reali tali che a, b non siano contemporaneamente nulli. Sostituiamo in essa, al posto di x ed y, i valori ottenuti risolvendo rispetto a tali variabili il sistema delle equazioni dell'affinità, vale a dire:

$$x=y',\quad y=-x'-y'+1.$$

Si ottiene la seguente equazione: $a\,y'+b\,(-x'-y'+1)+c=0$, ovvero, scritta in forma equivalente e ritornando alle coordinate correnti x, y: $b\,x+(b-a)y-(b+c)=0$.

Per trovare le rette unite della trasformazione bisogna imporre che la retta che ha questa equazione si identifichi con la retta di cui è la trasformata. Per questo bisogna imporre che sia:

$$a=b,\quad b=a-b,\quad c=-(b+c).$$

Il sistema di queste tre equazioni ammette l'unica soluzione $a=b=c=0$, che non è accettabile ai nostri fini. L'affinità in questione non ha pertanto rette unite.

Quesito 10.2.8. Una *glissosimmetria* (detta anche *antitraslazione* oppure *riflessotraslazione*) è la composizione di una traslazione con una simmetria assiale. Non ha punti uniti né rette unite.

Quesito 10.2.9. Le equazioni della composizione della rotazione di 30° intorno ad O con la traslazione di vettore $(2,-3)$, una volta constatato che $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin 30°=\frac{1}{2}$, sono le seguenti:

$$x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+2,\quad y'=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-3.$$

Quesito 10.2.10. Il quadrato di vertici O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1) è trasformato dalla prima affinità nel rettangolo di vertici O(0,0), A'(2,0), B'(2,1), C(0,1) e dalla seconda nel rettangolo di

vertici O(0,0), A(1,0), B”$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, C’$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$. Il lettore è invitato ad eseguire il disegno. Da esso può intuire che il quadrato subisce, in base alla prima affinità, una dilatazione secondo la direzione dell’asse x nel verso positivo e, in base alla seconda affinità, una compressione secondo la direzione dell’asse y, ma nel verso negativo (vale a dire che dapprima il quadrato subisce una compressione e poi, di seguito, una riflessione rispetto all’asse x).
In generale:
♦ Ogni affinità di equazioni ($\mathbf{x}' = \mathbf{kx}, \mathbf{y}' = \mathbf{y}$), dove k è un numero reale diverso da 0 e da 1, prende il nome di ***dilatazione*** di fattore k lungo l’asse x (nel verso positivo se k>1, in quello negativo se k<–1) e di ***compressione*** di fattore k lungo l’asse x (nel verso positivo se 0<k<1 e in quello negativo se –1<k<0).
♦ Ogni affinità di equazioni ($\mathbf{x}' = \mathbf{x}, \mathbf{y}' = \mathbf{ky}$), dove k è un numero reale diverso da 0 e da 1, prende il nome di ***dilatazione*** di fattore k lungo l’asse y (nel verso positivo se k>1, in quello negativo se k<–1) e di ***compressione*** di fattore k lungo l’asse y (nel verso positivo se 0<k<1 e in quello negativo se –1<k<0).

10. 5 Felix Klein: vita ed opere.

Klein

Felix Klein, matematico tedesco il cui nome completo è in realtà Felix Christian Klein, nacque nel 1849 e morì nel 1925. Nel 1868 si laureò in matematica e nel 1872, all’età di appena 23 anni, ottenne una cattedra di matematica all’Università di Erlangen, una cittadina nei pressi di Norimberga. Erlangen, per la verità, non era una sede importante e Felix fece di tutto per ottenerne una più prestigiosa. Dopo varie vicende, ci riuscì e nel 1886 ottenne la cattedra di Geometria alla prestigiosissima università di Gottinga, dove insegnò fino al 1913, quando, per motivi di salute, decise di ritirarsi dall’insegnamento. Le sue notevoli capacità didattiche e le sue brillanti lezioni lo resero presto più famoso di quanto già non fosse e attirarono a quella Università studenti di matematica da ogni parte del mondo.
Klein diede contributi significativi ad una matematica di livello universitario, ma anche a livello pre-universitario il suo apporto è notevole. In particolare egli si distinse per aver stabilito una sorta di equivalenza, dal punto di vista della coerenza, tra la geometria euclidea e le geometrie non euclidee. Ma soprattutto si segnalò per aver unificato le varie geometrie, definendo una geometria come lo studio delle proprietà delle figure che rimangono invarianti rispetto ad una

classe di trasformazioni che, per le particolari proprietà di cui godono, assumono il nome di "gruppo di trasformazioni".
Questa concezione era completamente nuova all'epoca in cui Klein la formulò e, a dire il vero, impiegò un po' di tempo per essere accettata da tutti. Egli la formulò nel 1872 proprio come prolusione alla sua nomina di professore ad Erlangen. Fin da allora apparve come una sorta di manifesto matematico, è conosciuta come *Programma di Erlangen* ed ebbe un'influenza decisiva sullo sviluppo successivo della Geometria.

Ci proponiamo di fare qualche cenno in più su questo aspetto della questione.

Le proprietà, che fanno di un insieme G di oggetti, un **gruppo** sono le seguenti:
- è definita nell'insieme G un'operazione "∗", rispetto alla quale l'insieme è *chiuso*; vale a dire, comunque si prendano due elementi $x,y \in G$, risulta $x*y \in G$;
- l'operazione "∗" è *associativa*; vale a dire che, comunque si prendano $x,y,z \in G$, risulta: $(x*y)*z=x*(y*x)$;
- esiste nell'insieme G un elemento u tale che, comunque si prenda $x \in G$, risulta $x*u=u*x=x$; tale elemento u si chiama *elemento neutro*;
- ogni elemento di G ammette il *simmetrico* rispetto a "∗"; vale a dire che, comunque si prenda $x \in G$, esiste $x' \in G$ tale che $x*x'=x'*x=u$.

Se, in aggiunta alle proprietà precedenti, l'operazione "∗" del gruppo è commutativa, cioè se $\forall a,b \in A$: $a*b = b*a$, allora il gruppo si dice *commutativo* (o *abeliano*[1]).

Per esempio, l'operazione di addizione "+" non conferisce la struttura di gruppo all'insieme dei naturali mentre conferisce la struttura di gruppo abeliano all'insieme degli interi. L'operazione di moltiplicazione "×" conferisce la struttura di gruppo abeliano all'insieme dei razionali assoluti, privato dello zero. Passando ad insiemi non numerici, l'operazione prodotto "∘" conferisce la struttura di gruppo (non abeliano) all'insieme delle isometrie piane e, parimenti, la conferisce all'insieme delle similitudini piane.

Per provare che una determinata trasformazione geometrica ha la struttura di gruppo è utile ricorrere al seguente teorema.

- TEOREMA.

L'operazione prodotto "∘" conferisce la struttura di gruppo ad un insieme T di trasformazioni geometriche (sia nel piano sia nello spazio) se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:
(1) per due qualsiasi trasformazioni t', t" di T risulta $t' \circ t'' \in T$;
(2) ogni trasformazione t di T ammette la trasformazione inversa $t^{-1} \in T$.

DIMOSTRAZIONE.
Intanto, in virtù della (1) si può affermare che l'operazione "∘" è totalmente definita in T.
Dimostriamo adesso che l'operazione è associativa. Per questo consideriamo tre qualsiasi trasformazioni di T: t_1, t_2, t_3. La t_1 mandi una qualsiasi figura geometrica F in F', la t_2 mandi F' in F" e la t_3 mandi F" in F"' (Fig. 10.1).

[1] Da: **Abel**, Niels Henrik; matematico norvegese, 1802-1829.

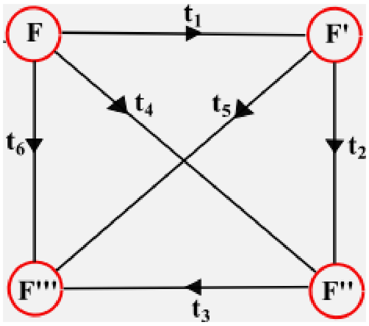

Fig. 10.1

Indichiamo con:

- t_4 la trasformazione che manda F direttamente in F”, per cui $t_1 \circ t_2=t_4$;
- t_5 la trasformazione che manda F’ in F’’’, per cui $t_2 \circ t_3=t_5$;
- t_6 la trasformazione che manda F in F’’’, per cui $t_4 \circ t_3=t_6$.

Si ha: $(t_1 \circ t_2) \circ t_3=t_4 \circ t_3=t_6$ e $t_1 \circ (t_2 \circ t_3)=t_1 \circ t_5=t_6$. Di conseguenza: $(t_1 \circ t_2) \circ t_3=t_1 \circ (t_2 \circ t_3)$. E questo per qualsiasi scelta delle trasformazioni t_1, t_2, t_3. Vale pertanto la proprietà associativa.
Adesso, in base alla condizione (2), si può affermare che, per ogni trasformazione t di T, si ha: $t \circ t^{-1}=t^{-1} \circ t=i$, essendo i la trasformazione identica. Dunque, non solo esiste in T l’elemento neutro rispetto all’operazione prodotto, ma ogni elemento di T è simmetrizzabile rispetto a tale operazione.
In definitiva, l’insieme T ha la struttura di gruppo rispetto all’operazione “∘”.

Per concludere, dunque, che un insieme T di trasformazioni geometriche acquista la struttura di gruppo rispetto all’operazione prodotto “∘”, basta far vedere che tale operazione è ovunque definita in T e che ogni trasformazione di T ammette la trasformazione inversa.

Ebbene, proprio ragionando su questa base, si dimostra facilmente che l’operazione prodotto “∘” conferisce la struttura di gruppo alle isometrie, alle similitudini ed alle affinità. Anzi questi sono gruppi non abeliani. Costituiscono invece gruppi abeliani le traslazioni, le rotazioni e le omotetie di dato centro.

Concludiamo questa digressione sulle trasformazioni geometriche proponendo al lettore la risoluzione del seguente esercizio.

Dimostrare che i movimenti che trasformano un triangolo equilatero in sé formano un gruppo non abeliano, mentre le rotazioni che mutano il triangolo in sé formano un gruppo abeliano.