Capitolo 11 (Integrazioni a unità 24-25)

Equazioni, disequazioni, sistemi e problemi di 2° grado

11.1 Quesiti a risposta chiusa.

11.1.1 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), quale delle seguenti proposizioni afferma il FALSO ?

[A] La parabola di equazione $y=-x^2-1$ interseca l'asse x.
[B] La parabola di equazione $y=x^2+2x+1$ è tangente all'asse x.
[C] Uno dei punti in cui la parabola di equazione $y=x^2+3x$ seca l'asse x è un punto situato sul semiasse negativo delle ascisse.
[D] La parabola di equazione $y=2x^2+3x+2$ non interseca l'asse x.

11.1.2 Considerata l'equazione $x^2-2ax+a+1=0$, dove a è un parametro reale, risulta che:

[A] quando la somma delle sue radici è 0 anche il prodotto è 0;
[B] quando la somma delle sue radici è 1 anche il prodotto è 1;
[C] quando la somma delle sue radici è 2 anche il prodotto è 2;
[D] le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

11.1.3 Considerata l'equazione $x^2-(2m+1)x+m-1=0$, dove m è un parametro reale, e ammesso che una sua radice sia uguale a 1/3, qual è l'altra radice ?

[A] $\frac{8}{3}$ [B] $\frac{11}{3}$ [C] 8 [D] 11

11.1.4 Si consideri la seguente equazione in x: $m\,x^2+(m-2)x-(m-1)=0$, dove m è un parametro reale non nullo. Si sa che la somma delle sue radici è $-1/3$. Quali sono tali radici ?

[A] $1, -\frac{4}{3}$ [B] $-2, \frac{5}{3}$ [C] $-1, \frac{2}{3}$ [D] $0, -\frac{1}{3}$

11.1.5 Quali sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\frac{x^2-4}{x+2}=-3\ ?$$

[A] $-2, -1$ [B] $-1, 2$ [C] $-2, 1$ [D] Altre.

11.1.6 Quale delle seguenti affermazioni è VERA ?

[A] La disequazione $2x^2-x+1>0$ è impossibile
[B] La disequazione $x^2-5>0$ è soddisfatta per $x>\pm\sqrt{5}$
[C] La disequazione $3x^2+2x\leq 0$ è soddisfatta per $0\leq x\leq \frac{2}{3}$
[D] Le affermazioni precedenti sono tutte false

11.1.7 Per quali valori di x la frazione algebrica $\frac{3-x}{x-4}$ risulta non negativa?

[A] $3\leq x\leq 4$ [B] $3<x<4$ [C] $3<x\leq 4$ [D] $3\leq x<4$

11.1.8 Si consideri la disequazione $\frac{1-2x}{1-x}>2$. Quale delle seguenti affermazioni è VERA ?

[A] È equivalente al sistema delle due disequazioni $1-2x>2$ e $1-x>2$
[B] È equivalente alla disequazione $1-x<0$

[C] È equivalente alla disequazione $1-2x>0$
[D] Le affermazioni precedenti sono tutte false

11.1.9 Si consideri la relazione $4<x^2<9$, dove x è una variabile reale. Quale delle seguenti affermazioni è VERA ?
[A] È soddisfatta per $-3<x<-2$ oppure $2<x<3$
[B] È soddisfatta solo per $2<x<3$
[C] È soddisfatta per $-3<x<3$
[D] Le affermazioni precedenti sono tutte false

11.1.10 Per quali valori reali di x la disequazione $\sqrt{-2x} > x$ è soddisfatta ?
[A] Per ogni $x<0$ e nessun altro x
[B] Per ogni $x<2$ e nessun altro x
[C] Solo per $-2<x<0$
[D] Solo per $0<x<2$

11.1.11 Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y:
$$\begin{cases} (a-1)\,x + 2\,y = 0 \\ x - (a+1)\,y = 1 \end{cases}$$
dove a è un parametro reale. Esso è:
[A] determinato per ogni valore di a ;
[B] impossibile se $a=0$;
[C] impossibile se $a=\pm 1$;
[D] impossibile se $a=\pm\sqrt{3}$.

11.1.12 Per quali valori del parametro reale k la seguente equazione in x:
$$(k^2-1)\,x^2 - k\,x - 1 = 0,$$
ammette soluzioni reali e distinte ?
[A] $k>\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ [B] $k<\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ [C] $k>\frac{4}{5}$ [D] Valori di k diversi dai precedenti.

11.1.13 Si consideri la seguente equazione in x:
$$(m+3)\,x^2 - m\,x - 2 = 0,$$
dove m è un parametro reale. Per quali valori di m ammette soluzioni reali ?
[A] Per ogni valore di m
[B] Per nessun valore di m;
[C] Per $m\le 4-2\sqrt{10}$ oppure $m\ge 4+2\sqrt{10}$
[D] Per $4-2\sqrt{10}\le m\le 4+2\sqrt{10}$.

11.1.14 Si consideri il trinomio $2kx^2-kx+1$, dove k è un parametro reale non nullo. Per quali valori di k esso risulta positivo per ogni x reale ?
[A] Per nessun valore di k [B] Per $k<0$ oppure $k>8$ [C] Per $0<k<8$ [D] Per $-8<k<0$.

11.1.15 Si consideri la seguente equazione in x: $x^2-2x+a=0$, dove a è un numero intero compreso fra -2 e $+7$, estremi inclusi. Qual è la probabilità che, scegliendo a caso uno di tali valori di a, l'equazione abbia radici reali ?
[A] 30% [B] 40% [C] 60% [D] 70%

11.1.16 Il numero 63 è tale che, moltiplicato per la differenza fra la cifra delle decine e quella delle unità è uguale alla differenza fra il cubo della prima cifra (quella delle decine) ed il cubo della seconda. Quanti numeri di due cifre, scritte nell'usuale sistema decimale di numerazione ed aventi la stessa caratteristica di 63, esistono in totale?
[A] 1 [B] 2 [C] 3 [D] 4

11.2 Quesiti a risposta aperta.

11.2.1 Si consideri l'equazione $x^2-4x+2=0$. Si può calcolare la somma e il prodotto delle sue radici senza averle prima calcolate? Quali sono questi valori?

11.2.2 Si consideri l'equazione $x^2-x+2=0$. È vero che essa, presentando due variazioni, ammette due radici positive in base alla regola dei segni di Cartesio?

11.2.3 Costruire un'equazione di 2° grado in x, che ha come radici i numeri -3 e $2/3$.

11.2.4 Costruire un'equazione di 2° grado in x, aventi come radici le radici opposte dell'equazione $2x^2-x-2=0$.

11.2.5 Considerata la seguente equazione in x: $x^2-2ax+(a-1)=0$, dove a è un parametro reale, verificare che le sue radici x_1 ed x_2 sono reali per ogni valore di a e calcolare $x_1^2+x_2^2$.

11.2.6 Gli esperti di un'azienda agricola hanno calcolato che il profitto giornaliero P connesso con la produzione della quantità Q di un certo prodotto è fornito dalla seguente legge: $P=-12Q^2+180Q+33$, dove Q è misurato in quintali e P in migliaia di euro, per una produzione giornaliera che non sia inferiore ai 4 q. Calcolare per quale produzione giornaliera il profitto dell'azienda è di € 345.000.

11.2.7 È vero che la disequazione $2x^2-2x+1>0$ è impossibile poiché il discriminante del trinomio al 1° membro è negativo?

11.2.8 Si consideri il trinomio $P(x)=(2k+1)x^2+kx-1$. Esistono valori del parametro reale k per i quali il trinomio risulta positivo per ogni x reale?

11.2.9 Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x^2-x}{x-1} \geq 1\,.$$

11.2.10 Considerata la seguente equazione in x: $(k+2)x^2-(k+1)x-1=0$, dove k è un parametro reale, trovare i valori di k per cui essa ammette radici reali e distinte.

11.2.11 Considerata la seguente equazione in x: $(2m-1)x^2+x-1=0$, dove m è un parametro reale, stabilire se esistono valori di m per i quali essa ammette radici entrambe positive.

11.2.12 Risolvere il sistema formato dalle seguenti disequazioni:

$$x^2-4x+5>0,\quad 2x+3<0,\quad 3x+2>0.$$

11.2.13 Le dimensioni di un rettangolo sono 3 m e 4 m. È possibile aumentare la dimensione minore e diminuire la maggiore di una stessa lunghezza in modo che l'area del nuovo rettangolo abbia un valore minore di 10 m^2?

11.2.14 Risolvere la seguente disequazione: $\sqrt{x} > x-2$.

11.2.15 Si considerino i numeri seguenti: $a=x^2+3$, $b=x^2-x+1$, $c=x^2-x+2$, dove x è una variabile reale. Determinare per quali valori di x tali numeri costituiscono le misure, rispetto alla stessa unità, dei tre lati di un triangolo.

11.2.16 Sia x un qualsiasi numero reale. È corretto dire che $\sqrt{1+2x^2+x^4}$ è identicamente uguale a $1+x^2$? È corretto dire che $\sqrt{1+2x+x^2}$ è identicamente uguale a $1+x$?

11.3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 11.1.1. La proposizione [A] afferma il falso. Il polinomio $-x^2-1$ assume infatti un valore negativo per ogni x reale. Basta questo per concludere che [A] è l'alternativa corretta. Invitiamo comunque lo studente a verificare che le proposizioni [B], [C], [D] affermano il vero.

Quesito 11.1.2. Conviene preliminarmente esprimere in funzione di a sia la somma delle radici dell'equazione sia il prodotto. Lo si può fare o dopo aver calcolato tali radici o, meglio ancora, utilizzando le formule di Viète. Si trova in ogni caso che la somma delle radici dell'equazione è: $x'+x''=2a$, mentre il prodotto è: $x'x''=a+1$.
Se la somma delle radici è 0 allora $a=0$, per cui il prodotto è 1: l'alternativa [A] è errata.
Se la somma delle radici è 1 allora $a=1/2$, per cui il prodotto è 3/2: l'alternativa [B] è errata.
Se la somma delle radici è 2 allora $a=1$, per cui il prodotto è 2: l'alternativa [C] è corretta.
Evidentemente l'alternativa [D] è errata.

Quesito 11.1.3. Se una delle radici dell'equazione è $1/3$, deve essere:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2-(2m+1)\cdot\frac{1}{3}+m-1=0\,,$$

da cui, risolvendo rispetto ad m, segue $m=11/3$. Da qui in poi si può procedere in vari modi. Scegliamo quello che ci pare il più rapido. Per $m=11/3$, il prodotto delle radici dell'equazione, in virtù delle formule di Viète, è: $x'x''=m-1=8/3$. Pertanto, se una delle radici è $1/3$, l'altra deve essere 8. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 11.1.4. Si potrebbe pensare di calcolare dapprima le radici dell'equazione in funzione di m ed imporre poi la condizione che la loro somma sia $-1/3$: si può fare, ma con notevole dispendio di tempo e di energia. Conviene ricorrere alle formule di Viète. La somma delle radici, per una di tali formule, è infatti uguale a $-\frac{m-2}{m}$, per cui deve essere soddisfatta la condizione: $-\frac{m-2}{m}=-\frac{1}{3}$. Risolvendo rispetto ad m, si trova: $m=3$. L'equazione assegnata diventa pertanto: $3x^2+x-2=0$ e, una volta risolta, fornisce le soluzioni: -1 e $2/3$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 11.1.5. Osserviamo subito che deve essere $x+2\neq 0$, cioè $x\neq -2$. Questo significa che le alternative [A] e [C] non sono corrette. Ora, per $x\neq -2$, l'equazione diventa $x-2=-3$, cioè $x=-1$. È l'unica soluzione dell'equazione. [D] è l'alternativa corretta.
Altro procedimento. Si libera dal denominatore e, dopo qualche semplice elaborazione, l'equazione diventa $x^2+3x+2=0$. Una volta risolta, si trovano le radici -2 e -1, ma la prima deve essere scartata poiché annulla il denominatore dell'equazione assegnata. Quindi rimane l'unica soluzione -1. Come sopra.

Quesito 11.1.6. L'alternativa [A] non è corretta poiché la disequazione è soddisfatta per ogni x reale, dal momento che il discriminante del trinomio è negativo e il coefficiente di x^2 è positivo (la parabola associata è tutta al di sopra dell'asse x).

L'alternativa [B] non è corretta poiché non ha senso la scrittura $x>\pm\sqrt{5}$. In realtà la disequazione è soddisfatta per $x<-\sqrt{5}$ oppure $x>\sqrt{5}$.
L'alternativa [C] non è corretta poiché la disequazione è soddisfatta per $-\frac{2}{3}\le x\le 0$.
L'alternativa corretta è, di conseguenza, la [D].

Quesito 11.1.7. Deve essere $(3-x)(x-4)>0$ oppure $3-x=0$, vale a dire: $3\le x<4$. L'alternativa corretta è [D].
Si può giungere al risultato ragionando diversamente: le alternative [A] e [C] sono da scartare dal momento che contengono il valore $x=4$ che non può essere accettato dal momento che annulla il denominatore della frazione. Poiché la frazione si annulla per $x=3$ e questo valore va preso, anche l'alternativa [B] deve essere accantonata. L'unica alternativa valida è, per esclusione, la [D].

Quesito 11.1.8. La disequazione assegnata si può scrivere nel seguente modo equivalente:
$$\frac{1-2x}{1-x}-2>0,\ \text{da cui segue:}\ \frac{1-2x-2+2x}{1-x}>0\ \text{ e perciò: }\ \frac{1}{1-x}<0;$$
essa è risolta pertanto dalla disequazione $1-x<0$. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 11.1.9. La disequazione è soddisfatta per $-3<x<-2$ oppure $2<x<3$. L'alternativa corretta è perciò la [A].

Quesito 11.1.10. È sufficiente e necessario che sia $x<0$ poiché in questo caso il primo membro è certamente un numero reale positivo mentre il secondo membro è negativo. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 11.1.11. Il sistema è determinato quando $-(a-1)(a+1)-2\neq 0$, cioè quando $-1-a^2\neq 0$. Il che accade per ogni a. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 11.1.12. Le alternative [A] e [B] sono certamente da scartare poiché le scritture $x>\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ e $x<\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ non hanno alcun significato. L'alternativa corretta potrebbe essere la [C] o la [D]. Consideriamo il discriminante dell'equazione: $\Delta=k^2+4(k^2-1)=5k^2-4$: deve essere positivo. Il che accade per $k^2>\frac{4}{5}$. E questo basta per farci concludere che l'alternativa [C] è da scartare. Rimane, per esclusione, l'alternativa [D], che è quella corretta. In effetti, risulta $\Delta>0$ per $k<-\frac{2}{\sqrt{5}}$ oppure $k>\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Quesito 11.1.13. Il discriminante dell'equazione non deve essere negativo. Ora, tale discriminante è: $\Delta=m^2+8(m+3)=m^2+8m+24$.
E siccome il discriminante di questo trinomio in m (cioè $8^2-4\cdot 24$) è negativo ed il coefficiente del termine in m^2 è positivo, la parabola ad esso associata è tutta al di sopra dell'asse delle ascisse, per cui $\Delta>0$ per ogni m. Ne consegue che l'equazione assegnata ammette radici reali per ogni valore di m. Di più: tali radici sono distinte. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 11.1.14. Il trinomio risulta positivo per ogni x reale se la parabola ad esso associata è tutta situata nel semipiano $y>0$. Il che accade se essa volge la concavità verso le y positive ($k>0$) e non interseca l'asse x ($\Delta=k^2-8k<0$). Questo accade quando $0<k<8$. L'alternativa corretta è [C].
C'è un altro modo di risolvere la questione, poco ortodosso ma adatto proprio al caso in cui si ha a che fare con quesiti a scelta multipla con una sola alternativa corretta. Si tratta di prendere un idoneo

valore di k, sostituirlo nell'equazione assegnata, risolverla e, se si è fortunati, si possono trarre le conclusioni. Per esempio, considerando le alternative proposte, un valore opportuno può essere $k=-1$. Il trinomio diventa: $-2x^2+x+1$, il cui discriminante è positivo e pertanto ammette radici reali, ma una sola di esse è positiva mentre l'altra è negativa. Le alternative [B] e [D] sono da scartare. Proviamo per $k=1$. Il trinomio diventa: $2x^2-x+1$ e, come si può facilmente controllare, ammette due radici positive. L'alternativa [C] è quella giusta. Come prima.
Se fossimo stati più fortunati e avessimo iniziato a provare da quest'ultimo valore di k, saremmo giunti subito alla conclusione. Si capisce che quest'ultimo procedimento non funziona se il quesito è a risposta aperta, tipo: "trovare se esistono, ed eventualmente quali sono, i valori di k per i quali il trinomio è positivo per ogni x reale".

Quesito 11.1.15. Calcoliamo il discriminante Δ dell'equazione: $\Delta=4(1-a)$. Affinché l'equazione abbia radici reali deve essere $\Delta\geq0$, vale a dire $a\leq1$. Ora, i valori interi di a compresi fra –2 e +7 sono 10, dei quali 4 non superano 1 (sono: –2, –1, 0, 1). Pertanto la probabilità cercata è 4/10, cioè 40%. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 11.1.16. Un generico numero di due cifre, considerato nel sistema decimale di numerazione, può essere scritto nel modo seguente: $10a+b$, dove a, b sono numeri interi compresi fra 0 e 9, con $a\neq0$. Per i dati del quesito deve essere soddisfatta la seguente condizione:

$$(10a+b)(a-b)=a^3-b^3.$$

Da qui segue l'equazione in b:

$$b^2+(a-1)\,b+(a^2-10\,a)=0,$$

la quale, avendo il discriminante certamente positivo (si ricorda che $0<a<10$), ha due soluzioni reali, delle quali una positiva e l'altra negativa. Infatti, tenendo presente che $1\leq a\leq9$, se $a=1$, l'equazione diventa $b^2-9=0$ ed ha le soluzioni $b=\pm3$. Se invece $a>1$, il coefficiente $a-1$ è positivo, mentre a^2-10a è negativo. In questo caso, pertanto, l'equazione presenta una permanenza ed una variazione, e perciò, per la regola dei segni di Cartesio, ammette una radice positiva ed una negativa. L'unica radice che c'interessa è quella positiva, che è data dalla seguente formula:

$$b=\frac{1}{2}\left(1-a+\sqrt{1+38a-3a^2}\right).$$

In realtà, a noi interessano le sole radici intere. Si tratta allora di eseguire delle prove, attribuendo ad a via via i valori interi da 1 a 9 inclusi e vedere cosa succede del valore di b. A conti fatti si ottengono le seguenti soluzioni accettabili: $(a=1,\ b=3)$, $(a=6,\ b=3)$, $(a=9,\ b=1)$. Pertanto i numeri che soddisfano alle condizioni poste sono tre e precisamente: 13, 63 e 91. [C] è l'alternativa corretta.

11.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 11.2.1. Sì. Basta far ricorso alle formule di Viète. Indicate con x' ed x" le radici dell'equazione (che, detto per inciso, sono reali e distinte ed entrambe positive), si trova nel caso specifico: $x'+x''=4$ e $x'x''=2$.

Quesito 11.2.2. È falso. Infatti, per poter stabilire il segno delle radici bisogna anzitutto assicurarsi che siano reali ($\Delta\geq0$) e quelle dell'equazione data non lo sono poiché il discriminante dell'equazione è negativo.

Quesito 11.2.3. Essa è l'equazione $(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$, vale a dire, dopo aver semplificato:

$$3x^2+7x-6=0.$$

Si può procedere diversamente, ma in un modo più complicato, ricorrendo alle formule di Viète. Posto, infatti, che l'equazione da costruire sia $ax^2+bx+c=0$, in virtù di tali formule deve essere:

$$\frac{b}{a}=-\left(-3+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3} \text{ e } \frac{c}{a}=-3\cdot\frac{2}{3}=-2; \text{ vale a dire: } b=\frac{7}{3}a,\ c=-2a.$$

Pertanto l'equazione è: $ax^2+\frac{7}{3}ax-2a=0$, ossia: $3x^2+7x-6=0$. Ovviamente come prima.

Quesito 11.2.4. Si potrebbero trovare dapprima le radici dell'equazione assegnata $2x^2-x-2=0$ e poi costruire l'equazione cercata: è possibile e lo lasciamo fare allo studente per esercizio.

Noi però preferiamo seguire un'altra strada. Esponiamo anzi un procedimento generale.

Sia allora l'equazione $ax^2+bx+c=0$ e siano x_1 e x_2 le sue radici. Siano poi x'_1 e x'_2 le radici dell'equazione da costruire. Deve essere:

$$x'_1+x''_1=(-x_1)+(-x_2)=-(x_1+x_2)=-b/a,\ \ x'_1x''_1=(-x_1)(-x_2)=x_1x_2=c/a.$$

L'equazione da costruire è, pertanto, la seguente:

$$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0, \text{ ossia: } a\,x^2-b\,x+c=0\,.$$

Nel nostro caso: $2x^2+x-2=0$.

Quesito 11.2.5. Bisogna considerare il discriminante Δ dell'equazione:

$$\Delta=(2a)^2-4(a-1)=4(a^2-a+1).$$

Siccome il discriminante del trinomio in parentesi è negativo ed il coefficiente di a^2 è positivo, la parabola associata è tutta al di sopra dell'asse delle ascisse, per cui $\Delta>0$ per ogni a. Questo implica che l'equazione assegnata ha radici reali (e distinte) per ogni a.

Per calcolare $x_1^2+x_2^2$ si potrebbe pensare di calcolare dapprima le due radici e poi il valore dell'espressione predetta: ciò è possibile ma è dispendioso. È preferibile ricorrere alle formule di Viète. Si ha in effetti:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\,x_1x_2=(2a)^2-2(a-1)=4a^2-2a+2\,.$$

Quesito 11.2.6. Deve essere soddisfatta la seguente condizione:

$$-12\,Q^2+180\,Q+33=345, \text{ con } Q\geq 4.$$

Risolta l'equazione in Q, si trovano due valori: Q=2 e Q=13, ma solo il 2° è accettabile. Pertanto la produzione richiesta è di 13 q.

Quesito 11.2.7. No, è falso. Infatti, ogni volta che il discriminante del trinomio è negativo significa semplicemente che la parabola associata al trinomio non seca l'asse delle ascisse. Dipende poi dal segno del coefficiente di x^2 se essa è al di sopra o al di sotto dell'asse x. Siccome, nel caso specifico, tale coefficiente è positivo, la parabola è tutta al di sopra dell'asse x. Di conseguenza risulta $2x^2-2x+1>0$ per ogni x reale, per cui la disequazione assegnata è sempre soddisfatta.

Quesito 11.2.8. La parabola associata al trinomio, affinché esso risulti positivo per ogni x reale, deve essere totalmente contenuta nel semipiano $y>0$. Questo accade se sono soddisfatte due condizioni:

a) risulta positivo il coefficiente del termine di 2° grado, che è $2k+1$;
b) risulta negativo il discriminante del trinomio, che è: $\Delta=k^2+4(2k+1)=k^2+8k+4$.

La prima condizione è soddisfatta per $k>-\frac{1}{2}$, la seconda per $-4-2\sqrt{3}<k<-4+2\sqrt{3}$. Ma questi due intervalli non hanno una parte comune, dal momento che $-\frac{1}{2}>-4+2\sqrt{3}$. Pertanto, la risposta all'interrogativo è: No, non esistono valori di k che rendono positivo il trinomio assegnato per ogni x reale.

Quesito 11.2.9. Dapprima bisogna ricondurre la disequazione alla sua forma normale, che è la seguente:

$$\frac{(x-1)^2}{x-1} \geq 0\,.$$

Intanto possiamo dire che i valori che possono essere presi in esame sono quelli per cui risulta $x\neq1$, dal momento che per $x=1$ il denominatore della frazione si annulla e perciò tale valore fa perdere di significato alla frazione medesima. Ora, per $x\neq1$ il numeratore è sempre positivo, quindi la frazione è positiva per gli x che rendono positivo il denominatore, ossia per $x-1>0$, cioè $x>1$. In definitiva la disequazione è soddisfatta proprio per $x>1$.
Un modo più rapido di procedere. Siccome deve essere $x\neq1$, la disequazione, dopo aver semplificato il primo membro dividendo numeratore e denominatore per $x-1$, diventa: $x\geq1$. Deve essere pertanto $x>1$. Come prima ovviamente.

Quesito 11.2.10. Il discriminante dell'equazione deve risultare positivo. Ora, tale discriminante è: $\Delta=(k+1)^2+4(k+2)=k^2+6k+9=(k+3)^2$ ed è evidente che risulta positivo per ogni $k\neq-3$. Per questi valori di k l'equazione ammette radici reali e distinte, mentre per $k=-3$ ammette radici reali e coincidenti.

Quesito 11.2.11. Bisogna, anzitutto, che le radici siano reali, per cui, chiamato Δ il discriminante dell'equazione e constatato che $\Delta=1+4(2m-1)=8m-3$, deve essere $8m-3\geq0$, ossia $m\geq3/8$. Occorre poi che l'equazione presenti due variazioni e questo è assicurato solo se il coefficiente di x^2 è negativo. Deve essere pertanto $2m-1<0$, vale dire $m<1/2$. In conclusione l'equazione ammette radici positive per $\frac{3}{8}\leq m<\frac{1}{2}$.

Quesito 11.2.12. Risolviamo separatamente le tre disequazioni e troviamo per quali x sono soddisfatte tutte e tre. La prima è soddisfatta per ogni x reale, dal momento che la parabola associata al trinomio al primo membro è situata tutta al di sopra dell'asse delle ascisse. La seconda è soddisfatta per $x<-\frac{3}{2}$ e la terza per $x>-\frac{2}{3}$. Siccome $-\frac{3}{2}<-\frac{2}{3}$, in conclusione il sistema è impossibile.

Quesito 11.2.13. Indicata con x la lunghezza incognita, espressa in m, le dimensioni del nuovo rettangolo, posto che esista, sono $3+x$ e $4-x$. La x deve ovviamente soddisfare alle condizioni $0<x<4$. L'area del nuovo rettangolo è $(3+x)(4-x)$ e perciò deve essere $(3+x)(4-x)<10$. Ossia: $x^2-x-2>0$. Dopo aver risolto questa disequazione si trova $x<-1$ o $x>2$. Ma dovendo essere $0<x<4$, in conclusione la x cercata esiste ed è tale che $2<x<4$.

Quesito 11.2.14. Per la realtà delle soluzioni deve essere $x\geq0$. Si presentano due situazioni, a seconda che il secondo membro, $x-2$, sia negativo o non lo sia.
Se $x-2<0$ la disequazione è certamente soddisfatta dal momento che il primo membro non è negativo mentre il secondo lo è. Questo, tenendo presente anche la condizione di realtà, accade per $0\leq x<2$.

Se $x-2\geq 0$ bisogna imporre l'ulteriore condizione $x>(x-2)^2$, ottenuta elevando al quadrato entrambi i membri della disequazione assegnata. Da quest'ultima disequazione, una volta risolta, si trova $1<x<4$. La seconda situazione implica perciò che sia $2\leq x<4$.
In conclusione, sono soluzioni della disequazione proposta i valori di x per cui si ha $0\leq x<2$ e quelli per cui si ha $2\leq x<4$. Vale a dire i valori di x per cui risulta $0\leq x<4$.

Quesito 11.2.15. Per prima cosa bisogna imporre che i numeri a, b, c siano positivi, ma questo, come si può facilmente constatare, accade per ogni x reale. Affinché tali numeri siano le misure dei lati di un triangolo deve accadere che ognuno di essi sia minore della somma degli altri due, vale a dire:

$$a<b+c,\quad b<c+a,\quad c<a+b.$$

Dalla prima condizione segue:

$$x^2+3 < (x^2-x+1)+(x^2-x+2),\ \text{ossia: } x^2-2x > 0,\ \text{e perciò: } x<0 \text{ o } x>2.$$

La seconda condizione è soddisfatta per ogni x reale dal momento che $b<c$.
La terza condizione implica:

$$x^2-x+2 < (x^2+3)+(x^2-x+1),\ \text{ossia: } x^2+2 > 0,\ \text{e ciò accade per ogni x.}$$

In conclusione gli x cercati sono quelli per cui si ha $x<0$ o $x>2$.

Quesito 11.2.16. Quando si considera un radicale quadratico $\sqrt{A}$, non solo il numero reale A deve essere non negativo per la realtà del radicale, ma in tal caso il radicale stesso rappresenta un numero reale non negativo. Per questa ragione la prima identità è corretta essendo:

$$\sqrt{1+2x^2+x^4}=\sqrt{(1+x^2)^2}=1+x^2\ \text{ ed } 1+x^2>0 \text{ per ogni x reale.}$$

Per quanto riguarda la seconda, invece, bisogna osservare che $\sqrt{1+2x+x^2}=\sqrt{(1+x)^2}$, ma siccome $1+x$ può essere positivo, negativo o nullo, a seconda del valore di x, si deve scrivere correttamente:

$$\sqrt{1+2x+x^2}=|1+x|.$$

11.5 Antologia.

Nel già citato libro di Brunacci [1], nella parte I, pagg. 103-104, l'Autore presenta un esempio di problema di 2° grado con relativa risoluzione. Ci limitiamo a riprodurlo fedelmente (a parte qualche dettaglio nel modo di scrivere le formule) e senza commenti. Ma vorremmo invitare lo studente a provare a risolvere da solo il problema, prima di continuare a leggere la risoluzione di Brunacci.

PROBLEMA.
«Alcune persone presero una vettura che le conducesse al loro destino pel prezzo di 342 lire. Fatto il viaggio, tre di queste scapparono senza pagar la loro parte; ma quelle che restarono, per supplire alla mancanza, dettero ciascuna 19 lire in più che non avrebbero dovuto dare, e così furono pagate le spese della vettura. Si cerca quanti erano i viaggiatori.»
RISOLUZIONE.
«Prima di sciogliere il problema, si osservi che questo ammasso di parole non serve spesso che ad imbrogliarlo. Riduciamolo a' suoi veri termini.
«Un numero x di persone debbono pagare per egual porzione la somma di 342 lire. Tre non pagando la loro parte, le altre pagano in loro vece, il che importa a ciascuno 19 lire in più. Qual è il numero x?

[1] Cfr.: In questa medesima cartella: Cap.2 – Elementi di calcolo letterale, N° 2.2 – Antologia.

«Si dirà dunque: la parte di ciascuno, se tutti avessero pagato, sarebbe stata di $\frac{342}{x}$ lire, tre non pagando, la parte dei rimanenti è $\frac{342}{x-3}$ [lire]; ma questa aumenta di 19 lire; dunque l'equazione è:

$$\frac{342}{x-3}-\frac{342}{x}=19\,.$$

Fatte le operazioni necessarie, si troverà $x^2-3x=54$, e paragonando questo risultamento con la formola $x^2+px=q$, si avrà $p=-3$, $q=54$, onde:

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{54+\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{15}{2}=9 \text{ ovvero } -6.$$

La prima delle due soluzioni è evidentemente quella che si cerca; […]. Erano dunque nove i viaggiatori, sei dei quali pagando 57 lire per uno, hanno formata la somma di 342 lire.»