Capitolo 11 (Integrazione a unità 47-48-49)

Geometria dello spazio

11. 1 Quesiti a risposta chiusa.

11. 1. 1 Se due rette sono parallele ad un medesimo piano allora si può concludere che:
[A] le due rette sono parallele; [B] le due rette sono incidenti;
[C] le due rette sono sghembe; [D] le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

11. 1. 2 Se due piani sono paralleli ad una medesima retta allora si può concludere che:
[A] i due piani sono paralleli;
[B] i due piani sono incidenti;
[C] i due piani sono coincidenti;
[D] le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

11. 1. 3 Se due rette a, b, comunque scelte, sono strettamente parallele ad una medesima retta c allora:
[A] le due rette a, b sono strettamente parallele;
[B] le due rette a, b sono incidenti;
[C] le due rette a, b sono sghembe;
[D] le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

11. 1. 4 Se due rette a, b sono perpendicolari ad una medesima retta c allora:
[A] le due rette sono certamente parallele;
[B] le due rette non possono essere incidenti;
[C] non è possibile che le due rette siano sghembe;
[D] le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

11. 1. 5 Sono assegnati, in maniera del tutto arbitraria, un punto ed un piano. Per il punto:
[A] si può condurre un sol piano perpendicolare al piano dato;
[B] si possono condurre due soli piani perpendicolari al piano dato;
[C] si possono condurre più di due piani perpendicolari al piano dato, ma in numero finito;
[D] si possono condurre infiniti piani perpendicolari al piano dato.

11. 1. 6 Sono assegnati, in maniera del tutto arbitraria, un piano ed una retta non perpendicolare ad esso. Di piani contenenti la retta e perpendicolari al piano ne esistono:
[A] 0; [B] 1; [C] 2; [D] infiniti.

11. 1. 7 Gli angoli di ampiezze $a-30°$, $a+30°$, $80°$, $100°$ si possono considerare le misure delle facce di un angoloide tetraedro (convesso):
[A] solo se risulta $30°<a<60°$; [B] solo se risulta $30°<a<90°$;
[C] solo se risulta $30°<a<120°$; [D] per nessun valore di a.

11. 1. 8 Una piramide si dice retta se:
[A] la sua altezza è perpendicolare ad uno spigolo di base;
[B] la sua altezza è perpendicolare alla base;

[C] la sua base è un poligono regolare;
[D] valgono condizioni diverse dalle precedenti.

11.1.9 Quanto vale il rapporto fra l'area di un esaedro regolare e quella dell'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle facce dell'esaedro?
[A] $\sqrt{2}$. [B] $\sqrt{3}$. [C] $2\sqrt{3}$. [D] $3\sqrt{2}$.

11.1.10 Un piano parallelo alla base di una piramide divide la piramide stessa in due solidi equivalenti. Delle due parti in cui il piano divide l'altezza della piramide, quella che non contiene il vertice sta in un determinato rapporto con l'altra parte. Qual è questo rapporto?
[A] $\sqrt[3]{2}$. [B] $2\sqrt[3]{2}$. [C] $\sqrt[3]{2}-1$. [D] $\sqrt[3]{2}+1$.

11.1.11 In un tronco di piramide quadrangolare regolare lo spigolo della base maggiore è lungo il doppio dello spigolo della minore. Considerato il rapporto fra il minore e il maggiore dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso da un piano equidistante dalle basi, quanto vale questo rapporto?
[A] $\frac{19}{37}$. [B] $\frac{15}{28}$.
[C] $\frac{13}{25}$. [D] Non si può calcolare giacché i dati assegnati sono insufficienti.

11.1.12 Il volume V di un cono equilatero, di apotema uguale ad a, è tale che:
[A] $V=\frac{1}{12}\pi a^3$; [B] $V=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$;
[C] $V=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi a^3$; [D] V non si può calcolare giacché i dati assegnati sono insufficienti.

11.1.13 Se si fanno compiere ad un rombo due rotazioni di mezzo giro, ognuna intorno a ciascuna delle due diagonali, il rapporto k' tra le aree delle superfici dei due solidi generati ed il rapporto k" tra i loro volumi sono tali che:
[A] $k' > k''$;
[B] $k' = k''$;
[C] $k'' > k'$;
[D] di nessuna delle tre relazioni precedenti si ha certezza.

11.1.14 Un tronco di cono circolare retto, di cui si conosce la misura dell'apotema, è circoscritto ad una sfera di raggio noto. I dati assegnati:
[A] bastano per calcolare sia l'area totale sia il volume del tronco;
[B] bastano per calcolare il volume del tronco ma non l'area totale;
[C] bastano per calcolare l'area totale del tronco ma non il volume;
[D] non bastano per calcolare il volume né l'area totale del tronco.

11.1.15 Tre facce di un parallelepipedo rettangolo hanno aree 12 cm^2, 36 cm^2 e 48 cm^2. Quanto misura la diagonale del parallelepipedo?
[A] 12 cm. [B] 13 cm. [C] 18 cm. [D] 24 cm.

11.1.16 Una piramide è secata, da un piano parallelo alla sua base ed equidistante dalla base medesima e dal vertice, secondo un poligono che, proiettato ortogonalmente sulla base della piramide, dà luogo ad un prisma. Qual è il rapporto fra il volume del prisma e quello della piramide?
[A] $\frac{1}{8}$. [B] $\frac{1}{4}$. [C] $\frac{3}{8}$. [D] Non ci sono elementi sufficienti per calcolarlo.

11.1.17 Siano S' ed S" le aree totali di due cubi e V' e V" i loro volumi. Sia inoltre V'/V"=27 ed S'=72 cm^2. Quanto vale S"?
[A] 8 cm^2. [B] 24 cm^2. [C] 216 cm^2. [D] Non si può calcolare.

11.1.18 Se il diametro di una sfera raddoppia allora il suo volume risulta moltiplicato per:
[A] $2\sqrt{2}$; [B] 4; [C] 8; [D] un valore diverso.

11.1.19 Se la superficie di una sfera raddoppia allora il suo volume risulta moltiplicato per:
[A] $2\sqrt{2}$; [B] 4; [C] 8; [D] un valore diverso.

11.1.20 Una sfera ed un cubo hanno lo stesso volume. Indicate con S l'area della superficie sferica e con A l'area totale del cubo, risulta che:
[A] $S > A$; [B] $S = A$;
[C] $S < A$; [D] i dati sono insufficienti per stabilire un confronto fra S ed A.

11.2 Quesiti a risposta aperta.

11.2.1 È vero che due rette si definiscono sghembe se non sono contenute in uno stesso piano?

11.2.2 Quali delle coppie di rette a,b, rappresentate nella figura sottostante (Fig. 11.1) sono parallele? Quali perpendicolari? Quali sgehembe?

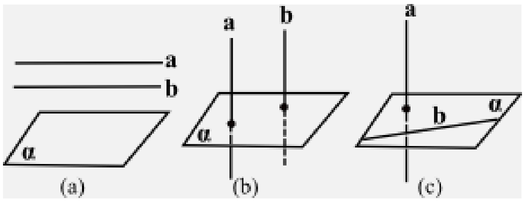

Fig. 11.1

11.2.3 Se due piani sono paralleli ad una stessa retta si può concludere che sono paralleli fra loro?

11.2.4 Due rette distinte, r ed s, considerate nello spazio ordinario, sono perpendicolari ad una medesima retta t. Si può concludere che le due rette r ed s sono parallele?

11.2.5 Due piani distinti, α e β, sono perpendicolari ad una stessa retta t. Si può concludere che sono paralleli?

11.2.6 Un cubo di legno, il cui spigolo è lungo 5 cm, è verniciato di giallo su tutta la superficie esterna, quindi è suddiviso in cubetti, aventi ciascuno lo spigolo di 1 cm ed i cubetti ottenuti sono sparpagliati. Quanti cubetti non presentano facce verniciate?

11. 2. 7 Può accadere che un piano intersechi un cubo secondo un parallelogramma generico (che non sia cioè un rettangolo né un rombo). Descrivi almeno una situazione in cui questo fatto si verifichi.

11. 2. 8 Una piramide ha per base un quadrato. Si può concludere che è regolare?

11. 2. 9 Si considerino una sfera ed il cilindro equilatero ed il cono equilatero inscritti in essa: è vero o è falso che il volume del cilindro è medio proporzionale fra quelli della sfera e del cono?

11. 2. 10 Un tetraedro regolare ha area totale uguale alla metà dell'area totale di un altro tetraedro regolare. Sapendo che il volume del primo tetraedro è 50 cm^3, è possibile calcolare il volume del secondo?

11. 2. 11 In una sfera sono inscritti un ottaedro regolare ed un cubo. È maggiore il volume dell'ottaedro o quello del cubo?

11. 2. 12 La Terra può essere pensata come una sfera di raggio $R \approx 6.371$ km ed è circondata da aria, variamente composta, che si estende fino ad altezze di centinaia di chilometri. La colonna d'aria che sovrasta 1 cm^2 di superficie terrestre pesa mediamente circa 1 kg. Quanto pesa la cappa d'aria che circonda la Terra?

11. 2. 13 La lunghezza dell'equatore lunare è circa 10.920 km. Dimostrare, senza alcun uso di strumenti di calcolo automatico che l'ordine di grandezza del volume della Luna è 10^{19} m^3.

11. 2. 14 Trovare la misura dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, approssimata al secondo.

11. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 11. 1. 1. Due rette parallele ad un medesimo piano possono essere parallele (se esiste un piano che le contiene e non hanno punti in comune), oppure incidenti (se hanno un punto in comune), oppure infine sghembe (se non esiste alcun piano che le contiene), ma non si può concludere, in base alla sola informazione fornita, che sono parallele né che sono incidenti o sghembe. L'alternativa corretta è perciò [D].

Quesito 11. 1. 2. Se due piani sono paralleli ad una medesima retta è possibile che siano paralleli, così come è possibile che siano incidenti o coincidenti, ma non si può concludere con certezza nessuna delle tre affermazioni. L'alternativa corretta è [D].

Quesito 11. 1. 3. L'affermazione [A] è falsa: basti pensare che se $a=b$, le due rette non sono strettamente parallele. In ogni altro caso, in cui $a \neq b$, le dure rette a, b sono strettamente parallele.
Se le due rette a,b fossero incidenti, solo una può essere parallela ad una data retta c, mentre l'altra non può esserlo: dunque le due rette a,b non sarebbero parallele ad una medesima retta. Contro l'ipotesi. Anche l'affermazione [B] è falsa.

Se le due rette a, b fossero sghembe, sarebbero rette distinte ed, essendo parallele ad una medesima retta, sarebbero parallele. Cioè le due rette sarebbero contemporaneamente sghembe e parallele. Il che è assurdo. L'affermazione [C] è falsa. L'unica alternativa corretta è [D].

Quesito 11. 1. 4. Due rette perpendicolari ad una medesima retta possono essere parallele (si pensi ai due spigoli di una faccia di un cubo e ad uno degli altri due spigoli della stessa faccia) oppure incidenti (si pensi a due spigoli di un cubo concorrenti in uno stesso vertice e al terzo spigolo concorrente in quel vertice) o sghembe (si pensi allo spigolo di un cubo ed a due spigoli concorrenti uno in un vertice ed un o nell'altro vertice ma non appartenenti alla stessa faccia). Da quanto detto consegue che l'unica alternativa corretta è [D].

Quesito 11. 1. 5. Assegnati un punto ed un piano, per il punto si può condurre una ed una sola retta perpendicolare al piano ed ogni piano contenente tale retta è perpendicolare al piano dato. L'alternativa corretta è [D].

Quesito 11. 1. 6. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 11. 1. 7. Anzitutto deve essere a–30°>0, cioè a>30°. Inoltre, ricordando che la somma delle facce di ogni angoloide (covesso) è minore di un angolo giro, deve essere:

$$(a - 30°) + (a + 30°) + 80° + 100° < 360°\ ,$$

cioè a<90°. In definitiva: 30°<a<90°. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 11. 1. 8. Una piramide si dice retta se la sua base è circoscrivibile ad un cerchio e il piede dell'altezza coincide con il centro di tale cerchio. L'alternativa corretta è [D].

Quesito 11. 1. 9. Si considerano i centri di quattro facce dell'esaedro, contenuti in uno stesso piano mediano: il segmento che unisce due centri consecutivi è uno spigolo dell'ottaedro ed è anche il lato di un quadrato la cui diagonale è lunga quanto lo spigolo dell'esaedro. Se, allora, si indica con L lo spigolo dell'esaedro, quello dell'ottaedro è $\frac{L}{\sqrt{2}}$. Se ne desume che il rapporto cercato è:

$$R = \frac{6\ L^2}{8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}\right)} = 2\sqrt{3}\ .$$

L'alternativa corretta è [C].

Quesito 11. 1. 10. La piramide data ha evidentemente volume doppio della piramide recisa. Ne consegue che il rapporto fra le altezze h ed h' delle due piramidi è $\sqrt[3]{2}$, dunque: $h=h'\sqrt[3]{2}$. La parte dell'altezza della piramide, una volta tolta h', è allora: $h''=h-h'=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)h'$. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 11. 1. 11. Consideriamo la piramide da cui è ottenuto il tronco. Se indichiamo con 2a la lunghezza dello spigolo della base maggiore del tronco, quella dello spigolo della base minore è evidentemente a. Se allora 2h indica l'altezza della piramide, l'altezza della piramide recisa è h. Se poi consideriamo il piano equidistante dalle basi del tronco, esso seca il tronco secondo un quadrato di lato $\frac{3}{2}$a. Da tutto ciò si desume che il rapporto k fra il minore e il maggiore dei due tronchi in cui è diviso il tronco dato è:

$$k=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\left(\frac{9}{4}a^2+a^2+\frac{3}{2}a\cdot a\right)}{\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\left(4a^2+\frac{9}{4}a^2+2a\cdot\frac{3}{2}a\right)}=\frac{19}{37}.$$

L'alternativa corretta è [A].

Quesito 11. 1. 12. Il cono di apotema a, in quanto equilatero, ha diametro di base e altezza rispettivamente uguali ad $\frac{a}{2}$ ed $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Il suo volume è pertanto:

$$V=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi\, a^3.$$

L'alternativa corretta è [B].

Quesito 11. 1. 13. Se indichiamo con a, b le lunghezze delle diagonali del rombo, si trova che il rapporto fra le aree dei due solidi di rotazione è a/b, così come il rapporto dei loro volumi. La risposta corretta è pertanto [B].

Quesito 11. 1. 14. I dati sono sufficienti per calcolare le misure delle basi e dell'altezza del tronco e, di conseguenza, sia la sua area totale sia il suo volume. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 11. 1. 15. Indicate con a, b, c le dimensioni del parallelepipedo si ha: ab=12, bc=36, ca=48. Risolto il sistema di queste tre equazioni si ottiene: a=4, b=3, c=12. Per cui la diagonale del parallelepipedo misura 13 cm. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 11. 1. 16. Indicata con h l'altezza della piramide, con B l'area della sua base e con S l'area della sezione con il piano, il volume V' della piramide ed il volume V" del prisma sono tali che:

$$V'=\frac{1}{2}Sh,\ V''=\frac{1}{3}Bh.\ \text{ Da qui segue che: }\ \frac{V'}{V''}=\frac{3}{2}\cdot\frac{S}{B}.$$

D'altro canto, per un noto teorema, risulta che: $\frac{S}{B}=\frac{(h/2)^2}{h^2}=\frac{1}{4}$.

Pertanto: $\frac{V'}{V''}=\frac{3}{8}$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 11. 1. 17. Se indichiamo con L' ed L" gli spigoli dei due cubi, è evidente che:

$$\frac{V'}{V''}=\left(\frac{L'}{L''}\right)^3,\ \text{ per cui }\ \frac{L'}{L''}=3.$$

D'altro canto: $\frac{S'}{S''}=\left(\frac{L'}{L''}\right)^2$, per cui $\frac{S'}{S''}=9$. Da qui segue: $S''=\frac{1}{9}S'=8\ cm^2$.

[A] è l'alternativa corretta.

Quesito 11. 1. 18. Poiché il volume di una sfera è direttamente proporzionale al cubo del diametro, se questo raddoppia (cioè è moltiplicato per 2) il volume risulta moltiplicato per 2^3, cioè per 8. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 11. 1. 19. Poiché la superficie della sfera è direttamente proporzionale al quadrato del raggio, se la superficie raddoppia, il raggio risulta moltiplicato per $\sqrt{2}$. D'altro canto, il volume di

una sfera è direttamente proporzionale al cubo del raggio, per cui se questo risulta moltiplicato per $\sqrt{2}$, il volume risulta moltiplicato per $\left(\sqrt{2}\right)^3$, cioè per $2\sqrt{2}$.
[A] è l'alternativa corretta.

Quesito 11.1.20. Tra i solidi di volume uguale la sfera è quella di minima superficie. Quindi [C] è l'alternativa corretta.

In altro modo: posto che sia $\frac{4}{3}\pi r^3$ il volume comune, allora $S=4\pi r^2$ ed $A=6r^2\sqrt[3]{\frac{16}{9}\pi^2}$, che è come dire: $S=\left(2r^2\right)\cdot 2\pi$ ed $A=\left(2r^2\right)\sqrt[3]{48\,\pi^2}$. Siccome $2\pi<\sqrt[3]{48\,\pi^2}$ allora $S<C$.

11.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 11.2.1. No, non è questa la definizione corretta. Anche due rette secanti o parallele potrebbero non essere contenute in un medesimo piano. Solo che nel caso delle rette secanti o parallele, esiste comunque un piano che le contiene, mentre nel caso delle rette sghembe non esiste alcun piano che le contenga. La definizione corretta di rette sghembe è dunque la seguente: due rette si dicono sghembe se non esiste alcun piano che le contenga.

Quesito 11.2.2. Sono parallele sia le rette della coppia (1) sia quelle della coppia (2). Le rette della coppia (3) sono sghembe ma sono anche ortogonali (o perpendicolari), poiché la retta a è perpendicolare al piano α contenente la retta b. Bisogna precisare che alcuni autori, i quali distinguono fra rette ortogonali e rette perpendicolari, considerano le rette della coppia (3) ortogonali ma non perpendicolari, poiché riservano questa seconda denominazione al solo caso in cui le rette sono incidenti, formando ovviamente angoli retti.

Quesito 11.2.3. No. In effetti i due piani potrebbero essere in qualsiasi posizione: paralleli, secanti, coincidenti.

Quesito 11.2.4. Le due rette potrebbero essere parallele (se sono contenute in un medesimo piano), ma se non sono contenute in uno stesso piano sono sghembe. Quindi il fatto che siano perpendicolari ad una stessa retta, di per sé non è sufficiente a farci concludere che le due rette siano parallele.

Quesito 11.2.5. Sì, giacché per un punto si può condurre uno ed un solo piano perpendicolare ad una stessa retta. Ragion per cui, se i due piani α e β non fossero paralleli, avrebbero almeno un punto in comune, per il quale si potrebbero condurre due piani perpendicolari alla stessa retta t. Contro la proprietà prima enunciata.

Quesito 11.2.6. Stabilito che il numero dei cubetti in cui è suddiviso il cubo dato è 5^3, conviene calcolare dapprima il numero dei cubetti che presentano almeno una faccia verniciata. Immaginiamo per questo che il cubo sia appoggiato su un piano orizzontale.
La faccia superiore dà luogo a $5\times5=25$ cubetti "verniciati" e ad altrettanti ne dà luogo la faccia inferiore.
Una delle facce laterali presenta $5\times3=15$ cubetti "verniciati" ($5\times2=10$ sono già stati conteggiati) ed altrettanti ne presenta la faccia opposta.

Una delle due facce rimanenti fornisce 3×3=9 cubetti "verniciati" (i cubetti del contorno della faccia, in numero di 5×2+3×2=16, sono già stati conteggiati) ed altrettanti ne fornisce la faccia opposta.
In definitiva, i cubetti che presentano almeno una faccia verniciata sono in numero di (25+15+9)×2=98. Di conseguenza, i cubetti che non presentano facce verniciate sono in numero di $5^3-98=27$.

Quesito 11. 2. 7. È sufficiente che il piano intersechi quattro facce del cubo, due a due opposte, senza essere perpendicolare ad alcuna di esse.

Quesito 11. 2. 8. Il fatto che la base della piramide sia un quadrato non basta a farci concludere che la piramide è regolare. Bisogna che sia anche retta, vale a dire che il piede della sua altezza coincida con il centro del quadrato.

Quesito 11. 2. 9. Se si indica con r il raggio della sfera, si calcola che:

$$V_{sfera}=\frac{4}{3}\pi r^3,\quad V_{cilindro}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi r^3,\quad V_{cono}=\frac{3}{8}\pi r^3;$$

siccome $\frac{4}{3}:\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{3}{8}$, si deve concludere che la risposta alla domanda posta è sì.

Quesito 11. 2. 10. Indichiamo con L lo spigolo di un generico tetraedro regolare. La sua area totale S ed il suo volume V sono dati dalle seguenti formule: $S=kL^2$ e $V=hL^3$, dove k ed h sono delle costanti che non dipendono dal tetraedro regolare che si considera. Di modo che, se L' ed L" sono gli spigoli dei due tetraedri regolari in esame, il rapporto fra l'area totale S' del primo e l'area S" del secondo è tale che:

$$\frac{S'}{S}=\left(\frac{L'}{L''}\right)^2.$$

Siccome $\frac{S'}{S''}=\frac{1}{2}$ allora $L''=L'\sqrt{2}$.
D'altro canto: $\frac{V'}{V''}=\left(\frac{L'}{L''}\right)^3$, per cui $\frac{V'}{V''}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$ ossia: $V''=2\sqrt{2}\,V'$;
e siccome $V' = 50\ cm^3$, allora $V'' = 100\sqrt{2}\ cm^3$.

Quesito 11. 2. 11. L'ottaedro può essere concepito come composto da due piramidi regolari uguali unite per la base. La quale base è il quadrato inscritto in un cerchio massimo della sfera, mentre l'altezza di ciascuna delle due piramidi è uguale al raggio della sfera. Detto allora r il raggio della sfera, il volume V' dell'ottaedro è: $V'=2\cdot\frac{1}{3}\cdot 2r^2\cdot r=\frac{4}{3}r^3$. La diagonale del cubo è uguale a 2r, per cui lo spigolo dello stesso cubo è $s=\frac{2}{\sqrt{3}}r$ ed il volume è: $V''=\frac{8}{3\sqrt{3}}r^3$. Si ha, pertanto:

$$\frac{V'}{V''}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1.$$

Dunque: V'<V".

Quesito 11. 2. 12. Indicando con p il peso medio della colonna d'aria che sovrasta $1\ cm^2$ di superficie terrestre, per cui $p \approx 1\ kg/cm^2$, il peso P della cappa d'aria che circonda la terra è:

P=Sp, dove S è l'area della superficie terrestre. Siccome $S = 4\pi R^2 \approx 5{,}1 \times 10^8$ km², ossia: $S \approx 5{,}1 \times 10^{18}$ cm², allora: $P \approx 5{,}1 \times 10^{18}$ kg.

Quesito 6. 2. 13. Il volume della Luna è:

$$V=\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{10920}{2\pi}\right)^3 \text{ km}^3.$$

Siccome: $\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{10920}{2\pi}\right)^3 \approx \frac{4\pi}{3\cdot 8\,\pi^3}\cdot\left(10^4\right)^3 \approx \frac{1}{6\cdot 3^2}\cdot 10^{12} \approx \frac{10^{12}}{10^2}=10^{10}$,
allora $V\approx 10^{10}$ km³, ossia $V=10^{10}\cdot 10^9$ m³$=10^{19}$ m³.
L'ordine di grandezza cercato è pertanto 10^{19} m³.

Quesito 11. 2. 14. L'angolo di due facce consecutive dell'ottaedro regolare (Fig. 11.2) è $A\widehat{M}B$, essendo A, B due suoi vertici opposti ed M il punto medio dello spigolo che le due facce hanno in comune. Indicato con O il centro dell'ottaedro e con s la lunghezza del suo spigolo, si ha:

$$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}s,\ \overline{OM}=\frac{s}{2}\ .\ \text{Dunque: } \cos A\widehat{M}O=\frac{OM}{AM}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

Pertanto: $\cos A\widehat{M}B=\cos\left(2\,A\widehat{M}O\right)=2\cos^2 A\widehat{M}O-1=-\frac{1}{3}$.

E da qui si ottiene: $A\widehat{M}B \approx 109°28'16''$.

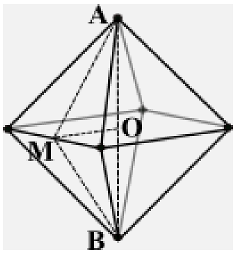

Fig. 11.2

11. 5 Bonaventura Cavalieri: vita ed opere.


Cavalieri

Uno dei problemi con cui si misuravano i matematici nel XVI secolo era il cosiddetto "problema delle aree", vale a dire il problema del calcolo dell'area di una superficie a contorno non rettilineo. Assieme ad esso, i matematici di quell'epoca avevano a che fare anche con il calcolo

del volume di un solido non a forma di prisma. Ora, problemi del genere erano stati affrontati e risolti molto tempo prima da Archimede, ma gli studiosi del Rinascimento, che conoscevano la massima parte dei risultati del Siracusano, non ne conoscevano però il metodo di analisi. Sapevano soltanto che egli, una volta ipotizzato che una certa figura aveva una determinata misura (area o volume che fosse), dimostrava con un ragionamento per assurdo (che fu chiamato "metodo di esaustione") che la misura della figura non poteva essere né maggiore né minore di quella ipotizzata. Ma come faceva Archimede a "indovinare" la misura giusta? Questo i matematici del Rinascimento lo ignoravano e, in effetti, la cosa si sarebbe scoperta solo nel 1906, allorché il filologo danese Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) ritrovò in un palinsesto della biblioteca del Metochion di Costantinopoli un testo matematico del celebre scienziato, contenente, oltre ad alcune sue opere note, anche l'unico esemplare del *Metodo* seguito da lui per scoprire le formule che poi dimostrava con il metodo di esaustione.
Ebbene, i matematici del Rinascimento inventarono metodi di analisi molto simili a quello di Archimede, pur senza conoscerlo.

Uno dei matematici che si distinsero in quest'azione fu Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Era membro dell'ordine religioso dei Gesuati di San Gerolamo (1). Mentre si trovava nel convento di Pisa, ebbe modo di seguire le lezioni di matematica di padre Benedetto Castelli (1577-1644), il quale fu favorevolmente impressionato dalle doti di Cavalieri, tanto che decise di presentarlo a Galileo Galilei (1564-1642) di cui era discepolo. Ne nacque un'intensa amicizia che sfociò in una ricca corrispondenza tra Galileo e Cavalieri. Fu anche per i buoni uffici di Galileo che Cavalieri nel 1629 diventò "Primo Matematico" dell'Ateneo bolognese. E di fatto fu su incoraggiamento di Galileo che Cavalieri organizzò in un libro le sue riflessioni sulla misura delle superfici e dei solidi. Fu così che vide la luce, nel 1635 a Bologna, un trattato dal lungo titolo latino – *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* – noto generalmente come la *Geometria degli indivisibili*. In quest'opera, una superficie è considerata come composta da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e un solido da un numero indefinito di superfici piane parallele; e sono questi elementi costitutivi che Cavalieri chiama "indivisibili" rispettivamente di area e di volume.

La proposizione più celebre dell'opera è la prop. III del libro II, nota come *principio di Cavalieri*:
«Figure piane hanno tra di loro il medesimo rapporto che hanno tutte le linee di esse prese con un riferimento qualunque; e figure solide lo stesso rapporto che hanno i piani di esse presi rispetto ad un riferimento qualunque» (2).
Essa costituisce la base della geometria di Cavalieri, come riconosce lo stesso Autore nel Corollario alla proposizione medesima:
«Discende in modo evidente da ciò che, per trovare quale rapporto abbiano tra di loro due figure piane o solide, sarà per noi sufficiente trovare, nelle figure piane, quale rapporto abbiano tra di

---

[1] Da non confondere con i Gesuiti di Sant'Ignazio di Loyola.
[2] Bonaventura Cavalieri., ***Geometria degli indivisibili*** (a cura di L. Lombardo Radice), coll. Classici, Torino, UTET, 1966, pag. 209.

loro tutte le linee di esse e, nelle figure solide, tutti i piani di esse, presi rispetto a un riferimento qualunque, il che pongo come massimo fondamento di questa mia nuova Geometria» (3).

La *Geometria degli indivisibili* presentava carenze di ordine logico che ne minavano le fondamenta e per questo all'epoca fu aspramente criticata. Fra i maggiori critici si segnalò un gesuita svizzero, padre Paolo Guldino (1577-1643). Tuttavia, poiché i risultati ai quali permetteva di pervenire erano regolarmente confermati seguendo la rigorosa dimostrazione del metodo di esaustione e poiché aveva un innegabile valore euristico, il metodo degli indivisibili raccolse anche larghi consensi e fu applicato da molti studiosi.

Nel tentativo di rimuovere le critiche all'opera di Cavalieri si adoperarono, oltre allo stesso Cavalieri, il suo amico Evangelista Torricelli (1608-1647), che fu pure lui discepolo di Galilei, e Pietro Mengoli (1625-1686), discepolo dello stesso Cavalieri, al quale succedette nella cattedra di Bologna.

[3] Cavalieri, op. cit., pag 211.