Capitolo 12 (Integrazione a unità 51-52-53)

Funzioni e loro grafici

12.1 Quesiti a risposta chiusa.

12.1.1 La funzione: $y=\sqrt{x^2-x-2}$ è definita:
[A] solo per $x<-1$; [B] solo per $x>2$;
[C] solo per $x<-1$ e per $x>2$; [D] per valori di x diversi da quelli sopraddetti.

12.1.2 La funzione: $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ è definita:
[A] per ogni x reale;
[B] solo per gli x reali per cui risulta $x<-1$ oppure $x>1$;
[C] solo per gli x reali per cui risulta $-1<x<1$;
[D] per valori di x diversi da quelli sopraddetti.

12.1.3 Sono date le funzioni $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ e $g(x)=\dfrac{1+x}{x}$. La funzione $f\,[g(x)]$ è:
[A] $1+x$; [B] $-1-x$; [C] $\dfrac{1}{x}$; [D] $-\dfrac{1}{x}$.

12.1.4 Sia $y=f(x)$ una funzione invertibile e sia $y=f^{-1}(x)$ la sua inversa. Se i grafici delle due funzioni s'intersecano in un punto, le sue coordinate sono del tipo:
[A] (a, 0); [B] (0, a); [C] (a, a); [D] (a, 2a);
essendo a un numero reale.

12.1.5 Si consideri il numero $4^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$. Risulta che esso è un numero:
[A] uguale a 2; [B] razionale maggiore di 2;
[C] razionale minore di 2; [D] irrazionale.

12.1.6 Quale delle seguenti forme non rappresenta $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$?
[A] $3^{-\frac{1}{3}}$; [B] $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{9}$; [C] $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$; [D] $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

12.1.7 Un valore semplificato del numero $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{2\sqrt{2}}$ è:
[A] 3; [B] $3^{\sqrt{2}}$; [C] 3^2; [D] 3^3.

12.1.8 I numeri a, b sono generici numeri reali tali che $a>b>1$. Risulta che:
[A] $a^b>b^a$; [B] $a^b=b^a$; [C] $a^b<b^a$; [D] non è possibile stabilirlo.

12.1.9 Il numero a è un generico numero reale tale che $0<a<1$. Posto $x=(a^a)^a$ ed $y=a^{(a^a)}$, risulta:
[A] $x>y$; [B] $x=y$; [C] $x<y$; [D] non è possibile stabilirlo.

12. 1. 10 Quale relazione sussiste fra i numeri a e $b=a^{\ln 2,5}$, dove a è un numero intero positivo qualunque diverso da 1 ?
[A] $a > b$. [B] $a = b$. [C] $a < b$. [D] Non è possibile stabilirlo.

12. 1. 11 Quale relazione sussiste fra i numeri reali a e $b=a^{\ln e}$, dove e è la base dei logaritmi naturali ?
[A] $a > b$. [B] $a = b$. [C] $a < b$. [D] Non è possibile stabilirlo.

12. 1. 12 Quale relazione sussiste fra i numeri a e $b=a^{\ln 3}$, dove a è un numero reale positivo diverso da 1 ?
[A] $a > b$. [B] $a = b$. [C] $a < b$. [D] Non è possibile stabilirlo.

12. 1. 13 Senza usare strumenti di calcolo, quale relazione sussiste fra i numeri $a=\log_3 2$ e $b=\log_2 3$?
[A] $a > b$. [B] $a = b$. [C] $a < b$. [D] Non è possibile stabilirlo.

12. 1. 14 Qual è la soluzione reale dell'equazione $\log_3(\log_2 x)=1$?
[A] 4 ; [B] 8 ; [C] 9 ; [D] 27 .

12. 1. 15 Considerata l'equazione $\sin 2x+2\cos 2x=3$, quante sono le sue soluzioni reali, appartenenti all'intervallo $[0,2\pi]$?
[A] 0 ; [B] 2 ; [C] 3 ; [D] 5 .

12. 1. 16 Quanto vale $\operatorname{asin}\frac{3}{4}+\operatorname{acos}\frac{3}{4}$?
[A] $\operatorname{asin}\frac{3}{2}$. [B] $2\operatorname{asin}\frac{3}{4}$. [C] π. [D] Un valore diverso.

12. 1. 17 Quali sono le soluzioni della disequazione $2\sin^2 x-3\sin x-2<0$, con $0\leq x<2\pi$?
[A] Ogni $x\in[0,2\pi[$. [B] Nessun $x\in[0,2\pi[$.
[C] $x\in\left]0,\frac{7\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{6},2\pi\right[$. [D] $x\in\left[0,\frac{4\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{3},2\pi\right[$.

12. 1. 18 È stato dimostrato che il numero $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è un numero trascendente. Indicare almeno un numero irrazionale α tale che il numero $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\alpha}$ sia un numero algebrico.

12. 2 Quesiti a risposta aperta.

12.2.1 Sono date le funzioni $f(x)=\frac{1-x}{x}$ e $g(x)=\frac{x}{1+x}$. Qual è la funzione $f[g(x)]$?

12. 2. 2 Trovare le funzioni componenti della seguente funzione composta:

$$y=\frac{1}{(1+2^x)^3}$$

12. 2. 3 È semplice verificare, magari mediante una calcolatrice, che $2^{2^2}<2^{22}$ mentre $9^{9^9}>9^{99}$. È possibile stabilire per quali valori di a un numero del tipo a^h, dove $h=a^a$, è maggiore o minore del numero a^k, dove k è il numero formato da due cifre uguali ad a, essendo a un numero intero compreso fra 2 e 9 inclusi?

12.2.4 È vero che le espressioni $2^{\sqrt{2}}$ e $\left(\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{2}}$ rappresentano due numeri uguali fra loro?

12.2.5 È possibile stabilire quale relazione d'ordine sussiste fra i numeri $\log_5 10$ e $\log_{10} 5$ senza l'uso di strumenti di calcolo?

12.2.6 Stabilire a quale condizione deve soddisfare x affinché $\log_2 x$ sia un numero razionale.

12.2.7 Ti è stato comunicato il valore del logaritmo decimale di 3 (vale a dire del logaritmo di 3 in base 10) e ti è richiesto di calcolare il valore del logaritmo decimale di 900. Non puoi utilizzare strumenti di calcolo. Come pensi di procedere?

12.2.8 Paolo e Giorgio sono alle prese con la semplificazione dell'espressione $2^{\log_2 3-1}$. Paolo è sicuro che il valore semplificato sia 3/2 ma Giorgio non è d'accordo con lui. Chi pensi che abbia ragione?

12.2.9 Risolvere la seguente disequazione in x: $\log_2\left(x^2-2x\right)>1$.

12.2.10 È data la seguente espressione: $\dfrac{\log_2 \frac{1}{4}-\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 \frac{1}{9}+\log_2 \sqrt[3]{4}}$.

Semplificarla senza usare strumenti di calcolo automatico.

12.2.11 Disponi di una calcolatrice che ti permette di calcolare il logaritmo naturale di un qualunque numero reale (positivo e diverso da 1) e devi calcolare $\log_2(\log_3 44)$. Come pensi di procedere ?

12.2.12 Si consideri la curva di equazione $y=2^{2x}$. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto alla retta di equazione $y=x$?

12.2.13 Risolvere nell'insieme dei numeri naturali la seguente disequazione nell'indeterminata n: $\left|n^2-2^n\right|\leq 1$.

12.2.14 Qual è il numero reale x tale che: $\operatorname{asin} x = \operatorname{asin}\frac{1}{2}+\operatorname{acos}\frac{1}{3}$?

12.2.15 Risolvere l'equazione $\sin 2x - \cos 3x = 0$ per $0<x<2\pi$.

12.2.16 Determinare per quale valore di x è soddisfatta la seguente relazione:

$$\operatorname{atan} x + \operatorname{atan}(-1/3) = \operatorname{atan} 2x \ .$$

12.2.17 Risolvere la disequazione $\sin 2x > 0$, con $0\leq x\leq 2\pi$.

12.2.18 Risolvere la disequazione $\cos 3x < 0$, con $0\leq x\leq 2\pi$.

12.2.19 Risolvere la disequazione $\tan\frac{x}{2}<0$, con $0\leq x\leq 2\pi$.

12.3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 12. 1. 1. Deve essere $x^2-x-2\geq 0$, vale a dire $x\leq -1$ oppure $x\geq 2$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 2. Il dominio della funzione è costituito dagli x reali per cui si ha $1+x^2>0$ e questo accade per ogni x reale. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 3. Si ha:

$$f[g(x)]=\frac{\frac{1+x}{x}}{1-\frac{1+x}{x}}=-1-x\,.$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 4. I grafici delle due funzioni sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla retta $y=x$, per cui, posto che abbiano un punto in comune, questo, essendo simmetrico di se stesso, non può che trovarsi su quella retta: le sue coordinate sono pertanto del tipo (a,a). [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 5. Si ha:

$$x=4^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{4}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}=2^{-1}=\frac{1}{2}\,.$$

[C] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 6. Si ha:

$$\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\,.$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 7. Si ha: $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{2\sqrt{2}}=\left(\sqrt{3}\right)^4=3^2$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 8. Basta constatare che si ha: $3^2>2^3$, $4^2=2^4$, $4^3<3^4$, per concludere che non è possibile alcun confronto finché non sono conosciuti i valori di a e b. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 9. Osserviamo anzitutto che $x=(a^a)^a=a^{(a^2)}$. Notiamo poi che, essendo $0<a<1$, risulta: $a^2<a^a$ e, sempre per il fatto che $0<a<1$, risulta ancora $a^{(a^2)}>a^{(a^a)}$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 10. Bisogna tener presente che $\ln 2{,}5$ è un numero reale compreso fra 0 ed 1 e che a, essendo un intero positivo diverso da 1, è un intero almeno uguale a 2, per cui $a^{\ln 2{,}5}$ è minore di a. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 11. Bisogna constatare che $\ln e=1$, per cui $b=a$, qualunque sia il numero reale a. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 12. Bisogna tener presente anzitutto che $\ln 3$ è un numero reale maggiore di 1. Ora se $a>1$ allora $a^{\ln 3}>a$, se $0<a<1$ allora $a>a^{\ln 3}$. Siccome non è precisato il valore di a, l'unica cosa che si può dire è che $a \neq b$, ma non si può stabilire quale delle altre due situazioni si verifica. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 13. Basta constatare che $\log_3 2 < 1 < \log_2 3$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 14. Per definizione di logaritmo, si ha: $\log_2 x = 3$, da cui ancora: $x = 2^3 = 8$.
L'alternativa corretta è [B].
L'alternativa corretta può essere trovata anche per sostituzione diretta. Si prova l'alternativa [A], $x=4$, e si trova che il primo membro vale $\log_3 2$, che evidentemente è diverso da 1: alternativa da scartare. Si prova l'alternativa [B], $x=8$, e si trova che il primo membro vale effettivamente 1: l'alternativa è corretta. È inutile continuare a provare con le altre alternative, che certamente non sono corrette.

Quesito 12. 1. 15. Siccome $\sin 2x$ e $\cos 2x$ variano tra -1 ed 1, l'equazione ammette soluzioni reali solo se risulta contemporaneamente $\sin 2x = \cos 2x = 1$. Ma non esiste alcun angolo che abbia seno e coseno uguali ad 1: quando uno di essi è 1, l'altro è 0. Si desume che l'equazione è impossibile in $\mathbb{R}$. L'alternativa corretta è [A].
Ci sono, ovviamente, altri modi di risolvere l'equazione, più lunghi e complicati. Ne mostriamo uno, il quale richiede di ricordare che si ha:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Orbene, tenendo presente tutto ciò, l'equazione si può mettere nella forma seguente:

$$2 \sin x \cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3(\cos^2 x + \sin^2 x).$$

Dopo aver semplificato, si ottiene: $5 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$,
o anche, dividendo tutto per $\cos^2 x$: $5 \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$.
Siccome il discriminante di quest'equazione di 2° grado, considerata nell'incognita $\tan x$, è negativo, essa è impossibile in $\mathbb{R}$. Come prima, ma dopo essersi complicata inutilmente la vita.

Quesito 12. 1. 16. Posto: $\operatorname{asin}\frac{3}{4} = \alpha$ e $\operatorname{acos}\frac{3}{4} = \beta$, risulta: $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ e $\cos \beta = \frac{3}{4}$, cioè $\sin \alpha = \cos \beta$, per cui α e β sono angoli complementari. La loro somma è pertanto $\frac{\pi}{2}$.
Dunque: $\operatorname{asin}\frac{3}{4} + \operatorname{acos}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 17. Constatato che sono reali, anzitutto si trovano gli zeri dell'equazione $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$, considerata nell'incognita $\sin x$. Si ottengono i valori 2 e $-\frac{1}{2}$. Ne discende che la disequazione è soddisfatta per $-\frac{1}{2} < \sin x < 2$. A questo punto è sufficiente tener sott'occhio il cerchio trigonometrico e concludere che si ha:

$$0 \leq x < \frac{7\pi}{6} \text{ oppure } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi.$$

[C] è l'alternativa corretta.

Quesito 12. 1. 18. Un numero α è certamente $\sqrt{2}$. Si ha infatti: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.
Ma rispondono alla richiesta tutti i numeri del tipo $k\sqrt{2}$, dove k è un qualsiasi intero non nullo.

12. 4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 12. 2. 1. Si ha: $f[g(x)] = \dfrac{1-\frac{x}{1+x}}{\frac{x}{1+x}} = \dfrac{1}{x}$.

Quesito 12. 2. 2. Si ha: $y=1/t$, $t=u^3$, $u=1+2^x$.

Quesito 12. 2. 3. Naturalmente, con l'uso di una calcolatrice, si possono confrontare i vari numeri a^h ed a^k, ma noi vogliamo trovare un criterio generale. Intanto incominciamo ad osservare che $a^h=a^{a^a}$ ed $a^k=a^{10a+a}=a^{11a}$. Si tratta allora di stabilire per quali valori di a risulta: $a^a>11a$ oppure $a^a<11a$, o anche, rispettivamente: $a^{a-1}>11$ oppure $a^{a-1}<11$. Ricordiamo che a è un intero compreso fra 2 e 9 inclusi.
La prima disequazione è evidentemente soddisfatta per $a>3$, la seconda per $a=2$ oppure $a=3$.
Notiamo per inciso che solo per $a=1$ risulta $a^h=a^k$.

Quesito 12. 2. 4. Si ha: $\left(\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{2}}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}$. I due numeri sono dunque uguali fra loro.

Quesito 12. 2. 5. Si tratta di trovare un numero, col quale sia semplice confrontare i due numeri assegnati. In realtà un siffatto numero esiste, ed è il numero 1. Infatti $\log_5 10>1$, mentre $\log_{10} 5<1$, per cui: $\log_{10} 5<\log_5 10$.

Quesito 12. 2. 6. Affinché $\log_2 x$ sia un numero razionale, x deve essere una potenza di 2 con esponente razionale q. In tal caso si ha, infatti: $\log_2 x=\log_2 2^q=q$.

Quesito 12. 2. 7. Indicato con Log N il logaritmo decimale di N, è sufficiente constatare che:

$$\text{Log } 900=\text{Log}\left(3^2\cdot 10^2\right)=2\text{ Log } 3+2.$$

A questo punto, considerato che Log 3 è noto, il calcolo è presto fatto.

Quesito 12. 2. 8. Si ha: $2^{\log_2 3-1}=\dfrac{2^{\log_2 3}}{2}=\dfrac{3}{2}$. Ha ragione Paolo.

Quesito 12. 2. 9. La disequazione assegnata è equivalente alla seguente: $x^2-2x>2$, che è soddisfatta per $x<1-\sqrt{3}$ oppure $x>1+\sqrt{3}$.

Quesito 12. 2. 10. Si ha: $\dfrac{\log_2\frac{1}{4}-\log_3\sqrt{27}}{\log_3\frac{1}{9}+\log_2\sqrt[3]{4}}=\dfrac{-2-\frac{3}{2}}{-2+\frac{2}{3}}=\dfrac{21}{8}$.

Quesito 12. 2. 11. Si ha: $\log_2(\log_3 44)=\log_2\dfrac{\ln 44}{\ln 3}=\dfrac{\ln\frac{\ln 44}{\ln 3}}{\ln 2}\approx 1{,}7843$.

Quesito 12. 2. 12. Bisogna risolvere rispetto ad x l'equazione $y=2^{2x}$. Si ottiene $x=\frac{1}{2}\log_2 y$ o anche $x=\log_2\sqrt{y}$. A questo punto basta scambiare reciprocamente x con y. Si ottiene l'equazione cercata: $y=\log_2\sqrt{x}$.

Quesito 12. 2. 13 È sufficiente compilare una tabella come quella sottostante.

n	n^2	2^n	n^2-2^n	$\lvert n^2-2^n \rvert$
0	0	1	–1	1
1	1	2	–1	1
2	4	4	0	0
3	9	8	1	1
4	14	16	0	0
5	25	32	–7	7

Si capisce facilmente che la disequazione ammette come soluzioni i soli numeri naturali compresi fra 0 e 4, estremi inclusi, dal momento che per $n>5$ la differenza fra n^2 e 2^n tende ad aumentare in valore assoluto: basta pensare ai grafici delle funzioni $y=x^2$ e $y=2^x$.

Quesito 12.2.14 . Posto $\operatorname{asin}\frac{1}{2}=\alpha$ e $\operatorname{acos}\frac{1}{3}=\beta$, si ha chiaramente $\operatorname{asin} x=\alpha+\beta$ e perciò $x=\sin(\alpha+\beta)$, ossia: $x=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. Si ha d'altra parte: $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ e $\cos\beta=\frac{1}{3}$, per cui, tenendo presente che α e β sono angoli compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Pertanto: $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$.

Quesito 12.2.15. L'equazione si può mettere nella forma equivalente $\cos 3x=\sin 2x$, il che ci permette di concludere che i due angoli 3x e 2x sono complementari, a meno di multipli di 2π, vale a dire: $3x+2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, dove k è un intero. Da qui segue: $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$. Si tratta, a questo punto di determinare per quali valori di k si hanno valori di x compresi fra 0 e 2π.
Si trovano i seguenti 5 valori: $\frac{\pi}{10},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{9\pi}{10},\ \frac{13\pi}{10},\ \frac{17\pi}{10}$.

Quesito 12.2.16. L'equazione assegnata si può scrivere nel seguente modo equivalente: $\operatorname{atan} 2x-\operatorname{atan} x=\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{3}\right)$. Posto allora $\operatorname{atan} x=X$ ed $\operatorname{atan} 2x=Y$, è: $Y-X=\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{3}\right)$, vale a dire $\tan(Y-X)=-\frac{1}{3}$. D'altro canto, tenendo presente che $\tan X=x$ e $\tan Y=2x$, si ha:

$$\tan(Y-X)=\frac{\tan Y-\tan X}{1+\tan X\tan Y}=\frac{2x-x}{1+2x^2}\ .$$

Deve essere perciò soddisfatta la seguente equazione in x:

$$\frac{x}{1+2x^2}=-\frac{1}{3}\ .$$

Una volta risolta, si trovano due valori di x: $x=-1$ ed $x=-\frac{1}{2}$.

Quesito 12.2.17. Posto $2x=X$, la disequazione diventa $\sin X>0$, la quale, tenendo presente il grafico della funzione $\sin X$ (sinusoide), è soddisfatta per $2k\pi<X<\pi+2k\pi$. Da qui, ritornando all'incognita x, segue: $2k\pi<2x<\pi+2k\pi$, e quindi: $k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$. Cosicché, ricordando che deve essere $0\le x\le 2\pi$, la disequazione $\sin 2x>0$ è soddisfatta per i seguenti valori di x:

$$(\text{con } k=0)\ 0<x<\frac{\pi}{2}\ ;\quad (\text{con } k=1)\ \pi<x<\frac{3}{2}\pi.$$

Quesito 12. 2. 18. Posto $3x=X$, la disequazione diventa $\cos X<0$, la quale, tenendo presente il grafico della funzione $\cos X$ (cosinusoide), è soddisfatta per $\frac{\pi}{2}+2k\pi<X<\frac{3}{2}\pi+2k\pi$. Da qui, ritornando all'incognita x, segue: $\frac{\pi}{2}+2k\pi<3x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, e quindi: $\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}$. Cosicché, ricordando che deve essere $0\le x\le 2\pi$, la disequazione $\cos 3x<0$ è soddisfatta per i seguenti valori di x:

$$(k=0)\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2};\quad (k=1)\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3};\quad (k=2)\ \frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3},$$

vale a dire:

$$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2};\quad \frac{5\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6};\quad \frac{9\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}.$$

Quesito 12. 2. 19. Posto $x/2=X$, la disequazione diventa $\tan X<0$, la quale, tenendo presente il grafico della funzione $\tan X$ (tangentoide), è soddisfatta per $\frac{\pi}{2}+k\pi<X<\pi+k\pi$. Da qui, ritornando all'incognita x, segue: $\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{x}{2}<\pi+k\pi$, e quindi: $\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi$. Cosicché, dovendo essere $0\le x\le 2\pi$, la disequazione $\tan\frac{x}{2}<0$ è soddisfatta per i seguenti valori di x: (solo per $k=0$) $\pi<x<2\pi$.

12. 5 John Napier: vita ed opere.

Nepero

Lo studente che legge queste righe provi ad eseguire con carta e penna, senza strumenti di calcolo automatico, la seguente operazione:
$5{,}25678 \times 12{,}47653 \times 7{,}12346$.
Non osiamo immaginare la sua reazione al nostro invito né gli epiteti che egli verosimilmente ha proferito al nostro indirizzo.
Eppure a calcoli di questo tenore dovevano sottoporsi inevitabilmente soprattutto gli astronomi all'inizio, cioè all'epoca della Grecia classica, se non ancora prima, a quella dei Babilonesi; ma in seguito, anche i fisici ed i ricercatori di scienze sperimentali in genere. E ciò fino all'invenzione del calcolo automatico, quindi praticamente fino alla seconda metà del XX secolo.
Orbene, nel Seicento un ricco proprietario terriero scozzese, di nome John Napier (italianizzato: Giovanni Nepero, 1550-1617), di nobile lignaggio dal momento che era barone di Merchiston,

trovò il modo di semplificare notevovelmente il lavoro degli scienziati. Egli si occupava di matematica per diletto e inventò un modo geniale di trasformare i calcoli che comportavano prodotti in calcoli con somme; ricondusse il quoto di due quantità ad una differenza; l'estrazione di radice n-esima di un numero ad una divisione per n. Nepero, in altre parole, inventò i logaritmi. Lo stesso termine "logaritmo" fu coniato da lui ed è composto da due parole greche: *logos* e *arithmos*, cioè rapporto e numero. L'opera che se ne occupa fu pubblicata nel 1614 col titolo altisonante *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Descrizione delle meravigliosa regola dei logaritmi*). È suddivisa in due parti: nella prima è sviluppata la teoria dei logaritmi; la seconda parte è dedicata alle tavole logaritmiche, la cui funzione è quella di fornire rapidamente il logaritmo di un dato numero o il numero di dato logaritmo.
Un secondo lavoro sui logaritmi fu publicato postumo nel 1619, su iniziativa del figlio Robert, col titolo *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (*Costruzione delle meravigliosa regola dei logaritmi*). In esso Nepero descriveva in modo esauriente il metodo usato per la costruzione delle tavole.
Sono i due lavori ai quali Nepero lavorò per circa 20 anni, ma che gli garantirono una celebrità imperitura.
Anche se le cose non stanno propriamente in questi termini, possiamo dire che Nepero creò un sistema di logaritmi avente come base il numero:

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

che si identifica col numero 1/e, almeno fino alla 10^a cifra decimale. Ricordiamo che "e" è quello che oggi chiamiamo "numero di Nepero", ma che si affermò con quel simbolo per il largo uso che ne fece Eulero (1707-1783) e, per questo, da molti è chiamato "numero di Eulero".

Nepero scrisse altre due opere non collegate ai logaritmi:

- una dal titolo *Rabdologia*, contenente la descrizione di un dispositivo che permette di velocizzare i calcoli elementari, conosciuto come "bastoncini di Nepero", fu pubblicata nel 1617;
- un'altra dal titolo *De Arte Logistica*, che tratta di matematica elementare, fu pubblicata molto tempo dopo la sua morte, addirittura nel 1839.

La risonanza che ebbe la *Descriptio* fu notevole e richiamò l'attenzione entusiasta dell'inglese Henry Briggs (1556-1630), che allora era professore di matematica al Gresham College di Londra. Briggs andò a visitare Nepero e, dopo diversi incontri, dopo il primo avvenuto nel 1615, cioè due anni prima della morte di Nepero, e dopo alcune discussioni sull'opportunità di usare una base diversa per i logaritmi, i due convennero che la più pratica era quella che forniva 0 come logaritmo di 1 ed 1 come logaritmo di 10: insomma la base 10. Fu così che nacque il sistema dei logaritmi decimali e fu proprio Briggs a pubblicare, nel 1617, anno della morte di Nepero, l'opera *Logarithmorum Chilias Prima* (*Introduzione ai logaritmi*), che comprende il sistema dei logaritmi in base 10 dei numeri da 1 a 1000, con un'approssimazione spinta fino alla 14^a cifra decimale. Pare che Briggs sia atato aiutato da otto abacisti (professionisti nell'uso dell'abaco).

Nel 1620 comparvero le prime tavole logaritmo-trigonometriche, cioè tavole che fornivano direttamente i logaritmi delle funzioni trigonometriche degli angoli, con valori estesi fino a 7 cifre decimali. Furono elaborate da un collega e amico di Briggs, il gallese Edmund Gunter (1581-1626), professore di astronomia al Gresham College di Londra. L'opera che le contiene porta il titolo *Canon triangulorum*. In essa compare per la prima volta il termine *cosinus*, abbreviazione di "complementi sinus", vale a dire "seno del complementare".

In seguito, praticamente fino all'invenzione del calcolo automatico, le tavole dei logaritmi e le tavole logaritmo-trigonometriche furono perfezionate da altri autori e pubblicate in decine di milioni di copie. Nelle scuole costituirono oggetto di studio meticoloso per impararne l'uso. Al giorno d'oggi, tutto questo non c'è più proprio perché soppiantato dal calcolo automatico e forse non ci si rende conto di ciò che significarono i logaritmi fin dalla loro invenzione. Vale a dire una diminuzione drastica del lavoro dei ricercatori, specialmente astronomi. Tanto da far dire al matematico francese Laplace (1749-1827): «Con la diminuzione del lavoro di calcolo da diversi mesi ad alcuni giorni, l'invenzione dei logaritmi sembra aver raddoppiato la vita degli astronomi».

Per completezza, vanno aggiunte alcune cose a quanto detto fin qui.
La prima è che un matematico svizzero di nome Jobst Bürgi (1552-1632) aveva elaborato un'idea sui logaritmi simile a quella di Nepero, indipendentemente da lui e contemporaneamente a lui. Egli però pubblicò i risultati delle sue ricerche dopo Nepero e forse per questo non ebbe la risonanza che meritava.
La seconda considerazione riguarda il concetto di logaritmo secondo Nepero. È, in realtà, una cosa completamente diversa da quello odierno, secondo cui il logaritmo di a in base b è il numero x tale che $b^x=a$. Il logaritmo di Nepero, piuttosto che di tipo algebrico, ha invece un'origine di tipo cinematico-geometrico. Per avere un'idea in proposito riportiamo direttamente da Carl B. Boyer [1]: «Siano dati un segmento lineare AB e una semiretta o semiraggio CDE … (Fig. 12.1). Un punto P parta da A e si muova lungo AB con velocità variabile decrescente in rapporto alla sua distanza da B; contemporaneamente un punto Q partendo da C cominci a muoversi lungo CDE … con velocità costante uguale a quella che P aveva all'inizio del suo moto. Napier chiamava questa distanza variabile CQ il logaritmo della distanza PB».

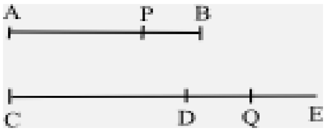

Fig. 12.1

L'ultimo appunto riguarda i "logaritmi naturali", ovvero i logaritmi in base "e". In verità non furono introdotti da Nepero, anche se comparvero nella sua epoca, ma da altri studiosi come, tanto per fare qualche nome, l'inglese Edward Wright (1559-1615) e lo stesso Bürgi, che aveva costruito le sue tavole prendendo come base il numero:

[1] Cfr.: Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, Edizioni Oscar Studio, 1980, pag. 360,

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4} \approx 2{,}7184$$

molto vicino al vero valore di e (=2,7182…). In realtà all'inizio i logaritmi naturali, oggi detti anche "logaritmi di Nepero", non riscossero un vero interesse poiché si rivelavano più pratici i logaritmi decimali, oggi chiamati anche "logaritmi di Briggs". La loro importanza si manifestò solo con la creazione del Calcolo differenziale, avvenuta nell'ultimo quarto del XVII secolo.

Al fine di dare a chi legge queste note un'idea del modo di procedere di coloro che costruivano le prime tavole di logaritmi, proponiamo un esercizio, per la risoluzione del quale chiediamo che al più sia usata una calcolatrice aritmetica, cioè in grado di calcolare addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, ma non altro. In realtà, i calcolatori che collaboravano con Briggs non possedevano questo strumento, ma utilizzavano l'abaco che era qualcosa di equivalente.

ESERCIZIO. Siano noti i logaritmi decimali dei numeri 2, 3, 5. Precisamente:

$$\text{Log } 2 \approx 0{,}30103; \quad \text{Log } 3 \approx 0{,}0{,}47712; \quad \text{Log } 5 \approx 0{,}69897.$$

Calcolare i logritmi (approssimati) dei seguenti numeri:

$$4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 24.$$

Utilizzando poi una calcolatrice scientifica, che permetta di calcolare il logaritmo di un numero in una qualunque base, calcolare con tale strumento i logaritmi decimali dei numeri proposti e confrontarli con in valori ottenuti "a mano".

Si può constatare che non sono richieti i logaritmi dei numeri primi 7, 11, 13, 17, 19, 23 e dei numeri ottenuti dal prodotto di uno di questi numeri per uno dei numeri di cui si conosce il logaritmo, come 14, 21, 22. Il fatto è che il procedimento per il calcolo dei logaritmi dei numeri primi suddetti, come di altri, era più complicato.