Capitolo 14 (Integrazione a unità 63)

Geometria analitica dello spazio

Nota Bene. Anche quando non è specificato esplicitamente, lo spazio si ritiene riferito ad un sistema (eventualmente monometrico) di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

14. 1 Quesiti a risposta chiusa.

14. 1. 1 Il punto P ha le seguenti coordinate (2,–3,–1). Quali sono le coordinate del suo simmetrico rispetto al piano xy?
[A] (2,3,1); [B] (–2,3,1); [C] (2, –3,1); [D] (–2, –3, –1).

14. 1. 2 Si consideri il tetraedro regolare avente il vertice A nel punto $\left(0,0,\sqrt{6}\right)$, il vertice B sul semiasse positivo Ox ed i due vertici rimanenti nel piano xy. Qual è l'ascissa di B?
[A] $\frac{2}{3}\sqrt{6}$. [B] $\sqrt{2}$. [C] $\sqrt{3}$. [D] $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14. 1. 3 Sono assegnati i vettori $\vec{u}(-2,-2,1)$ e $\vec{v}(2,-1,3)$. Quant'è la misura dell'angolo acuto formato da essi, approssimata a meno di 1" ?
[A] 1'33". [B] 1°48'15". [C] 84°53'20". [D] 84°88'89".

14. 1. 4 Si consideri il tetraedro di vertici (0,0,0), (1,0,0), (0,2,0) e (0,2,2). Quanto vale il suo volume?
[A] $\frac{1}{3}$. [B] $\frac{2}{3}$. [C] $\frac{3}{3}$. [D] $\frac{4}{3}$.

14. 1. 5 Sono assegnati i punti A(2,1,0), B(0,3,1), C(4,5,–1). Quali sono le coordinate del baricentro del triangolo ABC?
[A] (2,3,0). [B] (3,2,0). [C] (6, 9,0). [D] (4,6,0).

14. 1. 6 È assegnata la seguente equazione:

$$x^2+y^2+z^2+kx-1=0,$$

dove k è un parametro reale. Per quali valori di k rappresenta una sfera?
[A] ogni k reale; [B] $k<-2$ oppure $k>2$; [C] $-2<k<2$; [D] $0<k\leq 2$.

14. 1. 7 Sono assegnati i punti A(–1,0,0), B(1,0,0), C(0,–1,0), D(0,1,0). Quante sfere passano per essi?
[A] Nessuna. [B] Una. [C] Due. [D] Infinite.

14. 2 Quesiti a risposta aperta.

14. 2. 1 Un cubo, la cui diagonale è lunga 3, ha un vertice nell'origine del riferimento cartesiano ed il vertice opposto nel primo ottante, mentre altri due vertici sono situati uno sull'asse x ed uno sull'asse y. Fornire una rappresentazione del cubo e determinare le coordinate dei suoi vertici.

14. 2. 2 Un triangolo è assegnato mediante le coordinate dei suoi vertici: A(–1,–3,2), B(–2,–1,3), C(–3,–2,1). Quali sono le coordinate del suo baricentro?

14. 2. 3 Sono assegnati i punti A(–1,–2,1), B(–2,1,3), C(–3,–2,1). Quali sono le coordinate del vertice D del parallelogramma ABCD?

14. 2. 4 È assegnata l'equazione $x^2+y^2+z^2-x+y-2z+2=0$. Stabilire se rappresenta una sfera oppure no.

13. 2. 5 È assegnata l'equazione $x^2+y^2+z^2-2mx+(m+1)y+1=0$, dove m è un parametro reale. Determinare per quali valori di m l'equazione rappresenta una sfera.

14. 2. 6 Sono assegnati i punti A(–1,1,0), B(0,2,0), C(1,3,0), D(0,1,1). Trovare l'equazione della sfera passante per essi.

14. 2. 7 Sono assegnati i punti A(1,0,0), B(2,1,1), C(3,2,2). Trovare il piano passante per essi.

14. 2. 8 Sono assegnati i punti A(1,0,0), B(2,1,1). Trovare la retta passante per essi.

14. 2. 9 Sono assegnati il punto P(1,1,1) e la retta r di equazioni $(x+y+z=0,\ 2x-z=2)$. Dopo aver verificato che il punto P non appartiene alla retta r, trovare l'equazione del piano α individuato dal punto e dalla retta.

14. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 14. 1. 1. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 14. 1. 2. Indicato con ABCD il tetraedro in questione, il punto O è il centro della base, per cui, chiamata s la lunghezza del suo spigolo, il segmento OB è lungo $\frac{s}{3}\sqrt{3}$. Ne consegue che:

$$\overline{OA}=\sqrt{s^2-\left(\frac{s}{3}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{s}{3}\sqrt{6}\,.$$

Siccome $\overline{OA}=\sqrt{6}$, deve essere s=3. Pertanto l'ascissa di B è $\sqrt{3}$. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 14. 1. 3. Considerati i due vettori $\vec{u}(-2,-2,1)$ e $\vec{v}(2,-1,3)$ si ha:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2)(2)+(-2)(-1)+(1)(3)=1,\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi,$$

dove φ è l'angolo dei due vettori. D'altro canto è: $|\vec{u}|=\sqrt{4+4+1}=3$ e $|\vec{v}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$, per cui deve risultare: $\cos\varphi=\frac{1}{3\sqrt{14}}$ e quindi, magari con l'aiuto di uno strumento di calcolo automatico: φ≈84°53'20". L'alternativa corretta è [C].

Quesito 14. 1. 4. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 14. 1. 5. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 14. 1. 6. Affinché l'equazione rappresenti una sfera deve essere soddisfatta la condizione $k^2+4>0$. E questa condizione è soddisfatta per ogni k reale. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 14. 1. 7. La condizione di appartenenza dei punti assegnati alla generica sfera, la cui equazione è $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, genera il sistema delle seguenti equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$1-a+d=0,\ 1+a+d=0,\ 1-b+d=0,\ 1+b+d=0.$$

Una volta risolto, tale sistema fornisce il seguenti risultato:

$$a=0,\ b=0,\ c \text{ arbitrario},\ d=-1.$$

Si ottiene pertanto la seguente equazione: $x^2+y^2+z^2+cz-1=0$, la quale rappresenta infinite sfere, tutte quelle che hanno il centro nel punto $\left(0,0,-\frac{c}{2}\right)$ e raggio uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+4}$. [D] è l'alternativa corretta.

14. 4. Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 14. 2. 1. Lo spigolo del cubo è lungo $\sqrt{3}$. Una sua rappresentazione nello spazio cartesiano (Oxyz) è lasciata al lettore. I vertici del cubo hanno le seguenti coordinate:
$(0,0,0)$, $(\sqrt{3},0,0)$, $(0,\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},\sqrt{3},0)$, $(0,0,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$, $(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$.

Quesito 14. 2. 2. Le coordinate del baricentro G del triangolo ABC sono le seguenti:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{-1-2-3}{3}=-2,\quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-3-1-2}{3}=-2,$$
$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{2+3+1}{3}=2.$$

Quesito 14. 2. 3. Siccome ABCD è un parallelogramma, risulta $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, ossia, passando alle componenti cartesiane dei due vettori:

$$x_D-x_A=x_C-x_B,\ \text{da cui segue: } x_D=-1-3+2=-2;$$
$$y_D-y_A=y_C-y_B,\ \text{da cui segue: } y_D=-2-2-3=-7;$$
$$z_D-z_A=z_C-z_B,\ \text{da cui segue: } z_D=1+1-3=-1.$$

Quesito 14. 2. 4. Affinché l'equazione rappresenti una sfera dovrebbe essere soddisfatta la condizione $(-1)^2+1^2+(-2)^2-4\cdot 2>0$. Così non è dal momento che $(-1)^2+1^2+(-2)^2-4\cdot 2=-2$.

Quesito 14. 2. 5. Affinché l'equazione rappresenti una sfera deve essere soddisfatta la condizione $(-2m)^2+(m+1)^2-4>0$, ossia, a conti fatti: $m<-1$ oppure $m>3/5$.

Quesito 14. 2. 6. La condizione di appartenenza dei punti assegnati alla generica sfera, la cui equazione è $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, genera il sistema delle seguenti equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$-a+b+d+2=0,\quad 2b+d+4=0,\quad a+3b+d+10=0,\quad b+c+d+2=0.$$

Constatato che dalla seconda equazione si trova: $d=-2b-4$, si sostituisce questo valore di d nella prima e nella terza equazione e si trova rispettivamente: $a+b+2=0$ e $a+b+6=0$. Il che è evidentemente impossibile. Quindi non esiste alcuna sfera passante per i quattro punti assegnati. Questo, d'altra parte, si poteva notare subito se ci si fosse accorti che i tre punti A, B, C sono allineati e, come si sa, in nessuna sfera (intesa ovviamente come superficie sferica) ci sono tre punti allineati.

Quesito 14. 2. 7. La condizione di appartenenza dei punti assegnati al generico piano, la cui equazione è ax+by+cz+d=0, genera il sistema delle seguenti equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$a+d=0,\ 2a+b+c+d=0,\ 3a+2b+2c+d=0.$$

Il valore d=–a, ottenuto dalla prima equazione e sostituito nella seconda e nella terza, porta alla medesima equazione a+b+c=0. Da questa ricaviamo c=–a–b. L'equazione del piano diventa pertanto: ax+by– (a+b)z–a=0. Da qui, se a=0, si ottiene il piano y–z=0; se a≠0, dividendo tutto per a e ponendo b/a=k, si ottiene l'equazione x+ky–(1+k)z–1=0. Si tratta in realtà di un fascio di piani passante per la retta di equazioni (y–z=0, x–z–1=0).

Quesito 14. 2. 8. Dal quesito precedente sappiamo già che la retta è individuata dalle seguenti equazioni: y–z=0, x–z–1=0. Vogliamo arrivarci per altra via. Una generica retta passante per il punto A(1,0,0) ha la seguente equazione:

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}\ .$$

Imponiamo la condizione che passi per B(2,1,1). Si ha la seguente equazione:

$$\frac{2-1}{l}=\frac{1}{m}=\frac{1}{n}\ ,$$

la quale in realtà fornisce due condizioni: l=m ed l=n. Ragion per cui l'equazione della retta diventa:

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y}{l}=\frac{z}{l}\ \text{, vale a dire: } x-1=y=z,$$

da cui si ottengono le due equazioni: y–z= 0 ed x–z–1= 0. Come sopra.

Quesito 14. 2. 9. Che il punto P non appartiene alla retta r è subito provato dal fatto che, sostituendo le sue coordinate nelle equazioni della retta, queste non sono soddisfatte. In effetti si ha: (1+1+1≠0, 2–1≠2). Ne consegue che il punto e la retta individuano un piano.

Un possibile procedimento, idoneo a trovarne l'equazione, è di prendere due qualsiasi punti della retta, per esempio A(1,–1,0) e B(0,2,–2), e trovare il piano passante per i punti P, A, B. Considerato che ogni piano ha un'equazione del tipo ax+by+cz+d=0, bisogna imporre che ad esso appartengano i punti P, A, B. Si trovano le seguenti equazioni nelle indeterminate a, b, c, d:

$$a+b+c+d=0,\ a-b+d=0,\ 2b-2c+d=0.$$

Si risolve il sistema di queste equazioni, supponendo d noto. Si ottiene:

$$a=-\frac{7}{6}d,\ \ b=-\frac{1}{6}d\ ,\ \ c=\frac{1}{3}d.$$

L'equazione del piano è pertanto:

$$-\frac{7}{6}dx-\frac{1}{6}dy+\frac{1}{3}dz+d=0$$

o meglio, dopo aver semplificato:

$$7x+y-2z-6=0\ .$$

Un altro procedimento, più immediato, consiste nel considerare un generico piano passante per la retta r di equazioni (x+y+z=0, 2x–z–2=0); la sua equazione è la seguente:

$$(x+y+z)+m(2x-z-2)=0.$$

Basta adesso imporre che le coordinate del punto P(1,1,1) soddisfino a questa equazione. Si ottiene in questo modo la seguente equazione nell'indeterminata m:

$$(1+1+1)+m(2-1-2)=0,\ \text{da cui segue: } m=3.$$

Il piano cercato ha pertanto la seguente equazione:

$$(x+y+z)+3(2x-z-2)=0 \text{ ossia: } 7x+y-2z-6=0.$$

Come prima ovviamente.

14. 5. **Pierre de Fermat**: vita ed opere.

Fermat

A volte, scorrendo la storia della matematica, si incontrano personaggi che non erano matematici professionisti, ma che pure hanno dato contributi significativi allo sviluppo della disciplina. Nepero (1550-1617) fu uno di questi, come lo fu Cartesio (1596-1650). Un altro personaggio, contemporaneo di Cartesio, appartenente allo stesso manipolo di matematici non professionisti, fu il francese Pierre de Fermat (1601-1665). Questo, in realtà, accadeva nel Cinquecento e nel Seicento, epoca in cui non c'erano proprio matematici professionsti e coloro che si occupavano di matematica lo facevano da amatori, per diletto. Tra costoro c'era Fermat. Egli era un avvocato e fu Consigliere del Re al Parlamento di Tolosa. Si occupava di matematica nel tempo libero, ma lo fece così bene da essere annoverato tra i matematici più importanti non solo del suo tempo ma di ogni epoca. I suoi contributi al progresso della matematica vanno dalla Teoria dei numeri al Calcolo delle probabilità, dalla Geometria analitica al Calcolo differenziale. Fermat non pubblicò nulla mentre era in vita ed i suoi lavori comparvero solo nel 1679 quando il figlio Samuel li pubblicò in una raccolta dal titolo *Varia opera mathematica*.

Un'opera di tale raccolta reca il titolo *Ad locos planos et solidos isagoge* (*Introduzione ai luoghi piani e solidi*). È una trattazione sistematica ed esauriente delle equazioni algebriche di 1° e 2° grado in due indeterminate, rappresentate in un "piano riferito a coordinate" mediante "rette" e "coniche". È, in altre parole, un trattato di Geometria analitica elementare e pare che Fermat avesse maturato le idee che esprimeva ben prima dell'uscita della *Géométrie* di Cartesio, ma il ritardo nella pubblicazione, avvenuto 42 anni dopo quella di Cartesio, quando la "geometria cartesiana" si era praticamente diffusa e affermata, ha impedito di associare a quello di Cartesio il nome di Fermat come creatore della Geometria analitica.

Un'altra opera della raccolta è intitolata *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (*Metodo per trovare i massimi e i minimi*): vi sono i prodromi del Calcolo differenziale e quest'opera sì che ebbe un'influenza decisiva sullo sviluppo di questo settore della matematica. Si deve, tutto sommato, a Fermat il calcolo della prima derivata di una funzione. Nell'opera è pure enunciato il principio (oggi detto "principio di Fermat") secondo cui la luce si propaga tra due punti seguendo sempre il cammino che richiede il minor tempo possibile: le leggi dell'ottica geometrica ne sono una conseguenza.

Una delle opere matematiche che più stimolarono l'interesse di Fermat fu l'*Aritmetica* di Diofanto (matematico alessandrino, vissuto nel II-III sec. d.C.). Egli ne possedeva una traduzione latina e nei margini delle pagine di tale versione annotava, pure in latino, i suoi appunti a fianco dei problemi che via via esaminava. Anche queste annotazioni figurarono nella raccolta del 1679. Ebbene, queste "note a margine" sono veri e propri teoremi riguardanti la Teoria dei numeri (1). Di nessuno di essi Fermat fornisce la dimostrazione, ma in seguito sarebbero stati tutti dimostrati da altri studiosi, in particolare e soprattutto da Eulero.
Su due di tali teoremi, tuttavia, le cose non stanno esattamente così. Vogliamo fermare la nostra attenzione proprio su di essi.

- Il primo afferma che ogni numero del tipo $2^{2^n}+1$, dove n è un numero naturale, è un numero primo. In effetti è così per n=0, n=1, n=2, n=3, n=4, ma per n=5 la proposizione è falsa. Questo fu provato ancora da Eulero nel 1732, allorché fece vedere che, appunto per n=5, si ottiene il numero 4.294.967.297 che è uguale a 641×6.700.417.
In realtà, a tutt'oggi non si è trovato un numero, tra i "numeri di Fermat", che fosse primo per n>4.

- Il secondo teorema, noto come "ultimo teorema di Fermat" o anche come "grande teorema di Fermat", afferma che l'equazione $x^n+y^n=z^n$, per n>2, non è soddisfatta da alcuna terna di numeri interi positivi. Fermat sostiene di averne "*scoperto una dimostrazione veramente mirabile, che non può essere contenuta nella ristrettezza del margine*". Il fatto è che su questa dimostrazione avrebbero "toppato", nei secoli successivi, matematici fra i più celebri, quali Eulero, Gauss, Cauchy, Dirichlet e solo nel 1994 il matematico inglese Andrew Wiles è riuscito a portarla definitivamente a termine. Ma con un ragionamento così lungo e complesso che solo pochi matematici al mondo sembrano essere in grado di afferrarne pienamente il contenuto. E soprattutto con strumenti matematici del tutto ignoti al tempo di Fermat. Il che fa dubitare della veridicità della sua affermazione, che ne avrebbe scoperto una *demonstrationen mirabilem sane*. Forse egli riteneva in buona fede di aver scoperto una dimostrazione, che tale però non era.

Fermat può essere considerato a buon diritto, assieme al connazionale Blaise Pascal (1623-1662), col quale era in corrispondenza epistolare, il fondatore del Calcolo delle probabilità. Questa fondazione può essere fissata al 1654, poiché in quell'anno vi fu un'interessante e proficua corrispondenza fra i due studiosi, ispirata da alcuni problemi sui giochi d'azzardo che a Pascal poneva il suo amico Antoine Gombaud (1607-1684), Cavaliere di Méré.

Quantunque Fermat non abbia pubblicato nulla mentre era in vita, tuttavia i risultati da lui conseguiti circolavano tra i grandi pensatori dell'epoca. Il merito di ciò è da attribuirsi ad un monaco francece dell'ordine dei Frati minimi (ordine sorto nel XV secolo ad opera di Francesco di Paola), Marin Mersenne (1588-1648), grande appassionato di matematica.

---

[1] Cfr.: Pierre de Fermat, *Osservazioni su Diofanto*, Torino, Boringhieri, Ristampa 1969.

A quell'epoca non esistevano ancora riviste scientifiche sulle quali pubblicare articoli d'interesse generale. Mersenne si attribuì il ruolo, peraltro riconosciuto e rispettato dagli interessati, di far da tramite fra i diversi pensatori. Lo faceva comunicando agli interessati i risultati che altri studiosi gli facevano pervenire. E fu così che Fermat, non solo entrò in contatto con i più illustri pensatori del suo tempo, come Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Christiaan Huygens (1629-1695), lo stesso René Descartes (1596-1650), oltre al già citato Blaise Pascal; ma riuscì anche a farsi conoscere e apprezzare dagli altri studiosi.