Capitolo 15 (Integrazioni a unità 64-65)

Limiti e continuità

15.1 Quesiti a risposta chiusa.

15.1.1 Qual è il limite, per x→1, della funzione $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$?
[A] 0. [B] ∞. [C] 1. [D] Non esiste.

15.1.2 Qual è il limite, per x→1, della funzione $f(x) = \sqrt{|x-1|} + \sqrt{|1-x|}$?
[A] 0. [B] ∞. [C] 1. [D] Non esiste.

15.1.3 Si consideri la succesione di termine generale $a_n=\dfrac{n}{1+n^2}$.
[A] È limitata sia superiormente sia inferiomente.
[B] È limitata inferiormente ma non superiormente.
[C] È limitata superiormente ma non inferiormente.
[D] Non è limitata né superiormente né inferiormente.

15.1.4 Si consideri la succesione di termine generale $a_n=\dfrac{n}{1+n^2}$.
Qual è il suo limite per n→1?
[A] ∞. [B] 1/2.
[C] Non ha senso calcolarlo. [D] Le precedenti conclusioni sono tutte false.

15.1.5 Si consideri la succesione di termine generale $a_n=\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.
[A] Converge al valore 0. [B] Converge al valore 1/2.
[C] Diverge negativamente. [D] Diverge positivamente.

15.1.6 Affinché una funzione reale di variabile reale f(x) ammetta limite per x→a, la condizione che "a" sia un punto di accumulazione per dom f(x) è:
[A] necessaria e sufficiente;
[B] necessaria ma non sufficiente;
[C] sufficiente ma non necessaria;
[D] né necessaria né sufficiente.

15.1.7 Quando la funzione reale di variabile reale f(x) si dice infinitesima per x→a, dove a è un elemento dell'insieme $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$?
[A] Quando a=0. [B] Quando a=±∞. [C] Quando f(x)→0 per x→a. [D] In un caso diverso.

15.1.8 Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
[A] È infinitesima per x→+∞. [B] È infinita per x→+∞.
[C] È limitata superiormente. [D] Le affermazioni precedenti sono tutte false.

15.1.9 Quanto vale il limite di sin x per x→+∞?

[A] 0. [B] 1. [C] 1/2. [D] Non esiste.

15.1.10 Quanto vale il limite di $\sin\frac{1}{x}$ per $x\to+\infty$?

[A] 0. [B] 1. [C] 1/2. [D] Non esiste.

15.1.11 Quanto vale il limite di $\frac{\sin x}{x}$ per $x\to+\infty$?

[A] 0. [B] 1. [C] 1/2. [D] Non esiste.

15.1.12 Quanto vale il limite della funzione $x\sin\frac{1}{x}$ per $x\to0^+$?

[A] 0. [B] 1. [C] 1/2. [D] Non esiste.

15.1.13 Quale dei seguenti limiti è FALSO?

[A] $\lim_{x\to0^+}\ln(x^2-2x)=-\infty$. [B] $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty$.

[C] $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$. [D] $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sin x}{x-2\sin x}=2$.

15.1.14 Quale delle seguenti funzioni di variabile reale è continua su tutto l'asse reale?

[A] $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. [B] $\ln\left(x^2-x+1\right)$. [C] $\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$. [D] Nessuna di esse.

15.1.15 Il limite per $x\to0^+$ ed il limite per $x\to0^-$ della funzione $e^{1/x}$ sono nell'ordine:

[A] 0, 0; [B] $+\infty, -\infty$; [C] $0, -\infty$. [D] $+\infty, 0$.

15.1.16 Di quale delle seguenti funzioni f(x) il punto x=0 è un punto di discontinuità NON eliminabile?

[A] $f(x)=\frac{x-\sin x}{3x}$. [B] $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$. [C] $f(x)=\frac{2x-\cos x}{x}$. [D] $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$.

15.2 Quesiti a risposta aperta.

15.2.1 Si consideri la funzione di variabile reale:

$$f(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}.$$

È vero o è falso che i punti di accunulazione del suo dominio sono tutti i numeri reali, eccezion fatta per i numeri 0, –1, +1?

15.2.2 Considerata la funzione reale di variabile reale f(x), affermare che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=k$, dove k è un numero reale, significa che:

$$\exists U_\varepsilon(k),\ \forall U_\delta(+\infty) : x\in U_\delta(+\infty)\to f(x)\in U_\varepsilon(k).$$

È vero o è falso?

15.2.3 Considerate le funzioni reali di variabile reale f(x) e g(x), si sa che, per $x\to0^-$, $f(x)\to-\infty$ e $g(x)\to0^+$. Cosa si può dire del limite della funzione f(x)/g(x) per $x\to0^-$?

15.2.4 Cosa s'intende per estremo superiore di una successione? Gode di qualche proprietà interessante?

15.2.5 Di ciascuna delle due seguenti successioni dire se è limitata (superiormente o inferiormente) o se non lo è.

$$\text{A)}\ \ a_n=\frac{n^2+1}{n}\ ;\qquad \text{B)}\ \ a_n=\frac{1}{n^2+1}\ .$$

15.2.6 Verificare che $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

15.2.7 Considerata la funzione $f(x)=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$, calcolarne il limite per $x\to\frac{\pi}{2}$.

15.2.8 Posto che m ed n siano due qualsiasi numeri reali non nulli, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}\ .$$

15.2.9 Sia f(x) la funzione di variabile reale tale che:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{per } x\le -1\\ ax+b & \text{per } -1<x\le 1\\ x-1 & \text{per } x>1\end{cases}$$

Per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è continua in tutti i punti dell'asse reale?

15.2.10 Considerata la funzione:

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{3x}}$$

calcolarne il limite per $x\to 0$ e verificarne l'esattezza utilizzando un idoneo software matematico.

15.2.11 Considerata la funzione:

$$f(x)=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$

calcolarne il limite per $x\to\pi/2$ e verificarne l'esattezza utilizzando un idoneo software matematico.

15.2.12 Considerata la funzione:

$$f(x)=\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$$

trovare il suo dominio. È vero che la funzione tende a 0 sia per $x\to 0$ sia per $x\to+\infty$?

15.2.13 Tenendo presente che:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

dove "e" è il numero di Nepero e che la funzione logaritmo è continua, dimostrare che si ha:

$$\text{a)}\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.\qquad \text{b)}\ \ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

15. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 15. 1. 1. La funzione assegnata è definita solo per x=1. Questo punto pertanto non è un punto di accumulazione del suo dominio e, di conseguenza, non esiste il limite della funzione per $x\to1$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 15. 1. 2. La funzione assegnata può mettersi nella forma $2\sqrt{|x-1|}$ ed è definita per ogni x reale. Il suo limite, per $x\to1$, è 0. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 15. 1. 3. Incominciamo col dire che la successione è definita per ogni naturale n. Constatiamo poi che, per ogni n, risulta $n<1+n^2$, per cui $a_n<1$. Ne discende che la successione è limitata superiormente. D'altro canto, per ogni n, risulta $a_n\geq 0$, dove il segno "=" vale per n=0 ma anche per $n\to\infty$. Se ne desume che la successione è limitata inferiomente. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 15. 1. 4. L'unico punto in cui ha senso calcolare il limite di una successione è ∞, poiché è l'unico punto di accumulazione del suo dominio. In ogni altro punto non ha senso calcolare il limite della successione. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 15. 1. 5. Constatato che $1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$, il termine generale della successione è:

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Si calcola facilmente che il suo limite, per $n\to\infty$, è 1/2. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 15. 1. 6. La condizione che il punto in cui si calcola il limite di una funzione sia un punto di accumulazione è necessaria perché il limite esista, ma non è sufficiente. Ad esempio, per $x\to0$, la funzione 1/x ammette limite destro ($+\infty$) ed ammette limite sinistro ($-\infty$) ma i due limiti non coincidono e perciò la funzione non ammette limite per $x\to0$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 15. 1. 7. Una funzione reale di variabile reale f(x) si dice infinitesima per $x\to a$, quando $f(x)\to0$ per $x\to a$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 15. 1. 8. Incominciamo col dire che la funzione è definita per $x<1$. Per cui non ha senso calcolarne il limite per $x\to+\infty$. Ne discende che le alternative [A] e [B] sono false. Anche l'alternativa [C] è falsa poiché la funzione tende a $+\infty$ per $x\to1^-$. L'alternativa corretta è pertanto la [D].

Quesito 15. 1. 9. Posto $x=\alpha+2k\pi$, con $\alpha\in[0,2\pi[$ e $k\in\mathbb{Z}$, risulta evidentemente $\sin x=\sin\alpha$. Per cui: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x=\sin\alpha$. Data l'indeterminatezza di α, anche $\sin\alpha$ è indeterminato e pertanto il limite non esiste. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 15. 1. 10. Quando $x\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to0$ e perciò $\sin\frac{1}{x}\to0$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 15. 1. 11. Quando $x\to0^+$, $1/x\to+\infty$ e $\sin\frac{1}{x}$ non esiste. Per cui si potrebbe concludere erroneamente che neppure il limite della funzione esiste. In realtà, pur non esistendo, il limite di

$\sin\frac{1}{x}$ è un valore compreso fra –1 ed 1, mentre, sempre per $x\to 0^+$, $x\to 0$. Questo implica che la funzione $x\sin\frac{1}{x}$ tende a 0, quando $x\to 0^+$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 15.1.12. [A] è l'alternativa corretta. Infatti, se è vero che per $x\to+\infty$, $\sin x$ è indeterminato, è pur vero che varia tra –1 ed 1, per cui il rapporto $\frac{\sin x}{x}$ tende a 0.

Quesito 15.1.13. [A] è l'alternativa corretta. Considerato infatti che il dominio della funzione $\ln(x^2-2x)$ è l'insieme dei reali per cui si ha $x^2-2x>0$ e calcolato che quest'insieme è costituito dagli x reali per cui si ha $x<0$ oppure $x>2$, non ha senso calcolare il limite della funzione per $x\to 0^+$. Questo significa che gli altri tre limiti sono veri. Il lettore provi a controllarlo direttamente.

Quesito 15.1.14. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 15.1.15. Quando $x\to 0^+$, la funzione $1/x$ tende a $+\infty$, per cui anche $e^{1/x}$ tende a $+\infty$. Invece, quando $x\to 0^-$, la funzione $1/x$ tende a $-\infty$, per cui $e^{1/x}$ tende a 0. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 15.1.16. L'alternativa corretta è [C]. Infatti si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-\cos x}{x}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{2x-\cos x}{x}=+\infty.$$

Riguardo alle [A] e [B], il punto $x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile: lo provi il lettore. Mentre riguardo all'alternativa [D], in esso la funzione è addirittura continua.

15.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 15.2.1. È falso. I valori 0, –1 e +1 sono i punti in cui la funzione assegnata non è definita, ma anch'essi sono punti di accumulazione del suo dominio. Inoltre sono punti di accumulazione $-\infty$ e $+\infty$. In definitiva i punti di accumulazione del dominio della funzione sono tutti gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Quesito 15.2.2. È falso. La definizione corretta è la seguente: «Per ogni $U_\varepsilon(k)$ (intorno di k di raggio ε) esiste in corrispondenza un intorno $U_\delta(+\infty)$ (intorno di $+\infty$ di primo estremo δ) tale che, per ogni x appartenente a $U_\delta(+\infty)$, f(x) appartiene a $U_\varepsilon(k)$». In simboli:

$$\forall U_\varepsilon(k),\ \exists U_\delta(+\infty) : x\in U_\delta(+\infty) \to f(x)\in U_\varepsilon(k).$$

Una definizione equivalente è la seguente: «Per ogni ε reale positivo esiste in corrispondenza un numero reale δ tale che, per ogni $x>\delta$, risulta $k-\varepsilon<f(x)<k+\varepsilon$».

Quesito 15.2.3. Intanto si può dire che il limite di $f(x)/g(x)$ è di tipo "infinito". In secondo luogo, considerato che, per $x\to 0^-$, f(x) finisce per diventare negativa e g(x) positiva, si può dire che il rapporto $f(x)/g(x)$ finisce per diventare negativo. In conclusione, il limite di $f(x)/g(x)$, per $x\to 0^-$, è $-\infty$.

Quesito 15.2.4. Anzitutto, per poter parlare di estremo superiore di una successione, occorre che la successione sia limitata superiormente. Ebbene, l'estremo superiore della successione è il minore dei suoi maggioranti. Gode di una proprietà importante. Se, infatti, S è l'estremo superiore della successione (a_n), allora per ogni $\varepsilon>0$, esiste un indice $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}}>S-\varepsilon$. Vale a dire: appena si toglie ad S una quantità qualunque ε (e quindi anche "piccolissima"), c'è almeno un termine della successione che supera $S-\varepsilon$. Ad esempio, considerato che la successione di terime generale $a_n=\frac{n}{n+1}$ è limitata superiormente ed 1 è il suo estremo superiore, scegliendo $\varepsilon=1/1000$, esiste $\overline{n}$ tale che:

$$\frac{\overline{n}}{\overline{n}+1}>1-\frac{1}{1000}\ .$$

Basta prendere $\overline{n}>999$.

Quesito 15. 2. 5. Riguardo alla prima successione, di termine generale $a_n=\frac{n^2+1}{n}$, si constata subito che, per ogni $n\neq 0$, risulta $a_n\geq 2$, per cui essa è limitata inferiormente ($\inf a_n=2$); mentre non esiste alcun numero reale L tale che, per ogni $n\neq 0$, risulti $a_n\leq L$, per cui essa non è limitata superiormente (si scrive convenzionalmente: $\sup a_n=+\infty$).

Riguardo alla seconda successione, di termine generale $a_n=\frac{1}{n^2+1}$, si constata facilmente che è limitata sia superiormente ($\sup a_n=1$) sia inferiormente ($\inf a_n=0$).

Quesito 15. 2. 6. Dopo aver constatato che il dominio della funzione è $\mathbb{R}_0$, bisogna far vedere che:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \text{ tale che } \forall x\ \left[|x|<\delta\rightarrow\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\right]\ .$$

Siccome, per ogni $x\in\mathbb{R}_0$, $\sin\frac{1}{x}$ è compreso fra -1 ed 1, si ha evidentemente: $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ e perciò: $|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|$. Sicché, per gli x per cui è $|x|<\varepsilon$, risulta a maggior ragione $|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ ossia: $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Pertanto, per ogni scelta di $\varepsilon>0$, basta scegliere $\delta=\varepsilon$ perché la condizione suddetta risulti verificata.

Quesito 15. 2. 7. Poiché il numeratore tende a 2 ed il denominatore tende a 0 mantenendosi positivo è evidente che il limite è $+\infty$.

Quesito 15. 2. 8. Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}}\cdot\frac{m}{n}.$$

Siccome quando $x\to 0$ sia mx sia nx tendono a 0 e siccome in questo caso $\frac{\sin mx}{mx}\to 1$ e $\frac{\sin nx}{nx}\to 1$, allora:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}.$$

<u>Nota Bene</u>. Può essere utile memorizzare questo risultato.

Quesito 15. 2. 9. Si constata che è $x+1=0$ per $x=-1$ e $x-1=0$ per $x=1$. Affinché $f(x)$ sia continua su tutto l'asse reale deve essere $f(-1)=0$ ed $f(1)=0$. Vale a dire: $-a+b=0$ e $a+b=0$. Ossia: $a=b=0$. Un grafico della funzione rende manifesto tutto ciò. Lo lasciamo disegnare al lettore.

Quesito 15. 2. 10. Posto $y=-1/x$ e constatato che $y\to-\infty$ per $x\to0^+$ e $y\to+\infty$ per $x\to0^-$, si ha in successione:

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{3x}}=\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{y}{3}}=\left[\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-\frac{1}{3}}=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\,.$$

Quesito 15. 2. 11. Intanto constatiamo che si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0. Incominciamo allora ad osservare che si ha:

$$\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\ \text{. E quindi:}\quad \lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{2}.$$

Quesito 15. 2. 12. Il dominio della funzione è l'insieme $\mathbb{R}_0$ dei numeri reali non nulli.
Per $x\to0$ la funzione è una f.i. del tipo 0/0, mentre per $x\to+\infty$ è una f.i. del tipo ∞/∞. Osserviamo adesso che, per $x\neq0$, si ha:

$$\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}=\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{2+\dfrac{\sin x}{x}}.$$

La prosecuzione è semplice ed i limiti cercati sono rispettivamente 0 e 1/2.

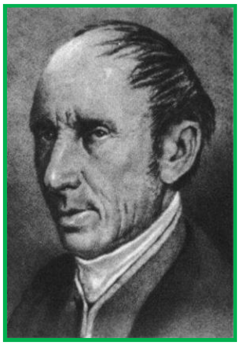
Quesito 15. 2. 13. Per dimostrare il primo limite poniamo $z=1/x$ e constatiamo che $z\to+\infty$ per $x\to0^+$ e $z\to-\infty$ per $x\to0^-$, per cui si ha:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{z\to\pm\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{z}\right)}{\dfrac{1}{z}}=\lim_{z\to\pm\infty}\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=\ln\lim_{z\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=\ln e=1.$$

Per quanto riguarda il secondo basta porre $e^x-1=z$ e quindi $x=\ln(1+z)$. Constatato poi che $z\to0$ per $x\to0$, tenendo presente anche il risultato precedente si ha:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{z\to0}\frac{z}{\ln(1+z)}=\frac{1}{\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}}=1.$$

15. 5 Augustin Louis Cauchy: vita ed opere.



Cauchy

Il calcolo della derivata di una funzione nacque con un difetto, per comprendere il quale preferiamo riferirci ad un caso particolare, ma affrontato in una maniera più consona al nostro

modo di pensare piuttosto che a quello originario di Fermat.
Sia allora $f(x)=x^2$ la funzione in gioco. Si dà ad x l'incremento Δx ed in corrispondenza f(x) subisce l'incremento: $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2$.
Il rapporto fra l'incremento subito dalla funzione e quello subito dalla variabile indipendente è:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2\,x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}\,.$$

Da qui, dividendo tutto per Δx, si ottiene: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=2x+\Delta x$ e ponendo $\Delta x=0$, si trova la funzione 2x, che è la derivata della funzione x^2.
Si capisce subito dove sta il difetto: **la quantità Δx prima è diversa da 0**, quando numeratore e denominatore si dividono per essa; **dopo si pone Δx uguale a 0**. Non si può fare, è contraddittorio. Ebbene, su questa contraddizione nacque e si sviluppò il Calcolo e ottenne risultanti sorprendenti, pur con critiche severe da parte di molti detrattori, fra i quali si segnalò il maggior filosofo inglese dell'Empirismo, il vescovo George Berkeley (1685-1753). Egli, in un opuscolo del 1734, dal titolo *The Analist; or a Discourse addressed to Infidel Mathematician* (*L'analista, ovvero un discorso rivolto al matematico infedele*), si esprimeva nei seguenti termini sarcastici:

«E cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite, né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla. Perché non chiamarle spiriti di quantità sparite?».

La polemica sui fondamenti dell'Analisi durò a lungo e neppure il grande Eulero riuscì a porvi rimedio. Ma cessò dopo che il matematico francese Augustin Louis Cauchy (1789-1857) diede alla materia un assetto abbastanza rigoroso con la pubblicazione di tre opere: *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1822), *Leçons sur le calcul différential* (1829).
In tali opere Cauchy, tra l'altro:
- fornì la definizione di limite e quella di infinitesimo;
- diede la definizione rigorosa di derivata, basandola su quella di limite;
- fornì la definizione di funzione continua.

Cauchy nacque a Parigi il 21 agosto 1789, poco più di un mese dopo la presa della Bastiglia, quindi in pieno regime rivoluzionario. Si laureò in ingegneria nel 1807, ma in seguito, dietro suggerimento di Lagrange (1736-1813) e Laplace (1749-1827) si dedicò interamente alla ricerca in Matematica. Ottenne una cattedra prima all'École polytechnique, dove aveva anche studiato, e poi alla Sorbona.
Oltre a quelli già citati, scrisse altri trattati e quasi 800 articoli per riviste scientifiche, segnalandosi come uno dei matematici più prolifici della storia.
Soffriva spesso di amnesie e questo fatto procurò dei danni a due giovani matematici che a lui avevano consegnato fiduciosi alcuni loro lavori per un giudizio, che speravano lusinghiero e decisivo per una brillante carriera di matematici professionisti. Cauchy li smarrì. I due giovani erano Niels Henrik Abel (1802-1829) ed Évariste Galois (1811-1832). La loro storia merita di essere conosciuta e rinviamo per questo a testi specializzati.
Dei matematici si dice spesso che sono anticonformisti e dissidenti, ma in verità non si capisce su quale base logica risieda questo giudizio. Ebbene, se si cerca un controesempio a questa diceria

lo si trova proprio in Cauchy, il quale si dimostrò sempre, nel corso della sua vita, conformista e legittimista.