Capitolo 16 (Integrazione a unità 66-67)

Calcolo differenziale

16. 1 Quesiti a risposta chiusa.

16. 1. 1 Qual è la derivata, rispetto ad x, di $\sqrt{x}$?

[A] $\frac{1}{\sqrt{x}}$.   [B] $\frac{2}{\sqrt{x}}$.   [C] $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.   [D] $\frac{\sqrt{x}}{2}$.

16. 1. 2 La derivata della funzione ln x, rispetto ad x, è 1/x per i seguenti valori reali di x:
[A] ogni x;   [B] ogni $x\neq0$;   [C] ogni $x>0$;   [D] ogni $x<0$.

16. 1. 3 Qual è la derivata della funzione $\sin^2 x$ rispetto ad x?
[A] $2\sin x$.   [B] $\sin 2x$.   [C] $2\cos x$.   [D] $\cos 2x$.

16. 1. 4 Senza usare strumenti di calcolo automatico, qual è il valore semplificato dell'espressione $\operatorname{atan}\frac{1}{2}-\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{3}\right)$?

[A] $\frac{\pi}{4}$.   [B] $\frac{\pi}{2}$.   [C] π.   [D] $\frac{3\pi}{4}$.

16. 1. 5 È assegnata la funzione di variabile reale: $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & \text{per } x\neq0\\ 1 \text{ per } x=0\end{cases}$

[A] Coincidono il campo di esistenza, quello di continuità e quello di derivabilità.
[B] Il campo di esistenza coincide con quello di continuità ma è diverso da quello di derivabilità.
[C] Il campo di esistenza coincide con quello di derivabilità ma è diverso da quello di continuità.
[D] Il campo di continuità coincide con quello di derivabilità ma è diverso da quello di esistenza.

16. 1. 6 È assegnata la funzione di variabile reale: $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x^2} & \text{per } x\neq0\\ 1 \text{ per } x=0\end{cases}$

[A] Coincidono il campo di esistenza, quello di continuità e quello di derivabilità.
[B] Il campo di esistenza coincide con quello di continuità ma è diverso da quello di derivabilità.
[C] Il campo di esistenza coincide con quello di derivabilità ma è diverso da quello di continuità.
[D] Il campo di continuità coincide con quello di derivabilità ma è diverso da quello di esistenza.

16. 1. 7 Qual è la derivata, rispetto ad x, della funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$?

[A] $\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$.   [B] $-\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$.   [C] $\frac{2\sqrt{x}}{x^2}$.   [D] $-\frac{2\sqrt{x}}{x^2}$.

16. 1. 8 Si sa che y è una costante al variare di x. Qual è la derivata, rispetto ad x, della funzione $x^2+2\sqrt{y}$?

[A] $2x+\frac{1}{\sqrt{y}}$.   [B] $2x+2\sqrt{y}$.   [C] $2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}$.   [D] Una funzione diversa.

16.1.9 Qual è la derivata, rispetto ad x, della funzione $\sin^2 2x$?
[A] $4\sin 2x$. [B] $2\sin 4x$. [C] $4\cos 2x$. [D] Una funzione diversa.

16.1.10 Sia la funzione $f(x)=e^{1/x}$, dove "e" è il numero di Nepero. Risulta $f''(x)=0$ per:
[A] il solo valore $x=-1/2$.
[B] i soli valori $x=e$ ed $x=-1/2$.
[C] il solo valore $x=e$.
[D] nessun valore di x.

16.1.11 Un punto materiale si muove su una retta, sulla quale è stato fissato un riferimeno cartesiano (O,U), secondo la seguente legge oraria:
$$x(t) = t\,e^{-t}, \text{con } t>0,$$
dove t ed x sono misurati rispettivamente in secondi ed in metri. Si prenda in esame l'istante, al finito, in cui il punto materiale non è soggetto ad alcuna accelerazione. In questo istante:
[A] il punto materiale è fermo nel punto O;
[B] il punto materiale si muove avvicinandosi ad O;
[C] il punto materiale si muove allontanandosi da O;
[D] il punto materiale si muove passando proprio per O.

16.1.12 La funzione reale di variabile reale f(x) è continua nell'intervallo $[-1,1]$ e derivabile nell'intervallo $]-1,1[$. Inoltre $f(-1)=2$ e $0{,}05 < f'(x) < 0{,}1$ per ogni $x\in]-1,1[$. Il più piccolo intervallo in cui si può affermare con certezza che cade f(1) è costituito dagli x reali tali che:
[A] $0{,}1<x<0{,}2$; [B] $0{,}1<x<2{,}2$; [C] $2{,}1<x<2{,}2$; [D] $1{,}2<x<2{,}1$.

16.1.13 Per quale dei seguenti limiti NON è possibile il calcolo ricorrendo al teorema di de L'Hôpital?
[A] $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$. [B] $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln x)$. [C] $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4\sin x+3x}{3\sin x-4x}$. [D] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2\sin x}{2x+3\sin x}$.

16.1.14 Si consideri la funzione di variabile reale $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.
[A] È definita, continua e derivabile per ogni x.
[B] È definita e continua per ogni x ma è derivabile solo per $x\neq 0$.
[C] È definita, continua e derivabile per ogni $x\geq 0$.
[D] È definita e continua per ogni $x\geq 0$ ma è derivabile solo per $x>0$.

16.2 Quesiti a risposta aperta.

16.2.1 Si consideri il seguente teorema: **Se una funzione non è continua in un punto allora non è derivabile in quel punto**. Come si può dimostrare?

16.2.2 Senza utilizzare strumenti di calcolo automatico, calcolare il valore di x per cui si ha:
$$\operatorname{asin} x = \frac{1}{2}\operatorname{acos}\frac{4}{5}\ .$$

16.2.3 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $\operatorname{asin}\frac{x}{2}$.

16.2.4 La funzione $|2x^2+1|$ è definita e continua per ogni x reale. È anche derivabile per ogni x reale?

16. 2. 5 La funzione $|x^3+1|$ è definita e continua per ogni x reale. È anche derivabile per ogni x reale?

16. 2. 6 È data la seguente funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{per } x\neq 0\\ 1 & \text{per } x=0\end{cases}$$

Trovarne il campo di esistenza, quello di continuità e quello di derivabilità.

16. 2. 7 Si sa che la funzione reale di variabile reale f(x) è derivabile nell'intervallo]0,2[. Si può concludere che anche la funzione f(2x) è derivabile nel medesimo intervallo?

16. 2. 8 Le funzioni f(x) e g(x)=f(x)+f(2x) sono derivabili per x=0 e si ha precisamente: $f'(0)=1$ e $g'(0)=3$. Esiste e si può calcolare la derivata di f(2x) per x=0?

16. 2. 9 Trovare una formula che semplifichi la somma S tale che:

$$S = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + \ldots + n\,x^{n-1},$$

dove x è un numero reale diverso da 1.
Se fosse x=1, la somma sarebbe immediata: calcolarla ugualmente.

16. 2. 10 Qual è la derivata, rispetto ad x, della funzione $\log_a x$, essendo a un numero reale positivo diverso da 1?

16. 2. 11 Della funzione f(x) si sa che è derivabile per $x=\alpha$, dove α è un numero reale, e che tale derivata è uguale a 1. Dimostrare che la funzione $f(\alpha x)$ è derivabile per x=1 e che il valore di tale derivata è α.

16. 2. 12 Si consideri la funzione $f(x)=x^2+3x+1$.

a) Ammesso che x sia costante al variare di una variabile t, è vero che la derivata di f(x) rispetto a t è 2x+3?
b) Ammesso che x sia funzione di t, qual è la derivata di f(x) rispetto a t?

16. 2. 13 Spiegare perché, per piccoli valori del numero α, risulta: $e^{\alpha}\approx 1+\alpha$.
Calcolare poi con una calcolatrice quale errore relativo si commette prendendo $1+\alpha$ al posto di e^{α} quando $|\alpha|=0{,}1$.

16. 2. 14 Considerata la funzione di variabile reale $f(x)=\sqrt{1-x}$, con $0\leq x\leq 1$, spiegare perché soddisfa alle ipotesi previste dal teorema di Lagrange. Trovare poi l'equazione della tangente al grafico della funzione nel "punto di Lagrange".

16. 2. 15 Nella figura sottostante (Fig. 16.1) è rappresentata la funzione y=f(x). Determinare la sua espressione analitica e quella della sua derivata e fornire la rappresentazione cartesiana di quest'ultima.

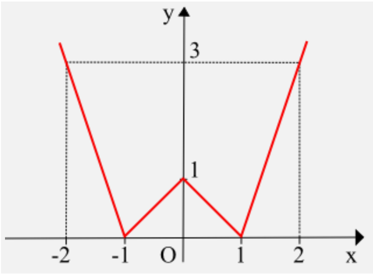

Fig. 16.1

16. 2. 16 Dimostrare il seguente teorema:
Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, definita e continua in un intervallo I=[a,b] e derivabile in]a,b[. Condizione necessaria e sufficiente affinché f(x) sia costante in [a,b] è che abbia derivata nulla in ogni punto di]a,b[.

16. 2. 17 Fornire un esempio che sphieghi come le condizioni ipotizzate dal teorema di de L'Hôpital non siano necessarie per il calcolo del limite della funzione f(x)/g(x) nel caso in cui per $x \to x_0$ la funzione stessa è una forma indeterminata del tipo ∞/∞.

16. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 16. 1. 1. [C] è l'alternativa corretta. Può essere dimostrato sia ricorrendo alla definizione di derivata sia utilizzando la formula della derivata di x^α, dove α è un numero reale. Il compito è lasciato al lettore.

Quesito 16. 1. 2. [C] è l'alternativa corretta. In effetti la funzione $\ln x$ non è neanche definita per $x \le 0$, per cui non ha senso calcolare la sua derivata per quei valori di x.

Quesito 16. 1. 3. Si tratta della derivata di una funzione composta. Si ha:
$D_x \sin^2 x = 2 \sin x\, D_x \sin x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$.
[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 16. 1. 4. Incominciamo a porre $\operatorname{atan}\frac{1}{2} = x$ ed $\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{3}\right) = y$, per cui $\tan x = \frac{1}{2}$ e $\tan y = -\frac{1}{3}$. Questo significa che il valore dell'espressione proposta è x–y. Possiamo calcolare ora tan(x–y) e si ha precisamente:

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

Da cui segue $x - y = \pi/4$. Questo è pertanto il valore cercato. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 16. 1. 5. Il campo di esistenza della funzione f(x) è tutto l'asse reale. Siccome poi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} e^x = 1,$$

la funzione f(x) è anche continua per ogni x reale. D'altro canto risulta:

$$f'(x) = \frac{x\, e^x - (e^x - 1)}{x^2}$$

e, di conseguenza:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + x\,e^x) - e^x}{2x} = \frac{1}{2}\ .$$

Ragione per cui la funzione è derivabile per ogni x reale. In definitiva la funzione è definita, continua e derivabile per ogni x reale. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 16.1.6. Il campo di esistenza della funzione f(x) è tutto l'asse reale. Siccome poi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{2x} = -\infty,$$

mentre f(0)=1, la funzione f(x) è continua per ogni $x\neq 0$, mentre non è continua per x=0. Di conseguenza per x=0 non è neppure derivabile, mentre, come si può facilmente trovare, è derivabile per $x\neq 0$.

In definitiva la funzione è definita per ogni x reale, mentre è continua e derivabile per ogni $x\neq 0$ ma non per x=0. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 16.1.7. Si può ricorrere alla regola di derivazione della funzione potenza. Si ha:

$$D_x \frac{1}{\sqrt{x}} = D_x x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}\ .$$

In altro modo, mediante la regola di derivazione della funzione reciproca:

$$D_x \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{D_x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}\ .$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 16.1.8. Siccome y è una costante rispetto alla variabile x, il secondo addendo della somma in esame, vale a dire $2\sqrt{y}$, è tale che la sua derivata rispetto ad x è zero, per cui la derivata della funzione è 2x. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 16.1.9. Bisogna ricorrere alla regola della catena. Si ha:

$$D_x \sin^2 2x = 2 \sin 2x\, D_x \sin 2x = 2 \sin 2x \cos 2x\, D_x 2x = \sin 4x \cdot 2 = 2 \sin 4x\ .$$

L'alternativa corretta è [B].

Quesito 16.1.10. Naturalmente bisogna calcolare anzitutto la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = e^{1/x} D_x \frac{1}{x} = -\frac{e^{1/x}}{x^2}\ ;$$

e quindi la derivata seconda:

$$f''(x) = D_x\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} - \frac{1}{x^2} D_x e^{1/x} = \frac{2}{x^3} e^{1/x} - \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2} e^{1/x}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^4}(2x+1).$$

Pertanto $f''(x)=0$ per $x=-1/2$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 16.1.11. Si tratta di calcolare il valore della velocità e la posizione occupata dal punto materiale nell'istante in cui la sua accelerazione x"(t) è uguale a 0. Intanto, tenendo presente che $x(t) = te^{-t}$, dopo qualche calcolo si trova: $x'(t)=e^{-t}(1-t)$, $x''(t)=e^{-t}(t-2)$. Pertanto: $x''(t)=0$ per t=2 s. D'altro canto $x(2)=2/e^2$ m e $x'(2)=-1/e^2$ m/s. Ne consegue che, nell'istante t=2 s, nel quale il punto materiale non è soggetto ad accelerazione, esso si trova nel punto A di ascissa $2/e^2$

m e, avendo una velocità negativa, si muove da A verso O e perciò si sta avvicinando ad O. [B] è l'alternativa corretta.

N.B.: La precisazione che l'istante t debba essere preso "al finito" è indispensabile. Infatti, per $t\to+\infty$ risulta $x''(t)\to 0$ ed inoltre $x(t)\to 0$ e $x'(t)\to 0$. Come dire che, per t infinito, il punto materiale non è soggetto ad accelerazione e si trova fermo nel punto O. L'alternativa corretta sarebbe stata la [A].

Quesito 16.1.12. Si può ricorrere al teorema di Lagrange, essendone soddisfatte le condizioni per applicarlo. Esiste allora un punto u, interno all'intervallo $]-1,1[$ tale che $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = f'(u)$; d'altra parte, come per ogni x dell'intervallo $]-1,1[$, anche il numero $f'(u)$ è compreso fra 0,05 e 0,1. Dunque: $0{,}05 < \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} < 0{,}1$ e da qui, essendo $f(-1)=2$, segue $0{,}1<f(1)-2<0{,}2$ e perciò: $2{,}1<f(1)<2{,}2$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 16.1.13. L'alternativa corretta è [C]. In effetti, per $x\to-\infty$, la funzione $\frac{4\sin x+3x}{3\sin x-4x}$ è una forma indeterminata del tipo ∞/∞, ma il suo limite per $x\to-\infty$, non si può calcolare ricorrendo al teorema di De L'Hôpital giacché, quando $x\to-\infty$, $\sin x$ non ammette limite. Il limite, nondimeno, si può calcolare con un semplice artificio. Si ha infatti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4\sin x+3x}{3\sin x-4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\frac{\sin x}{x}+3}{3\frac{\sin x}{x}-4}.$$

Ora, anche se $\sin x$ non ammette limite quando $x\to-\infty$, tuttavia si mantiene fra i valori –1 ed 1, per cui il rapporto $\sin x/x$ tende a 0. Ne consegue che:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4\sin x+3x}{3\sin x-4x}=-\frac{3}{4}.$$

Il lettore è invitato a calcolare gli altri tre limiti utilizzando il teorema di De L'Hôpital.

Quesito 16.1.14. La funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ è definita e continua per ogni x reale. Siccome poi risulta:

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\ \text{per}\ x\neq 0,\quad \text{ma}\ \lim_{x\to 0^-}f'(x)=-\infty\ \text{e}\ \lim_{x\to 0^+}f'(x)=+\infty,$$

non esiste la derivata della funzione per x=0 mentre esiste per ogni altro x. [B] è l'alternativa corretta.

16.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 16.2.1. In realtà la proposizione in esame è la contronominale di quest'altra: **Se una funzione è derivabile in un punto allora è continua in quel punto**. Siccome questa proposizione è dimostrata, di conseguenza è dimostrata l'altra. Si ricorda al riguardo che la contronominale di una proposizione e la proposizione stessa sono equivalenti, vale a dire che sono contemporaneamente vere o contemporaneamente false.

Quesito 16.2.2. Posto $\operatorname{asin}\frac{4}{5}=\alpha$, con $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, risulta: $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{2}\operatorname{asin}\frac{4}{5}=\frac{\alpha}{2}$.
Possiamo calcolare adesso il valore di $\sin\frac{\alpha}{2}$, tenendo anche presente che $\cos\alpha=\frac{3}{5}$:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\text{ , da cui segue: }\frac{\alpha}{2}=\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{5}}\text{ , ovvero: }\frac{1}{2}\operatorname{asin}\frac{4}{5}=\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Confrontando con l'equazione assegnata, deve essere: $\operatorname{asin}x=\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{5}}$ e pertanto $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Quesito 16.2.3. Si tratta di calcolare la derivata di una funzione composta. Si ha:

$$D_x\operatorname{asin}\frac{x}{2}=\frac{D_x\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Quesito 16.2.4. Poiché $2x^2+1>0$ per ogni x reale, si ha: $|2x^2+1|=2x^2+1$ ed è evidente che si tratta di una funzione derivabile per ogni x reale.

Quesito 16.2.5. Si ha: $x^3+1\geq0$ per $x\geq-1$ ed $x^3+1<0$ per $x<-1$, per cui risulta:

$$|x^3+1|=x^3+1 \text{ per } x\geq-1,\quad |x^3+1|=-x^3-1 \text{ per } x<-1.$$

Di conseguenza, posto $f(x)=|x^3+1|$, si ha:

$$f'(x)=3x^2 \text{ per } x\geq-1,\quad f'(x)=-3x^2 \text{ per } x<-1.$$

Se ne desume che la funzione assegnata è derivabile per ogni x reale diverso da -1, dal momento che $f'_+(-1)=3$, mentre $f'_-(-1)=-3$.

Quesito 16.2.6. Il campo di esistenza della funzione f(x) è tutto l'asse reale. Siccome poi $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, la funzione f(x) è anche continua per ogni x reale. D'altro canto risulta:

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

e, di conseguenza:

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-x\sin x)-\cos x}{2x}=0.$$

Ragione per cui la funzione risulta derivabile per ogni x reale.
In definitiva la funzione è definita, continua e derivabile per ogni x reale.

Quesito 16.2.7. No, non si può concludere che la funzione f(2x) è derivabile nell'intervallo]0,2[, pur sapendo che in quell'intervallo è derivabile la funzione f(x). Per provarlo è sufficiente un controesempio. Sia allora la funzione $f(x)=|x-2|$, certamente derivabile nell'intervallo]0,2[(Fig. 16.2). La funzione $f(2x)=|2x-2|$ evidentemente (Fig. 16.3) non è derivabile per x=1 ed a causa di questa eccezione bisogna concludere che f(2x) non è derivabile nell'intervallo]0,2[.

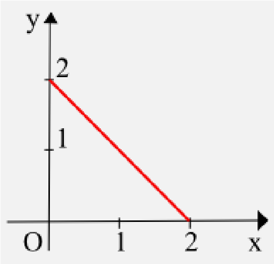

Fig. 16.2

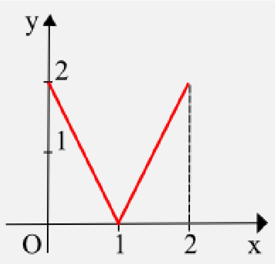

Fig. 16.3

Quesito 16. 2. 8. Siccome f(2x)=g(x)–f(x), essendo g(x) ed f(x) entrambe derivabili per x=0, lo è anche la loro differenza, vale a dire f(2x). Si ha precisamente:

$$[f'(2x)]_{x=0} = g'(0) - f'(0) = 3 - 1 = 2\,.$$

Quesito 16. 2. 9. Si può pervenire al risultato con considerazioni prettamente algebriche, dopo aver scritto la somma S nel modo seguente:

$$S = (1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}) + (x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}) + (x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}) + \ldots + x^{n-1}$$

ed aver constatato che quelle in parentesi sono somme di termini in progressione geometrica. Lasciamo al lettore il compito di giungere alla fine. Come gli lasciamo quello di calcolare il valore di S quando x=1.

Noi vogliamo seguire, invece, quando x≠1, un procedimento che utilizzi l'analisi matematica. Orbene, la somma S può essere concepita come la derivata, rispetto ad x, della funzione:

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n,$$

vale a dire: $S = f'(x)$.

D'altro canto, f(x) non è altro che la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine x e ragione x e, come noto, si ha:

$$f(x) = \frac{x(1-x^n)}{1-x}\,.$$

Risulta, pertanto:

$$S = f'(x) = \frac{[1-(n+1)x^n](1-x)-x(1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}\,.$$

Quesito 16. 2. 10. Constatato che:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\text{, si ha: } D_x \log_a x = \frac{1}{\ln a} D_x \ln x = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}\,.$$

Quesito 16. 2. 11. Ricorriamo alla definizione di derivata di una funzione in un punto. Per questo incominciamo a calcolare il rapporto incrementale di f(α x) nel punto x=1. Si ha:

$$\left(\frac{\Delta f(\alpha x)}{h}\right)_{x=1} = \frac{f\big(\alpha(1+h)\big) - f(\alpha\cdot 1)}{h} = \frac{f(\alpha+\alpha h) - f(\alpha)}{h}$$

ossia, posto α h=k:

$$\left(\frac{\Delta f(\alpha x)}{h}\right)_{x=1} = \alpha\cdot\frac{f(\alpha+k) - f(\alpha)}{k}\,.$$

Ora, teniamo presente che quando h→0 anche k→0 e inoltre il primo membro della precedente uguaglianza, quando h→0, altro non è che la derivata di f(α x) per x=1 e nel medesimo tempo il secondo membro della stessa uguaglianza, quando k→0, altro non è che la derivata di f(x) per x=α,

che sappiamo esistere ed essere uguale a 1. In conclusione, non solo esiste la derivata di f(α x) per x=1 ma questa derivata è α·1, cioè α.
Una considerazione importante. Qualcuno potrebbe essere tentato di condurre la dimostrazione con quest'altro ragionamento, basato sulla regola di derivazione delle funzioni composte. La derivata di f(α x) rispetto ad x, posto α x=t, è tale che:

$$\frac{\mathrm{df}(\alpha x)}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{df}(t)}{\mathrm{dt}}\cdot\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}}=\alpha\cdot\frac{\mathrm{df}(t)}{\mathrm{dt}}.$$

Da qui, calcolando in x=1 e tenendo presente che per x=1 si ha t=α, seguirebbe:

$$\left(\frac{\mathrm{df}(\alpha x)}{\mathrm{dx}}\right)_{x=1}=\alpha\cdot\left(\frac{\mathrm{df}(t)}{\mathrm{dt}}\right)_{t=\alpha}=\alpha\cdot f'(\alpha)=\alpha\cdot 1=\alpha\,.$$

Ora, come si può constatare, questo ragionamento presuppone che la funzione f(α x) sia derivabile in ogni x, ma questa condizione non c'è fra le ipotesi poste. Il ragionamento pertanto non è corretto, anche se fa giungere al risultato esatto.

Quesito 16.2.12. a) È falso. Se infatti x è costante rispetto a t allora anche f(x) è costante rispetto a t e la sua derivata rispetto a t è 0. b) Si ha: $D_t f\big(x(t)\big)=2x(t)\cdot x'(t)+3x'(t)$.

Quesito 16.2.13. Ricordiamo che, in base alle proprietà del differenziale di una funzione f(x), per piccoli valori di α risulta: $f(x+\alpha)\approx f(x)+\alpha\, f'(x)$. Nel caso specifico in cui $f(x)=e^x$, per cui $f'(x)=e^x$, risulta: $e^{x+\alpha}\approx e^x+\alpha\, e^x$. Da qui, per x=0 segue: $e^{\alpha}\approx 1+\alpha$.
Ora se |α|=1, per cui α=±1, distinguiamo due casi nel calcolo dell'errore relativo che si commette prendendo il valore approssimato 1+α al posto di e^{α}.

Nel primo caso (α=1) si ha: $\varepsilon_r=\dfrac{e^{0,1}-(1+0,1)}{e^{0,1}}\approx 0{,}47\%$.

Nel secondo caso (α=–1) si ha: $\varepsilon_r=\dfrac{e^{-0,1}-(1-0,1)}{e^{-0,1}}\approx 0{,}53\%$.

Quesito 16.2.14. La funzione $f(x)=\sqrt{1-x}$, con 0≤x≤1, è continua nell'intervallo [0,1] ed è derivabile in]0,1[, dal momento che $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$. Sono pertanto soddisfatte le condizioni per applicare il teorema di Lagrange. Esiste dunque un punto x∈]0,1[tale che: $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(x)$. Precisamente, avendosi: $\frac{0-1}{1-0}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$, a conti fatti si trova x=3/4.
La tangente al grafico della funzione in tale punto ha la seguente equazione:
$y-f\left(\frac{3}{4}\right)=f'\left(\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$, da cui, dopo qualche calcolo, segue: $y=-x+\dfrac{5}{4}$.

Quesito 16.2.15. L'espressione analitica della funzione e quella della sua derivata sono rispettivamente:

$$y=\begin{cases}-2x \text{ per } x\le -1\\ x+1 \text{ per } -1<x\le 0\\ -x+1 \text{ per } 0<x\le 1\\ 2x-2 \text{ per } x>1\end{cases}\qquad y'=\begin{cases}-2 \text{ per } x<-1\\ 1 \text{ per } -1<x<0\\ -1 \text{ per } 0<x<1\\ -1 \text{ per } x>1\end{cases}$$

La rappresentazione grafica della y' è quella della figura sottostante (Fig. 16.4). Si può notare che nei punti –1, 0 ed 1 la derivata non esiste.

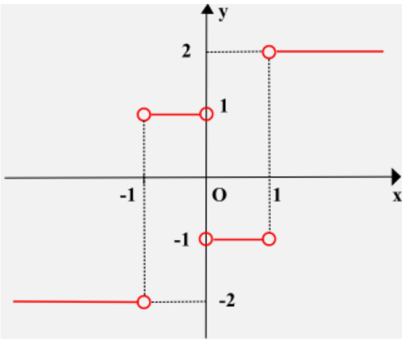

Fig. 16.4

Quesito 16.2.16. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, definita e continua in un intervallo I=[a,b] e derivabile in]a,b[. Presi due qualsiasi punti distinti x', x"∈I, per la funzione f(x) nell'intervallo [x',x"] sono soddisfatte le ipotesi per applicare il teorema di Lagrange. Esiste allora un punto u∈]x',x"[tale che:

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}=f'(u).$$

Ora, se $f'(x)=0$ per ogni x∈]a,b[, anche $f'(u)=0$. Di modo che f(x")=f(x'). Data l'arbitrarietà dei punti x', x" scelti in I, possiamo concludere che f(x) è costante per ogni x∈I. Abbiamo così dimostrato che la condizione è sufficiente.
Dimostriamo adesso che è necessaria. Se f(x) è costante in I allora f(x")=f(x') e perciò $f'(u)=0$. Data l'arbitrarietà di x', x" scelti in I, anche u è un punto arbitrario di]a,b[. Questo significa che $f'(x)=0$ per ogni x∈]a,b[.

Quesito 16.2.17. Un esempio siffatto è già stato presentato nel quesito 16.1.13 e si tratta della funzione:

$$\frac{4\sin x+3x}{3\sin x-4x}\text{ per }x\to-\infty.$$

Per la spiegazione rimandiamo alla risoluzione di quell'esercizio.

16.5. Isaac Newton: vita ed opere.

Newton

L'anno di grazia 1642 segna due eventi che si possono immaginare come una sorta di passaggio

di consegne fra due grandi scienziati: muore Galileo Galilei (8 gennaio) e nasce Isaac Newton (25 dicembre).
Newton nacque alcuni mesi dopo la morte del padre e, dopo che la madre si risposò, fu affidato alle cure della nonna materna. Quando la madre rimase di nuovo vedova, lo riprese con sé e intendeva avviarlo alla coltivazione dei campi ma, constatato che Isaac non ne voleva proprio sapere, decise di assecondare la sua inclinazione verso gli studi. Newton all'inizio frequentò una scuola pubblica che non era gran cosa. Ma nel 1661 entrò nel prestigioso Trinity College dell'Università di Cambridge. Vi entrò "alla pari", ossia doveva fare lavori manuali per poter pagare la retta. Gli insegnamenti che gli venivano impartiti erano fondamentalmente ispirati alla filosofia aristotelica, ma Newton preferì le letture dirette delle opere di Cartesio, Galileo, Copernico, Keplero. Gli si attribuisce il detto seguente: «*Se ho potuto vedere più lontano degli altri, è perché sono salito su spalle di giganti*». (1)
Ottenne il primo dei gradi universitari, il *Bachelor of Arts*, nel 1665, mentre nel 1668 conseguì il *Master of Arts*. Nel 1669, quando il suo maestro a Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), si ritirò dall'insegnamento, appoggiò la nomina di Newton alla cattedra di "professore lucasiano"(2), che egli stesso aveva tenuto dal 1664 in poi. Newton occupò quel posto fino al 1701, ma non amava insegnare e le sue lezioni erano difficili da seguire e per giunta noiose, ragion per cui erano poco frequentate.
L'anno accademico 1665-1666 fu il più proficuo per Newton. A causa della peste bubbonica il College fu chiuso e Newton ne approfittò per ritornare a casa, dove ebbe modo di meditare a lungo. Come egli stessò dichiarerà in seguito, fu durante quel periodo che ebbe le più importanti intuizioni, che poi avrebbero preso forma concreta. In particolare, sembra che debbano farsi risalire a quei mesi di riposo la scoperta della formula del binomio e della legge di gravitazione universale, oltre alle prime idee sul calcolo infinitesimale.
Newton fu membro del Parlamento inglese per due volte (1689-1690 e 1701), ma non c'è traccia di suoi interventi memorabili come politico. Nel 1695 fu nominato ispettore della Zecca e dal 1699 fino alla fine dei suoi giorni ne fu il direttore. Nello stesso anno 1699 fu eletto socio straniero dell'Accademia Reale delle Scienze di Parigi. Nel 1703 fu eletto presidente della Royal Society di Londra, ritenuta l'accademia nazionale di scienze del Regno Unito ed una delle più influenti organizzazioni scientifiche mondiali. L'ultima parte della sua vita, a partire dal 1705 e fino alla morte di Leibniz (1716), è contrassegnata dalla penosa disputa con il matematico e filosofo tedesco sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale. Diremo qualcosa di più quando ci occuperemo di Leibniz, per l'appunto.
Morì a Londra il 20 marzo 1727. Fu sepolto nell'Abbazia di Westminster.

Come s'intuisce, riflettendo sulla produzione di Newton, egli aveva molte remore a pubblicare le sue scoperte, che non rivelava neppure ai suoi più stretti collaboratori.

---

[1] Cfr.: Eric T. Bell, *I grandi matematici*, Sansoni editore, Firenze, 1966, pag. 93.
[2] *Professore lucasiano* è il nome attribuito alla cattedra di Matematica all'Università di Cambridge. Ha questa denominazione perché fu creata, per disposizione testamentaria, dal reverendo e uomo politico Henry Lucas (1610-1663). Esiste tuttora ed uno dei requisiti per diventare "professore lucasiano" è quello di non esercitare attività ecclesiastica.

La prima esposizione del calcolo infinitesimale fu data da Newton in un'opera dal titolo *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (*L'analisi mediante equazioni con un numero infinito di termini*) composta nel 1669 ma pubblicata solo nel 1711 (sembra comunque che l'opera sia circolata manoscritta fin dalla sua stesura). La prima esposizione del calcolo pubblicata ufficialmente, ma non in forma sistematica, apparve invece nel 1687 con la prima edizione dell'opera principale di Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Principi matematici della filosofia naturale*). Il libro presenta i fondamenti della fisica e dell'astronomia utlizzando solitamente il linguaggio tipico della geometria sintetica, ma a volte anche il linguaggio dell'algebra, come, ad esempio, nella sezione I del libro I, intitolata "*Metodo delle prime e delle ultime ragioni, col cui aiuto si dimostrano le cose che seguono*", che di fatto contiene il primo abbozzo di calcolo infinitesimale. (3)
Una terza esposizione dei metodi newtoniani del calcolo infinitesimale si ha in un'opera dal titolo *De quadratura curvarum* (*La quadratura delle curve*), che comparve nel 1704 come appendice ad un trattato sull'ottica, intitolato appunto *Opticks*. Un'altra opera sul medesimo tema, dal titolo *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (*Il metodo delle flussioni e delle serie infinite*), fu composta nel 1671 ma fu stampata postuma nel 1736.
A Newton si deve pure l'accettazione esplicita dei numeri negativi, anche quando sono radici di equazioni, in via definitiva e senza le riserve che li avevano contrassegnati in precedenza. Questo avvenne con una serie di lezioni da lui tenute a Cambridge nel decennio 1673-1683 e pubblicate nel 1707 in un volume dal titolo *Arithmetica universalis*. Egli fu pure il primo ad usare un sistema di assi coordinati. Lo fece nell'opera *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704), pubblicata essa pure come appendice dell'*Opticks*.

Una curiosità, legata più alla storia della Fisica che a quella della Matematica. Si racconta che Newton avrebbe intuito la legge di gravità in seguito alla caduta di una mela da un albero, che secondo alcune versioni avrebbe semplicemente osservato cadere e secondo altre gli sarebbe addirittura caduta in testa. Naturalmente nessuno ci crede seriamente. Il fatto è che i tempi erano maturi perché la legge fosse scoperta: era necessaria *soltanto* la presenza di una mente geniale, capace non solo di mettere assieme le informazioni che, a partire da Galileo e fino a Keplero ed altri, erano state acquisite, ma anche di possedere la matematica necessaria per l'analisi dei fenomeni osservati. Newton ebbe queste qualità e creò quella che oggi denominiamo "meccanica classica". Ed è irrilevante se egli abbia inventato il calcolo infinitesimale per interpretare i fenomeni fisici, come sostengono i più, o se l'abbia fatto indipendentemente da ciò. L'ha fatto: punto.

[3] Cfr..: Isaac Newton, *Principi Matematici della Filosofia Naturale* (a cura di Alberto Pala), Torino, UTET, Collana Classici, 1965, pagg. 141-154.