Capitolo 17 (Integrazione a unità 68-69)

Studio delle funzioni

17.1 Quesiti a risposta chiusa.

17.1.1 Sia la funzione $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}}$. Qual è il suo dominio?

[A] L'insieme dei numeri reali.

[B] L'insieme dei numeri reali positivi.

[C] L'insieme dei numeri reali x tali che $-1<x<0$.

[D] L'insieme dei numeri reali x tali che $x<-1$ oppure $x>0$.

17.1.2 Sia la funzione $f(x)=\ln \sin 2x$, con $0\leq x\leq 2\pi$. Qual è il suo dominio?

[A] L'intervallo $]0,2\pi[$. [B] L'intervallo $]0,\pi[$.

[C] L'insieme $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$. [D] L'insieme $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[\cup\left]\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right[$.

17.1.3 Sia la funzione $f(x)=\sqrt{e^x-1}$. Qual è il suo dominio?

[A] L'insieme dei numeri reali positivi

[B] L'insieme dei numeri reali negativi.

[C] L'insieme dei numeri reali non negativi.

[D] L'insieme dei numeri reali non positivi.

17.1.4 Si consideri il polinomio $P(x)=x^{2n+1}+2x-1$, dove n è un intero positivo qualunque.

[A] Ammette almeno uno zero reale che può essere un numero razionale.

[B] Ammette almeno uno zero reale ma questo non può essere un numero razionale.

[C] Ammette almeno uno zero reale ma non ci sono elementi per stabilire se è razionale.

[D] Non è possibile stabilire se il polinomio ammette zeri reali.

17.1.5 Si consideri la funzione $f(x)=x^3+ax^2-3x+1$, dove a è un parametro reale.

[A] Presenta un massimo e un minimo per ogni a.

[B] Presenta un massimo e un minimo per ogni $a>3$ oppure $a<-3$.

[C] Presenta un massimo e un minimo per ogni a tale che $-3<a<3$.

[D] Non presenta massimo né minimo qualunque sia a.

17.1.6 Sia la funzione $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

[A] È limitata superiormente e inferiormente.

[B] È limitata superiormente ma non inferiormente.

[C] È limitata inferiormente ma non superiormente.

[D] Non è limitata né superiormente né inferiormente.

17.1.7 Cosa s'intende per estremante di una funzione?

[A] Il massimo o il minimo assoluti della funzione.

[B] Il valore in cui la funzione assume il massimo o minimo assoluti.

[C] Un massimo o un minimo relativi di una funzione.
[D] Un valore in cui la funzione assume un massimo o un minimo relativi.

17.1.8 Si consideri la funzione $f(x)=x^4+ax^2+2x$, dove a è un parametro reale. Il suo grafico presenta due flessi:
[A] qualunque sia $a\neq 0$;
[B] qualunque sia $a<0$;
[C] qualunque sia $a>0$;
[D] qualunque sia a.

17.1.9 Si consideri la funzione $f(x)=2\sin^2 x - \cos 2x + 2$.
[A] È periodica con periodo 2π.
[B] È periodica con periodo π.
[C] È periodica con periodo 4π.
[D] Non è periodica.

17.1.10 Un cerchio ed un quadrato hanno la stessa area. Indicati con C la lunghezza della circonferenza e con P il perimetro del quadrato, risulta che:
[A] $C > P$;
[B] $C = P$;
[C] $C < P$;
[D] i dati sono insufficienti per stabilire un confronto fra C e P.

17.1.11 Si consideri la funzione $f(x)=\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$, con $x\in[0,\pi]$. Presenta:
[A] un massimo uguale ad 1 ed un minimo uguale a -1;
[B] un massimo uguale a $\sqrt{2}$ e un minimo uguale a $-\sqrt{2}$;
[C] un massimo uguale a $2\sqrt{2}$ e un minimo uguale a $-2\sqrt{2}$;
[D] un massimo uguale a $2\sqrt{2}$ e un minimo uguale a $-\sqrt{2}$.

17.1.12 Una funzione di variabile reale f(x) ha le seguenti caratteristiche: a) è continua e negativa per ogni x reale, b) $f(x)\to 0$ sia per $x\to -\infty$ sia per $x\to +\infty$, c) $f''(x)>0$ in tutto il dominio.
[A] Di funzioni siffatte ne esistono almeno due.
[B] Di funzioni siffatte ne esiste una ed una soltanto;
[C] Di funzioni siffatte non ne esiste alcuna.
[D] Non ci sono elementi sufficienti per stabilire quante funzioni siffatte esistano.

17.1.13 Qual è il valore minimo della funzione $f(x)=3-|1-x|\sqrt{3x}$ nell’intervallo [0,1]?
[A] $\frac{7}{3}$. [B] $3-\frac{\sqrt{2}}{2}$. [C] $3-\frac{\sqrt{6}}{4}$. [D] $3-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

17.1.14 In una sfera è inscritto il cono circolare retto di volume massimo. Qual è il rapporto fra l’altezza e il raggio di base di tale cono?
[A] $2\sqrt{2}$. [B] $2-\sqrt{2}$. [C] $\frac{\sqrt{2}}{2}$. [D] Un valore diverso.

17.1.15 Un libro è appoggiato su un tavolo come nella figura sottostante (Fig. 17.1). Le dimensioni di una pagina del libro sono 16 cm e 20 cm, ma non si conosce la misura dell’angolo diedro formato dalle pagine aperte. I punti A e B dividono a metà i bordi che li contengono. Quanto misura il cammino più breve per andare da A a B?
[A] 26 cm. [B] 34 cm. [C] $2\sqrt{105}$ cm. [D] Non si può calcolare.

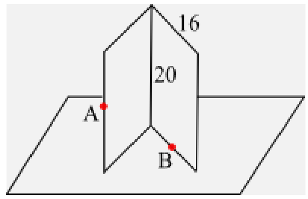


Fig. 17.1

17.1.16 Un ripostiglio, avente la forma di un parallelepipedo rettangolo, è alto 3 m, mentre le dimensioni del pavimento sono 2 m e 4 m. Un insetto è situato in uno dei vertici del tetto del ripostiglio e intende andare nel vertice opposto, ma non può volare. Quant'è lungo il cammino più breve?
[A] circa 6,7 m. [B] 7 m. [C] 7,3 m. [D] circa 7,5 m.

17.2 Quesiti a risposta aperta.

17.2.1 Sia y=f(x) una funzione reale di variabile reale. Quando si dice algebrica? Quando si dice trascendente? Fornire un esempio di funzione algebrica ed uno di funzione trascendente.

17.2.2 Sia f(x) una qualsiasi funzione polinomiale dispari. Dimostrare che $f'(x)$ è pari ed $f''(x)$ è dispari. Fornire un esempio.

17.2.3 Trovare il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$.

17.2.4 Si consideri una curva algebrica di ordine n. In quanti punti è intersecata da una qualsiasi retta non parallela all'asse y? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

17.2.5 Una funzione reale di variabile reale f(x) è definita nell'intervallo [a,b]. A quali condizioni (sufficienti ma non necessarie) deve soddisfare affinché ammetta uno ed un solo zero in tale intervallo?

17.2.6 La funzione $f(x)=\frac{1}{4}x^8-3x+2$, come mostra la sua visualizzazione sul video di un computer, presenta uno ed un solo zero reale nell'intervallo [0,1]. Si può fornire di ciò una spiegazione teorica?

17.2.7 Dimostrare il seguente teorema: **Ogni equazione polinomale**

$$\mathbf{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0}$$

dove a_0, a_1, …, a_{n-1} sono numeri reali, ammette almeno una radice reale se il suo grado n è dispari.

17.2.8 La funzione reale di variabile reale f(x) è crescente nell'intervallo [a,b]. È vero che $f'(x)>0$ per ogni $x\in[a,b]$?

17.2.9 Della funzione reale di variabile reale f(x) si sa che nel punto 2 è continua e derivabile almeno 2 volte ed inoltre si sa che $f(2)=0$, $f'(2)<0$ *ed* $f''(2)>0$. I dati sono sufficienti a determinare l'andamento della funzione in un intorno di 2?

17.2.10 Si consideri la funzione $f(x)=2x^3+3x^2-2$. Un idoneo software matematico mostra che essa ammette uno ed un solo zero reale e, inoltre, che questo zero è compreso fra 0 ed 1. Fornire una spiegazione teorica di questi fatti.

17. 2. 11 La funzione g(x) è derivabile almeno due volte nell'intervallo]−1,1[ed è concava verso il basso in tale intervallo. Dimostrare che la funzione f(x)=x g'(x)−g(x) è limitata superiormente in quell'intervallo. Provare a fornire un esempio di funzione f(x) con le caratteristiche suddette.

17. 2. 12 P(x) è un polinomio di 4° grado a coefficienti reali, che presenta uno zero uguale a 0 e un minimo uguale a −2 per x=−1 e per x=2. Determinare il polinomio.

17. 2. 13 Trovare le dimensioni del rettangolo di area massima che si può recintare con un filo di lunghezza L.

17. 2. 14 Nel triangolo ABC le mediane AM e BN sono lunghe rispettivamente a e b. Qual è il valore massimo dell'area del triangolo?

17. 2. 15 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'iperbole di equazione xy=2. Indicato con P un suo generico punto situato nel 1° quadrante, si consideri il triangolo rettangolo formato dagli assi di riferimento con la tangente all'iperbole in P. Quali sono le coordinate di P nel caso in cui il triangolo ha area minima?

17. 2. 16 Determinare l'altezza e il raggio di base del cono di minimo volume circoscritto ad una sfera di raggio 1 cm.

17. 2. 17 Fra i contenitori di forma cilindrica, per i quali è uguale a 300π cm^2 la somma della superficie laterale con la superficie di base, trovare quello di volume massimo.

17. 2. 18 Una pulce si trova nel vertice A di una scatola, a forma di parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono 9 cm, 12 cm e 16 cm (Fig. 17.2). Decide di spostarsi, senza effettuare salti, nel vertice C. Lo vuole fare, però, passando per la faccia opposta EFGH, ma effettuando il minimo cammino possibile. A quali distanze dallo spigolo EF deve tagliare gli spigoli EH ed FG?

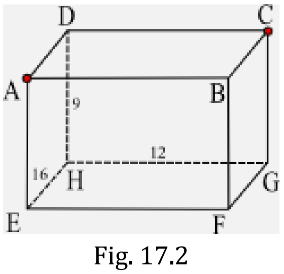


Fig. 17.2

17. 2. 19 È data la funzione $y=25-2x-x^2$, con x>0 e y>0. Una volta costruite le funzioni:

$$f(x) = y' \cdot \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad g(x) = xy\,,$$

si dimostri che la funzione g(x) è massima per il valore di x per il quale f(x)=−1.

17. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 17. 1. 1. Il dominio della funzione assegnata è costituito dagli x reali tali che $x+x^2>0$, e quindi $x<-1$ oppure $x>0$. [D] è l'alternativa corretta. Si desume poi facilmente che per ogni $x\in \text{dom}\, f(x)$ risulta $f(x)>0$.

Quesito 17. 1. 2. Il dominio della funzione è costituito dagli x reali tali che in tale intervallo risulti $\sin 2x>0$. Ora, se si considera tutto l'asse reale, $\sin 2x>0$ per $2k\pi<2x<\pi+2k\pi$, ossia $k\pi<x<\pi/2+k\pi$. Invece, prendendo il solo intervallo $[0,2\pi]$, si ottengono gli x reali tali che $0<x<\pi/2$ (per $k=0$) oppure $\pi<x<3\pi/2$ (per $k=1$). Il dominio della funzione è pertanto l'insieme $]0,\pi/2[\cup]\pi,3\pi/2[$. L'alternativa corretta è dunque [C]. Si desume poi che per ogni $x\in \text{dom}\, f(x)$ risulta $f(x)\leq 0$; il segno "=" si ha per $x=\pi/4$ e per $x=5\pi/4$.

Quesito 17. 1. 3. Il dominio della funzione è costituito dagli x reali tali che $e^x-1\geq 0$, vale a dire dagli $x\geq 0$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 17. 1. 4. Osserviamo anzitutto che si ha: $P'(x)=(2n+1)x^{2n}+2$ e perciò: $P'(x)>0$ per ogni x reale. Ne consegue che la funzione è sempre crescente. Si ha d'altro canto: $P(0)=-1$ e $P(1)=2$. Ora, nell'intervallo $[0,1]$ il polinomio $P(x)$ soddisfa a tutte le ipotesi previste dal teorema degli zeri. Esiste pertanto un punto $x_0\in]0,1[$ tale che $P(x_0)=0$. Vale a dire che il polinomio $P(x)$ ammette almeno uno zero reale. Se tale zero fosse razionale, dovrebbe appartenere all'insieme delle frazioni (positive e negative) aventi al numeratore un divisore del termine noto del polinomio, che è -1, ed al denominatore un divisore del coefficiente di grado più elevato, che è 1. In parole povere, se uno zero del polinomio fosse razionale questo dovrebbe essere -1 o 1. Ma -1 deve essere scartato perché non appartenente all'intervallo $]0,1[$. D'altra parte, come si constata facilmente: $P(1)\neq 0$, per cui anche 1 va escluso. In conclusione, il polinomio ammette certamente almeno uno zero reale, compreso fra 0 ed 1, ma questo non può essere razionale. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 17. 1. 5. Calcoliamo la derivata della funzione: $f'(x)=3x^2+2ax-3$. Considerato che il discriminante di questo trinomio in x è $\Delta=4(a^2+9)$ e considerato che risulta $\Delta>0$ per ogni a, il trinomio ammette due zeri reali e distinti, x' ed x" (con x'<x") e risulta $f'(x)>0$ per x<x' oppure x>x", mentre risulta $f'(x)<0$ per x'<x<x". Se ne desume che in x' la funzione $f(x)$ presenta un massimo ed in x" presenta un minimo. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 17. 1. 6. Un idoneo software matematico fornisce immediatamente la risposta, ma noi la vogliamo ottenere senza alcun supporto informatico. Per questo incominciamo a calcolare la derivata della funzione. Si trova:

$$f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Se ne desume che $f'(x)=0$ per $x=1$, $f'(x)>0$ per $x<1$, $f'(x)<0$ per $x>1$. Cosicché la funzione cresce per $x<1$ e decresce per $x>1$, mentre per $x=1$ presenta un massimo, ragion per cui è limitata superiormente. Per stabilire se lo è anche inferiormente basta calcolare il limite della funzione per $x\to-\infty$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{x^2+1}}=-1.$$

E siccome la funzione è crescente per $x<1$, dobbiamo concludere che -1 è il suo estremo inferiore. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 17.1.7. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 17.1.8. Bisogna studiare il segno della derivata seconda della funzione. Calcoliamo allora la derivata prima: $f'(x)=4x^3+2ax+2$ ed a seguire la derivata seconda: $f''(x)=12x^2+2a$. Solo se $a<0$ questa funzione $f''(x)$ ammette due zeri reali. E questo, considerate le alternative del quesito, è sufficiente per farci concludere che l'alternativa corretta è [B].

Quesito 17.1.9. La funzione $f(x) = 2\sin^2 x - \cos 2x + 2$ dopo aver ricordato che $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ e perciò $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$, si può mettere nella forma seguente: $f(x)=3-\cos 2x$. Ora, questa funzione è periodica con periodo 2π rispetto alla variabile $2x$, per cui è periodica con periodo π rispetto ad x. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 17.1.10. Tra le superfici piane di uguale area il cerchio è quello di minimo "perimetro". Quindi [C] è l'alternativa corretta.
Per altra via, se πr^2 è l'area comune allora $C=2\pi r$ e $P=4r\sqrt{\pi}$, o anche, scritto in modo più conveniente: $C=2r\times\pi$ e $P=2r\times 2\sqrt{\pi}$. Siccome $\pi<2\sqrt{\pi}$ allora $C<P$.

Quesito 17.1.11. La funzione $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x-1$, con $x\in[0,\pi]$, una volta constatato che $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, si può mettere nella forma seguente: $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$. Si tratta di una sinusoide definita nell'intervallo $[0,\pi]$. I punti in cui essa ammette massimo e minimo sono dati perciò dai valori che annullano la sua derivata prima. Siccome $f'(x)=2\cos 2x-2\sin 2x$, risulta $f'(x)=0$ per $\tan 2x=1$, ossia per $x=\pi/8$ ed $x=5\pi/8$. Essendo $f(\pi/8)=\sqrt{2}$ e $f(5\pi/8)=-\sqrt{2}$, questi valori della funzione sono rispettivamente il suo massimo e il suo minimo. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 17.1.12. La funzione dovrebbe essere continua (e quindi anche definita) su tutto l'asse reale e disposta completamente al di sotto dell'asse x, che risulterebbe essere un suo asintoto completo. Tutto questo contraddice il fatto che essa dovrebbe avere la concavità rivolta verso l'alto in tutto il suo dominio come farebbe desumere la condizione $f''(x)>0$. Ne consegue che nessuna funzione ha le caratteristiche ipotizzate. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 17.1.13. La funzione può essere messa nella forma seguente: $f(x)=3-\sqrt{3x(1-x)^2}$, la quale risulta minima nell'intervallo $[0,1]$ quando in questo intervallo è massima la funzione $g(x)=x(1-x)^2$. D'altro canto, sempre nell'intervallo $[0,1]$, le variabili x ed $1-x$ sono positive ed hanno somma costante $(=1)$. Pertanto, in vitù di una nota proprietà elementare, $g(x)$ è massima quando è soddisfatta la condizione $\frac{x}{1}=\frac{1-x}{2}$, ossia quando $x=\frac{1}{3}$. In corrispondenza si ha: $\min f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}$. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 17.1.14. Indichiamo per comodità con r il raggio della sfera e poniamo uguale ad x l'altezza di un generico cono circolare retto inscritto in essa, per cui $0<x<2r$. Il raggio di base di tale cono è allora $\sqrt{x(2r-x)}$. Il volume V del cono è allora: $V=\frac{1}{3}\pi x^2(2r-x)$. Esso risulta massimo quando è massima la funzione $f(x)=x^2(2r-x)$, con $0<x<2r$. E ciò accade quando è soddisfatta la seguente condizione: $\frac{x}{2}=2r-x$, da cui segue: $x=4r/3$. Pertanto, l'altezza del cono di volume massimo è $H=4r/3$, mentre il raggio della sua base è $R=\sqrt{\frac{4}{3}r\left(2r-\frac{4}{3}r\right)}=\frac{2}{3}r\sqrt{2}$. Si ha di conseguenza:

$$\frac{H}{R}=\frac{\frac{4}{3}r}{\frac{2}{3}r\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

[D] è l'alternativa corretta.

Quesito 17.1.15. Bisogna immaginare di distendere le pagine aperte del libro su uno stesso piano come nella figura sottostante (Fig. 17.3) e si capisce immediatamente che il cammino più breve è il segmento AB passante per D.

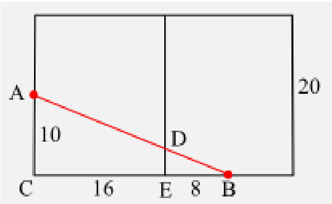


Fig. 17.3

Ebbene, ricorrendo al teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ACB, si trova immediatamente che la misura di AB è 26 cm. [A] è perciò l'alternativa corretta.

Quesito 17.1.16. Ammesso che l'insetto si trovi nel vertice A del ripostiglio (schematizzato nel parallelepipedo rappresentato nella figura 17.4), esso deve portarsi in G. Immaginiamo di sviluppare la superficie del parallelepipedo in modo che la faccia AEHD e la base EFGH formino un rettangolo (Fig. 17.5).

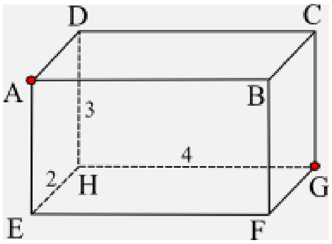


Fig. 17.4

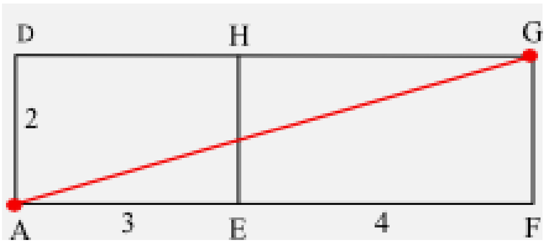


Fig. 17.5

È evidente che il cammino più breve è rappresentato dal segmento AG, ipotenusa del triangolo rettangolo AFG, i cui cateti misurano 2 m e 7 m. Pertanto: $\overline{AG}=\sqrt{4+49}\approx 7{,}3$ (m)). L'alternativa corretta è perciò [C]. Per realizzare questo cammino bisogna trovare sullo spigolo EH del parallelepipedo un punto P tale che AP formi con HE un angolo acuto uguale a quello formato da HE con PG.

17. 4. Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 17. 2. 1. Una funzione y=f(x) si dice ***algebrica*** quando, operando su di essa con le quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica e con l'elevamento a potenza, assume la forma P(x,y)=0 di un polinomio nelle variabili x, y, uguagliato a zero. Si dice ***trascendente*** se non è algebrica. Ad esempio, è *algebrica* la funzione:

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

che si può mettere nella forma $x^2y^2-x^2-y^2=0$, ed è esattamente una curva algebrica di ordine 4, poiché per l'appunto 4 è il grado del polinomio al 1° membro di quest'ultima equazione. È *trascendente* la funzione:

$$y=3^x$$

che non è possibile mettere nella forma P(x,y)=0, dove P(x,y) è un polinomio nelle variabili x, y.

Quesito 17. 2. 2. La più generale funzione polinomiale dispari (di grado m=2n+1) assume la seguente forma:

$$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-3}+\cdots+a_{n-1}x^3+a_nx.$$

La sua derivata prima è allora la funzione:

$$f'(x)=(2n+1)a_0x^{2n}+(2n-1)a_1x^{2n-2}+(2n-3)a_2x^{2n-4}+\cdots+3\,a_{n-1}x^2+a_n$$

ed è evidentemente una funzione pari.
La derivata seconda è a sua volta la funzione:

$$f''(x)=(2n)(2n+1)a_0x^{2n-1}+(2n-2)(2n-1)a_1x^{2n-3}+(2n-4)(2n-3)a_2x^{2n-5}+\ldots+2\cdot3\,a_{n-1}x$$

ed è evidentemente una funzione dispari.
Un esempio particolare può essere quello della funzione $f(x)=x^5+3x^3$.
In realtà, di ogni funzione reale di variabile reale, derivabile almeno due volte, si può dimostrare che se è dispari, la sua derivata prima è pari e la derivata seconda è dispari. Se, al contrario, la funzione data è pari, allora la sua derivata prima è dispari e la sua derivata seconda è pari. Il lettore lo verifichi per le seguenti funzioni particolari:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\ ,\quad g(x)=\frac{\cos x}{x}\ ,$$

la prima pari e la seconda dispari.

Quesito 17. 2. 3. Devono essere soddisfatte due condizioni:
a) $x+1>0$ affinché sia definita la funzione $\ln(x+1)$
b) $\ln(x+1)\geq0$ affinché sia definito il radicale quadratico.
Si tratta perciò di risolvere il sistema delle due disequazioni. La prima è soddisfatta per $x>-1$, la seconda per $x+1\geq1$, ossia $x\geq0$. Pertanto il sistema è soddisfatto per $x\geq0$. Il dominio cercato è allora costituito dall'insieme dei numeri reali non negativi. Si capisce facilmente che la funzione si annulla per x=0 ed è positiva per ogni altro x>0.

Quesito 17. 2. 4. Supponiamo che sia y=f(x) l'equazione della curva algebrica di ordine n e sia y=ax+b l'equazione di una generica retta non parallela all'asse y. Per trovare le intersezioni della curva con la retta bisogna risolvere il sistema delle loro equazioni. Trattandosi di un sistema di grado n, ammette al più n soluzioni reali. È pertanto n il massimo numero di punti comuni alla curva ed alla retta. Il che comporta ovviamente che questo numero può variare da 0 ad n.

Quesito 17. 2. 5. La funzione deve essere continua e derivabile in [a,b], deve risultare $f(a)\cdot f(b)<0$ e inoltre deve essere $f'(x)\neq 0$ per ogni $x\in]a,b[$. Che tali condizioni siano sufficienti ma non necessarie è provato dalla funzione $f(x)=|x|$, con $x\in[-1,1]$, la quale si annulla per $x=0$ pur non essendo derivabile in tale intervallo e pur essendo $f(-1)\cdot f(1)>0$.

Quesito 17. 2. 6. Basta tener presenti i teoremi di esistenza e unicità degli zeri di una funzione. In effetti la funzione f(x) in esame è continua e decrescente nell'intervallo [0,1] e risulta $f(0)\cdot f(1)<0$. Tali condizioni sono sufficienti per concludere che esiste $x_0\in]0,1[$ tale che $f(x_0)=0$.

<u>Nota Bene</u>: Tutto questo non ci dice nulla sull'effettivo valore di x_0. Ma solo che esiste ed è unico nell'intervallo considerato.

Quesito 17. 2. 7. Poniamo per comodità $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. È evidente che, essendo n dispari, $P(x)\to-\infty$ per $x\to-\infty$ e $P(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$. Quindi, per la stessa definizione di limite di una funzione, esiste un $x'<0$ tale che $P(x')<0$ ed esiste un $x''>0$ tale che $P(x'')>0$. Ora, nell'intervallo [x',x"] il polinomio P(x) soddisfa a tutte le ipotesi previste dal teorema di esistenza degli zeri. Esiste pertanto un punto $x_0\in]x',x''[$ tale che $P(x_0)=0$. Vale a dire che x_0 è una radice dell'equazione $P(x)=0$ o, se si vuole, è uno zero del polinomio P(x).

<u>Nota Bene</u>: Il teorema assicura soltanto l'esistenza di almeno uno zero del polinomio, ma non dice come fare a determinarlo né assicura che tale zero sia unico (il polinomio potrebbe effettivamente ammettere altri zeri).

Quesito 17. 2. 8. No, è falso. In effetti, la condizione $f'(x)>0$ in un certo intervallo [a,b] è sufficiente per concludere che la funzione f(x), ovviamente derivabile in [a,b], è ivi crescente. Ma non è necessaria. Basta prendere ad esempio la funzione $f(x)=x^3$, la quale è crescente su tutto l'asse reale pur essendo $f'(0)=0$.
Intendiamoci, quando diciamo che la proposizione è falsa, intendiamo affermare che il fatto che f(x) sia crescente in un dato intervallo non garantisce che la sua derivata sia positiva in ogni punto di quell'intervallo, ma non esclude che lo possa essere, come accade ad esempio per la funzione $f(x)=e^x$, crescente su tutto $\mathbb{R}$ e la cui derivata $f'(x)=e^x$ è effettivamente positiva per ogni x reale. Quello che però si può affermare con certezza è che, se f(x) è crescente in un dato intervallo ed è derivabile in quell'intervallo, allora **è escluso** che possa essere $f'(x)<0$ per qualche x dell'intervallo.

Quesito 17. 2. 9. La condizione $f(2)=0$ implica che il punto 2 è uno zero della funzione; la condizione $f'(2)<0$ implica che nello stesso punto la funzione è decrescente; la condizione $f''(2)>0$ implica infine che nel punto 2 la funzione è concava verso l'alto. Le condizioni sono sufficienti a determinare l'andamento della funzione in un intorno del punto 2. Il lettore provi a disegnare un possibile andamento della funzione in un intorno del punto 2. Provi inoltre a fornire un esempio di funzione che soddisfi alle condizioni descritte.

Quesito 17. 2. 10. La funzione $2x^3+3x^2-2$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e si ha:

$f'(x)=6x^2+6x$. Se ne desume che $f'(x)=0$ per $x=-1$ e per $x=0$, $f'(x)>0$ per $x<-1$ e per $x>0$ ed $f'(x)<0$ per $-1<x<0$. Pertanto la funzione cresce per $x<-1$ e per $x>0$ e decresce per $-1<x<0$. Essa ha quindi un massimo relativo per $x=-1$ ed un minimo relativo per $x=0$. Considerato poi che $f(-1)=-1$ e $f(0)=-2$ e considerato inoltre che $f(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$, la funzione, in virtù dei teoremi di esistenza ed unicità degli zeri, presenta uno ed un solo zero per $x>0$. A questo punto, constatato che $f(1)=3$, per cui $f(0)\cdot f(1)<0$, sempre per il teorema degli zeri possiamo concludere che lo zero della funzione assegnata è compreso fra 0 ed 1.

Quesito 17.2.11. Si ha: $f'(x) = x\,g''(x)$. Siccome $g''(x)<0$ per ogni $x\in]-1,1[$ ne consegue che $f'(x)=0$ per $x=0$, $f'(x)>0$ per $x<0$ e $f'(x)<0$ per $x>0$. Pertanto la funzione $f(x)$ cresce per $-1<x<0$ e decresce per $0<x<1$, ha quindi un massimo per $x=0$. Essa è perciò limitata superiormente. Un semplice esempio di funzione $f(x)$ si può costruire partendo dalla funzione $g(x)=1-x^2$.

Quesito 17.2.12. Il polinomio di 4° grado, a coefficienti reali, avente uno zero uguale a 0, ha la seguente forma generale:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

dove a, b, c, d sono parametri reali.
Le condizioni poste si traducono nelle seguenti equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$P(-1) = -2,\ \ P(2) = -2,\ \ P'(-1) = 0,\ \ P'(2) = 0.$$

Risolvendo il loro sistema si trovano i seguenti valori delle incognite:

$$a = \frac{1}{2},\ \ b = -1,\ \ c = -\frac{3}{2},\ \ d = 2$$

ed il polinomio risulta così determinato.

In effetti, questo è il procedimento, che potremmo definire standard e che probabilmente la maggior parte degli studenti segue. Come si può facilmente constatare, esso è piuttosto lungo e noioso, soprattutto a causa della risoluzione del sistema, anche se l'aiuto di uno strumento di calcolo automatico permette di semplificarlo molto.
C'è tuttavia, in questo caso specifico, un procedimento più rapido ed è questo procedimento che vogliamo descrivere.
Facciamo subire al grafico $y=P(x)$ del polinomio, disegnato in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), una traslazione che porti i due punti di minimo $(-1,-2)$ e $(2,-2)$ sull'asse x. Anzi prendiamo la più comoda di queste traslazioni, quella che lascia invariate le x . Questa traslazione ha le seguenti equazioni:

$$X = x,\ \ Y = y + 2.$$

In base ad essa l'equazione del grafico del polinomio diventa:

$$Y = P(X) + 2$$

ed i suoi punti di minimo assumono le coordinate $(-1,0)$ e $(2,0)$. Come dire che in questi punti il grafico trasformato risulta essere tangente all'asse x. Cosicché il polinomio $P(X)+2$, che ricordiamo essere di 4° grado, deve avere la seguente forma:

$$P(X) + 2 = k(X + 1)^2(X - 2)^2\ ,$$

ossia, ritornando alle coordinate originarie:

$$P(x) + 2 = k(x + 1)^2(x - 2)^2\ ,$$

dove k è un parametro reale. D'altro canto sappiamo che deve essere P(0)=0 e pertanto deve essere soddisfatta la seguente condizione:

$$2 = k \cdot 1 \cdot 4 \ \text{ da cui segue } k = \frac{1}{2}.$$

In concluisione il polinomio è il seguente:

$$P(x) = \frac{1}{2}\ (x+1)^2(x-2)^2 - 2$$

ossia, dopo aver sviluppato e semplificato:

$$P(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\,.$$

Quesito 17. 2. 13. Il problema è equivalente a quest'altro: «Fra i rettangoli di perimetro costante L determinare quello di area massima» e, come noto, questo rettangolo è il quadrato, il cui lato è evidentemente L/4 e la cui area è ovviamente $L^2/16$.

Quesito 17. 2. 14. Indicato con O il baricentro del triangolo, si dimostra anzitutto che i triangoli AOB e AOC sono equivalenti. In effetti, poiché AMB eq AMC ed OMB eq OMC, sottraendo membro a membro si ottiene AOB eq AOC. Allo stesso modo si dimostra che AOB eq BOC. Ne discende che l'area S del triangolo ABC è il triplo di quella del triangolo AOB. D'altro canto, per una nota proprietà delle mediane, i segmenti AO e BO sono lunghi rispettivamente $\frac{2}{3}a$ e $\frac{2}{3}b$, per cui chiamato φ l'angolo $A\hat{O}B$, risulta:

$$S=3\cdot\frac{1}{2}\ \overline{AO}\cdot\overline{OB}\sin\varphi=\frac{2}{3}a\,b\sin\varphi\,.$$

È evidente che S è massima quando φ=90°, cioè quando le mediane AM e BN sono perpendicolari. In questo caso: $\max(S)=\frac{2}{3}ab$.

Quesito 17. 2. 15. Chiamata t, con t>0, l'ascissa di P, si trova anzitutto l'equazione della tangente all'iperbole in P:

$$y=-\frac{2}{t^2}x+\frac{4}{t}\ .$$

Di modo che l'ipotenusa del triangolo in questione ha come estremi i punti A(2t,0) e B(0,4/t). La sua lunghezza è perciò tale che :

$$\overline{AB}^2=4t^2+\frac{16}{t^2}=4\left(t^2+\frac{4}{t^2}\right).$$

Evidentemente AB risulta minima quando è minima la funzione:

$$f(t)=t^2+\frac{4}{t^2}\ .$$

D'altro canto, siccome il prodotto dei due addendi positivi t^2 e $4/t^2$ è costante. Tale somma è minima quando tali addendi sono uguali, ossia quando $t^2=4/t^2$. Il che accade per $t=\sqrt{2}$. In conclusione le coordinate del punto P cercato sono $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ e il valore minimo dell'ipotenusa in questione è $\min AB=2\sqrt{2}$.

Quesito 17. 2. 16. Con riferimento alla figura sottostante (Fig. 17.6), dove O è il centro della sfera, poniamo $\overline{VH}$=x, con x>2 (cm). Sfruttando la similitudine dei triangoli VHA e VTO, dopo alcuni calcoli si trova:

$$\overline{HA}=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}\ .$$

Il volume V del cono è pertanto:

$$V=\frac{1}{3}\pi\,\overline{HA}^2\cdot\overline{VH}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^2}{x-2}\ .$$

Si tratta allora di rendere minima la funzione:

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}\ ,\ \text{con } x>2.$$

Incominciamo a calcolarne la derivata:

$$f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\ .$$

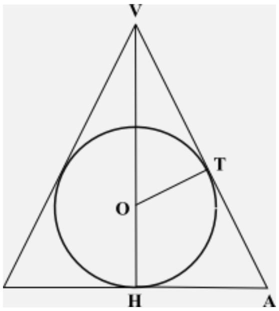


Fig. 17.6

Ricordando che $x>2$, si ha: $f'(x)=0$ per $x=4$, $f'(x)>0$ per $x>4$, $f'(x)<0$ per $x<4$. Se ne desume che la funzione è minima per $x=4$ cm. In conclusione, il volume minimo è $\min V=\frac{8\pi}{3}\ cm^3$ e l'altezza ed il raggio di base del relativo cono misurano rispettivamente $\sqrt{2}$ cm e 4 cm.

Quesito 17. 2. 17. Indicati con x il raggio di base del contenitore cilindrico e con y la sua altezza, il volume è $V=\pi x^2 y$ e la somma della superficie laterale con quella della base (una sola evidentemente, giacché la parte superiore del contenitore è aperta) è $S=2\pi xy+\pi x^2$.
Si tratta di stabilire quando V è massimo sapendo che S è costante. Ora, V è massimo, quando lo sono la quantità x^2y e il quadruplo del suo quadrato, ossia la quantità $4x^4y^2$. D'altro canto, siccome quest'ultima si può scrivere anche in questo modo: $(2xy)^2(x^2)$, per una nota proprietà elementare, essendo $S=\pi(2xy+x^2)=$costante, la quantità $(2xy)^2(x^2)$ è massima quando è soddisfatta la seguente relazione:

$$\frac{2xy}{2}=\frac{x^2}{1}$$

ossia, essendo $x\neq 0$, quando $x=y$.
Siccome $S=300\pi\ cm^2$, quando $x=y$ deve essere soddisfatta la seguente equazione: $3\pi x^2=300\pi$, da cui segue $x=10$ (cm). Il contenitore cercato è quello che ha uguali a 10 cm sia il raggio di base sia l'altezza.

Quesito 17. 2. 18. Conviene distendere sullo stesso piano della faccia EFGH le facce AEHD e BFGC, come nella figura sottostante (Fig. 17.7).

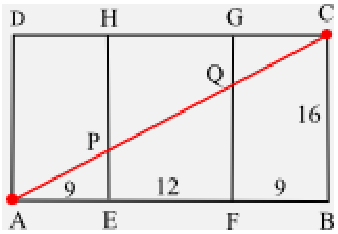


Fig. 17.7

Dopo aver constatato che il cammino più breve è quello realizzato lungo la retta AC, considerando la similitudine di triangoli opportuni si trova che le misure delle distante cercate, vale a dire le misure di EP ed FQ, sono rispettivamente 4,8 cm e 11,2 cm.

Quesito 17. 2. 19. Incominciamo a calcolare la derivata della funzione $g(x)=xy$:

$$g'(x)=y+xy'.$$

Siccome $f(x)=-1$ allora, in tale x, $y'=-y/x$ e perciò $g'(x)=y-y=0$. Si tratta a questo punto di stabilire il segno di $g''(x)$ nel valore x in questione. Si ha intanto:

$$g'(x)=(25-2x-x^2)+x(-2-2x)=25-4x-3x^2$$

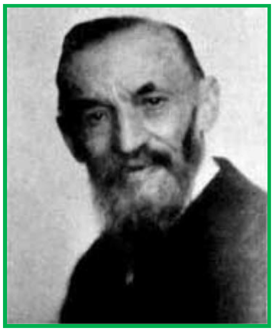
e perciò:

$$g''(x)=-4-6x.$$

Siccome, per ipotesi, $x>0$ allora $g''(x)<0$ in ogni x e quindi anche nel punto x di cui ci stiamo occupando. Di conseguenza, in tale punto la funzione g(x) è massima.

Detto a beneficio di chi ne fosse interessato (Liceo delle Scienze umane, opzione Economico-sociale, settore Economico dell'Istituto Tecnico e indirizzo Trasporti e Logistica dell'Istituto Tecnico, settore Tecnologico) quanto su esposto ha un significato economico. Precisamente, posto che y(x) rappresenti una funzione di domanda rispetto al prezzo x, la funzione f(x) non è altro che l'elasticità di tale domanda, mentre g(x) può essere interpretata sia come il ricavo del produttore sia come la spesa del consumatore. Se l'elasticità è uguale ad −1 per un determinato prezzo x (il che significa che per questo prezzo la domanda è stabile) allora per quel prezzo il ricavo (o la spesa) è massimo. Al produttore non conviene modificare quel prezzo in quanto ogni variazione comporta una diminuzione del ricavo.

17. 5. Giuseppe Peano: vita ed opere.


Peano

La logica matematica (o simbolica), dopo l'inglese George Boole (1815-1864), che ne è considerato il fondatore, aveva trovato, intorno alla fine dell'Ottocento, dei cultori appassionati in due studiosi tedeschi: Georg Cantor (1845-1918), creatore della teoria degli insiemi, e Gottlob Frege (1848-1925). In Italia, allo stesso livello d'importanza di questi studiosi, si colloca Giuseppe Peano, che alcuni considerano il vero padre della logica simbolica.

Peano nacque nel 1858 in una frazione del comune di Spinetta, in provincia di Cuneo, da una famiglia di agricoltori. Dopo il liceo, frequentato a Cuneo, si laureò in matematica all'Università di Torino all'età di 22 anni. Subito diventò assistente presso la medesima Università, dove dal 1890 ricoprì il ruolo di professore straordinario di analisi matematica e dal 1895 quello di professore ordinario. Diventato scienziato di fama mondiale, ebbe molti riconoscimenti, in particolare dal governo italiano.
A partire dal 1903 fu distolto dai suoi studi matematici dalla ricerca, che diventò maniacale, di una lingua universale, che egli chiamò *latino sine flexione*. Non solo il suo progetto fallì, ma per sovrammercato si ebbe molte critiche in ambiente universitario.
Morì nel 1932, nella sua casa di campagna, nei pressi di Torino, in seguito ad un infarto.

Peano diventò quasi subito conosciuto nell'ambiente dei matematici per aver curato un trattato di analisi in collaborazione con il suo professore all'Università di Torino, il matematico Angelo Genocchi (1817-1889). Il testo – pubblicato nel 1884, quando Peano aveva 26 anni – reca il titolo *Calcolo differenziale e principii di clcolo integrale*, fu tradotto in molte lingue e fu considerato uno dei migliori testi di analisi.
In effetti Peano fu un analista di primo piano e molti dei suoi risultati riguardano proprio l'analisi matematica, ma egli non fu solo questo. Ad esempio, è considerato uno dei fondatori del calcolo vettoriale, anche se un sistema di calcolo vettoriale, benché molto differente dal suo, era stato elaborato da tempo da un matematico italiano poco conosciuto, il sacerdote Domenico Chelini (1802-1878), nell'opera *Saggio di geometria analitica trattata con nuovo metodo*, pubblicata a Roma nel 1838. L'opera, in cui Peano delinea le proprietà di quello che oggigiorno potrebbe essere definito uno spazio vettoriale, fu pubblicata nel 1888 col titolo *Calcolo geometrico secondo l'Ausdechnungslehre di H. Grassmann precdeduto dalle operazioni di logica deduttiva*.
In questo libro ci sono anche i prodromi di quella logica deduttiva che Peano avrebbe in seguito approfondito e che lo portò anche ad introdurre una serie di simboli logici (ad esempio: $\in$, $\cup$, $\cap$, $\supset$) che ancora oggi sono usati. I risultati da lui ottenuti in questo campo gli avrebbero assicurato fama imperitura.
La sua idea era di costruire tutta la matematica a partire dalla logica e dai suoi simboli e si trasformò in un progetto, avviato fin dai primi anni del Novecento, cui parteciparono molti suoi allievi, che avrebbero avuto poi un ruolo importante nella matematica italiana (tanto per citarne qualcuno: Giovanni Vailati, 1863-1909; Cesare Burali-Forti, 1861-1931; Gino Fano, 1871-1952). Il progetto, in realtà, fallì ed a questa ingloriosa fine non fu estranea probabilmente la mania di Peano per la creazione di una lingua universale, che egli chiamò *latino sine flexione*, che finì per allontanarlo dagli originari interessi per la matematica e per sovrammercato gli procurò molte critiche in ambiente universitario. Per esempio, Vito Volterra (1860-1940) gli rimproverava di aver abbandonato la ricerca matematica per dedicarsi alla filosofia.

A Peano si deve anche la costruzione di un sistema assiomatico dei numeri naturali. Chi vuole, ne può cogliere gli aspetti principali nel "testo base", U87 – Il metodo assiomatico, N° 87.3.

Ma un altro risultato contribuì a mostrare la genialità di Peano ed a rendere immortale il suo nome ed è ciò che il fondatore della moderna topologia, Felix Hausdorff (1868-1942), definì una delle più importanti scoperte del XIX secolo: la scoperta di una curva (e perciò una grandezza unidimensionale), fra l'altro continua e non derivabile in alcun punto, che riempie totalmente un quadrato (ossia una grandezza bidimensionale), scombinando in questo modo il concetto di "dimensione".
Questa curva è oggi nota con il nome di *curva di Peano* e il matematico piemontese la descrisse in un articolo di 4 pagine, dal titolo *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, pubblicato nel 1890 sulla rivista *Mathematische Annalen*.
In realtà Peano ne diede una geniale descrizione analitica, della quale non ci occupiamo, ma senza fornire alcuna idea circa la sua costruzione grafica. Chi, l'anno dopo, ne fornì anche una descrizione geometrica fu il matematico tedesco David Hilbert (1862-1943). Ed è questa descrizione che noi proponiamo qui appresso per sommi capi.
Si divide un quadrato dato in quattro parti uguali e si uniscono con una spezzata i loro centri come indicato nella prima delle figure sottostanti (Fig. 17.9). Questo passo si ripete in modo ricorsivo per ognuno dei 4 quadrati ottenuti. In figura sono rappresentati, oltre al primo passo, gli altri due passi successivi. L'operazione si ripete finché, al limite, la linea spezzata non riempie completamente il quadrato.

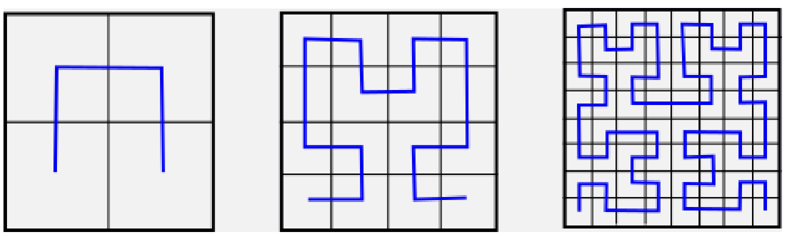


Fig. 17.9