Capitolo 18 (Integrazione a unità 71-72-73-74)

Calcolo integrale

18. 1 Quesiti a risposta chiusa.

18. 1. 1 Si consideri il seguente teorema: «Se due funzioni, derivabili in uno stesso intervallo, sono primitive di una medesima funzione allora differiscono al più per una costante». La condizione espressa dall'ipotesi, riguardo alla tesi, è:
[A] necessaria e sufficiente; [B] necessaria ma non sufficiente;
[C] sufficiente ma non necessaria; [D] non necessaria né sufficiente.

18. 1. 2 Qual è l'espressione semplificata della seguente funzione: $D_x \int_0^{2x} \cos t\, dt$?
[A] $2 \sin 2x$. [B] $\sin 2x$. [C] $2 \cos 2x$. [D] $\cos 2x$.

18. 1. 3 Quanto vale la media integrale della funzione $f(x)=e^x$ nell'intervallo $[0,1]$?
[A] e. [B] e+1. [C] e−1. [D] 1−e.

18. 1. 4 Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale. Quanto vale il seguente limite?

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\sin x}$$

[A] 0. [B] $-\infty$. [C] $+\infty$. [D] f(0).

18. 1. 5 La funzione f(x) è continua su tutto l'asse reale. È noto il valore dell'integrale $\int_0^2 f(x)\, dx$. Per il calcolo di quale dei seguenti integrali i dati sono sufficienti?
[A] $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$. [B] $\displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$. [C] $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\, dx$. [D] $\displaystyle\int_0^2 f(2x)\, dx$.

18. 1. 6 La funzione reale di variabile reale f(x) è una funzione dispari, continua su tutto l'asse reale. Posto $I = \int_{-2}^{2}\big(3 - f(x)\big)dx$, si ha che:
[A] $I = 6$; [B] $I = 12$;
[C] $I = 18$; [D] i dati sono insufficienti per il calcolo di I.

18. 1. 7 La funzione reale di variabile reale f(x) è una funzione pari, continua su tutto l'asse reale. Indicato con I il valore dell'integrale $\int_{-2}^{2}(f(x) + 1)dx$, si ha che:
[A] $I = 2$; [B] $I = 4$;
[C] $I = 6$; [D] i dati sono insufficienti per il calcolo di I.

18. 1. 8 Qual è la più generale primitiva della funzione 1/x?
[A] $\ln x + k$. [B] $-\dfrac{2}{x^2}+k$. [C] $\dfrac{1}{x^2}+k$. [D] Una funzione diversa.

18. 1. 9 Qual è la più generale primitiva della funzione $\sqrt{x}$?
[A] $\dfrac{2}{3\sqrt{x}}+k$. [B] $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+k$. [C] $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+k$. [D] Una funzione diversa .

18.1.10 Quanto vale il seguente integrale?

$$\int_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

[A] $\frac{\pi}{6}$. [B] $\frac{\pi}{3}$. [C] $\frac{\pi}{2}$. [D] π.

18.1.11 Qual è una primitiva della seguente funzione?

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

[A] $\ln(x^2+1)$. [B] $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. [C] $2\ln(x^2+1)$. [D] Una funzione diversa.

18.1.12 Si consideri la regione finita di piano, delimitata dagli assi di riferimento e dal grafico della funzione $f(x)=-x^3+2x^2$. Quanto vale il volume del solido generato da tale regione quando ruota di un giro completo intorno all'asse x?

[A] $\frac{4}{3}\pi$. [B] $\frac{128}{105}\pi$. [C] $\frac{1536}{35}\pi$. [D] $\frac{9088}{105}\pi$.

18.1.13 Qual è il valore del seguente integrale?

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{1+x^2}.$$

[A] $\frac{\pi}{4}$. [B] $\operatorname{atan} 2$. [C] $\operatorname{atan}\frac{1}{3}$. [D] Un valore diverso.

18.2 Quesiti a risposta aperta.

18.2.1 In un trapezio rettangolo la base maggiore AB, la base minore CD ed il lato obliquo BC misurano nell'ordine: 8 m, 5 m, 5 m. La parabola, avente l'asse perpendicolare alle basi del trapezio, il vertice in C e passante per B, divide il trapezio in due regioni: quali sono le loro aree?

18.2.2 Sia f(x) una funzione integrabile su un intervallo [a,b]. È vero che vale la seguente catena di uguaglianze?

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz.$$

18.2.3 Sia f(x) una funzione integrabile su un intervallo [a,b]. Cosa s'intende per funzione integrale di f(x) su [a,b]? Quale relazione lega f(x) alla funzione integrale?

18.2.4 Un idoneo software matematico mostra che risulta:

$$D_x \int_1^{3x} \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}} = \frac{3}{\sqrt{2+9x^2}}.$$

Fornire un'esauriente spiegazione teorica di questa uguaglianza.

18.2.5 Si consideri il seguente integrale:

$$I = \int_{0,5}^{1} e^{-x^2} dx.$$

Un idoneo software matematico mostra che una sua approsimazione è $I \approx 0,286$. Senza utilizzare alcun software, ma al più una calcolatrice scientifica, si può tuttavia dimostrare che risulta $0,183 < I < 0,389$. Come si può fare?

18.2.6 La funzione f(x) è continua e positiva nell'intervallo [1,2]. Indicato con I il valore dell'integrale di f(x) in tale intervallo, si considerino le seguenti alternative:

[A] $I=0$; [B] $I=2$; [C] $I=\ln 2$; [D] $I=\ln\frac{3}{5}$.

Ve ne sono di false e di possibili. Individuare le une e le altre, fornendo una esauriente spiegazione delle risposte.

18.2.7 Qual è la condizione d'integrabilità di Mengoli-Cauchy? Si tratta di una condizione solo sufficiente, solo necessaria o necessaria e sufficiente?

18.2.8 Senza l'uso di strumenti di calcolo automatico, calcolare:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\, dx}{1+x^2}.$$

18.2.9 Qual è l'enunciato del teorema fondamentale del calcolo integrale?

18.2.10 Fornirne un'esauriente spiegazione teorica del fatto che si ha:

$$\int_{1/5}^{3/2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

18.2.11 Calcolare $\int \sin^3 x\, dx$ senza utilizzare strumenti di calcolo automatico.

18.2.12 L'integrale indefinito della funzione xe^{2x} è la funzione $\frac{1}{4}e^{2x}-(2x+1)+k$, dove k è una costante. Descrivere un procedimento, diverso da una banale verifica, idoneo a giustificare la precedente affermazione.

18.2.13 Dimostrare, utilizzando il calcolo integrale, la formula del volume di un cono circolare retto di altezza h e raggio di base r.

18.2.14 Un piano che tagli una sfera la divide in due parti, ciascuna delle quali si chiama ***segmento sferico ad una base***. Il cerchio sezione del piano con la sfera è detto ***base*** del segmento sferico, ciascuna delle due parti in cui il diametro perpendicolare al piano sezione è diviso da tale piano si chiama ***altezza*** del segmento sferico corrispondente. Dimostrare, utilizzando il calcolo integrale, che il volume V di un segmento sferico, la cui base ha raggio r e la cui altezza è h, è dato dalla seguente formula: $V=\frac{1}{6}\pi h\left(h^2+3r^2\right)$.

18.2.15 La nota formula dei trapezi non è l'unica formula idonea ad ottenere un'approssimazione di un integrale definito. Un'altra formula è la cosiddetta **formula di Simspon** (1):

---

[1] **Simpson**, Thomas, matematico inglese, 1710-1761. In realtà quella che noi proponiamo è una prima formula di Simpson, la più semplice, ottenuta suddividendo l'intervallo di integrazione in 2 parti. Ci sono altre formule, ottenute con altre suddivisioni

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx} \approx \frac{\mathbf{b-a}}{\mathbf{6}}\left(\mathbf{f(a)}+\mathbf{4\,f}\left(\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{2}}\right)+\mathbf{f(b)}\right).$$

Applicarla al calcolo dei seguenti integrali, trovando per ognuno di essi l'errore relativo di approssimazione:

$$\int_0^3 \left(4x-x^2\right)dx\ ,\quad \int_0^2 \frac{x\,dx}{1+x^2}\ ,\quad \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}\ .$$

18. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 18. 1. 1. La condizione è necessaria e sufficiente, per cui [A] è l'alternativa corretta.
Che la condizione sia sufficiente l'abbiamo dimostrato nel testo base, unità 72, n. 72.3.2, ed a quella dimostrazione rimandiamo il lettore. Qui vogliamo dimostrare che la condizione è necessaria, vale a dire che se le due funzioni, derivabili in un medesimo intervallo, differiscono per una costante allora sono primitive di una stessa funzione. Siano allora p(x) e q(x) due funzioni derivabili in un medesimo intervallo I, tali che $p(x)-q(x)=k$, dove k è una costante. Derivando rispetto ad x entrambi i membri di questa uguaglianza, si ottiene: $p'(x)-q'(x)=0$ e questo implica che esiste una funzione f(x), definita in I, tale che $f(x)=p'(x)=q'(x)$, il che è come dire che p(x) e q(x) sono entrambe primitive di f(x).

Quesito 18. 1. 2. Si può procedere in due modi.
Il primo procedimento consiste nel calcolare dapprima il valore dell'integrale, che è $\sin 2x$, e successivamente la derivata di questa funzione, che è $2\cos 2x$.
Il secondo procedimento fa ricorso ad una nota formula, per cui si ha:

$$D_x \int_0^{2x} \cos t\,dt = \cos 2x \cdot D_x(2x) + \cos 0 \cdot D_x 0 = 2\cos 2x\,.$$

In ogni caso si trova che l'alternativa corretta è [C].

Quesito 18. 1. 3. L'alternativa corretta è [C]. La media integrale richiesta è infatti:

$$\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e-1.$$

Quesito 18. 1. 4. La funzione:

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{\sin x}$$

quando $x\to 0$ è una forma indeterminata di tipo 0/0. Poiché ne ricorrono le condizioni si può applicare il teorema di De L'Hôpital. Risulta perciò:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{D_x \int_0^x f(t)dt}{D_x \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\cos x} = f(0).$$

[D] è l'alternativa corretta.

Quesito 18. 1. 5. L'alternativa corretta è [C]. Posto infatti $2x=t$, da cui segue $x=t/2$ e $dx=dt/2$ ed inoltre $t(0)=0$ e $t(1)=2$, si ha:

$$I=\int_0^1 f(2x)dx=\int_0^2 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt\ .$$

Per cui l'integrale I è la metà del valore dell'integrale dato.
Il lettore provi a spiegare perché gli altri integrali non si possono calcolare sulla sola base dei soli dati assegnati.

Quesito 18.1.6. Risulta: $I=\int_{-2}^{2}3\,dx+\int_{-2}^{2}f(x)dx$. Siccome la funzione è dispari e perciò il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine del sistema di riferimento, si ha: $\int_0^2 f(x)dx=-\int_{-2}^{0}f(x)dx$, per cui, essendo: $\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$, il secondo integrale vale 0 e perciò, in definitiva: $I=3\,[x]_{-2}^{2}=12$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 18.1.7. Risulta: $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{-2}^{2}dx$. Ora però, mentre il calcolo del secondo integrale è semplice e immediato (il suo valore è 4) quello del primo è impossibile finché non è esplicitata la funzione f(x). Tutto quello che possiamo dire è che esso è il doppio dell'integrale: $\int_0^2 f(x)dx$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 18.1.8. L'alternativa corretta è [D]. La più generale primitiva della funzione 1/x è infatti $\ln x+k$, dove k è una costante. Questo è stato spiegato in maniera completa ed esauriente nel testo base, unità 72, n. 72.7.1, ed a quel testo rimandiamo.

Quesito 18.1.9. L'alternativa corretta è [B]. Si ha infatti:

$$\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+k=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+k\,.$$

Quesito 18.1.10. [C] è l'alternativa corretta. Si ha infatti:

$$\int_{-1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=[\operatorname{asin}x]_{-1/2}^{\sqrt{3}/2}=\operatorname{asin}\frac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{asin}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\,.$$

Quesito 18.1.11. L'alternativa corretta è [A]. Il numeratore è infatti la derivata del denominatore, che a sua volta è una funzione positiva per ogni x reale. E perciò non è necessario ricorrere al valore assoluto di x^2+1, essendo in questo caso per l'appunto: $\ln|x^2+1|=\ln(x^2+1)$.

Quesito 18.1.12. La funzione f(x) può essere rappresentata facilmente in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) (Fig. 18.1).
Il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dagli assi coordinati e dal grafico della funzione è allora il seguente:

$$V=\pi\int_0^2\left(-x^3+2x^2\right)^2dx=\pi\left[\frac{x^7}{7}-4\cdot\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{128}{105}\pi.$$

[B] è l'alternativa corretta.

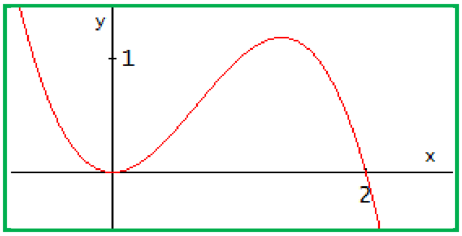

Fig. 18.1

Quesito 18. 1. 13. Si ha:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{atan} x]_1^2 = \operatorname{atan} 2 - \operatorname{atan} 1 .$$

Posto ora atan 2 =a e atan 1 =b, segue tan a =2 e tan b =1 e pertanto:

$$\tan(a\text{-}b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b} = \frac{2-1}{1+2\cdot 1} = \frac{1}{3} .$$

Di conseguenza:

$$a-b = \operatorname{atan} 2 - \operatorname{atan} 1 = \operatorname{atan} \frac{1}{3} .$$

L'alternativa corretta è [C].

18. 4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 18. 2. 1. Con riferimento alla figura sottostante (Fig. 18.2), dove E è il punto simmetrico di B rispetto a CH, si può notare che il triangolo mistilineo, delimitato dai segmenti EH e CH e dall'arco di parabola CE, è metà del segmento parabolico di base EB e altezza CH.

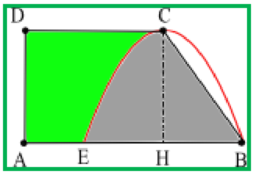

Fig. 18.2

D'altro canto, si trova facilmente che CH=4 m ed EB=6 m. Per cui l'area S del triangolo mistilineo EHC è: $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ \overline{EB}\cdot\overline{CH}=8\ m^2$. Le due regioni in cui la parabola divide il trapezio hanno pertanto le aree seguenti:

S' = S + area triangolo CHB = 14 m^2; S" = area rettangolo AHCD – S = 12 m^2.

Quesito 18. 2. 2. È vero. La variabile di integrazione, infatti, è una variabile cosiddetta *muta* o *apparente*, giacché l'integrale, una volta calcolato, non dipende più da essa, essendo un numero ben determinato. Per questo tale variabile può essere indicata in qualunque modo: x, y, z, t, u, eccetera.

Quesito 18. 2. 3. Si dice *funzione integrale* di f(x) su [a,b] la funzione F(x) tale che:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt , \text{ con } a \le x \le b.$$

Per ogni $x\in[a,b]$ risulta $F'(x)=f(x)$. Quest'ultima relazione sintetizza il cosiddetto "teorema d'inversione", geniale scoperta dei fondatori del Calcolo, Newton e Leibniz.

Quesito 18.2.4. Si potrebbe pensare di calcolare dapprima il valore dell'integrale, ma la cosa, pur possibile, non è affatto elementare. Per questa ragione è preferibile ricorrere direttamente ad una nota formula del calcolo integrale, utilizzando la quale si ha:

$$D_x\int_1^{3x}\frac{dt}{\sqrt{2+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2+(3x)^2}}\cdot D_x(3x)-\frac{1}{\sqrt{2+1^2}}\cdot D_x 1=\frac{3}{\sqrt{2+9x^2}}\ .$$

Quesito 18.2.5. Se una funzione è integrabile in un intervallo [a,b], nel quale assume valore minimo m e valore massimo M, risulta:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

Nel caso specifico, constatato che $b-a=1-0{,}5=0{,}5$ e indicato con I l'integrale, una volta stabilito che la funzione e^{-x^2} assume, nell'intervallo [0,5;1] il minimo $m=1/e\approx0{,}3678$ (per $x=1$) ed il massimo $M\approx0{,}7788$ (per $x=0{,}5$), risulta: $0{,}5\times0{,}3678\le I\le0{,}5\times0{,}7788$, vale a dire: $0{,}183<I<0{,}389$.
Si può aggiungere che, potendosi confondere la funzione con un segmento di retta nell'intervallo [0,5;1], un valore approssimato di I può essere assunto uguale alla media aritmetica dei due valori trovati sopra, vale a dire: $I\approx\frac{0{,}183+0{,}389}{2}=0{,}286$.

Quesito 18.2.6. Dal momento che la funzione f(x) è continua e positiva nell'intervallo [1,2] l'integrale di f(x) in tale intervallo è certamente positivo. Se ne desume che il suo valore non può essere 0 né $\ln\frac{3}{5}$ che è minore di 0. Può essere invece sia 2 sia ln 2.

Quesito 18.2.7. La condizione, che è solo sufficiente, è la seguente: « **Ogni funzione reale di variabile reale, continua in un intervallo chiuso e limitato, è integrabile su tale intervallo** ». Che la condizione non sia necessaria è provato dall'esistenza di almeno una funzione, integrabile in un dato intervallo, per la quale vien meno qualcuna delle ipotesi espresse dalla precedente proprietà e precisamente qualcuna delle seguenti ipotesi: a) la funzione è continua; b) l'intervallo è chiuso; c) l'intervallo è limitato.
Come controesempio del caso a) può bastare la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } 0\le x\le1\\ 2 & \text{se } 1<x\le2\end{cases}$$

È definita nell'intervallo [0,1] ma non è continua in esso e tuttavia $\int_0^2 f(x)dx=3$.
Come controesempio del caso b) si può pensare alla funzione:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\ .$$

È definita e continua nell'intervallo semiaperto]1,2]. Si può far vedere che, prendendo $t>1$ (ma $t<2$), si ha:

$$\lim_{t\to1^+}\int_t^2\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=2\ .$$

Il che basta per farci concludere che l'integrale della funzione f(x), calcolato sull'intervallo]1,2]

è uguale a 2.
Come controesempio del caso c) può andar bene la funzione:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\ \text{, con } x\geq 1.$$

Si può far vedere che si ha:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^2}=1\ .$$

Il che è sufficiente per farci concludere che l'integrale della funzione $1/x^2$, calcolato sull'intervallo illimitato $[1,+\infty[$ è uguale ad 1.

Quesito 18.2.8. Si constata subito che la funzione integranda è simmetrica rispetto all'origine O del sistema cartesiano di riferimento ed inoltre che anche gli estremi d'integrazione sono simmetrici rispetto a quel punto. La conclusione è immediata:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^3\ dx}{1+x^2}=0\ .$$

Senza alcuna fatica riguardo alla ricerca di una primitiva della funzione integranda.

Quesito 18.2.9. Il **teorema fondamentale del calcolo integrale** ha il seguente enunciato:
« **Se f(x) è una funzione reale di variabile reale, continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b], si ha:** $\int_a^b \mathbf{f(x)dx} = [\mathbf{F(x)}]_a^b$ ».
F(x) è una primitiva di f(x) ed $[F(x)]_a^b$ è l'incremento che subisce F(x) nel passaggio dal valore che assume in a al valore che assume in b, vale a dire: $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.
Il teorema è, in realtà, un corollario del teorema d'inversione, scoperto da Newton e Leibniz. Ed è per questo che alcuni lo chiamano anche **teorema di Newton– Leibniz**.

Quesito 18.2.10. Constatiamo anzitutto che si ha:

$$\int_{1/5}^{3/2}\frac{dx}{1+x^2}=[\text{atan}\, x]_{1/5}^{3/2}=\text{atan}\,\frac{3}{2}-\text{atan}\,\frac{1}{5}\ .$$

Poniamo adesso $\text{atan}\frac{1}{5}=a$ per cui $\tan a=\frac{1}{5}$ e $\text{atan}\frac{3}{2}=b$ per cui $\tan b=\frac{3}{2}$. Ne discende che:

$$\tan(b-a)=\frac{\tan b-\tan a}{1+\tan b\tan a}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{5}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}}=1.$$

Pertanto:

$$b-a=\frac{\pi}{4}\ \text{ ed infine: } \text{atan}\,\frac{3}{2}-\text{atan}\,\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}\ .$$

Quesito 18.2.11. Si può scrivere $\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=\left(1-\cos^2 x\right)\sin x$. Pertanto:

$$\int \sin^3 x\,dx=\int \sin x\,dx-\int \cos^2 x\sin x\,dx=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+k.$$

Quesito 18.2.12. Si integra per parti, assumendo come f.f. la funzione x e come f.d. la funzione e^{2x}. Constatato in via preliminare che una primitiva di e^{2x} è la funzione $\frac{1}{2}e^{2x}$, si ha allora:

$$\int x\, e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + k = \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + k.$$

Quesito 18. 2. 13. Si può procedere in due modi. In base al primo procedimento, il volume V del cono può essere pensato come la somma di infiniti elementi infinitesimi dV, il generico dei quali si ottiene intersecando il cono stesso con uno strato di altezza infinitesima dx, delimitato da due piani paralleli alla base (Fig. 18.3). Una volta calcolato l'elemento di volume dV, il volume del cono è $V = \int_0^h dV$. Nel dettaglio, posto $\overline{VK}=x$, con $0 \le x \le h$, si trova: $\overline{KB} = \frac{r}{h} x$, per cui, considerando che l'elemento di volume dV si può assimilare a quello di un cilindro di raggio di base KB ed altezza infinitesima dx, si ha:

$$dV = \pi \left(\frac{r}{h} x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx.$$

Pertanto:

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

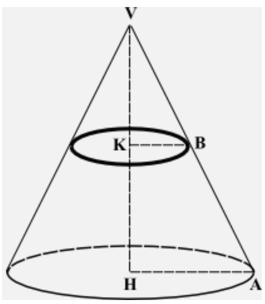

Fig. 18.3

Il secondo procedimento presuppone di considerare il cono come il solido ottenuto da una rotazione completa del triangolo VHA, rettangolo in H, intorno al cateto VH, sapendo che $\overline{VH}=h$ e $\overline{HA}=r$. S'intende che il piano del triangolo va riferito ad un conveniente sistema di assi cartesiani. Lasciamo al lettore lo sviluppo dettagliato di questo procedimento.

Quesito 18. 2. 14. Considerato un settore circolare di centro O ed arco AB, indicata con H la proiezione di B su OA, facendo ruotare il triangolo mistilineo ABH, delimitato dall'arco AB e dai segmenti BH e HA, si ottiene il segmento sferico ad una base, il cui raggio di base è HB e la cui altezza è HA. Indicati con R il raggio del cerchio da cui è ottenuto il settore circolare e constatato che $\overline{HA}=h$ e $\overline{BH}=r$, una volta riferito il piano della figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), la cui origine è proprio il punto O, mentre l'asse x è la retta OA orientata da O verso A, l'equazione del cerchio è $x^2+y^2=R^2$. Ragion per cui il volume del segmento sferico in questione, espresso mediante il raggio R del cerchio e l'altezza h del segmento sferico, è:

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} y^2 dx = \pi \int_{R-h}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{\pi h^2}{3}(3R-h).$$

Da qui, tenendo presente che $(R-h)^2 + r^2 = R^2$, da cui segue: $R = \dfrac{h^2+r^2}{2h}$, sostituendo nel precedente risultato, questo valore al posto di R , dopo alcuni calcoli si trova il volume del segmento sferico, espresso questa volta mediante il raggio r della sua base e l'altezza h:

$$V=\frac{\pi h}{6}\left(h^2+3r^2\right).$$

Quesito 18. 2. 15. Incominciamo col 1° integrale. Il suo valore esatto è:

$$E=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9\ .$$

Un suo valore approssimato, calcolato con la formula di Simpson, è:

$$A=\frac{3}{6}\left(4\cdot\frac{15}{4}+3\right)=9.$$

Quindi A=E e nessun errore di approssimazione.
In realtà questo accade ogni volta che f(x) è un polinomio di grado non maggiore di 3.
Occupiamoci del 2° integrale. Il suo valore esatto è:

$$E=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^2=\frac{1}{2}\ln 5\approx 0{,}804.$$

Un suo valore approssimato, calcolato con la formula di Simpson, è:

$$A=\frac{2}{6}\left(4\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)\approx 0{,}800.$$

Assumendo A al posto di E si commette l'errore relativo:

$$\varepsilon_r=\frac{|E-A|}{E}\approx 0{,}005=0{,}5\%\ .$$

Occupiamoci infine del 3° integrale. Si trova:

$$E=\operatorname{atan} 2\approx 1{,}107;\ \ A=\frac{2}{6}\left(1+4\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\approx 1{,}066;\ \ \varepsilon_r=\frac{|E-A|}{E}\approx 0{,}037=3{,}7\%\ .$$

18. 5. Gottfried Wilhelm Leibniz: vita ed opere.

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, figlio di un professore di filosofia morale all'Università di Lipsia, nacque in quella città nel 1646 e morì ad Hannover nel 1716. Il padre morì quando aveva 6 anni. All'età di 15 anni entrò all'Università di Lipsia e due anni dopo conseguì la laurea di 1° livello in filosofia. Quando aveva 20 anni gli fu rifiutato dalla stessa Università di Lipsia il titolo di dottore in legge, ufficialmente perché ritenuto troppo giovane, ma secondo alcune malelingue perché invidiato dai suoi stessi professori in quanto pare che ne sapesse più di loro. Decise di trasferirsi

all'Università di Altdorf, dove effettivamente gli fu conferito il dottorato in legge nel 1667.
Studiando la nuova filosofia di Keplero, Galileo e Cartesio, si rese conto che per poterla comprendere appieno aveva bisogno di conoscere la matematica. Pensò bene di studiarla, trascorrendo l'estate del 1663 all'Università di Jena, dove un modesto professore di matematica, che era pure filosofo e che tuttavia godeva di buona reputazione, riuscì a fargli comprendere l'importanza della dimostrazione matematica anche in questioni filosofiche. In realtà, però, la vera educazione matematica di Leibniz subì una svolta solo nel 1672, all'età di 26 anni, quando ebbe modo di confrontarsi con il fisico e matematico olandese Christian Huygens (1629-1695), che incontrò a Parigi.
Leibniz è stato un ingegno multiforme. Accennare soltanto alle innumerevoli idee che partorì in vari campi ed alle molte cose che fece sarebbe impresa ardua da realizzare nelle poche righe di questa breve nota. Ragion per cui ci occupiamo, tra l'altro per sommi capi, soltanto del suo contributo alla matematica.
Nel 1666, all'età di appena 20 anni, pubblicò un suo lavoro sul calcolo combinatorio dal titolo *De Arte Combinatoria*.
Nel 1676 presentò alla Royal Society di Londra la prima calcolatrice meccanica in grado di eseguire moltiplicazioni e divisioni: costituirà, nell'Ottocento, la base di tutte le calcolatrici meccaniche a quattro operazioni.
Sembra che Leibniz abbia maturato le sue idee sul calcolo infinitesimale tra il 1673 e il 1676 in seguito alla lettura dei lavori di Pascal. Egli comunque pubblicò i suoi risultati sul calcolo nel 1684 in un articolo dal titolo lunghissimo – *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quas nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (2) – ma di sole sei pagine, sulla rivista *Acta Eruditorum*, un periodico matematico fondato due anni prima (1682) dallo stesso Leibniz e dallo scienziato Otto Mencke (1644-1707) che ne fu il primo direttore. Anche i contributi sul calcolo integrale furono pubblicati da Leibniz sulla stessa rivista (1686) in un articolo dal titolo *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*. (3)
Leibniz inventò il sistema binario di numerazione. L'opera che ne tratta fu pubblicata in francese nel 1705 col titolo *Explication de l'Arithmétique Binaire* (*Spiegazione dell'aritmetica binaria*).
A differenza di Newton, per il quale la matematica era uno strumento che aveva un senso solo se applicato alla fisica, per Leibniz essa aveva dignità di disciplina con una propria autonoma validità.
Riguardo alla disputa sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale, si può dire che incominciò a causa di un matematico svizzero, di nome Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753), il quale, sembra per odio personale verso Leibniz, nel 1699 pubblicò uno scritto in cui lo accusò di plagio, affermando che il merito della scoperta doveva essere attribuito solo ed esclusivamente a Newton. Ne nacque un lunga e tediosa polemica, che ad un certo momento vide coinvolti anche i due scienziati, e che richiese addirittura un processo per dirimere la questione, resosi necessario

---

[2] *Nuovo metodo per i massimi e i minimi come pure per le tangenti, che non si arresta di fronte a quantità frazionarie e irrazionali, e un singolare genere di calcolo per quei problemi*.
[3] *Su una geometria occulta e sull'analisi degli indivisibili e degli infiniti*.

giacché entrambi gli scienziati erano soci della Royal Society di Londra, che non poteva ammettere dubbi sulla questione. I resoconti del processo possono essere letti in una traduzione italiana. (4) Qui ci limitiamo a segnalare che i "tifosi" inglesi di Newton continuarono la disputa per molto tempo ancora, sclerotizzandosi in quest'azione, mentre i seguaci di Leibniz lasciarono perdere e si dedicarono invece alla divulgazione delle idee leibniziane.
Oggigiorno quasi tutti gli storici concordano nel ritenere che i due studiosi giunsero alle loro scoperte indipendentemente l'uno dall'altro: Newton ci arrivò per primo, ma le prime pubblicazioni furono di Leibniz. Quello che è certo è che, comunque siano andate le cose, la moderna Analisi matematica discende direttamente dalla concezione di Leibniz. Ad affermarsi fu il suo metodo e non quello di Newton, che in fondo erano assai diversi. Sicuramente tra le ragioni di ciò c'è anche il fatto non trascurabile che la notazione di Leibniz era molto più efficace e maneggevole di quella di Newton.

[4] *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi* (a cura di Gianfranco Cantelli), Torino, Boringhieri, Ristampa 1969.