Capitolo 19 (Integrazione a unità 79-80-81)

Probabilità e statistica

19.1 Quesiti a risposta chiusa.

19.1.1 Gianni partecipa al gioco a premi "Chi vuol essere milionario" ed è giunto a quota 30.000 euro. La prossima domanda è, come le altre d'altronde, un quesito con 4 alternative ed una sola risposta corretta: se indovina la risposta sale a 70.000 euro, se la sbaglia scende a 20.000 euro. Gianni non ha la minima idea di quale sia l'alternativa corretta, ma decide di dare ugualmente la risposta scegliendo a caso. Qual è la speranza matematica del guadagno di Gianni, espressa in euro?

[A] –5000. [B] –2500. [C] 2500. [D] 5000.

19.1.2 Una variabile aleatoria può assumere gli n valori 2, 4, 6, .., 2n, tutti con probabilità 1/n. Quant'è la sua speranza matematica?

[A] n–1. [B] n. [C] n/2. [D] n+1.

19.1.3 Due facce di ciascuno di due dadi sono contrassegnate con il numero "1", due con il numero "2" e due con il numero "3". Tutte le facce hanno la stessa probabilità di uscire. Si consideri la variabile aleatoria X che, ad ogni lancio dei due dadi, associa:

- la somma dei due numeri usciti se sono uguali e dispari;
- il prodotto dei due numeri usciti se sono entrambi pari;
- il valore assoluto della differenza dei due numeri usciti se sono disuguali.

Quanto vale la media di X?

[A] $\frac{5}{2}$. [B] $\frac{20}{9}$. [C] $\frac{4}{3}$. [D] $\frac{19}{18}$.

19.1.4 I due dadi descritti nel quesito precedente sono lanciati per 10 volte. Quant'è la probabilità che esattamente 4 volte la somma dei due numeri usciti sia maggiore di 3?

[A] 0,0569 %. [B] 0,569 %. [C] 5,69 %. [D] 56,9 %.

19.1.5 Ci riferiamo di nuovo ai due dadi del quesito 19.1.3, che si suppone vengano lanciati per 100 volte. Quante volte escono, in media, due numeri la cui somma vale 4?

[A] 20. [B] 25. [C] circa 28,7. [D] circa 33,3.

19.1.6 Ci riferiamo ancora una volta ai due dadi del quesito 19.1.3. Se vengono lanciati 25 volte, quant'è, con approssimazione, la probabilità che la somma dei due numeri usciti sia maggiore di 4 per almeno 10 volte?

[A] 30,44 %. [B] 17,79 %. [C] 99,83 %. [D] 88,52 %.

19.1.7 Si lanciano per 10 volte due dadi con le facce numerate da "1" a "6", aventi la stessa probabilità di uscire. Indicata con p' la probabilità che al più per 8 volte escano due numeri diversi e con p" quella che escano due numeri diversi almeno per 8 volte, si ha che:

[A] $p' > p''$; [B] $p' = p''$;
[C] $p' < p''$; [D] non è possibile il confronto.

19. 1. 8 La probabilità che una certa coppia di genitori abbia un figlio biondo è 25%. Quella coppia ha 4 figli. Il caso più probabile è che di figli biondi ne abbia esattamente:
[A] 0 ; [B] 1 ; [C] 2 ; [D] 3 .

19. 1. 9 Paolo deve rispondere ad un questionario costituito da 50 quesiti a scelta multipla, ciascuno con 4 alternative, di cui una sola corretta. Non avendo la più pallida idea delle risposte da dare, decide di rispondere a tutti i quesiti in modo del tutto casuale. Quant'è, con approssimazione, la probabilità che risponda correttamente a non più del 25% dei quesiti?
[A] 51,1%. [B] 63,7%. [C] 12,9%. [D] 99,9%.

19. 1. 10 Una ditta produce prezzi di ricambio con un procedimento che genera il 2,4% di pezzi difettosi. Qual è la probabilità che su una partita di 2000 pezzi ne siano difettosi non più del 2,4%?
[A] 99,9% . [B] 53,8% . [C] 60,3% . [D] 48,0% .

19. 1. 11 Le statistiche dicono che circa 1/3 degli studenti che s'iscrivono alla prima classe di una scuola secondaria di 2° grado non conseguono il diploma. Quest'anno gli iscritti alle prime classe delle scuole secondarie di 2° grado di una famosa città sono stati 732. Quant'è, con approssimazione, la probabilità che almeno il 70% di essi consegua il diploma?
[A] 0,45%. [B] 2,66%. [C] 3,19%. [D] 97,34%.

19. 1. 12 Ci riferiamo allo stesso fenomeno descritto nel quesito precedente. Se la probabilità che almeno il 70% degli studenti consegua il diploma è calcolata assumendo il valore ottenuto considerando la distribuzione normale al posto di quella binomiale, quale errore relativo si commette?
[A] 1,0%. [B] 3,0%. [C] 5,0%. [D] 7,0%.

19. 1. 13 Un certo partito politico si propone valutare quanti, fra i 153.247 elettori di una data città, lo voteranno alle prossime elezioni, sapendo che nelle elezioni precedenti i votanti a favore erano stati il 24,6%. Quale deve essere la dimensione minima del campione da scegliere, se i risultati dell'indagine possono essere affetti da un errore massimo del 5% e se su di essi si può fare affidamento al livello di confidenza del 90%?
[A] 98. [B] 153. [C] 202. [D] 284.

19. 1. 14 Il cerchio C' è circoscritto ad un triangolo equilatero, mentre il cerchio C" è inscritto nel triangolo. Si prende a caso un punto interno al cerchio C'. Indicata con p' la probabilità che esso sia interno anche al cerchio C" e con p" quella che il punto sia esterno a C", quanto vale il rapporto p'/p" ?
[A] $\frac{1}{3}$. [B] $\frac{2}{5}$. [C] $\frac{3}{8}$. [D] Non si può calcolare.

19. 2 Quesiti a risposta aperta.

19. 2. 1 Si lanciano due dadi con le facce numerate da "1" a "6", aventi la stessa probabilità di uscire. Si scriva la matrice che rappresenta la distribuzione della variabile aleatoria che al massimo comune divisore dei numeri usciti associa la probabilità di ottenerlo.

19.2.2 In un'urna ci sono delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente il 45% delle palline sono bianche ed il 60% sono di vetro ma solo il 15% sono bianche e di vetro. Le palline bianche sono contrassegnate con il numero "1" se sono di vetro e con il numero "2" se sono di plastica, quelle nere sono contrassegnate con il numero "3" se sono di vetro e con il numero "4" se sono di plastica. Si consideri l'esperimento di estrarre a caso una pallina dall'urna e sia F la funzione che al numero estratto associa la probabilità di estrarlo. Dimostrare che si tratta di una variabile aleatoria e calcolarne la media.

19.2.3 Con riferimento allo stesso esperimento del quesito precedente, posto di ripetere l'estrazione per 20 volte (naturalmente la pallina estratta è rimessa nell'urna), quant'è la probabilità che il numero contrassegnato sulla pallina sia uguale ad "1" o uguale a "4" per non più di 8 volte?

19.2.4 Considerata una qualsiasi variabile aleatoria X e indicate con M(X) e σ(X) rispettivamente la sua media e la sua deviazione standard, dimostrare che si ha:

$$\sigma(X) = \sqrt{M(X^2) - [M(X)]^2}\,.$$

19.2.5 Con riferimento allo stesso esperimento descritto nel quesito 19.2.3, calcolare la deziazione standard della variabile aleatoria ivi considerata, sia ricorrendo alla definizione sia utilizzando la formula proposta nel quesito precedente.

19.2.6 Su una faccia di una moneta è contrassegnato il numero "1", sull'altra il numero "2". La moneta non è bilanciata e si è scoperto che, nei lanci della stessa, la faccia "1" esce con frequenza 40 su 100, mentre la faccia "2" esce con frequenza 60 su 100. Si considera l'esperimento di lanciare la moneta per 3 volte. Calcolare la probabilità che, ripetendo l'esperimento per n volte, la somma dei numeri usciti sia uguale a 5 esattamente per k volte.

19.2.7 Con riferimento allo stesso esperimento del quesito precedente, quanto valgono la media e la deviazione standard della variabile binomiale correlata all'esperimento nel caso in cui questo sia ripetuto 100 volte?

19.2.8 Con riferimento allo stesso esperimento del quesito 19.2.7, si consideri la probabilità che, in 100 lanci, la somma 5 esca esattamente 40 volte. Calcolarla utilizzando sia la formula della distribuzione binomiale sia la formula della distribuzione normale e determinare l'errore che si commette usando la seconda al posto della prima.

19.2.9 I punteggi ottenuti in una prova di selezione dai concorrenti sono distribuiti normalmente, con media 89,7 e deviazione standard 13,8. Fra i 154 concorrenti sono selezionati soltanto i migliori 8. Il punteggio massimo conseguibile era 120. Qual è il punteggio minimo (intero) conseguito dai concorrenti selezionati?

19.2.10 Una popolazione è formata dalle seguenti unità: 1, 2, 3, 4. Si estraggono da essa tutti i possibili campioni di dimensione 3: quali sono? Si calcolano quindi le medie di tali campioni: quali sono? Si calcoli infine la media $\mu_{\overline{X}}$ delle medie campionarie e la media aritmetica μ della popolazione: quale relazione le lega?

19.2.11 In generale, la deviazione standard $\sigma_{\overline{X}}$ della media campionaria è legata alla deviazione standard σ della popolazione da cui i campioni sono estratti, dalla seguente relazione:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

dove N ed n sono le dimensioni rispettivamente della popolazione e dei campioni estratti.
Verificare la relazione con riferimento alla popolazione ed ai campioni considerati nel precedente quesito 19.2.10.

19.2.12 La formula:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

è un caso limite di quella mostrata nel precedente quesito 19.2.11: fornirne una spiegazione. In realtà questa formula si suppone una buona approssimazione di quella quando $n < 0{,}05\,N$. Verificare questo fatto nell'ipotesi che si N=2000 ed n=99.

19.2.13 Quale significato ha l'espressione "Il livello di confidenza affinché la percentuale p di soggetti di una data popolazione che hanno una determinata caratteristica cada in un determinato intervallo di confidenza è 90%"?

19.2.14 Un'importante fabbrica produttrice di automobili intende lanciare sul mercato una nuova vettura. Sulla base delle precedenti esperienze stima che circa il 53% dei potenziali acquirenti potrebbe essere favorevole al nuovo modello. Per avere conferme la ditta pensa di condurre un'indagine, che fornisca informazioni utili, al livello di confidenza del 90% con un margine di errore al più del 10%. Qual è la dimensione minima del campione casuale su cui indagare?

19.2.15 Su un campione casuale di 247 elettori, 25 hanno manifestato la loro preferenza per un determinato partito. Stimare entro quali valori è compresa la percentuale di voti che prenderà quel partito, ad un livello di confidenza del 90%.

19.2.16 Contro un bersaglio (Fig. 19.1) sono lanciate casualmente delle freccette: due di esse finiscono all'interno del quadrato di lato 18. Calcolare la probabilità che le due freccette centrino le zone contrassegnate da punti e che la somma dei punti ottenuta sia 15.

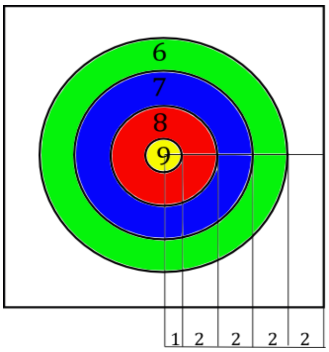


FIG. 19.1

19. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 19. 1. 1. Gianni ha probabilità 1/4 di vincere 40.000 euro e probabilità 3/4 di perdere 10.000 euro. Quindi la speranza matematica del suo guadagno, espressa in euro, è:

$$M(G)= 40.000\times\frac{1}{4}-10.000\times\frac{3}{4}=2.500.$$

[C] è l'alternativa corretta.

Quesito 19. 1. 2. Indicata con X la variabile in questione, la sua speranza matematica è:

$$M(X)=\frac{1}{n}(2+4+6+\ldots+2n)=\frac{2}{n}(1+2+3+\ldots+n)=\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n+1.$$

[D] è l'alternativa corretta.

Quesito 19. 1. 3. La distribuzione della variabile X può essere rappresentata dalla seguente matrice:

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

La sua media vale pertanto:

$$M(X)=1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{3}{9}+4\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{1}{9}=\frac{20}{9}\ .$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 19. 1. 4. La tabella sottostante descrive la situazione del lancio dei due dadi:

	1	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**
1	2	2	3	3	4	4
1	2	2	3	3	4	4
2	3	3	4	4	5	5
2	3	3	4	4	5	5
3	4	4	5	5	6	6
3	4	4	5	5	6	6

In 24 casi su 36 la somma dei due numeri usciti supera 3, per cui la probabilità che in un lancio dei due dadi la somma sia maggiore di 3 è:

$$p=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}\ .$$

La probabilità che, in 10 lanci, si verifichi lo stesso evento esattamente 4 volte è:

$$P[B=4]=\binom{10}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(1-\frac{2}{3}\right)^6 .$$

Mediante un idoneo strumento di calcolo automatico, si ottiene: $P[B=4]\approx 5{,}69\%$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 19. 1. 5. La probabilità che, in un lancio, esca la somma 4 è:

$$p=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}\ .$$

Pertanto, il numero medio di volte in cui, in 100 lanci, esce tale somma è $M=100\cdot\frac{1}{3}\approx 33{,}3$.

L'alternativa corretta è [D].

Quesito 19. 1. 6. La probabilità che, in un lancio, la somma dei due numeri usciti sia maggiore di 4 è:

$$p=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}\ .$$

La probabiltà che, in 25 lanci, quest'evento si verifichi almeno per 10 volte è:

$$P[B\geq 10]=\sum_{k=10}^{25}\binom{25}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}\right)^{25-k}.$$

Mediante un idoneo strumento di calcolo automatico si trova: P[B≥10]≈30,44%. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 19. 1. 7. La probabilità che, in un lancio, escano due numeri diversi è p=5/6. Bisogna prendere in considerazione la variabile aleatoria binomale B(n,p), dove n=10. La probabilità che essa assuma il valore k è:

$$P[B=k]=\binom{10}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^k\left(1-\frac{5}{6}\right)^{10-k}.$$

Si ha pertanto:

$$P[B\leq 8]=\sum_{k=0}^{8}\binom{10}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^k\left(1-\frac{5}{6}\right)^{10-k},\quad P[B\geq 8]=\sum_{k=8}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^k\left(1-\frac{5}{6}\right)^{10-k}.$$

Con un idoneo software matematico si trova: P[B≤8]≈51,5%, P[B≥8]≈77,5%. Vale a dire che p'<p". [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 19. 1. 8. Bisogna prendere in considerazione la variabile binomiale B(n,p), dove n=4 e p=25%=1/4. La probabilità che essa assuma il valore k è:

$$P[B=k]=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-k}.$$

Si ha pertanto, mediante un apposito software matematico:

$$P[B=0]=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^4\approx 31{,}6\%\ ,\quad P[B=1]=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^3\approx 42{,}2\%\ ,$$

$$P[B=2]=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\approx 21{,}1\%\ ,\quad P[B=3]=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^1\approx 4{,}7\%\ .$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 19. 1. 9. La probabilità che, rispondendo in maniera del tutto casuale, Paolo indovini una risposta è p=1/4. Bisogna prendere in considerazione la variabile aleatoria binomale B(n,p), dove n=50. La probabilità che essa assuma il valore k è:

$$P[B=k]=\binom{50}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{50-k}.$$

Affinché il numero delle risposte corrette non superi il 25% del totale, deve essere evidentemente k≤12. Si ha pertanto:

$$P[B\leq 12]=\sum_{k=0}^{12}\binom{50}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{50-k}\approx 51,1\%.$$

L'alternativa corretta è [A].

Quesito 19. 1. 10. La probabilità che in una partita di pezzi prodotti ce ne sia uno difettoso può assumersi uguale a p=2,4%. Bisogna allora prendere in considerazione la variabile aleatoria binomale B(n,p), dove n=2000. La probabilità che essa assuma il valore k è:

$$P[B=k]=\binom{2000}{k}(0{,}024)^k(1-0{,}024)^{2000-k}.$$

Affinché il numero dei pezzi difettosi della partita di 2000 pezzi non superi il 2,4% del totale dei pezzi, deve essere evidentemente $k\leq 2000\times 0{,}024$, vale a dire $k\leq 48$. Si ha pertanto:

$$P[B\leq 48]=\sum_{k=0}^{48}\binom{2000}{k}(0{,}024)^k(1-0{,}024)^{2000-k}\approx 53{,}8\%.$$

L'alternativa corretta è [B].

Quesito 19. 1. 11. La probabilità che uno studente consegua il diploma può assumersi uguale a p=2/3. Bisogna allora prendere in considerazione la variabile aleatoria binomale B(n,p), dove n=732. La probabilità che essa assuma il valore k è:

$$P[B=k]=\binom{732}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(1-\frac{2}{3}\right)^{732-k}.$$

Considerato che il 70% di 732 è 512,4 la probabilità cercata è:

$$P[B\geq 513]=\sum_{k=513}^{732}\binom{732}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(1-\frac{2}{3}\right)^{732-k}\approx 2{,}66\%.$$

L'alternativa corretta è [A].

Quesito 19. 1. 12. Il valore della probabilità calcolato ricorrendo alla distribuzione binomiale è, come trovato sopra: $P[B\geq 513]\approx 2{,}6\%$.
Calcoliamo un'approssimazione della stessa probabilità $P[B\geq 513]$ ricorrendo alla distribuzione normale standardizzata. Si ha: $P[B\geq 513]=1-P[B\leq 512]$. Bisogna allora confrontare il valore 512 con la media μ e siccome $\mu=np=732\cdot\frac{2}{3}=488$ allora $\mu<512$, per cui risulta:

$$P[B\leq 512]\approx 0{,}5+P\left[0\leq N\leq\frac{512+0{,}5-\mu}{\sigma}\right]=0{,}5+P[0\leq N\leq 1{,}92].$$

essendo N la variabile normale standardizzata in gioco e

$$\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{732\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}\approx 12{,}75.$$

Pertanto: $P[B\geq 513]\approx 0{,}5-P[0\leq N\leq 1{,}92]$. A conti fatti, utilizzando ad esempio la tabella della distribuzione normale standardizzata, si ha:

$$P[0\leq N\leq 1{,}92]\approx 0{,}4725,\ \text{per cui}\ P[B\geq 513]\approx 0{,}0275.$$

L'errore relativo che si commette assumendo questo valore come approssimazione di $P[B\geq 513]$ al posto di quello calcolato mediante la distribuzione normale è:

$$\varepsilon_r=\frac{|0{,}0266-0{,}0275|}{0{,}0266}\approx 3{,}0\%\ .$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 19.1.13. L'indagine riguarda l'esistenza o meno di un determinato carattere: la dichiarazione di voto per il partito. Indicati con ε l'errore massimo ammesso nell'indagine e con $\sigma_{\overline{p}}$ la deviazione standard della media campionaria, risulta: $k\sigma_{\overline{p}}=\varepsilon$ e perciò $\sigma_{\overline{p}}=\frac{\varepsilon}{k}$. Poiché $\varepsilon=5\%=0{,}05$ e, al livello di confidenza del 90%, $k=1{,}65$ si ha: $\sigma_{\overline{p}}=\frac{0{,}05}{1{,}65}$. Nel caso in esame, nel quale la dimensione della popolazione è alta, possiamo assumere che sia: $\sigma_{\overline{p}}=\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$, dove f è la percentuale della popolazione che presenta il carattere oggetto dell'indagine ($f=24{,}6\%=0{,}246$) ed n è la dimensione incognita del campione da scegliere. Dalla formula precedente, risolvendo rispetto ad n, si trova:

$$n=\frac{f(1-f)}{\sigma_{\overline{p}}^2}=\frac{0{,}246(1-0{,}246)}{\left(\frac{0{,}05}{1{,}65}\right)^2}\approx 201{,}9\ .$$

La dimensione minima del campione è pertanto n=202. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 19.1.14. Il raggio R del cerchio circoscritto al triangolo ed il raggio r di quello inscritto sono tali che R=2r. Per cui: $A(C')=\pi R^2=4\pi r^2$, $A(C'')=\pi r^2$. Di conseguenza:

$$\frac{p'}{p''}=\frac{\frac{A(C'')}{A(C')}}{1-\frac{A(C'')}{A(C')}}=\frac{A(C'')}{A(C')-A(C'')}=\frac{\pi r^2}{4\pi r^2-\pi r^2}=\frac{1}{3}\ .$$

[A] è l'alternativa corretta.

19.4. Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 19.2.1. La funzione X che ad ogni lancio associa il MCD dei due numeri usciti può assumere i seguenti valori: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Essi però non hanno la stessa probabilità di essere assunti da X. Tenendo infatti presente la tabella sottostante:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1
6	1	2	3	2	1	6

le probabilità con cui i valori suddetti sono assunti dalla funzione X risultano essere rispettivamente:

$$\frac{23}{36},\ \frac{7}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{36}.$$

E, come si può facilmente controllare, la loro somma vale 1. Per cui X è una variabile aleatoria, la cui distribuzione può essere rappresentata dalla matrice seguente:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{23}{36} & \frac{7}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36}\end{bmatrix}$$

Quesito 19.2.2. Per prima cosa si determina la composizione dell'urna che è la seguente:
- il 15% delle palline sono bianche di vetro; - il 30% sono bianche di plastica;
- il 45% sono nere di vetro; - il 10% sono nere di plastica.

Le probabilità di estrarre i numeri 1, 2, 3, 4 sono pertanto nell'ordine: 15%, 30%, 45%, 10%. Siccome la loro somma è 1, la funzione considerata è effettivamente una variabile aleatoria. La sua media è: $M=1\times 0{,}15+2\times 0{,}30+3\times 0{,}45+4\times 0{,}10=2{,}5$.

Quesito 19.2.3. La probabilità che il numero che contrassegna la pallina estratta sia uguale ad "1" o a "4" è evidentemente: $p=0{,}15+0{,}10=0{,}25$. Ne consegue che la probabilità che, in 20 lanci, questo evento si verifichi non più di 8 volte è:

$$P[B\leq 8]=\sum_{k=0}^{8}\binom{20}{k}0{,}25^{k}\,0{,}75^{20-k}\approx 95{,}9\%.$$

Quesito 19.2.4. Com'è noto, la varianza Var(X) di una variabile aleatoria X è la media della variabile aleatoria Y^2, uguale ad $[X-M(X)]^2$, detta "quadrato dello scarto". Pertanto, posto per comodità di calcolo $M(X)=\mu$, si ha:

$$\mathrm{Var}(X)=M[(X-\mu)^2]=M(X^2-2\mu X+\mu^2)=M(X^2)-2\mu M(X)+\mu^2=M(X^2)-\mu^2.$$

In definitiva: $\mathrm{Var}(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$ e dunque: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{M(X^2)-[M(X)]^2}$, che è quello che si doveva dimostrare.

Quesito 19.2.5. Si tratta di prendere in considerazione la variabile aleatoria X tale che:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}45 & 0{,}10\end{bmatrix}.$$

La sua media M(X) è stata calcolata rispondendo al quesito 19.2.2: $M(X)=2{,}5$.
Calcoliamone la deviazione standard ricorrendo alla definizione. Bisogna allora prendere in esame la variabile aleatoria "quadrato dello scarto":

$$Y^2=\begin{bmatrix}(1-2{,}5)^2 & (2-2{,}5)^2 & (3-2{,}5)^2 & (4-2{,}5)^2\\ 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}45 & 0{,}10\end{bmatrix}.$$

Si ha: $\mathrm{Var}(X)=M(Y^2)$, vale a dire:

$$\mathrm{Var}(X)=(1-2{,}5)^2\times 0{,}15+(2-2{,}5)^2\times 0{,}30+(3-2{,}5)^2\times 0{,}45+(4-2{,}5)^2\times 0{,}10=0{,}75.$$

Pertanto: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{0{,}75}\approx 0{,}866$.
Volendo calcolare σ(X) mediante la formula dimostrata nel quesito precedente, conviene calcolare preliminarmente $M(X^2)$. Si ha: $M(X^2)=1^2\times 0{,}15+2^2\times 0{,}30+3^2\times 0{,}45+4^2\times 0{,}10=7{,}0$.
Pertanto: $\sigma(X)=\sqrt{M(X^2)-[M(X)]^2}=\sqrt{7{,}0-2{,}5^2}=\sqrt{0{,}75}\approx 0{,}866$.
Naturalmente i due risultati coincidono.

Quesito 19.2.6. Le probabilità p(1) e p(2) che, in un lancio della moneta, esca il numero "1" o il "2", si possono assumere uguali alle rispettive frequenze:

$$p(1)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}\ ,\ \ p(2)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}\ .$$

La somma dei tre numeri usciti è 5 nei seguenti casi: 1-2-2, 2-1-2, 2-2-1. Indicata allora con p la probabilità che esca questa somma, si ha: $p=3\cdot p(1)\cdot p(2)\cdot p(2)=0{,}432$.

La probabilità che, ripetendo n volte l'esperimento del triplo lancio, la somma 5 si presenti esattamente k volte, è: $p[B=k]=\binom{n}{k}0{,}432^k(1-0{,}432)^{n-k}$, dove chiaramente B(n,p) è la variabile aleatoria binomiale di ordine n e di parametro p.

Quesito 19.2.7. Indicate con M(B) e σ(B) la media e la deviazione standard della variabile binomiale B(n,p) considerata nel quesito precedente, tenendo presente che p=0,432 ed n=100 e ricordando le formule apposite per il calcolo richiesto, si ha:

$$M(B)=np=0{,}432\times100=43{,}2;\qquad \sigma(B)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{100\times0{,}432\times(1-0{,}432)}\approx4{,}95.$$

Quesito 19.2.8. La probabilità che in 100 lanci la somma 5 compaia esattamente 25 volte, calcolata utilizzando la distribuzione binomiale, è:

$$p[B=40]=\binom{100}{40}0{,}432^{40}(1-0{,}432)^{60}\approx0{,}0656.$$

Siccome M(B)=np=43,5>5 ed n=100>30, la stessa probabilità può essere calcolata, ancorché in modo approssimato, mediante la distribuzione normale:

$$P[X=40]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(40-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove μ=M(B)=43,2 e σ=σ(B)≈4,95. Si ha pertanto:

$$P[X=40]=\frac{1}{4{,}95\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(40-43{,}2)^2}{2\times4{,}95^2}}\approx0{,}0653.$$

L'errore relativo che si commette assumendo questo secondo valore come valore della probabilità cercata è:

$$\varepsilon_r=\frac{0{,}0658-0{,}0653}{0{,}0658}\approx0{,}7\%\ .$$

Quesito 19.2.9. La distribuzione di probabilità riguardante il problema in questione è quella espressa dalla formula seguente:

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ \text{dove } \mu=89{,}7 \text{ e } \sigma=13{,}8.$$

Pensando alla curva che la rappresenta in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), considerato che 8/154≈5,2%, si tratta di calcolare per quali punteggi t, con t>μ, l'area A(t) sotto la curva ed a destra della retta x=t non supera il 5,2% di tutta l'area sotto la curva, che come noto è 1; cioè per quale t risulta A(t) ≤ 0,052 (Fig. 19.2).

Ora, posto $X=N(\mu,\sigma^2)$, si ha evidentemente: $A(t)=0{,}5-P[\mu\le X\le t]$. D'altronde:

$$P[\mu\le X\le t]=P\left[\frac{\mu-\mu}{\sigma}\le N\le\frac{t-\mu}{\sigma}\right]=P\left[0\le N\le\frac{t-89{,}7}{13{,}8}\right].$$

Quindi deve risultare:

$$0{,}5-P\left[0\le N\le\frac{t-89{,}7}{13{,}8}\right]\le0{,}052\ \text{ossia: } P\left[0\le N\le\frac{t-89{,}7}{13{,}8}\right]\ge0{,}448.$$

Cercando il numero 0,448 nella tabella della distribuzione normale standardizzata, colonna

$P[0\leq N\leq k]$, si nota che esso non c'è; ma c'è 0,44520 che costituisce il più piccolo valore che non supera 0,448.
Poiché a quel valore di $P[0\leq N\leq k]$ corrisponde il valore 1,6 di k, possiamo concludere che t deve esser tale che:

$$\frac{t-89{,}7}{13{,}8}>1{,}6 \text{ ossia: } t-89{,}7>13{,}8\cdot 1{,}6 \text{ e perciò: } t>111{,}7.$$

Perciò il punteggio minimo (intero) richiesto risulta essere 112.

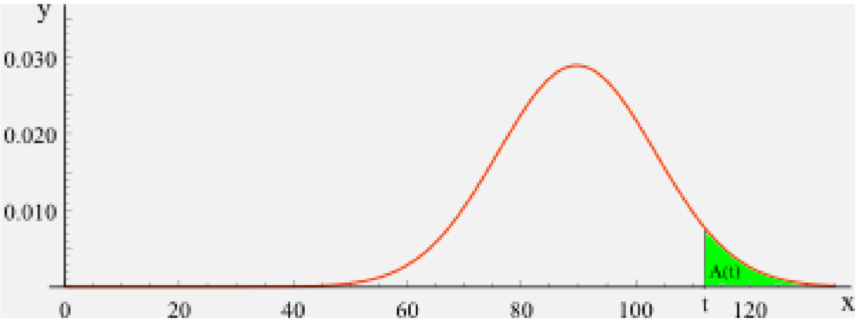


Fig. 19.2

Quesito 19. 2. 10. I possibili campioni di dimensione 3, estraibili dalla popolazione considerata, sono i seguenti:

1-2-3, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4

ed ognuno di essi ha probabilità 1/4 di essere estratto. Le loro medie sono nell'ordine:

$$\mu_1=\frac{1+2+3}{3}=2,\quad \mu_2=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3},\quad \mu_3=\frac{1+3+4}{3}=\frac{8}{3},\quad \mu_4=\frac{2+3+4}{3}=3.$$

La media delle medie campionarie è allora:

$$\mu_{\overline{X}}=2\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}.$$

La media aritmetica della popolazione è:

$$\mu=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{5}{2}.$$

Risulta $\mu_{\overline{X}}=\mu$, come deve essere.

Quesito 19. 2. 11. Con riferimento al quesito precedente, bisogna verificare che risulta:

$$\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4-3}{4-1}}\text{ , vale a dire: }\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{3}\text{ .}$$

Incominciamo a calcolare la deviazione standard della popolazione, ricordando che essa è costituita dalle unità 1-2-3-4 e che la sua media aritmetica è 5/2. Si ha:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\text{ .}$$

Calcoliamo adesso la deviazione standard della media campionaria, ricordando che le sue determinazioni sono $2,\frac{7}{3},\frac{8}{3},3$, tutte con probabilità $\frac{1}{4}$. Si ha:

$$\sigma_{\overline{X}}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2\right)}=\frac{\sqrt{5}}{6}\ .$$

Effettivamente $\sigma_{\overline{X}}=\frac{\sigma}{3}$.

Quesito 19.2.12. È evidente che:

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\to\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ quando $N\to\infty$, dal momento che in tal caso $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\to 1$.

Se si assume $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ come approssimazione di $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ si commettere in genere l'errore relativo:

$$\varepsilon_r=\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}=\sqrt{\frac{N-1}{N-n}}-1$$

che è tanto più piccolo quanto più grande è N rispetto ad n. Nel caso specifico che sia $N=2000$ ed $n=99$, tale errore è: $\varepsilon_r=\sqrt{\frac{1999}{1901}}-1=2{,}5\%$, ossia un errore trascurabile. Fatto che giustifica l'assunzione di $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ come buona approssimazione di $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

Quesito 19.2.13. Il significato è il seguente: Se si estraggono campioni casuali della popolazione, tutti della stessa dimensione, è uguale al 90% la percentuale di essi che presenta un intervallo di confidenza nel quale è contenuta la percentuale p della popolazione che presenta il carattere su cui s'indaga.

Quesito 19.2.14. Il procedimento risolutivo non differeisce da quello esposto nella risoluzione del quesito 14.1.13. L'indagine riguarda l'esistenza o meno di un determinato carattere: il favore per il nuovo modello di vettura. Indicati con ε l'errore massimo ammesso nell'indagine e con $\sigma_{\overline{p}}$ la deviazione standard della media campionaria, risulta: $k\sigma_{\overline{p}}=\varepsilon$ e perciò $\sigma_{\overline{p}}=\frac{\varepsilon}{k}$. Poiché $\varepsilon=10\%=0{,}1$ e, al livello di confidenza del 90%, $k=1{,}65$ si ha: $\sigma_{\overline{p}}=\frac{0{,}1}{1{,}65}$. Sappiamo che è: $\sigma_{\overline{p}}=\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$, dove f è la percentuale della popolazione che presenta il carattere oggetto dell'indagine ($f=53\%=0{,}53$) ed n è la dimensione incognita del campione da scegliere. Dalla formula precedente, risolvendo rispetto ad n, si trova:

$$n=\frac{f(1-f)}{\sigma_{\overline{p}}^2}=\frac{0{,}53(1-0{,}53)}{\left(\frac{0{,}1}{1{,}65}\right)^2}\approx 67{,}8\ .$$

La dimensione minima del campione è pertanto $n=68$.

Quesito 19.2.15. La percentuale P dei voti che si stima potrà prendere il partito in questione è tale che:

$\mu_{\overline{p}}-k\sigma_{\overline{p}} \le P \le \mu_{\overline{p}}+k\sigma_{\overline{p}}$,

$$\text{dove } k=1{,}65,\ \mu_{\overline{p}}=f=\frac{25}{247}\approx 0{,}101 \text{ e } \sigma_{\overline{p}}=\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}101(1-0{,}101)}{247}}\approx 0{,}019.$$

Pertanto, essendo $k\sigma_{\overline{p}}=0{,}031$ si ha: $0{,}101-0{,}031\le P\le 0{,}101+0{,}031$; vale a dire: $0{,}07\le P\le 0{,}13$. In definitiva, al livello di confidenza del 90% si stima che la percentuale P sia compresa fra il 7% ed il 13%.

Quesito 19.2.16. La somma 15 si può ottenere in 4 modi: 6+9, 9+6, 7+8, 8+7. La probabilità cercata è perciò:

$$p=2[p(6)p(9)+p(7)p(8)].$$

D'altro canto:

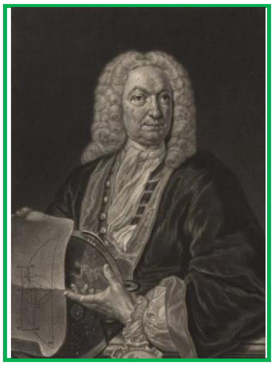
$$p(6)=\frac{\pi(7^2-5^2)}{9^2}=\frac{24\,\pi}{81}\ ,\quad p(9)=\frac{\pi}{9^2}=\frac{\pi}{81}\ ,\quad p(7)=\frac{\pi(5^2-3^2)}{9^2}=\frac{16\,\pi}{81}\ ,\quad p(8)=\frac{\pi(7^2-5^2)}{9^2}=\frac{8\,\pi}{81}\ .$$

Pertanto:

$$p = 2\,\pi^2\left(\frac{24}{81}\cdot\frac{1}{81}+\frac{16}{81}\cdot\frac{8}{81}\right)\approx 45{,}73\%\ .$$

19.5. Jakob e Johann Bernoulli: vita ed opere.


Jakob


Johann

I matematici ai quali principalmente va il merito di aver volgarizzato le idee ed i metodi di Leibniz furono due svizzeri, i fratelli Bernoulli: Jakob (noto anche come Jacques o James o Giacomo, 1654-1705) e Johann (o Jean o Giovanni, 1667-1748). Essi fecero del calcolo infinitesimale uno strumento di ricerca semplice, maneggevole ed estremamente potente, il più formidabile strumento di calcolo mai creato dall'uomo. Anche se i rapporti fra di loro non furono mai troppo cordiali.

Il fratello maggiore, Jakob, fu professore di matematica all'Università di Basilea e tenne una ricca corrispondenza con Leibniz. Il suo contributo alla matematica non si limita al calcolo infinitesimale. Egli è infatti autore di quella che può considerarsi la prima opera organica sul calcolo delle probabilità, anche se non vi figura ancora la definizione di "probabilità". Parliamo del trattato *Ars conjectandi* (*Arte di congetturare*), pubblicato postumo nel 1713.

Johann fu dal 1697 professore all'Università di Groningen ma subentrò al fratello all'Università di Basilea alla morte di questi e vi rimase per tutta la vita. Fu forse più importante e decisivo di Jakob nella elementarizzazione e diffusione del calcolo infinitesimale, ma poiché non pubblicò quasi nulla sull'argomento, di questo suo determinante contributo, del quale però si sospettava, si è avuta conferma solo nella prima metà del Novecento, allorché fu resa nota la corrispondenza fra lui e il marchese Guillome de L'Hôpital (1661-1704).
Quest'ultimo aveva pubblicato nel 1696 quello che può essere considerato il primo manuale di calcolo differenziale: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (*Analisi degli infinitamente piccoli per la comprensione delle linee curve*). Si tratta di un'opera scritta in modo scorrevole ed efficace, che mise in evidenza le doti divulgative che de L'Hôpital avrebbe confermato con un altro libro sulla geometria analitica: *Traité analytique des sections coniques* (*Trattato analitico delle sezioni coniche*), pubblicato però nel 1707, dopo la sua morte.
Il fatto è che le opere di de L'Hôpital non erano tutta farina del suo sacco, ma erano per lo più risultati ottenuti da Johann Bernoulli, che poi li comunicava al marchese, giacché aveva stipulato con lui un contratto, con il quale si impegnava, dietro compenso, a passargli tutte le sue scoperte matematiche, con l'intesa che de L'Hôpital ne avrebbe fatto l'uso che voleva.
Johann, che qualcuno descrive come un tipino piuttosto invidioso, forse un po' geloso della popolarità che aveva acquisito il suo discepolo, dopo la sua morte lo accusò di plagio, ma come detto sopra, bisogna aspettare circa 250 anni per conoscere la verità dei fatti.

Ai fratelli Bernouilli si deve anche l'aver messo ordine nella congerie dei simboli che alla loro epoca venivano usati per le varie operazioni. Furono loro, infatti, a proporre, tanto per fare qualche esempio, il simbolo «+» per l'addizione, il simbolo «–» per la sottrazione, il simbolo «=» per l'uguaglianza, anche se, ad onor del vero, quest'ultimo simbolo era stato proposto molto tempo prima dal matematico inglese Robert Recorde (1510-1558). Lo fecero all'interno di un articolo dal titolo *Paralelismus ratiocini et algebraici* (*Parallelismo tra il ragionamento logico e quello algebrico*), pubblicato nel 1685.

Jakob e Johann Bernoulli furono i più celebri rappresentanti di una vera e propria dinastia di 13 matematici, che ebbe come capostipite il loro padre Nicolaus (1623-1708) e come ultimo membro un pronipote del terzo figlio di Johann, di nome Johann Gustav (1811-1863).

Una citazione particolare, fra tutti, merita Daniel (1700-1782), secondo dei tre figli di Johann ed amico di Eulero: oltre che in matematica, al cui progresso ha certamente contribuito, i suoi risultati sono importanti anche e soprattutto nel campo della fisica.
Ma Daniel è ricordato pure per un episodio che lo vide scontrarsi col padre e che mette il luce il carattere fumantino di Johann. Nel 1734 Daniel partecipò ad una competizione sponsorizzata dall'Accademia delle Scienze di Parigi e vinse il premio messo in palio. Sennonché anche il padre, che aveva partecipato alla stessa competizione, aspirava fortemente a vincere. E, vistosi battuto dal figlio, si risentì a tal punto con lui, che non solo lo cacciò di casa ma ruppe definitivamente ogni rapporto con Daniel.