Capitolo 3 (Integrazione a unità 7-8)

Primi elementi di geometria piana

3.1 Quesiti a risposta chiusa.

3.1.1 Quale delle seguenti proposizioni è FALSA?

[A] Due angoli adiacenti sono sempre consecutivi.

[B] Due angoli adiacenti sono sempre supplementari.

[C] Due angoli, la somma delle cui ampiezze è 180°, sono adiacenti.

[D] Due angoli, la somma delle cui ampiezze è 90°, sono complementari.

3.1.2 Quant'è ampio l'angolo acuto formato dalle lancette di un orologio quando segna le ore 5?

[A] 120° [B] 130° [C] 140° [D] 150°

3.1.3 Quale delle seguenti proposizioni è quella esatta?

[A] Esiste un triangolo i cui lati hanno misure uguali ad a, 2a, 3a, dove a è una misura nota.

[B] Esiste un triangolo di cui un lato misura a, il secondo lato è il doppio del primo e il terzo lato è il doppio del secondo.

[C] Esiste un triangolo i cui angoli hanno misure, uguali ad a, 2a, 3a, dove a è una misura nota.

[D] Le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

3.1.4 Di due angoli acuti, aventi i lati mutuamente perpendicolari, cosa si può dire con certezza ?

[A] Che sono complementari. [B] Che sono supplementari.

[C] Che sono congruenti. [D] Che le precedenti affermazioni sono tutte false.

3.1.5 In un qualunque triangolo ABC sia D il punto in cui si secano le bisettrici dei due angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{B}A$. Cosa si può dire dell'angolo $A\widehat{D}B$ formato dalle due bisettrici?

[A] Che è certamente acuto [B] Che è certamente retto.

[C] Che è certamente ottuso. [D] Che può essere acuto, retto o ottuso.

3.1.6 Si consideri il quadrilatero avente come vertici i punti medi dei lati di un qualunque quadrilatero convesso.

[A] È sempre un parallelogramma.

[B] Non è un parallelogramma se il quadrilatero dato è un trapezio.

[C] È un parallelogramma solo se il quadrilatero dato è un parallelogramma.

[D] Le affermazioni precedenti sono tutte false.

3.1.7 Di un quadrilatero convesso si sa solo che ha le diagonali perpendicolari. Cosa i può concludere con certezza?

[A] Che è un rombo. [B] Che è un quadrato.

[C] Che è un rettangolo. [D] Che le affermazioni precedenti sono tutte false.

3.1.8 Si consideri un qualsiasi triangolo rettangolo ed il quadrilatero avente per vertici il vertice dell'angolo retto ed i punti medi dei lati del triangolo. Cosa si può dire con certezza di questo quadrilatero?

[A] Che è un trapezio rettangolo. [B] Che è un rettangolo.

[C] Che è un rombo. [D] Che è un quadrilatero generico.

3.1.9 Qual è il numero massimo di angoli acuti di un pentagono?
[A] 2 [B] 3 [C] 4 [D] 5

3.1.10 Considerato un triangolo equilatero, quale delle seguenti affermazioni è vera?
[A] La sua altezza è uguale al lato per $\sqrt{3}$.
[B] Il suo lato è uguale all'altezza per $\sqrt{3}$.
[C] La somma delle distanze di un qualunque punto interno dai suoi lati è uguale alla sua altezza.
[D] La somma delle distanze di un qualunque punto interno dai suoi lati è uguale al suo lato.

3.1.11 È dato un triangolo rettangolo. Quale delle seguenti proposizioni è vera?
[A] Se un suo angolo acuto misura 60° allora il cateto opposto a tale angolo è la metà dell'ipotenusa.
[B] La mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa.
[C] L'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto dei cateti diviso per 2.
[D] L'ipotenusa è uguale alla radice quadrata della somma dei cateti.

3.1.12 La diagonale di un quadrato misura 2 m. Qual è la misura del lato, espressa in metri?
[A] $2\sqrt{2}$ [B] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [C] $2+\sqrt{2}$ [D] Un valore diverso

3.1.13 L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente 50 cm e 30 cm. Quanto misura, in centimetri, l'altezza relativa al cateto maggiore?
[A] 24 [B] 30 [C] 32 [D] 40

3.1.14 L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente 10 cm e 8 cm. Quanto misura, in centimetri, la mediana relativa all'ipotenusa del triangolo?
[A] 6 [B] 5 [C] 4,8 [D] 4

3.1.15 Un quadrato ha area $17\sqrt{2}$ m^2. Qual è l'area, in metri quadrati, del quadrato costruito su una sua diagonale?
[A] 34 [B] $34\sqrt{2}$ [C] 68 [D] $68\sqrt{2}$

3.1.16 Disposte su file distanziate di 3 m l'una dall'altra, 10.000 persone sfilano in corteo. In ogni fila sono disposte 20 persone. Quant'è lungo il corteo con buona approssimazione?
[A] 3,0 km [B] 2,5 km [C] 2,0 km [D] 1,5 km

3.1.17 Si esamini l'ottagono rappresentato nella figura sottostante (Fig. 3.1).

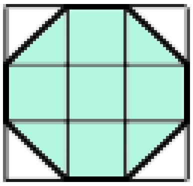

FIG. 3.1

Si tratta di un poligono:
[A] equilatero ed equiangolo; [B] equilatero ma non equiangolo;
[C] equiagolo ma non equilatero; [D] né equilatero né equiangolo.

3.2 Quesiti a risposta aperta.

3.2.1 È vero che due segmenti consecutivi sono anche adiacenti?

3.2.2 Un triangolo scaleno è una figura concava o convessa?

3.2.3 È vero che due angoli aventi i lati rispettivamente perpendicolari sono congruenti?

3.2.4 Sono assegnate le misure seguenti:

3,1 cm, 1,5 cm, 1,2 cm.

Possono essere assunte come misure dei lati di uno stesso triangolo?

3.2.5 Un segmento misura 37 cm, un secondo segmento lo supera di 15 cm ed un terzo segmento è più corto del primo di 17 cm. I tre segmenti possono essere assunti come lati di un triangolo?

3.2.6 Esiste un poligono tale che la somma dei suoi angoli interni sia 1000° sessagesimali?

3.2.7 Utilizzando mattonelle uguali a forma di pentagono regolare e mattonelle uguali a forma di rombo è possibile pavimentare una sala. Ammesso che il lato delle mattonelle pentagonali misuri 20 cm, quanto misura il lato di quelle romboidali? Quanto misurano gli angoli delle mattonelle, sia pentagonali sia romboidali?

3.2.8 Un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari. Che tipo di quadrilatero è quello che ha per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero dato?

3.2.9 Dimostrare che il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui di un trapezio è uguale alla semisomma delle basi.

3.2.10 Sia P un qualsiasi punto della base di un dato triangolo isoscele. Dimostrare che la somma delle distanze di P dai lati uguali del triangolo è costante. Quanto vale questa costante?

3.2.11 Un parallelogramma ha area uguale a 72 m^2. Il dato è sufficiente a calcolare le aree dei quattro triangoli in cui il parallelogramma è diviso dalle sue diagonali?

3.2.12 Un trapezio rettangolo ha area uguale a 30 m^2. Il dato è sufficiente a calcolare l'area del quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati del trapezio?

3.2.13 Spiegare perché non esiste alcun triangolo i cui lati misurino 8 cm, 15 cm e 17 cm, e contemporaneamente l'altezza relativa al maggiore dei lati misuri 7 cm.

3.2.14 È assegnato un triangolo equilatero di lato 4 m. È possibile calcolare la somma delle distanze dai suoi lati di un qualsiasi punto interno al triangolo?

3.2.15 Una piazza ha la forma di un rettangolo di dimensioni 110 m e 250 m. È credibile l'affermazione che alla manifestazione che si stava svolgendo in quella piazza fossero presenti 500 mila persone?

3.2.16 È dato il quadrato ABCD e sui suoi lati sono presi i punti E, F, G, H nel modo indicato in figura (Fig. 3.2). Dedurne il teorema di Pitagora.

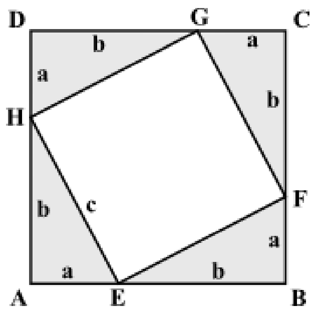

Fig. 3.2

3.2.17 Sia ABCD un quadrato e siano E, F, G, H punti presi rispettivamente sui lati AB, BC, CD, DA in modo che risulti: AE=BF=CG=DH. Siano infine M ed N i punti in cui AF interseca rispettivamente ED e BG e siano Q e P i punti cui HC interseca nell'ordine le due stesse rette ED e BG. Dimostrare che il quadrilatero MNPQ è un quadrato.

3.2.18 Sia dato un triangolo, per il quale si sa che vale una delle seguenti condizioni:

A) La bisettrice di un angolo interno è anche altezza relativa al lato opposto.
B) L'altezza relativa ad un lato è anche mediana di quel lato.
C) La bisettrice di un angolo interno è anche mediana del lato opposto.

Dimostrare che, in tutti e tre i casi, il triangolo è isoscele.

3.3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 3.1.1. Per definizione, due angoli sono adiacenti se hanno solo il vertice ed un lato in comune ed i lati non comuni sono due semirette opposte. Se ne desume che, per l'appunto, sono consecutivi (proprio perché hanno solo il vertice ed un lato in comune) e la loro somma è un angolo piatto. Le alternative [A] e [B] affermano il vero. Anche l'alternativa [D] afferma il vero, proprio perché due angoli si dicono complementari se la somma delle loro ampiezze è un angolo retto. L'alternativa [C] afferma il falso: due angoli, la somma delle cui ampiezze è 180°, sono supplementari per definizione, ma non è detto che siano adiacenti. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.2. Le lancette formano un angolo acuto uguale a 5/12 dell'angolo giro, per cui la sua ampiezza è $\frac{5}{12}\times 360°=150°$. L'alternativa corretta è [D].

Quesito 3.1.3. Le alternative [A] e [B] sono false poiché non è rispettata la condizione che caratterizza i tre lati di un triangolo: ogni lato è minore della somma degli altri due.
L'alternativa [C] è vera: basta scegliere a=30°.
Ne consegue che l'alternativa [D] è falsa.
L'alternativa corretta è, pertanto, la [C].

Quesito 3.1.4. L'alternativa corretta è [C]. Si può far vedere, infatti, che due angoli acuti, con i lati rispettivamente perpendicolari, sono complementari di uno stesso angolo o di due angoli congruenti.

Quesito 3.1.5. Gli angoli $C\widehat{A}B$ e $C\widehat{B}A$, essendo angoli di un triangolo, hanno somma uguale a $180°-\varepsilon$, dove ε è l'ampiezza di $A\widehat{B}C$. Si ha pertanto che: $D\widehat{A}B+D\widehat{B}A = 90°-\frac{\varepsilon}{2}$ e, di conseguenza, nel triangolo DAB:

$$A\widehat{D}B = 180° - \left(90° - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 90° + \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'angolo $A\widehat{D}B$ è sempre e soltanto ottuso, comunque si prenda il triangolo ABC. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.6. L'alternativa corretta è [A]. La dimostrazione poggia sul fatto che il segmento che congiunge i punti medi di due qualsiasi lati consecutivi è parallelo alla diagonale che congiunge i vertici non comuni dei due lati presi in considerazione, ed è la metà di essa.

Quesito 3.1.7. Non è detto che il quadrilatero sia un rombo: nulla assicura che abbia i lati congruenti. Non è detto che sia un rettangolo: nulla assicura che abbia gli angoli congruenti. Di conseguenza non c'è certezza che sia un quadrato. Le alternative [A], [B] e [C] non sono corrette. L'unica alternativa corretta è, pertanto, la [D].

Quesito 3.1.8. Considerato il triangolo ABC, rettangolo in A, e detti M, N, P i punti medi dei lati BC, AB, CA nell'ordine, è noto che PM è parallelo ad AB ed MN è parallelo a CA. Di modo che il quadrilatero ANMP è un parallelogramma, avente un angolo retto, l'angolo in A. È perciò un rettangolo. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.9. La somma degli angoli interni di un pentagono è $S_5=3\times180°=540°$.
Se tutti e 5 gli angoli fossero acuti, la loro somma sarebbe minore di $5\times90°=450°$ e, quindi, a maggiore ragione, minore di 540°. L'alternativa [D] non è corretta.
Se 4 angoli fossero acuti, la loro somma sarebbe mirore di $4\times90°=360°$. Ne conseguirebbe che il quinto angolo dovrebbe essere ampio $540°-360°=180°$: impossibile. L'alternativa [C] non è corretta.
Se 3 angoli fossero acuti, la loro somma sarebbe minore di $3\times90°=270°$. Ne conseguirebbe che la somma degli altri due angoli sarebbe $540°-270°=270°$. È possibile: entrambi tali angoli sono ottusi. L'alternativa [B] è corretta. Ed è l'unica alternativa corretta. In effetti, ovviamente, l'alternativa [A] non è corretta.

Quesito 3.1.10. L'altezza di un triangolo equilatero è uguale alla metà del lato per $\sqrt{3}$: le proposizioni [A] e [B], affermando il falso, non sono corrette.
Si tratta di valutare l'alternativa [C]. Ora, se indichiamo con h l'altezza del triangolo, con L la lunghezza di un suo lato e con d_1, d_2, d_3 le distanze di un qualsiasi punto interno al triangolo dai suoi lati, risulta:

$$\frac{1}{2}Lh = \frac{1}{2}Ld_1 + \frac{1}{2}Ld_2 + \frac{1}{2}Ld_3\,,$$

da cui segue $d_1+d_2+d_3=h$. L'alternativa corretta è [C].
Ovviamente l'alternativa [D] afferma il falso e, pertanto, non è corretta.

Quesito 3.1.11. L'alternativa corretta è la [B]: è dimostrato infatti che la mediana relativa all'ipotenusa è metà di essa.
Ragionamento alternativo: le alternative [A], [C], [D] sono false e quindi non corrette e questo si può far vedere facilmente. Per esclusione, [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.12. Il lato L di un quadrato, espresso mediante la sua diagonale d, è: $L=\frac{d}{\sqrt{2}}$. Nel caso specifico: $L=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (m). [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.13. L'altezza relativa al cateto maggiore altro non è che il cateto minore. Siccome dei due cateti, uno misura 30 cm e l'altro ne misura $\sqrt{50^2-30^2}=40$, è evidente che quest'ultimo è il cateto maggiore. L'altezza relativa ad esso misura pertanto 30 cm. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.14. La mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa stessa, per cui misura 5 cm. (La conoscenza di un cateto determina il triangolo ma è un dato superfluo ai fini della risoluzione.) [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.15. Il quadrato costruito sulla diagonale di un qualsiasi quadrato ha area doppia di questo. L'area di tale quadrato, nel caso specifico, è perciò $34\sqrt{2}$ m^2. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.16. Il corteo è formato da 10.000/20=500 file. La sua lunghezza è perciò 499×3 m, vale a dire 1497 m, ossia quasi 1,5 km. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 3.1.17. [C] è l'alternativa corretta.

3.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 3.2.1. No. Due segmenti consecutivi non sono necessariamente adiacenti, mentre, al contrario, sono certamente consecutivi due segmenti adiacenti.

Quesito 3.2.2. Ogni triangolo, e quindi anche un triangolo scaleno, è una figura convessa dal momento che il segmento che unisce due suoi qualsiasi punti è tutto contenuto nel triangolo.

Quesito 3.2.3. Non in generale, ma solo se i due angoli sono entrambi acuti o entrambi ottusi. Se uno è acuto e l'altro ottuso i due angoli sono supplementari.

Quesito 3.2.4. No. Risulta infatti 3,1>1,5+1,2.

Quesito 3.2.5. Le misure dei tre segmenti, espresse in cm, sono: 37, 37+15=52 e 37–17=20. Poiché la maggiore di tali misure (52 cm) è minore della somma delle altre due (57 cm), è soddisfatta certamente la condizione affinché i tre segmenti siano lati di un triangolo.

Quesito 3.2.6. Se n è il numero dei lati del poligono, la somma dei suoi angoli interni è (n–2)180°. Si tratta di stabilire se esiste un numero n che rende questa espressione uguale a 1000°. Ora, per n=7 essa diventa 5×180°=900°, mentre per n=8 diventa 6×180°=1080°. Il valore 1000° non si può ottenere. Non esiste alcun poligono che abbia uguale a 1000° la somma dei suoi angoli interni.

Quesito 3.2.7. Tutte le mattonelle devono avere i lati uguali (Fig. 3.3) e perciò anche il lato delle mattonelle romboidali misura 20 cm.

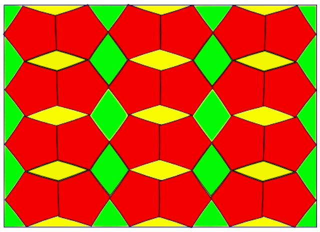

Fig. 3.3

Riguardo alle ampiezze degli angoli interni delle mattonelle, quelli della mattonella pentagonale misurano $\frac{(5-2)180°}{5}$=108°. Per quanto concerne quelli del rombo, bisogna constatare anzitutto che i rombi possono essere di due tipi.
Occupiamoci del rombo del primo tipo (in figura, la sua diagonale maggiore è orizzontale). Notiamo che il suo angolo ottuso ha come vertice un punto in cui convergono, oltre ad esso, due angoli del pentagono, per cui la sua ampiezza è 360°–2×108°=144°. Di conseguenza il suo angolo acuto è ampio 36°.
Occupiamoci del rombo del secondo tipo. Constatiamo che l'angolo ottuso ha come vertice un punto in cui convergono, oltre ad esso, due angoli del pentagono e un angolo acuto del rombo dell'altro tipo, per cui la sua ampiezza è 360°–(2×108°+36°)=108°. Di conseguenza il suo angolo acuto è ampio 72°.

Quesito 3.2.8. Si tratta di un rettangolo. Per spiegarlo basta ricordare che il segmento che congiunge i punti medi dei lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e applicare più volte questa proprietà.
Detto per inciso, in generale: il quadrilatero Q' avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero Q qualsiasi è un parallelogramma; se il quadrilatero Q ha le diagonali perpendicolari, Q' è un rettangolo; se Q ha le diagonali congruenti, Q' è un rombo; ovviamente se Q ha le diagonali congruenti e perpendicolari, Q' è un quadrato.

Quesito 3.2.9. La dimostrazione di questo teorema sarebbe banale se si fosse a conoscenza di alcuni elementi di calcolo vettoriale (lo vedremo in altra circostanza). Si può condurre, tuttavia, una dimostrazione che prescinde da quelle conoscenze. È un po' contorta, per la verità, ma non è difficile, e ricalca la dimostrazione di un altro teorema, che del resto è qui richiamato.
Considerato allora il trapezio ABCD (Fig. 3.4), siano M ed N i punti medi dei suoi lati obliqui AD e BC. Tutto sta a dimostrare che MN è parallela ad AB.

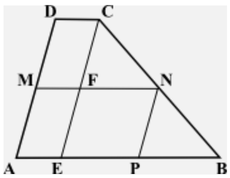

Fig. 3.4

Condotta la parallela CE ad AD, sia F il punto in cui essa seca MN. Si ha intanto che il quadrilatero AECD è un parallelogramma. Condotta poi la parallela NP a CE, ne consegue, che NP, per un noto teorema, è la metà di CE e, pertanto, è anche la metà di AD, per cui è uguale ad AM. Se ne desume che il quadrilatero APNM è un parallelogramma e, per questo, MN è parallela ad AB. Segue da tutto ciò che MF=DC ovvero, considerato che DC=AE, anche MF=(DC+AE)/2; inoltre FN=EB/2. In conclusione: MF+FN=(DC+AE+EB)/2, ossia MN=(AB+DC)/2.

Quesito 3.2.10. Considerato il triangolo ABC, isoscele sulla base AB, sia P un qualsiasi punto della base e siano PM e PN le sue distanze dai lati AC e BC rispettivamente. Siccome il triangolo ABC è diviso dal segmento PC nei due triangoli PAC e PBC, la somma delle aree di questi due triangoli è evidentemente uguale all'area del triangolo ABC. Pertanto indicato con H il piede dell'altezza condotta per C, si ha:

$$\frac{1}{2}\,\overline{AC}\cdot\overline{PM}+\frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{PN}=\frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{CH}$$

da cui segue:

$$\overline{PM}+\overline{PN}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{\overline{AC}}.$$

E pertanto $\overline{PM}+\overline{PN}$ è uguale all'altezza relativa ad uno dei lati uguali.

Quesito 3.2.11. Ogni parallelogramma è diviso dalle sue diagonali in quattro triangoli equivalenti. Per cui, nel caso specifico l'area di ciascuno di essi è 1/4 di 72 m^2, vale a dire 18 m^2.

Quesito 3.2.12. Il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati di un qualsiasi quadrilatero convesso è equivalente alla metà di questo. Per cui, nel caso specifico l'area del quadrilatero è la metà di quella del trapezio, vale a dire 15 m^2.

Quesito 3.2.13. Siccome $8^2+15^2=289=17^2$, il triangolo risulta rettangolo e l'altezza relativa all'ipotenusa (lato maggiore) è $h=\frac{8\times 15}{17}$ cm. Questo valore è diverso dai 7 cm forniti dalla traccia, per cui i dati assegnati non possono coesistere, sono incompatibili.

Quesito 3.2.14. Si può dimostrare che la somma delle distanze di un punto interno al triangolo equilatero dai suoi lati è uguale all'altezza del triangolo, che nel caso specifico è $2\sqrt{3}$ m. (Vedere quesito 3.1.10)

Quesito 3.2.15. L'estensione della piazza è 110×250 m^2, ossia 27.500 m^2. Ammesso che le persone in essa contenute siano pigiate le une alle altre, in ogni metroquadro non ce n'entrano più di 5. Quindi al massimo (ad essere esagerati) nella piazza ci stanno 27.500×5, cioè 137.500, persone. Il numero di 500.000 è una vera e propria "bufala".

Quesito 3.2.16. Per prima cosa si dimostra che il quadrilatero EFGH è un quadrato: questo compito è lasciato allo studente. Basta poi constatare che se dal quadrato ABCD si sottrae la somma dei quattro triangoli rettangolli uguali di cateti a, b, si ottiene il quadrato EFGH, il cui lato è c. Si ha pertanto:

$$(a+b)^2-4\left(\frac{1}{2}\,ab\right)=c^2$$

da cui segue: $a^2+b^2=c^2$. Appunto il teorema di Pitagora.

Quesito 3.2.17. Con riferimento alla figura 3.5, si dimostra facilmente che le rette AF e HC sono parallele, così come lo sono le rette DE e GB. Ne discende che il quadrilatero MNPQ è un parallelogramma.
Considerati ora i triangoli rettangoli DAE e CDH, si dimostra subito che sono uguali, per cui risultano uguali i corrispondenti angoli $A\hat{D}E$ e $D\hat{C}H$. D'altro canto gli angoli $D\hat{C}H$ e $D\hat{H}C$ sono complementari in quanto angoli acuti del triangolo rettangolo CDH, per cui risultano complementari pure gli angoli $D\hat{H}Q$ e $H\hat{D}Q$. Di conseguenza l'angolo $D\hat{Q}H$ è retto e così pure lo è il suo opposto al vertice $P\hat{Q}M$. Il parllelogramma MNPQ, avendo un angolo retto, è pertanto un rettangolo.
Rimane da dimostrare che i lati QP e QM di questo rettangolo sono uguali – cosa di per sé piuttosto semplice – e la conclusione che il quadrilatero MNPQ sia un quadrato è cosa fatta.

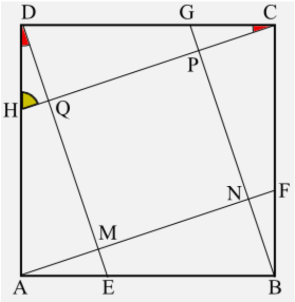

FIG. 3.5

Quesito 3.2.18. La dimostrazione relativa ai primi due casi A) e B) è del tutto banale: nel caso A) basta ricorrere al 2° criterio di congruenza dei triangoli e nal caso B) al 1°.
Esponiamo una dimostrazione solamente per il caso C) poiché richiede una premessa fondamentale.
Si tratta di dimostrare, in via preliminare, che, se l'angolo del triangolo del quale si considera la bisettrice è acuto e se tale bisettrice è anche mediana, allora anche gli altri due angoli del triangolo sono acuti.
Consideriamo allora un triangolo ABC, che abbia ottuso l'angolo in B (nulla cambia se quest'angolo fosse retto) e tracciamo la sua biettrice CM (Fig. 6). Ragionando per assurdo, dimostriamo che questa bisettrice non può essere mediana. Se lo fosse, cioè se M fosse il punto medio del lato AB, si chiami D il punto in cui la parallela a tale bisettrice condotta per B interseca la retta del lato AC del triangolo. Si dimostra facilmente che il triangolo CBD è isoscele sulla base BD, per cui CB=CD. Inoltre, in virtù di un noto teorema (cfr.: Testo base, U7, N° 7.9.5), siccome la corda MC è condotta per il punto medio M del lato AB del triangolo ABD ed è parallela al lato BD, il punto C è punto medio del lato AD. Come dire che AC=CD. Dunque sarebbe AC=CB. Il che è chiaramente assurdo.
Insomma, se la bisettrice dell'angolo in C (che certamente è acuto) è anche mediana, allora gli altri due angoli del triangolo sono anch'essi acuti.
Ovviamente tali angoli sono ancora acuti se l'angolo in C è retto o ottuso, indipendentemente da ogni altra ipotesi.

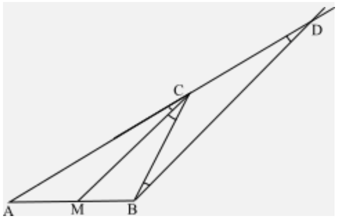

FIG. 3.6

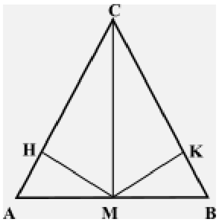

FIG. 3.7

Fatta questa doverosa premessa, consideriamo il triangolo ABC (figura 3.7), tracciamo la bisettrice dell'angolo in C e supponiamo che sia anche mediana del lato AB. Siano MH e MK le perpendicolari condotte da M sui lati AC e BC rispettivamente. Che l'angolo in C sia acuto, retto o ottuso, siccome gli angoli in A e B sono certamente acuti, allora i punti H e K sono interni ai lati rispettivamente AC e BC e possiamo riflettere sui triangoli CHM e CKM. Essi, oltre ad essere rettangoli, hanno l'ipotenusa in comune e un angolo acuto uguale, quindi sono uguali. In particolare MH=MK. Se ne desume che anche i triangoli rettangoli MHA e MKB sono uguali per avere uguali l'ipotenusa e un cateto. In particolare risultano uguali gli angoli $H\widehat{A}M$ e $K\widehat{B}M$.
Di conseguenza il triangolo ABC è isoscele sulla base AB. [c.v.d.]

3. 5 Antologia.

Il teorema di Pitagora ha moltissime dimostrazioni, e noi ne abbiamo già proposte un paio. Vogliamo riportare adesso quella fornita da Euclide, negli *Elementi* [1], ma con qualche licenza nella traduzione, in modo da rendere la lettura più adatta al linguaggio attuale.
Precisiamo che la dimostrazione (contenuta nella proposizione 47 del libro I) si compone di due parti: la prima, molto lunga, è sostanzialmente quella che oggi denominiamo "Primo teorema di Euclide", la seconda, estremamente breve, è il teorema di Pitagora vero e proprio.

PROPOSIZIONE 47.

Nei triangoli rettangoli il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo in A retto; si vuole dimostrare che il quadrato costruito su BC è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BA e AC [Fig. 3.8].

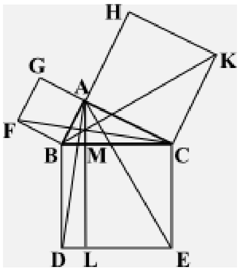

Fig. 3.8

Si descrivano il quadrato BCED su BC, il quadrato ABFG su AB ed il quadrato ACKH su AC. Per A si conduca la retta AL parallela a BD e si traccino le congiungenti AD ed FC. Si dimostra anzitutto che che i punti B, A, H sono allineati e così pure i punti C, A, G. Quindi si dimostra che gli angoli $A\hat{B}D$ e $F\hat{B}C$ sono uguali; di conseguenza sono uguali i triangoli ABD ed FBC; e perciò anche equivalenti.
Ora, il rettangolo BDLM è il doppio del triangolo ABD in quanto i due poligono hanno la stessa base BD e la stessa altezza, uguale alla distanza delle due parallele BD ed ML.
A sua volta, anche il quadrato ABFG è il doppio del triangolo FBC in quanto hanno la stessa base FB e la stessa altezza, uguale alla distanza delle parallele FB e GC.
Se ne desume che il quadrato ABFG è equivalente al rettangolo BDLM.
Similmente, dopo aver tracciato le congiungenti AE e BK, si dimostra che il quadrato ACKH è equivalente al rettangolo MLEC.

[Fin qui Euclide ha dimostrato, in sostanza, che: *Nei triangoli rettangoli il quadrato costruito su ciascun cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto su di essa*. Ha dimostrato perciò quello che oggi denominiamo "Primo teorema di Euclide"]

A questo punto la conclusione è immediata: tutto quanto il quadrato BDEC è equivalente alla somma dei quadrati ABFG ed ACKH. Cioè è dimostrato il "teorema di Pitagora".

---

[1] Cfr.: Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino, UTET, 1970, pag. 149.