Capitolo 4 (Integrazione a unità 9)

Nozioni di logica

4.1 Quesiti a risposta chiusa.

4.1.1 Quale delle seguenti espressioni definisce un insieme?

[A] I politici onesti. [B] I miei professori giovani.

[C] I miei compagni di classe più alti di me. [D] I giornalisti obiettivi.

4.1.2 Qual è il significato dell'espressione $\{\{a\}\}$?

[A] Insieme formato dal solo elemento a.

[B] Insieme il cui unico elemento è l'insieme costituito dal solo elemento a.

[C] Insieme degli insiemi aventi come elemento a.

[D] Un significato diverso.

4.1.3 Con quale insieme si identifica l'insieme: $\{x \mid x$ è il numero naturale tale che $0 \cdot x=1\}$?

[A] $\emptyset$ [B] $\{0\}$ [C] $\{1\}$ [D] $\{0, 1\}$

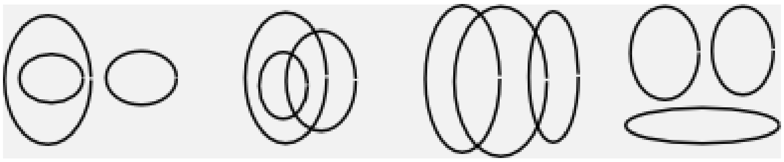
4.1.4 Con quale insieme si identifica l'insieme: $\{x \mid x$ è un numero naturale tale che $x+3=2\}$?

[A] $\emptyset$ [B] $\{0\}$ [C] $\{1\}$ [D] $\{-1\}$

4.1.5 Con quale insieme si identifica l'insieme: $\{x \mid x$ è un numero naturale tale che $x^0=1\}$?

[A] $\emptyset$ [B] $\{1\}$ [C] $\mathbb{N}$ [D] $\mathbb{N}_0$

4.1.6 Quale dei seguenti diagrammi (Fig. 4.1) rappresenta una relazione fra gli insiemi T dei triangoli, N dei numeri triangolari, P dei poligoni?



[A] [B] [C] [D]

Fig. 4.1

4.1.7 Quale delle seguenti frasi non è un enunciato?

[A] Il Po è il fiume più lungo d'Europa [B] Il fiume Piave è lungo 220 km

[C] Il fiume Arno scorre tutto in Toscana [D] Il fiume Tevere è sporco

4.1.8 A quale delle seguenti proposizioni è equivalente l'enunciato "Non è vero che tutti i triangoli sono equilateri"?

[A] Tutti i triangoli non sono equilateri. [B] Nessun triangolo è equilatero.

[C] Qualche triangolo è equilatero. [D] Qualche triangolo non è equilatero.

4.1.9 Quale dei seguenti enunciati è "vero"?

[A] Per ogni numero naturale x, esiste un numero naturale y tale che y è maggiore di x.

[B] Per ogni numero naturale x, esiste un numero naturale y tale che y è minore di x.

[C] Per ogni numero naturale x risulta $x^2>x$.

[D] Esiste almeno un numero naturale x tale che $0 \cdot x=1$.

4. 1. 10 Posto che $\mathbb{N}$ rappresenti l'insieme dei numeri naturali, quale dei seguenti enunciati è "falso"?
[A] $\forall x \in \mathbb{N},\ 0 \cdot x = 0$ [B] $\forall x \in \mathbb{N},\ 1 \cdot x = x$ [C] $\exists x \in \mathbb{N},\ x+1 = 1$ [D] $\exists x \in \mathbb{N},\ 0^x = 1$

4. 1. 11 Posto che $\mathbb{Z}$ rappresenti l'insieme dei numeri interi, quale dei seguenti enunciati è "falso"?
[A] $\exists x \in \mathbb{Z},\ x+2=2$ [B] $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}$ tale che $y>x$
[C] $\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ y=3x$ [D] $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z}$ tale che $x=2y$

4. 1. 12 In quale delle seguenti frasi l'articolo indeterminativo UN è usato nel senso di OGNI?
[A] Un triangolo ha tre angoli uguali.
[B] Un triangolo isoscele ha due lati uguali.
[C] Un quadrilatero ha gli angoli opposti supplementari.
[D] Un rombo non è un quadrato.

4. 1. 13 Quale dei seguenti enunciati è la negazione dell'enunciato "il numero 9 è dispari e primo" ?
[A] Il numero 9 non è dispari e non è primo.
[B] Il numero 9 non è dispari o non è primo.
[C] Il numero 9 è dispari ma non è primo.
[D] Il numero 9 non è dispari ma è primo.

4. 1. 14 Quale delle seguenti proposizioni è la negazione della proposizione "se Paolo dorme non piglia pesci" ?
[A] Paolo dorme ma piglia pesci.
[B] Paolo non dorme e non piglia pesci.
[C] Se Paolo non piglia pesci allora dorme.
[D] Se Paolo non dorme allora piglia pesci.

4. 1. 15 Quale delle seguenti proposizioni è la negazione della proposizione $(A \vee B) \rightarrow (C \vee D)$?
[A] $(A \vee B) \vee \overline{C \vee D}$ [B] $(A \vee B) \wedge \overline{C} \wedge \overline{D}$
[C] $C \vee D \rightarrow \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)$ [D] $(C \vee D) \rightarrow (A \vee B)$

4. 1. 16 Quale delle seguenti proposizioni è la forma simbolica della proposizione composta: "ogni volta che sono interrogato e non prendo meno della sufficienza mio padre mi aumenta la 'paghetta' settimanale o non mi impedisce di uscire la sera con gli amici" ?
[A] $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$ [B] $(A \wedge B) \rightarrow \left(C \vee \overline{D}\right)$
[C] $\left(A \wedge \overline{B}\right) \rightarrow \left(C \vee \overline{D}\right)$ [D] $\left(A \wedge \overline{B}\right) \wedge (C \vee D)$

4. 2 Quesiti a risposta aperta.

4. 2. 1 Quale l'insieme, rappresentato per elencazione, si identifica con il seguente insieme:
$\{x \mid x$ è un numero naturale di due cifre, uguale al prodotto di due numeri dispari consecutivi$\}$?

4. 2. 2 È vero che l'espressione "gli uomini viventi di età superiore a 200 anni" non definisce alcun insieme?

4. 2. 3 Considerato l'insieme $I=\{a,b,c\}$ e indicato con $P(I)$ l'insieme dei sottoinsiemi di I, è corretto scrivere $\{a,b\} \subset P(I)$?

4. 2. 4 Indicato con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, si considerino gli insiemi:

$$A = \{x \mid x=2n,\ n\in\mathbb{N},\ x \text{ è un divisore di } 60\}, \qquad B = \{2,4,6,8,10,12\}.$$

Determinare:

$$A \cup (A - B)\ ; \qquad B \cup (A - B)\ ; \qquad A \cap (A - B)\ .$$

4. 2. 5 Considerato un qualunque insieme A e indicato con P(A) l'insieme delle sue parti, è corretto affermare che $A\cap P(A)=\varnothing$?

4.2.6 Posto che $\mathbb{N}$ indichi l'insieme dei naturali, si consideri la seguente proposizione:

$$\forall a\in\mathbb{N}-\{0\},\ \exists b\in\mathbb{N} : a^b>a.$$

È vera o è falsa?

4. 2. 7 È vero che la negazione della proposizione "il numero 3 è maggiore del numero 2" è la proposizione "il numero 3 è minore del numero 2"?

4. 2. 8 È vero che la negazione della proposizione "Euclide è stato geometra e insegnante" è la proposizione "Euclide non è stato geometra o non è stato insegnante"?

4. 2. 9 È vero che la negazione della proposizione "se fossi vento tempesterei il mondo" è la proposizione "non sono vento e non tempesto il mondo"?

4. 2. 10 Si sa che l'implicazione $A\rightarrow B$ è vera. Cosa si può dire del valore di verità dell'implicazione inversa $B\rightarrow A$? Cosa del valore di verità dell'implicazione contronominale $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$?

4. 2. 11 È vero che la negazione della proposizione "ogni numero intero è positivo" è la proposizione "qualche numero intero è negativo"?

4. 2. 12 Costruire una frase di senso compiuto che abbia come traduzione simbolica la seguente proposizione: $(A\vee B)\rightarrow C$.

4. 2. 13 In un cassetto ci sono 4 paia di calzini, disposti alla rinfusa. Di essi, 2 paia sono rosse, un paio sono nere ed un paio blu. Determinare il minimo numero di calzini che bisogna estrarre per avere la certezza che:

a) se ne possa formare un paio;
b) formino il paio di colore nero;
c) formino un paio non di colore rosso.

4. 2. 14 Un insieme di persone è così assortito: 28 sono tifosi di pallavolo, 17 di pallacanestro e 10 di entrambi gli sport. Quante persone costituiscono l'insieme?

4. 2. 15 In un'urna vi sono delle palline numerate. Dei numeri che le contrassegnano:

- 17 sono divisibili per 2;
- 11 sono divisibili per 3;
- 7 sono divisibili per 5;
- 5 sono divisibili per 6;
- 3 sono divisibili per 10;
- 2 sono divisibili per 15;
- 1 è divisibile per 30.

Quante palline vi sono nell'urna? Se i numeri che contrassegnano le palline sono i più piccoli possibili, fra i numeri naturali, quali sono questi numeri?

4. 3 Risposte commentate: **quesiti a risposta chiusa**.

Quesito 4. 1. 1. Alternativa corretta: [C]. Le altre alternative si devono scartare finché non si definisca con precisione e senza possibilità di equivoci quale significato si debba attribuire ai termini “onesto”, “giovane”, “obiettivo”.

Quesito 4. 1. 2. Alternativa corretta: [B].

Quesito 4. 1. 3. [A] è l’alternativa corretta. Non esiste, infatti, alcun numero naturale che, moltiplicato per 0, dia un numero diverso da 0.

Quesito 4. 1. 4. [A] è l’alternativa corretta. Non esiste, infatti, alcun numero naturale che, sommato a 3, dia come totale 2.

Quesito 4. 1. 5. [D] è la risposta corretta. Infatti, ogni numero naturale non nullo, vale a dire ogni elemento dell’insieme $\mathbb{N}_0$, elevato all’esponente 0, è uguale ad 1, mentre 0^0 è privo di significato.

Quesito 4. 1. 6. L’insieme T dei triangoli è un sottoinsieme dell’insieme P dei poligoni, mentre l’insieme N dei numeri triangolari non ha elementi comuni con nessuno degli altri due. L’alternativa corretta è perciò la [A], dove, dei due insiemi inclusi uno nell’altro, quello esterno rappresenta l’insieme P e quello interno l’insieme T; invece l’insieme da essi disgiunto rappresenta l’insieme N.

Quesito 4. 1. 7. [D] è l’alternativa corretta. Non è, infatti, precisato in modo inequivocabile il significato di “sporco”. Le altre alternative enunciano fatti che possono essere veri o falsi, ma sul cui valore di verità non ci sono dubbi. In particolare la [A] è un enunciato falso: è il Volga il fiume più lungo d’Europa (3531 km), mentre il Po è lungo soltanto 652 km. La [B] e la [C] sono enunciati veri.

Quesito 4. 1. 8. La proposizione (vera) “Non è vero che tutti i triangoli sono equilateri” è la negazione della proposizione (falsa) “Tutti i triangoli sono equilateri” ed è equivalente alla proposizione (vera) “Qualche triangolo non è equilatero”. [D] è l’alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 9. L’enunciato vero è [A]: per ogni naturale x, infatti, esiste $y=x+1$, pure naturale, ed è evidente che $y>x$. L’alternativa corretta è perciò [A] e ci potremmo fermare qui.
Vogliamo, nondimeno, far vedere perché gli altri enunciati sono falsi:
- per l’enunciato [B] basti pensare ad $x=0$: non esiste alcun naturale y che sia minore di 0;
- anche per l’enunciato [C] basta pensare ad $x=0$, ma anche ad $x=1$;
- riguardo all’enunciato [D], è risaputo che, per ogni x, risulta $0\cdot x=0$.

Quesito 4. 1. 10. Alternativa corretta: [D].

Quesito 4. 1. 11. L’enunciato [A] è vero: basti pensare ad $x=0$.
L’enunciato [B] è vero: per ogni intero x, infatti, l’intero $x+1$ è maggiore di x.
L’enunciato [C] è vero: basti pensare alla coppia $(x=1, y=3)$.
L’enunciato [D] è falso: se, infatti, x è dispari, non esiste alcun intero y tale che $x=2y$.
L’alternativa corretta è perciò [D].

Quesito 4. 1. 12. Solo nell’enunciato [B] l’articolo “un” è usato nel senso di “ogni”. L’alternativa corretta è [B]. E questo potrebbe bastare, ma ci piace aggiungere, per completezza, che negli altri casi esso è usato nel senso di “qualche”.

Quesito 4. 1. 13. La negazione della congiunzione $P \wedge Q$ è la proposizione $\overline{P} \vee \overline{Q}$. Nel caso specifico: P = “Il numero 9 è dispari”, Q = “il numero 9 è primo”. Perciò la negazione della proposizione (falsa) “Il numero 9 è dispari e primo” è la proposizione (vera) “Il numero 9 non è dispari o non è primo”. [B] è l’alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 14. La negazione dell’implicazione $P \rightarrow Q$ è la congiunzione $P \wedge \overline{Q}$. Nel caso specifico: P = “Paolo dorme”, Q = “(Paolo) non piglia pesci”. Dunque la negazione della proposizione “Paolo dorme e non piglia pesci” è la proposizione “Paolo dorme ma piglia pesci”. [A] è l’alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 15. Si potrebbe ricorrere alle tavole di verità per rispondere al quesito, ma in questo caso è preferibile una strada più ragionata. Si ha, infatti:

$$\sim\big((A \vee B) \rightarrow (C \vee D)\big) \equiv (A \vee B) \wedge \overline{C \vee D} \equiv (A \vee B) \wedge \overline{C} \wedge \overline{D}.$$

[B] è l’alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 16. L’alternativa corretta è [C].

4. 4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 4. 2. 1. Si tratta del seguente insieme: $\{15, 35, 63, 99\}$.

Quesito 4. 2. 2. È falso. L’espressione definisce infatti l’insieme vuoto.

Quesito 4. 2. 3. Non è corretto. L’insieme $\{a,b\}$, che è un sottoinsieme di $\{a,b,c\}$, è in realtà un elemento di P(I), non un suo sottoinsieme. Gli elementi di P(I) sono infatti: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$. Bisogna scrivere pertanto $\{a,b\} \in P(I)$, mentre va bene $\{a,b\} \subset \{a,b,c\}$.

Quesito 4. 2. 4. Si trova anzitutto: $A=\{2,4,6,10,12,20,30,60\}$; quindi: $A-B=\{20,30,60\}$. Pertanto, magari utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn:
$A \cup (A - B) = A$ (ma questo vale indipendentemente da A e B);
$B \cup (A - B) = \{2,4,6,8,10,12,20,30,60\}$;
$A \cap (A - B) = A - B$ (anche questo vale indipendentemente da A e B).

Quesito 4. 2. 5. Sì, è corretto, dal momento che gli insiemi A e P(A) non hanno elementi comuni. Verificare questo nei seguenti casi: $A=\varnothing$, $A=\{1,2\}$.

Quesito 4. 2. 6. È falsa. Essa, infatti, non è vera per $a=1$, anche se è il solo valore per il quale è falsa.

Quesito 4. 2. 7. No. La negazione è la proposizione “non è vero che il numero 3 è maggiore del numero 2”, vale a dire “il numero 3 è minore o uguale al numero 2”.

Quesito 4. 2. 8. È vero. Infatti, in generale, la negazione della proposizione $A \wedge B$ è la proposizione $\overline{A} \vee \overline{B}$.

Quesito 4. 2. 9. No. La negazione della proposizione è “sono vento e non tempesto il mondo” In generale: la negazione della proposizione $A \rightarrow B$ è $A \wedge \overline{B}$.

Quesito 4. 2. 10. Dell’implicazione inversa non si può dire nulla: può essere vera e può essere falsa. Infatti la proposizione $A \rightarrow B$ è vera sia quando A e B sono o entrambe vere o entrambe false (in questi casi anche $B \rightarrow A$ è vera), sia quando A è falsa e B è vera (nel qual caso $B \rightarrow A$ è falsa). Della contronominale, invece, si può dire che è certamente vera. dal momento che le due proposizioni sono equivalenti.

Quesito 4. 2. 11. No. La negazione è "qualche numero intero non è positivo", che è come dire "qualche numero intero è negativo o nullo".

Quesito 4. 2. 12. Deve trattarsi di una frase di questo tenore: "Se questo o quest'altro allora quest'altro ancora". Ad esempio, ha questa struttura una celebre frase del matematico e didatta ungherese George Pólya (1887-1985): "Se introdotta nel punto o nel momento sbagliato la buona logica può essere il peggior nemico di un buon insegnamento".

Quesito 4. 2. 13. Il minimo numero di calzini che bisogna estrarre dal cassetto per avere la certezza che:

a) se ne possa formare un paio è 4: i primi tre calzini estratti possono essere di colore diverso, ma il quarto è certamente di uno dei tre colori già estratti;
b) si possa formare il paio di calzini neri è 8, cioè tutti i calzini contenuti nel cassetto: tra i primi sette estratti potrebbero non esserci i due calzini neri;
c) se ne possa formare un paio non di colore rosso è 7, cioè tutti e quattro i calzini rossi e, poi, altri tre calzini: i primi due calzini dopo i quattro rossi potrebbero essere ancora di colore diverso.

Quesito 4. 2. 14. Rispondendo in maniera affrettata, si potrebbe concludere che le persone siano 28+17+10, vale a dire 55. Non è così e, per essere convincenti, è opportuno illustrare la situazione con un diagramma di Eulero-Venn (Fig. 4.2), dove S' indica l'insieme dei tifosi di pallavolo (in numero di 28), S" quello dei tifosi di pallacanestro (in numero di 17), ed $S=S'\cap S''$ quello di entrambi gli sport (in numero di 10).
Poiché S comprende 10 persone, quelle che tifano solo pallavolo sono 28–10=18 e quelle che tifano solo pallacanestro sono 17–10=7. Allora le persone che formano l'insieme in questione sono in tutto 18+7+10, cioè 35.

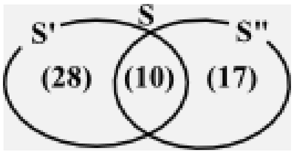


Fig. 4.2

In generale, si può affermare che, indicando con N(X) il numero degli elementi di un generico insieme X, se A e B sono due insiemi qualsiasi, risulta:

$$N(A\cup B) = N(A) + N(B) - N(A\cap B);$$

nel caso particolare in esame, per l'appunto:

$$N(S'\cup S'') = N(S') + N(S'') - N(S'\cap S'') = 28 + 17 - 10 = 35.$$

Quesito 4. 2. 15. Si potrebbe seguire un procedimento simile a quello descritto nella prima parte della precedente risoluzione. Ma preferiamo servirci del risultato ottenuto nella seconda parte e generalizzarlo prima di risolvere la nostra questione. Indicati allora con A, B, C tre generici insiemi e con N(X) il numero di elementi dell'insieme X, si ha:

$N(A\cup B\cup C) = N[(A\cup B)\cup C] = N(A\cup B) + N(C) - N[(A\cup B)\cap C] =$

$$= [N(A)+N(B)-N(A\cap B)] + N(C) - [N(A\cap C)\cup(B\cap C)] =$$
$$= N(A) + N(B) + N(C) - N(A\cap B) - [N(A\cap C) + N(B\cap C) - N(A\cap B\cap C)]=$$
$$= N(A) + N(B) + N(C) - N(A\cap B) - N(A\cap C) - N(B\cap C) + N(A\cap B\cap C).$$

A questo punto basta constatare che un numero divisibile per 6 è divisibile per 2 e per 3, uno divisibile per 10 è divisibile per 2 e per 5, uno divisibile per 15 è divisibile per 3 e per 5 ed uno divisibile per 30 è divisibile per 2, per 3 e per 5.
Posto allora:
A = insieme dei numeri divisibili per 2,
B = insieme dei numeri divisibili per 3,
C = insieme dei numeri divisibili per 5,
si ha che il numero delle palline contenute nell'urna è:

$$N(A\cup B\cup C) = N(A)+N(B)+N(C)-N(A\cap B)-N(A\cap C)-N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C)=$$
$$= 17 + 11 + 7 - 5 - 3 - 2 + 1 = 26.$$

I numeri che contrassegnano le palline, dovendo essere i più piccoli possibili, fra i numeri naturali, sono i seguenti:

2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 8 – 9 – 10 – 12 – 14 – 15 – 16 – 18 – 20 –
21 – 22 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 30 – 32 – 33 – 34 – 35.

4. 5 Antologia.

Molti problemi, presentati sotto forma di indovinelli, si risolvono con considerazioni matematiche, ma spesso la strategia per la loro risoluzione richiede di sapere usare un po' la testa piuttosto che il ricorso a formule, regole o metodi rigidi e cristallizzati. Siccome perciò non è possibile fruire di percorsi standard, si è obbligati ad "inventare" ogni volta una strategia adatta alla circostanza.
Di questioni siffatte sono piene le riviste di enigmistica, ma per chi avesse voglia di misurarsi con problemi impegnativi, non mancano libri interessanti sull'argomento.
Alcuni di questi, tra i più gradevoli, sono stati scritti da Martin Gardner (1914-2010), logico e matematico statunitense, ma anche illusionista, letterato e filosofo. Nell'Introduzione all'edizione italiana *Enigmi e giochi matematici*, curata da Mario Carlà e pubblicata nel 1997 da Rizzoli per i tipi BUR Supersaggi, Gardner scrive:
«Il lato divertente, che rende ricreativo il passatempo matematico, può presentarsi sotto varie forme: un indovinello da risolvere, un gioco competitivo, un trucco magico, un paradosso, un inganno o, semplicemente, della matematica con ogni sorta di scherzi e curiosità stimolanti. Sono, questi, esempi di matematica pura o applicata? È difficile dirlo. In un certo senso la matematica ricreativa è matematica pura, non contaminata da criteri utilitaristici. In un altro senso è matematica applicata, in quanto soddisfa l'universale bisogno umano di giocare.
«Forse questo bisogno di giocare si nasconde anche nella matematica pura. Non vi è molta differenza fra il piacere provato da un dilettante nel risolvere un abile rompicapo ed il piacere che un matematico prova nel dominare un problema più difficile.»
Proprio nello spirito degli enigmi proposti da Gardner, invitiamo il lettore a risolvere da solo il seguente problema, prima di leggerne la risoluzione che segue la traccia.

PROBLEMA.

Fabio sta conducendo un esperimento ed ha bisogno di 4 litri esatti d'acqua. In realtà egli dispone di una vasca piena d'acqua e di due recipienti, uno della capacità di 3 litri e l'altro della capacità di 5 litri. Ce la farà Fabio a procurarsi i 4 litri che gli servono?
Giustificare la risposta.

RISOLUZIONE.

Indichiamo con A il recipiente da 3 litri e con B quello da 5 litri. Questa la procedura che segue Fabio per procurarsi la quantità d'acqua necessaria:

1) Riempie A e lo svuota in B.
2) Riempie A e versa in B la quantità d'acqua necessaria a riempire B, vale a dire 2 litri. In A resta 1 litro d'acqua.
3) Svuota B e vi versa il contenuto di A, cioè 1 litro.
4) Riempie A e lo svuota in B. A questo punto B contiene esattamente 4 litri d'acqua.