Capitolo 4 (Integrazione a unità 34-35)

Vettori e matrici

4. 1 Quesiti a risposta chiusa.

4. 1. 1 Comunque siano scelti i punti A, B, C, il vettore $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ è:

[A] il vettore nullo; [B] il vettore $2\,\overrightarrow{AC}$;

[C] il vettore $2\,\overrightarrow{BC}$; [D] un vettore diverso dai tre precedenti.

4. 1. 2 In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnati i punti A(2,0) e B(2,2). Qual è la pendenza della retta OC sapendo che $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$?

[A] 1; [B] 2; [C] 1/2; [D] 3/2.

4. 1. 3 Si considerino le due seguenti proposizioni:

P : il prodotto scalare di due vettori è commutativo;

Q : il prodotto vettoriale di due vettori è commutativo.

Risulta:

[A] P vera, Q vera; [B] P vera, Q falsa; [C] P falsa, Q vera; [D] P falsa, Q falsa.

4. 1. 4 È dato il sistema formato dalle due equazioni:

$$x+y+z=10,\ \ 3x+y+z=20,$$

dove le incognite x, y, z sono numeri interi positivi tali che y<z. Indicato con n il numero delle sue soluzioni, risulta che:

[A] n=1; [B] n=2; [C] n è indeterminato; [D] n è infinito.

4. 1. 5 Sono date le matrici A (m righe ed n colonne) e B (h righe e k colonne). Per poter effettuare la somma A+B è necessario e sufficiente che sia:

[A] m=n=h=k; [B] m=k ed n, h qualsiasi; [C] n=h ed m, k qualsiasi; [D] m=h ed n=k.

4. 1. 6 Sono date le matrici A (m righe ed n colonne) e B (h righe e k colonne). Per poter effettuare il prodotto AB è necessario e sufficiente che sia:

[A] m=n=h=k; [B] m=k ed n, h qualsiasi; [C] n=h ed m, k qualsiasi; [D] m=k ed n=h.

4. 1. 7 Ammettiamo di indicare con $X_{(m,n)}$ una generica matrice di ordine mn (vale a dire di m righe ed n colonne). Quali delle seguenti matrici **NON** sono compatibili per il prodotto AB?

[A] $A_{(3,4)}$ e $B_{(3,4)}$; [B] $A_{(2,3)}$ e $B_{(3,4)}$; [C] $A_{(3,4)}$ e $B_{(4,2)}$; [D] $A_{(4,2)}$ e $B_{(2,3)}$.

4. 1. 8 Ammettiamo di indicare con $X_{(m,n)}$ una generica matrice di ordine mn. Con quale delle seguenti matrici la matrice $A_{(1,3)}$ risulta compatibile per il prodotto AB?

[A] $B_{(1,1)}$; [B] $B_{(2,1)}$; [C] $B_{(3,1)}$; [D] $B_{(2,3)}$.

4. 1. 9 Qual è il valore del determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$?

[A] 0 ; [B] 2 ; [C] 4 ; [D] 8.

4. 2 Quesiti a risposta aperta.

4. 2. 1 È vero o è falso che quattro vettori, comunque scelti nel piano, sono linearmente dipendenti?

4. 2. 2 Verificare che, comunque siano presi nel piano i punti A, B, C, D, vale la seguente relazione:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\vec{0}.$$

4. 2. 3 Applicando la relazione verificata nel precedente quesito, dimostrare che le altezze di un triangolo passano tutte per un medesimo punto (è l'*ortocentro* del triangolo).

4. 2. 4 Si dimostri che se le diagonali di un quadrilatero sono perpendicolari, la somma dei quadrati di due lati opposti è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.
[Assegnato all'esame di Stato 2010, liceo scientifico di ordinamento, sessione straordinaria]

4. 2. 5 Dimostrare, utilizzando il calcolo vettoriale, che il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un qualunque triangolo è parallelo al terzo lato ed è uguale alla metà di esso.

4. 2. 6 Risolvere il sistema formato dalle seguenti equazioni nelle incognite a, b, c, d, e:

$$a+b=\frac{5}{2}\ ,\quad b+c=2\ ,\quad c+d=\frac{5}{2}\ ,\quad d+e=\frac{7}{2}\ ,\quad a+c+e=6\ .$$

4. 2. 7 Quel sabato, alcuni amici si recarono in pizzeria e consumarono 8 pizze e 4 bicchieri di birra, ma Mario prese anche il caffè. Spesero complessivamente € 49,5. Qualche giorno dopo ritornarono nella stessa pizzeria e consumarono 11 pizze e 5 bicchieri di birra, con Mario che prese anche il solito caffè, spendendo questa volta € 66,5. Di nuovo decisero di ritornare nella medesima pizzeria, anche se adesso il numero dei partecipanti si era drasticamente ridotto, ma c'era sempre Mario. Prevedevano di consumare 2 pizze, 2 bicchieri di birra ed il solito caffè per Mario. Erano in grado di stabilire preventivamente quanto avrebbero speso?

4. 2. 8 Date le due seguenti matrici: $A=\begin{Vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{Vmatrix}$ e $B=\begin{Vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{Vmatrix}$, calcolare A+2B.

4. 2. 9 Considerate le due stesse matrici A e B del quesito precedente, calcolare AB e BA. Sono uguali le due matrici ottenute?

4. 2. 10 Si considerino le seguenti matrici:

$$A=\begin{Vmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}-2\\ 4\end{Vmatrix},\quad D=\begin{Vmatrix}2 & 5 & 3\end{Vmatrix}.$$

Le matrici A e B sono compatibili per il prodotto AB? Lo sono per il prodotto BA? Le matrici C e D sono compatibili per il prodotto CD? Lo sono per il prodotto DC? Quando c'è la compatibilità, calcolare la matrice prodotto.

4. 2. 11 Ammettiamo di indicare con X^t la trasposta della matrice X. Date le due matrici: $A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{Vmatrix}$ e $B=\begin{Vmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 3 & 5\end{Vmatrix}$, è vero o è falso che $(A+B)^t=A^t+B^t$?

4. 2. 12 È data la matrice $\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{Vmatrix}$. Trovarne la trasposta e l'inversa.

4. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 4. 1. 1. Il vettore $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ è uguale al vettore $\overrightarrow{AC}$. Pertanto il vettore $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ è uguale a $2\overrightarrow{AC}$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 2. Il punto C ha coordinate (4,2). Di conseguenza la retta OC ha equazione $y=\frac{1}{2}x$. Quindi è 1/2 la sua pendenza. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 3. [B] è l'alternativa corretta. Infatti, comunque si prendano i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, risulta: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ mentre $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$.

Quesito 4. 1. 4. Risolvendo le due equazioni rispetto ad y+z si trova:

$$y + z = 10 - x, \quad y + z = 20 - 3x,$$

da cui segue: $10-x=20-3x$ e perciò $x=5$. Di conseguenza: $y+z=5$. Da qui, tenendo presente che y e z sono interi positivi con $y<z$, si desume che $y=1$ (e perciò $z=4$) ed $y=2$ (e perciò $z=3$). Le soluzioni sono pertanto le seguenti: ($x=5$, $y=1$, $z=4$), ($x=5$, $y=2$, $z=3$). [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 5. Per poter eseguire la somma di due matrici è necessario e sufficiente che esse abbiano un ugual numero di righe ed un ugual numero di colonne, vale a dire, nel caso specifico, che sia $m=h$ ed $n=k$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 6. Per poter eseguire il prodotto AB delle due matrici A e B è necessario e sufficiente che il numero n di colonne di A sia uguale al numero h di righe di B (quindi: $n=h$), mentre m ed k possono essere qualsiasi. In questo caso il prodotto è una matrice $m\times k$. [C] è l'alternativa corretta.
Per quanto concerne l'alternativa [D], facciamo notare che la condizione posta ($m=k$ ed $n=h$) è sufficiente per la compatibilità del prodotto AB ma non è necessaria (infatti m e k possono essere qualsiasi e non necessariamente uguali).

Quesito 4. 1. 7. Il prodotto è possibile se e solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. Questa condizione non è soddisfatta soltanto per le matrici dell'alternativa [A]. [A] è pertanto l'alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 8. La matrice $A_{(1,3)}$ risulta compatibile per il prodotto AB soltanto con la matrice $B_{(3,1)}$ e la matrice prodotto AB è di ordine 1×1. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 4. 1. 9. L'alternativa corretta è [B].

4. 4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 4. 2. 1. È vero. Presi infatti in maniera arbitraria i vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, tre qualunque di essi, ad esempio i primi tre, sono linearmente dipendenti in virtù di un noto teorema. Se ne desume che esistono tre numeri reali p, q, r, non tutti nulli, tali che $p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=\vec{0}$. Di conseguenza risulta pure: $p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}+0\vec{d}=\vec{0}$. E ciò equivale a dire che i quattro vettori sono linearmente dipendenti.

Quesito 4. 2. 2. Basta constatare che $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$ e ricordare che il prodotto scalare è commutativo. Si ha allora:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}+\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{DA}+\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)\cdot\overrightarrow{DB}=$$
$$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\vec{0}\,.$$

Quesito 4. 2. 3. Indicato con ABC un triangolo e chiamato D il punto in cui si intersecano le due altezze relative ai lati AB e BC, nella relazione $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ i prodotti scalari $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}$ risultano nulli poiché i due vettori di ciascun prodotto sono ortogonali. La relazione diventa pertanto $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\vec{0}$. E perciò anche i vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{DB}$ sono ortogonali. Questo vuol dire che l'altezza del triangolo relativa al lato AC passa per D.

Quesito 4. 2. 4. Supponiamo che sia ABCD il quadrilatero assegnato (Fig. 4.1) e sia O il punto in cui si secano le sue diagonali perpendicolari AC e BD.
Risulta evidentemente: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, da cui segue: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$.
Da qui, elevando entrambi i membri al quadrato e sviluppando si ottiene:

$$\overline{AB}^2+\overline{DC}^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2-2\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\,.$$

Per dimostrare l'asserto basta allora far vede che: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.
Il che si dimostra direttamente o chiamando in causa il quesito 4.2.2.

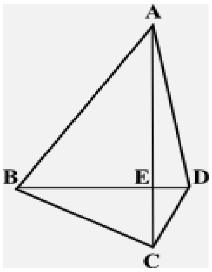

Fig. 4.1

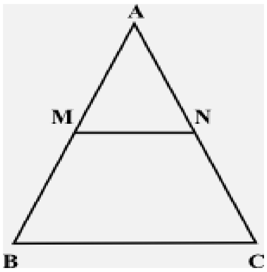

Fig. 4.2

Quesito 4. 2. 5. Considerato un triangolo generico ABC (Fig. 4.2), siano M ed N i punti medi dei lati AB e AC rispettivamente. Si ha: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$, da cui sommando membro a membro segue: $2\,\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CN}\right)$. D'altro canto, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ e $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CN}$ sono uguali al vettore nullo, per cui risulta: $2\,\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$, ossia: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
Il che dimostra che la corda MN è parallela al lato BC ed è la metà di esso.

Quesito 4. 2. 6. Il sistema si può risolvere ovviamente mediante un metodo tradizionale, anche se il procedimento sarebbe lungo e, alla fine, anche noioso. Seguiamo un'altra strada. Per questo consideriamo l'equazione che si ottiene sommando membro a membro quelle che formano il sistema. Otteniamo:

$$2(a+b)+3c+2(d+e)=\frac{33}{2},$$

da cui, tenendo presenti i valori di a+b e di d+e, segue:

$$2\cdot\frac{5}{2}+3c+2\cdot\frac{5}{2}=\frac{33}{2}$$

e pertanto, rrisolvendo rispetto a c, si trova: c=3/2. Di conseguenza, a seguire: b=1/2, a=2, d=1, e=5/2.

Quesito 4. 2. 7. Conviene indicare con x, y, z il costo rispettivamente di una pizza, un bicchiere di birra ed un caffè. I dati del problema portano al sistema delle due seguenti equazioni nelle incognite x, y, z:

$$8x + 4y + z = 49{,}5 \qquad 11x + 5y + z = 66{,}5.$$

Avendo due sole equazioni in tre incognite il sistema non è determinato, nel senso che possiamo esprimere due delle tre incognite in funzione della terza, ma se non conosciamo il valore di questa non possiamo conoscere neppure i valori delle altre due. Ma procediamo ugualmente calcolando y, z in funzione di x. Otteniamo: y=17–3x, z=4x–18,5. La somma S spesa dal gruppo di amici la terza volta è allora:

$$S=2x+2y+z=2x+2(17-3x)+(4x-18{,}5)=15{,}5\ (€).$$

Dunque, pur non conoscendo il costo unitario di pizza, bicchiere di birra e caffé, gli amici possono ugualmente sapere quanto spenderanno per quella consumazione.

Quesito 4. 2. 8. Si ha: A+2B $= \begin{Vmatrix} 1-4 & -1-2 \\ 2+6 & -2+2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 & -3 \\ 8 & 0 \end{Vmatrix}$.

Quesito 4. 2. 9. Si ha:

$$AB = \begin{Vmatrix} (1)(-2)+(-1)(3) & (1)(-1)+(-1)(1) \\ (2)(-2)+(-2)(3) & (2)(-1)+(-2)(1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5 & -2 \\ -10 & -4 \end{Vmatrix};$$

$$BA = \begin{Vmatrix} (-2)(1)+(-1)(2) & (-2)(-1)+(-1)(-2) \\ (3)(1)+(1)(2) & (3)(-1)+(1)(-2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{Vmatrix}.$$

Evidentemente AB≠BA. E, in verità, questo è un fatto che si verifica di norma: il prodotto di due matrici non è commutativo.

Quesito 4. 2. 10. Le matrici A e B non sono compatibili per il prodotto AB, lo sono invece per il prodotto BA e la matrice prodotto BA è di ordine 2×3. In effetti si trova che:

$$BA = \begin{Vmatrix} 1\cdot 3+5\cdot 4 & 1\cdot 2+5\cdot 1 & 1\cdot 1+5\cdot 2 \\ 2\cdot 3+3\cdot 4 & 2\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot 1+3\cdot 2 \end{Vmatrix}$$

vale a dire:

$$BA = \begin{Vmatrix} 23 & 7 & 11 \\ 18 & 7 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Riguardo alle matrici C e D, sono compatibili per il prodotto CD e la matrice prodotto è di ordine 2×3, mentre non lo sono per il prodotto DC. Si calcola che:

$$CD = \begin{Vmatrix} (-2)(2) & (-2)(5) & (-2)(3) \\ (4)(2) & (4)(5) & (4)(3) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4 & -10 & -6 \\ 8 & 20 & 12 \end{Vmatrix}.$$

In generale, le matrici X e Y sono compatibili per il prodotto XY se il numero delle colonne di X è uguale al numero delle righe di Y. In tal caso, la matrice prodotto XY è di ordine mn, dove m è il numero delle righe di X ed n quello delle colonne di Y.

Quesito 4. 2. 11. È vero, anzi la proprietà vale quali che siano le due matrici A e B purché entrambe dello stesso numero di righe e dello stesso numero di colonne. La verifica, almeno nel caso proposto delle due matrici 2×3 è elementare.

Quesito 4. 2. 12. Indicata con A la matrice assegnata, la sua trasposta è la matrice $A^t = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$. L'inversa di A è invece la matrice $A^{-1}=\frac{1}{D}A^t$, dove D è il determinate di A. Siccome D=1, risulta evidentemente $A^{-1}=A^t$.

4. 5 Évariste Galois: vita ed opere.

Galois

Nacque in una cittadina, nei pressi di Parigi, nel 1811 e morì a Parigi il 31 maggio 1832 quando non ancora aveva compiuto 21 anni, in seguito ad un assurdo duello, nel corso del quale fu ferito a morte. Il suo contributo alla matematica consiste in alcuni manoscritti, che complessivamente riempiono una sessantina di pagine: uno di essi fu scritto nella notte fra il 29 ed il 30 maggio 1832, alla vigilia del fatale duello.

Galois fu un vero e proprio genio matematico, ma il suo temperamento impetuoso ed una tormentata storia familiare lo indussero a comportamenti idioti. "Genio e imbecillità" è intitolato il capitolo a lui dedicato dallo storico Eric T. Bell [1] e forse titolo non fu mai più azzeccato. Una biografia, immaginaria e romanzata, della vita di Galois, è stata pubblicata abbastanza recentemente dallo scrittore australiano Tom Petsinis [2]. È un romanzo alla portata dei giovani studenti ai quali queste note sono indirizzate.

Évariste dimostrò la sua inclinazione per la matematica fin dai suoi primi studi, iniziati all'età di 12 anni, quando entrò al liceo Louis le Grand di Parigi. A dire il vero sarebbe più corretto dire che egli si interessò solo allo studio della matematica, dal momento che nutrì interesse scarso o addirittura nullo per le altre discipline. Questo ovviamente non gli guadagnò la benevolenza dei suoi insegnanti, che lo valutarono sempre negativamente, se si esclude il suo professore di matematica, che ne intuì le potenzialità, ma senza riuscire a convincerlo della necessità di uno studio sistematico della disciplina. Questa mancanza di preparazione sistematica gli costò l'iscrizione all'École Polytechnique, alla quale Galois aspirava fortemente poiché quella scuola, quantunque fondata da poco (1794), aveva già formato illustri matematici. Egli, infatti, fu bocciato due volte all'esame di ammissione alla scuola. La seconda volta, comprendendo come si

[1] Cfr.: Eric T. Bell, *I grandi matematici*, Sansoni editore, Firenze, 1966, pag. 368.
[2] Tom Petsinis, *Il matematico francese* (trad. ital. di Fabio Paracchini), Milano, Baldini&Castoldi, 1999.

stava svolgendo l'esame e vedendo sfuggire la speranza di una vita da matematico, perse la pazienza e «in un impeto di rabbia e di disperazione al pensiero che sarebbe stato respinto, lanciò la cimosa in faccia all'esaminatore» (3).

Riuscì poi, anche grazie ai buoni uffici del suo professore di matematica, ad entrare all'École Normale nel 1830. Non era il Politecnico, ma il diploma, una volta conseguito, gli avrebbe garantito una vita dignitosa dedicata all'insegnamento della matematica. Sennonché ne fu espulso pochi mesi dopo perché, di fronte agli sconvolgimenti politici di quel periodo, aveva assunto un atteggiamento fortemente critico e polemico nei confronti dell'autorità costituita, che peraltro lo teneva sotto controllo.

Essendo rimasto senza mezzi di sostentamento, cercò di mantenersi dando lezioni private, ma non trovò allievi. Aveva diciannove anni. La sua vita, se possibile, incominciò a farsi più travagliata: due volte fu messo in prigione per essersi schierato coi rivoluzionari contro il re Luigi Filippo; dopo la sua ultima liberazione, il 29 maggio 1832, si fece trascinare in un assurdo duello, che l'avrebbe visto soccombente. Ecco cosa scrisse ad un amico: «Prego i patrioti ed amici di non rimproverarmi se non muoio per la patria. Io muoio vittima di un'infame civetta e di due uomini che sono il suo zimbello, in mezzo a dei miserabili pettegolezzi …» (4).

Durante la sua breve vita, Galois scrisse degli articoli di matematica, due dei quali spedì all'Accademia delle Scienze, uno all'età di 17 anni e l'altro due anni dopo, ma entrambi andarono perduti. Gli altri saranno pubblicati, ad opera del matematico Joseph Liouville (1809-1882), 14 anni dopo la sua morte, assieme al sommario delle sue scoperte, scritto alla vigilia del famigerato duello e tempestato, nel margine dei fogli, di frasi del tipo "*Mi manca il tempo*!". Liouville ha faticato non poco a decrittare gli scritti di Galois, che, ad onor del vero, era molto oscuro nel suo modo di esprimersi, anche per le novità dei concetti che esprimeva. Ad ogni buon conto, i lavori pubblicati fecero conoscere all'universo matematico un vero e proprio genio e fecero capire quali grandi risultati aveva trovato il suo giovane autore e, quanti altri, potenzialmente, avrebbe potuto trovarne se fosse vissuto.

Questi risultati aprirono le porte a quella che oggi si chiama "algebra astratta". Chi proseguirà negli studi universitari in Matematica avrà modo di occuparsene a fondo.

[3] Eric T. Bell, op. cit., pag. 375.
[4] Eric T. Bell, op. cit., pag. 381.