Capitolo 5 (Integrazione a unità 36-37)

Goniometria. Trigonometria

5.1 Quesiti a risposta chiusa.

5.1.1 Esiste almeno un angolo α tale che:

[A] $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; [B] $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$;

[C] $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ e $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; [D] $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

5.1.2 Un angolo ottuso α ha il coseno uguale a $-\frac{1}{2}$. Quanto vale il suo seno?

[A] $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; [B] $\frac{\sqrt{2}}{2}$; [C] $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; [D] $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.1.3 Quanti angoli esistono, compresi fra 0° e 180° ed il cui seno è uguale a –0,15?

[A] 0 ; [B] 1 ; [C] 2 ; [D] 4 .

5.1.4 Quale delle seguenti coppie di uguaglianze è vera?

[A] $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120° = \sqrt{3}$; [B] $\sin 120° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$;

[C] $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\tan 120° = -\sqrt{3}$; [D] $\sin 120° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120° = -\sqrt{3}$.

5.1.5 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la retta di equazione $y=\frac{4}{3}x-1$. Quanto vale il seno dell'angolo che essa forma con l'asse x?

[A] 3/5. [B] –3/5. [C] 4/5. [D] –4/5.

5.1.6 Il seno di 80° risulta essere uguale a:

[A] $\sin 60° + \sin 20°$; [B] $2\sin 40°$; [C] $2\sin 40°\cos 40°$; [D] un valore diverso.

5.1.7 Il coseno di 28° risulta essere uguale a:

[A] $\cos 50° - \cos 22°$; [B] $\frac{1}{2}\cos 56°$; [C] $2\cos 14°\sin 14°$; [D] un valore diverso.

5.1.8 Posto che α sia un angolo qualsiasi strettamente compreso fra 0° e 90°, risulta che:

[A] $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha$; [B] $\sin(2\alpha)<2\sin\alpha$;

[C] $\sin(2\alpha)>2\sin\alpha$; [D] non è possibile il confronto fra $\sin(2\alpha)$ e $2\sin\alpha$.

5.1.9 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette a, b di equazioni rispettivamente $y=2x-1$ e $y=-x+2$. Quanto vale la tangente dell'angolo orientato (a,b)?

[A] 1/3. [B] –1/3. [C] 3. [D] –3.

5.1.10 Si consideri l'espressione: $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$. Qual è una sua semplificazione?

[A] $\tan\alpha$. [B] $\tan 2\alpha$. [C] $\tan 6\alpha$. [D] $\tan\alpha+\tan 2\alpha+\tan 3\alpha$.

5.1.11 I lati AB e AC di un triangolo misurano rispettivamente 8 cm e 5 cm e l'angolo $B\hat{A}C$ è ampio 28°. L'area del triangolo, espressa in centimetri quadrati, è:
[A] 40 cos 28° ; [B] 40 sin 28°; [C] 40 tan 28° ; [D] un valore diverso.

5.1.12 I lati AB e AD del parallelogramma ABCD misurano rispettivamente 4 cm e 6 cm e l'angolo $B\hat{A}C$ è ampio 15°. Indicata con S l'area del parallelogramma:
[A] $S=6\sqrt{3}$ cm^2; [B] S=12 cm^2; [C] S=24 cm^2; [D] S non si può calcolare.

5.1.13 Le diagonali di un trapezio misurano 6 cm e 10 cm e formano un angolo di 60°. Indicata con S l'area del trapezio:
[A] $S=\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm^2; [B] $S=15\sqrt{3}$ cm^2; [C] $S=30\sqrt{3}$ cm^2; [D] S non si può calcolare.

5.1.14 Nel triangolo ABC le mediane AM e BN misurano rispettivamente $2\sqrt{3}$ cm e 4 cm e l'angolo $A\hat{O}B$, dove O è il baricentro del triangolo è ampio 120°. Indicata con S l'area del triangolo:
[A] S = 4 cm^2; [B] $S = 4\sqrt{3}$ cm^2; [C] S = 8 cm^2; [D] S non si può calcolare.

5.1.15 Nel triangolo ABC l'angolo in A ha il coseno uguale ad 1/8. Detto D l'incentro del triangolo, la spezzata BDC lo divide il due regioni equivalenti. Sapendo che DB e DC misurano rispettivamente 4 m e 2 m, quant'è l'area del triangolo?
[A] meno di 6 m^2. [B] 6 m^2; [C] più di 6 m^2 ma neno di 8 m^2; [D] 8 m^2.

5.1.16 Un tratto di strada è formato da due tronconi: il primo, di 5 km, ha una pendenza media dell'8%; il secondo, di 7 km, ha una pendenza media dell'11%. Qual è la pendenza media dell'intero tratto di strada?
[A] 9,50%. [B] 9,75%. [C] 10,00%. [D] 10,25%.

5.2 Quesiti a risposta aperta.

5.2.1 Un angolo ottuso α ha il seno uguale a 3/5. È vero che il suo coseno è 4/5?

5.2.2 Un angolo ottuso α ha la tangente uguale a –3/4. Calcolarne seno e coseno.

5.2.3 Gli angoli α, β sono tali che: $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ e $\tan\beta=\frac{4}{3}$. Senza utilizzare strumenti di calcolo automatico né tavole trigonometriche, stabilire se α e β possono essere angoli di un medesimo triangolo.

5.2.4 Considerati gli angoli acuti α e β, tali che $\tan\alpha=2$ e $\tan\beta=3$, calcolare $\alpha+\beta$ senza servirsi di strumenti di calcolo automatico.

5.2.5 Verificare la seguente identità:

$$\sin 3\alpha=2^2\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right).$$

5.2.6 I lati AB e AC di un triangolo misurano rispettivamente 6 cm e 3 cm e l'angolo $B\hat{A}C$ è ampio 30°. È vero o è falso che il triangolo ABC è isoscele sulla base AB?

5. 2. 7 Due angoli di un triangolo misurano 30° e 60°. I suoi lati sono direttamente proporzionali a tre numeri reali: determinarli.

5. 2. 8 Le diagonali di un parallelogramma hanno misure note a, b e formano un angolo di ampiezza nota α. È possibile calcolare l'area del parallelogramma?

5. 2. 9 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2,3) e B(3,2). Calcolare il coseno dell'angolo AÔB.

5. 2. 10 Siano b, c i cateti di un triangolo rettangolo ed a la sua ipotenusa. Si sa che è:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

È possibile calcolare le ampiezze degli angoli acuti del triangolo?

5. 2. 11 I numeri L^2-1, $2L+1$, L^2+L+1, dove L è un numero positivo dato, sono le misure dei lati di un triangolo, espressi in una medesima unità di misura. Qual è la misura del maggiore degli angoli del triangolo?

5. 2. 12 Un rombo ed un quadrato hanno la stessa area. A meno che anche il rombo non sia un quadrato, possono avere lo stesso perimetro?

5. 3 Risposte commetante: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 5. 1. 1. Deve essere soddisfatta la condizione $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ e questo accade solo per l'alternativa [D], che pertanto è quella corretta.

Quesito 5. 1. 2. $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.[D] è l'alternativa corretta.

Quesito 5. 1. 3. [A] è l'alternativa corretta. Infatti, gli angoli compresi fra 0° e 180° esclusi hanno tutti il seno positivo, mentre $\sin 0°=\sin 180°=0$.

Quesito 5. 1. 4. L'alternativa corretta può essere trovata immediatamente: basta constatare che l'angolo di 120° cade nel 2° quadrante, dove il seno è positivo mentre coseno e tangente sono negativi, e l'unica alternativa che soddisfa a queste condizioni è la [C].

Quesito 5. 1. 5. La pendenza della retta, vale a dire 4/3, è la tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse x. Il seno dell'angolo è allora 4/5. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 5. 1. 6. In generale: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. Quindi [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 5. 1. 7. Il coseno di 28° può essere scritto in varie maniere, ad esempio:

$$\cos 28°=\cos^2 14°-\sin^2 14°,\quad \cos 28°=\sqrt{\frac{1+\cos 56°}{2}},\ \text{ eccetera,}$$

ma non può essere scritto in alcuno dei modi [A], [B] o [C]. [D] è pertanto l'alternativa corretta.

Quesito 5. 1. 8. Constatiamo anzitutto che $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ e siccome $0<\cos\alpha<1$, risulta $2\sin\alpha\cos\alpha<2\sin\alpha$. Perciò $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.9. Si ha: $\tan(a,b)=\dfrac{m_b-m_a}{1+m_a m_b}=\dfrac{-1-2}{1+2(-1)}=3$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.10. In virtù delle formule di prostaferesi si ha:

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha\,,\quad \cos\alpha+\cos 3\alpha=2\cos 2\alpha\cos\alpha\,.$$

Indicato pertanto con E il valore dell'espressione assegnata, risulta:

$$E=\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\,(2\cos\alpha+1)}{\cos 2\alpha\,(2\cos\alpha+1)}=\tan 2\alpha.$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.11. L'area del triangolo è $\frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin B\widehat{A}C$, vale a dire $20\sin 28°$.

[D] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.12. L'area S del parallelogramma si potrebbe calcolare in due modi:

$$S=\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin B\widehat{A}D\ \text{ oppure } S=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin B\widehat{A}C\,.$$

Purtroppo, nel primo caso non è noto l'angolo $B\widehat{A}D$ mentre nel secondo non è nota la diagonale AC. Di conseguenza S non si può calcolare. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.13. Indicato con ABCD il trapezio e con O il punto d'incontro delle sue diagonali, constatiamo anzitutto che i quattro angoli che esse formano sono, a due a due, o uguali o supplementari, per cui i loro seni sono uguali. Osserviamo poi che il trapezio è diviso nei due triangoli ACB e ACD dalla diagonale AC e inoltre che le altezze di questi due triangoli rispetto alla base AC sono BO sin 60° e DO sin 60°. Si ha pertanto:

$$S=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BO}\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DO}\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot(\overline{BO}+\overline{DO})\cdot\sin 60°=$$

$$=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.14. Si può procedere in vari modi per individuare l'alternativa corretta. Descriviamo quello che a nostro parere è il più immediato. I segmenti AO, BO e CO dividono il triangolo in tre triangoli equivalenti (la dimostrazione di ciò è lasciata per esercizio al lettore). Di conseguenza l'area S del triangolo ABC è il triplo dell'area del triangolo AOB. Per una nota proprietà del baricentro (punto d'incontro delle mediane) si ha, d'altro canto, che le misure di AO e BO, espresse in centimetri, sono nell'ordine $\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{2}{3}\cdot 4=\frac{8}{3}$. Pertanto:

$$S=3\cdot\frac{1}{2}\,\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot\sin 120°=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8\ (\text{cm}^2).$$

[C] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.15. Naturalmente l'area del triangolo ABC è il doppio di quella del triangolo DBC. Basta allora calcolare l'area di questo secondo triangolo. Si constata anzitutto che $B\widehat{D}C=180°-\frac{1}{2}(180°-\alpha)=90°+\frac{\alpha}{2}$. Di modo che l'area del triangolo DBC è:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\sin\left(90°+\frac{\alpha}{2}\right).$$

D'altro canto: $\sin\left(90°+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}}=\frac{3}{4}$.

Pertanto: S = 3 m². In definitiva l'area del triangolo ABC è 6 m². [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 5. 1. 16. Nel primo tratto la strada s'innalza di 5×0,08 km=400 m; nel secondo s'innalza di 7×0,11 km=770 m. Quindi l'innalzamento totale è di 1.170 m. D'altro canto l'intero percorso misura 12 km=12.000 m. Di conseguenza la sua pendenza media è 1.170/12.000 = 9,75%. [B] è l'alternativa corretta.

5. 4 Risposte commetante: **quesiti a risposta aperta**.

Quesito 5. 2. 1. No, dal momento che il coseno di un angolo ottuso è negativo. Il coseno corretto è infatti −4/5.

Quesito 5. 2. 2. Bisogna tener presente anzitutto che il seno dell'angolo in questione è positivo mentre il coseno è negativo ed inoltre che devono essere soddisfatte le due condizioni seguenti:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}\ ,\quad \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\ .$$

Dopo aver risolto rispetto a sin α e cos α, si trova:

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\ ,\ \cos\alpha=-\frac{4}{5}\ .$$

Quesito 5. 2. 3. Affinché gli angoli α e β siano angoli di un triangolo deve accadere che sia 0°<α+β<180°, ovvero 0<sin(α+β)<1. Si tratta allora di calcolare sen(α+β).
Incominciamo ad osservare che:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ .$$

D'altro canto, essendo $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, si calcola $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; ed essendo $\tan\beta=\frac{4}{3}$, si può calcolare che $\sin\beta=\frac{4}{5}$ e $\cos\beta=\frac{3}{5}$. Di conseguenza:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{7}{25}\ .$$

Gli angoli α e β non possono essere angoli di un medesimo triangolo.

Quesito 5. 2. 4. Osserviamo che si ha:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1\ .$$

Risulta pertanto che α+β=135°.

Quesito 5. 2. 5. Si tratta di trasformare i due membri in modo che diventino uguali ad una stessa quantità.
Elaboriamo il 1° membro:

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$$
$$=(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha\ .$$

Elaboriamo il 2° membro:

$$2^2 \sin\alpha \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=4 \sin a \left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)\left(-\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)=$$

$$=4 \sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha\ .$$

L'identità è dimostrata.

Quesito 5. 2. 6. Indicata con BH l'altezza del triangolo relativa al lato AC, si ha BH=AB/2 e quindi BH=3 cm. D'altro canto BC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BHC, per cui BC>BH, vale a dire BC > 3 cm. Siccome AC=3 cm, il triangolo ABC non è isoscele sulla base AB.

Quesito 5. 2. 7. I lati di ogni triangolo sono direttamente proporzionali ai seni degli angoli opposti. Nel nostro caso, considerato che gli angoli sono ampi 30°, 60° e, ovviamente, 90°, i lati sono proporzionali ai numeri:

$$\sin 30°=\frac{1}{2},\quad \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin 90°=1.$$

Quesito 5. 2. 8. Si può ragionare in vari modi, più o meno complicati, ma quello più semplice ed immediato è basato sul fatto che i quattro triangoli in cui il parallelogramma è diviso dalle diagonali sono equivalenti. Si trova che l'area S del parallelogramma è:

$$S=\frac{1}{2}a\,b\sin\alpha\,.$$

Quesito 5. 2. 9. Si può procedere in più modi. Uno, ad esempio, presuppone di calcolare dapprima i coefficienti angolari delle rette OA ed OB, quindi la tangente dell'angolo $A\hat{O}B$ e infine il coseno di questo angolo. Invitiamo il lettore a seguire questo procedimento.
Un altro procedimento è basato sul concetto di prodotto scalare di due vettori ed è esattamente questo procedimento che noi vogliamo descrivere. Si ha:
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos A\hat{O}B$, da cui segue: $\cos A\hat{O}B=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}=\dfrac{2\cdot3+3\cdot2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

Quesito 5. 2. 10. L'equazione assegnata, liberando dal denominatore, si semplifica nella forma seguente: $a^2-ac-b^2+c^2=0$.
Da cui, tendendo presente il teorema di Pitagora ($a^2=b^2+c^2$), segue: $2c^2-ac=0$, e perciò, essendo $c\neq0$, risulta $2c=a$. Dal che si desume che l'angolo γ, opposto al lato c, misura 30° e, di conseguenza, l'angolo β misura 60°.

Quesito 5. 2. 11. Deve essere L>1 affinché L^2-1 sia la misura di un lato. Risulta pertanto che il maggiore dei lati del triangolo è quello che ha misura L^2+L+1. L'angolo α, opposto a tale lato, è quello di misura maggiore. Ora, in virtù del teorema del coseno, si ha:

$$(L^2+L+1)^2=(L^2-1)^2+(2L+1)^2-2(L^2-1)(2L+1)\cos\alpha$$

e da qui, dopo aver semplificato, segue: $\cos\alpha=1/2$. Quindi α=60° oppure α=120°. Il primo valore deve essere escluso poiché la somma dei tre angoli non potrebbe mai dare 180°. L'unica soluzione possibile è la seconda.

Quesito 5. 2. 12. Indicata con a la lunghezza del lato del quadrato, siano b la lunghezza del lato del rombo ed α la misura del suo acuto. Siccome i due quadrilateri hanno la stessa area, deve essere verificata la seguente condizione: $a^2=b^2 \sin\alpha$. A meno che il rombo non sia un quadrato, nel qual caso $\sin\alpha=1$, in ogni altro caso è $0<\sin\alpha<1$ e, di conseguenza: $a^2<b^2$, ossia: $a<b$. A meno che il rombo non sia un quadrato, i due quadrilateri non possono avere lo stesso perimetro. Più precisamente, il perimetro del quadrato è minore di quello del rombo.

5. 5 Leonhard Euler: vita ed opere**.**

Euler

Leonhard Euler (nome italianizzato: Leonardo Eulero) fu uno dei matematici più prolifici della storia. Tutte le sue opere, riunite in una raccolta pubblicata a partire dal 1910, riempiono 75 volumi. Non c'è argomento della matematica del suo tempo, pura o applicata, di cui non si sia occupato. E lo ha fatto in forma sistematica, cosa che costituiva quasi una novità per quell'epoca.
Ecco alcune delle sue opere nel titolo originale seguito, in parentesi, dalla traduzione in italiano e dalla data di pubblicazione:
- *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (*Metodo per trovare linee curve che godono della proprietà di massimo e di minimo*, 1744).
- *Introductio in analysin infinitorum* (*Introduzione all'analisi degli infiniti*, 1748), ritenuta la sua opera più importante. Con quest'opera, fra le altre cose, Eulero diede alla trigonometria l'assetto attuale, introducendo in particolare il cerchio di raggio unitario (cerchio trigonometrico) e formulando il teorema dei seni.
- *Institutiones calculi differentialis* (*Istituzioni di calcolo differenziale*, 1755).
- *Institutiones calculi integralis* (*Istituzioni di calcolo integrale*, 1768-1770)
- *Vollständige Anleitung zur Algebra* (*Istruzioni complete di algebra*, 1770), che per anni fu un modello di testo di algebra per altri autori.

Vi sono poi altre opere, su temi diversi ma in cui la matematica svolge comunque un ruolo importante e spesso decisivo. Ricordiamo, ad esempio:
- *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita* (*Meccanica, ossia scienza del moto esposta analiticamente*, 1736);
- *Theoria motus planetarum et cometarum* (*Teoria del moto dei pianeti e delle comete, 1738*).

Leonhard Euler nacque a Basilea, in Svizzera, nel 1707 e morì a San Pietroburgo, in Russia, nel 1783. Il padre Paul, pastore protestante, voleva avviarlo alla carriera ecclesiastica e in effetti Leonhard, dopo la laurea in Filosofia conseguita all'età di 17 anni, era lì lì per intraprendere quella strada. Sennonché Johann Bernoulli (1667-1748), uno dei matematici più famosi di quel periodo, svizzero pure lui ed amico del padre, avendo intuito le notevoli potenzialità matematiche del figlio, al quale impartiva lezioni private, convinse Paul che era più utile avviare Leonhard agli studi matematici.

Ancora giovanissimo, a circa 20 anni, si trasferì a San Pietroburgo, dove fu assegnato come aggiunto alla sezione di medicina dell'Accademia Imperiale delle scienze. Durante questo periodo consolidò la sua vecchia amizia con Daniel Bernoulli (1700-1782), figlio di Johann, con il quale iniziò un'intensa collaborazione matematica. Quando Daniel, che occupava la cattedra di matematica e fisica, ritornò nel 1733 in Svizzera, Leonhard prese la direzione dell'insegnamento della matematica nell'Accademia. Aveva 26 anni e sarebbe rimasto in quel posto per 8 anni, fino a che il nuovo imperatore di tutte le Russie, Pietro II, non gli tagliò i fondi (a lui come agli altri scienziati stranieri che operavano in Russia) costringendolo di fatto ad andarsene via.

Approfittò allora dell'invito di Federico il Grande, re di Prussia, per trasferirsi all'Accademia di Berlino, dove lavorò dal 1741 al 1766.

Nel 1766, dopo che in Russia era salita al trono Caterina II la Grande, ritornò in quel Paese su invito dell'imperatrice e vi rimase fino alla fine dei suoi giorni. Visse praticamente da cieco gli ultimi anni della sua vita, ma senza rallentare per questo la sua intensa attività. Anzi, proprio a causa dell'handicap, riuscì ad accrescere le sue doti d'immaginazione.

Il giovane lettore, nel prosieguo dei suoi studi, avrà molte occasioni di sentir parlare di Eulero, uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, e di conoscere, oltre a quelli già appresi, alcuni altri degli innumerevoli risultati da lui trovati. A lui si devono anche molti dei simboli usati in matematica, compreso il modo f(x) di indicare una generica funzione della variabile x.