Capitolo 6 (Integrazione a unità 10-11)

Relazioni e funzioni elementari

5. 1 Quesiti a risposta chiusa.

5. 1. 1 Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la relazione $\mathcal{R}$ tale che "x$\mathcal{R}$y" se e solo se "x+y è un numero primo". Quale delle seguenti coppie ordinate non appartiene al grafico della relazione?
[A] (101, 48) [B] (50, 51) [C] (49, 70) [D] (121, 90)

5. 1. 2 Si consideri la relazione "x>y", definita nell'insieme dei numeri razionali. Qual è la sua relazione inversa?
[A] $x \le y$ [B] $x < y$ [C] $y \le x$ [D] $y < x$

5. 1. 3 Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ tale che "x$\mathcal{R}$y" se e solo se "x è divisore di y", definita nell'insieme {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Si tratta di una relazione:
[A] riflessiva, simmetrica, transitiva
[B] non riflessiva, simmetrica, transitiva
[C] riflessiva, non simmetrica, transitiva
[D] riflessiva, simmetrica, non transitiva

5. 1. 4 Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ tale che "x$\mathcal{R}$y" se e solo se "xy è dispari", definita nell'insieme dei numeri naturali. Si tratta di una relazione:
[A] riflessiva, simmetrica, transitiva
[B] non riflessiva, simmetrica, transitiva
[C] riflessiva, non simmetrica, transitiva
[D] riflessiva, simmetrica, non transitiva

5. 1. 5 Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ tale che "x$\mathcal{R}$y" se e solo se "x+y è dispari", definita nell'insieme dei numeri naturali. Essa è:
[A] riflessiva e simmetrica
[B] simmetrica e transitiva
[C] non riflessiva e simmetrica
[D] non simmetrica e non transitiva

5. 1. 6 Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ tale che "x$\mathcal{R}$y se e solo se x+y>0", definita nell'insieme degli interi. Essa è:
[A] riflessiva e simmetrica
[B] simmetrica e transitiva
[C] non riflessiva e simmetrica
[D] non simmetrica e non transitiva

5. 1. 7 Si consideri la seguente relazione $\mathcal{R}$, definita nell'insieme delle rette del piano: "due rette sono parallele se e solo se non hanno punti in comune". Essa è:
[A] riflessiva e simmetrica
[B] simmetrica e transitiva
[C] non riflessiva e simmetrica
[D] non simmetrica e non transitiva

5. 1. 8 Si consideri l'insieme {a,b,c}. Il seguente insieme ne costituisce una partizione:
[A] {a}, {b}, {c} [B] {a,b}, {b,c} [C] {a,b,c}, {c} [D] {a,b}, {a,c}, {b,c}

5. 1. 9 Quali dei seguenti insiemi NON costituiscono una partizione dell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi?
[A] Insieme degli interi positivi; insieme degli interi negativi.
[B] Insieme degli interi pari; insieme degli interi dispari.
[C] Insieme degli interi che divisi per 2 danno resto 0; insieme degli interi che divisi per 2 danno resto 1.
[D] Insieme degli interi che divisi per 3 danno resto 0; insieme degli interi che divisi per 3 danno resto 1; insieme degli interi che divisi per 3 danno resto 2.

5.1.10 Si consideri l'insieme X={1,2,3,4}. Quale delle figure sottostanti (Fig. 5.1) è una rappresentazione sagittale di una funzione definita in X?

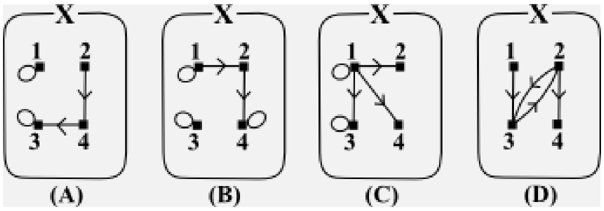

Fig. 5.1

5.1.11 Si consideri l'insieme X={1,2,3,4}. Quale delle figure sottostanti (Fig. 5.2) NON è la rappresentazione di una funzione definita in X?

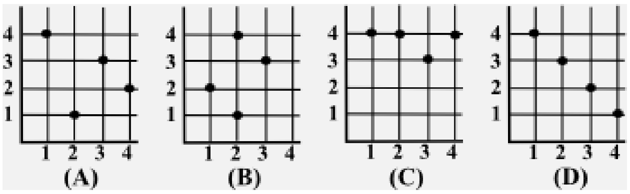

Fig. 5.2

5.1.12 Nella figura sottostante (Fig. 5.3) è rappresentata la funzione $f: x \to |x^2-1|$. Qual è l''ordinata del punto P ?

[A] $\frac{1}{4}$ [B] $\frac{3}{4}$ [C] $\frac{1}{2}$ [D] $\frac{9}{16}$

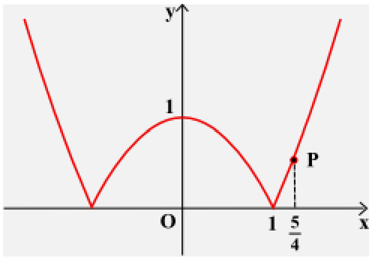

Fig. 5.3

5.1.13 Si consideri il seguente schema di calcolo (Fig. 5.4):

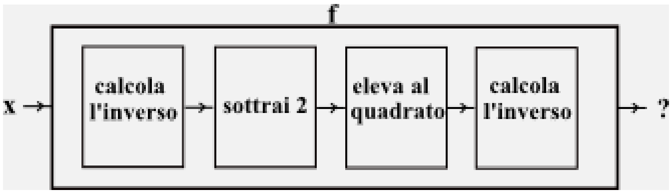

Fig. 5.4

Qual è la funzione in uscita dallo schema?

[A] $\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}-2}$ [B] $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}-2\right)^2}$ [C] $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ [D] $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

5.1.14 Se la base di un triangolo raddoppia e l'altezza si dimezza allora:
[A] l'area del triangolo raddoppia;
[B] l'area del triangolo si dimezza;
[C] l'area del triangolo rimane invariata;
[D] le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

5.1.15 Se un cateto di un triangolo rettangolo raddoppia e l'altro si dimezza allora:
[A] il perimetro del triangolo raddoppia;
[B] il perimetro del triangolo si dimezza;
[C] il perimetro del triangolo rimane invariato;
[D] le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.

5.2 Quesiti a risposta aperta.

5.2.1 Si consideri l'insieme D(6) dei divisori di 6. Qual è il grafico della relazione "è divisore", definita in D(6)?

5.2.2 Considerata la relazione $\mathcal{R}$, definita nell'insieme delle parti dell'insieme {a,b,c}, in modo che "X $\mathcal{R}$ Y" se e solo se $a \notin X \cap Y$", fornirne una rappresentazione tabellare e spiegare se è o no riflessiva, simmetrica, transitiva.

5.2.3 Considerata la relazione "$x \neq y$", definita nell'insieme {a,b,c,d}, fornirne una rappresentazione tabellare e spiegare se è o no riflessiva, simmetrica, transitiva.

5.2.4 Considerata la relazione "$x^2+y^2 \leq 25$", definita nell'insieme {1,2,3,4,5}, fornirne una rappresentazione cartesiana e spiegare se è o no riflessiva, simmetrica, transitiva.

5.2.5 La relazione inversa di "$x<y$", definita nell'insieme dei numeri reali, è la relazione "$y>x$". È vero o falso?

5.2.6 Scrivere tutte le corrispondenze biunivoche sussistenti fra gli insiemi {1,2,3} e {a,b,c}.

5.2.7 Si considerino i grafici sottostanti (Fig. 5.5). Fra di essi:
- uno illustra la relazione che sussiste fra le dimensioni dei rettangoli aventi la medesima area;
- un secondo rappresenta la variazione dell'area di un quadrato al variare del suo lato;
- un terzo rappresenta la variazione del perimetro di un quadrato al variare del suo lato.

Individuare, fra i sei grafici proposti, i tre associati alle situazioni descritte sopra.

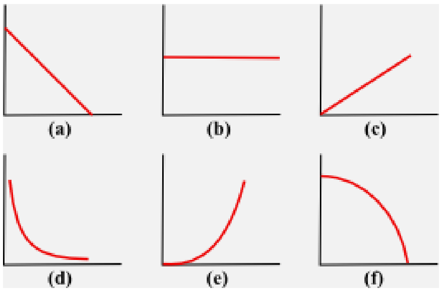

Fig. 5.5

5.2.8 Fornire la rappresentazione cartesiana della seguente funzione reale di variabile reale:

$$y=\begin{cases} x+1 & \text{se } x\leq 0 \\ 2-x & \text{se } x>0 \end{cases}$$

5.2.9 Qual è la funzione che esprime il cateto y di un triangolo rettangolo di area 2 cm^2 per mezzo dell'altro cateto x? Fornire la rappresentazione cartesiana della funzione trovata.
Quanto misura l'ipotenusa del triangolo se un cateto misura 2 cm?

5.2.10 Trovare la funzione che esprime l'area A di un triangolo equilatero per mezzo della lunghezza x del suo lato. Fornire la rappresentazione cartesiana della funzione trovata.
Se il lato del triangolo si dimezza cosa succede dell'area?

5.2.11 Il grafico sottostante (Fig. 5.6) fornisce la rappresentazione cartesiana di una funzione reale di variabile reale (è evidenziata in rosso). Qual è questa funzione?

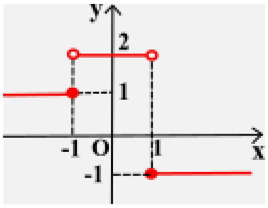

Fig. 5.6

5.3 Risposte commentate: **quesiti a risposta chiusa**.

Quesito 5.1.1. Si tratta di stabilire quale dei numeri 101+48=149, 50+51=101, 49+70=119, 121+90=211 non è primo. E tale numero è 119 che è uguale a 7×17. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.2. L'inversa della relazione "x>y" è la relazione "y<x". L'alternativa corretta è, pertanto, la [D].
Attenzione a non confondere l'inversa della relazione con l'opposta, che è "x non è maggiore di y", vale a dire "x è minore od uguale ad y", ossia "x≤y".

Quesito 5.1.3. La relazione è riflessiva: ogni numero naturale è divisore di se stesso.
È non simmetrica: 2 è divisore di 4 ma 4 non è divisore di 2.
È transitiva: se a è divisore di b significa che esiste un naturale m tale che b=ma; così pure se b è divisore di c significa che esiste un naturale n tale che c=nb; pertanto c=n(ma)=(nm)a, ossia a è divisore di c.
[C] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.4. La relazione non è riflessiva: 2×2 non è dispari.
È simmetrica: infatti, per ogni scelta dei naturali x, y, se xy è dispari allora anche yx è dispari.
È transitiva: infatti, per ogni scelta dei numeri naturali x, y, z, se xy è dispari significa che sia x sia y sono dispari; parimenti se yz è dispari, sia y sia z sono dispari; se ne desume che xz è dispari.
L'alternativa corretta è [B].

Quesito 5.1.5. La relazione non è riflessiva, anzi è "mai riflessiva": x+x è pari per ogni naturale x.
È simmetrica: infatti, per ogni scelta dei naturali x, y, se x+y è dispari allora anche y+x è dispari.
Non è transitiva: 3+2 è dispari e 2+5 è dispari ma 3+5 non è dispari.
L'alternativa corretta è [C].

Quesito 5.1.6. La relazione non è riflessiva: (−2)+(−2) non è positivo.
È simmetrica: infatti, per ogni scelta degli interi x, y, se $x+y>0$ allora anche $y+x>0$.
Non è transitiva: $(-2)+(+5)>0$ e $(+5)+(-1)>0$ ma $(-2)+(-1)$ non è positivo.
L'alternativa corretta è [C].

Quesito 5.1.7. La relazione evidentemente non è riflessiva.
È simmetrica: infatti $a \parallel b$ implica $b \parallel a$, per ogni scelta di a, b.
Non è transitiva: $a \parallel b$ e $b \parallel c$ implica $a \parallel c$ solo se a, c non coincidono, ma se a=c questo non è vero. Siccome non devono esserci vincoli sulla scelta delle rette a, b, c, si deve concludere che la relazione non è transitiva.
L'alternativa corretta è [C].

Quesito 5.1.8. L'unica alternativa corretta è [A]: gli insiemi considerati, infatti, sono, come devono essere affinché costituiscano una partizione dell'insieme dato, due a due disgiunti e ricoprono l'insieme {a,b,c}. Le altre alternative non lo sono giacché gli insiemi considerati, pur ricoprendo l'insieme {a,b,c}, non sono due a due disgiunti, come invece dovrebbe essere.

Quesito 5.1.9. L'alternativa corretta è [A]: in realtà, i due insiemi, pur disgiunti, non ricoprono l'insieme dei naturali, rimanendo escluso lo 0. Negli altri casi, gli insiemi considerati formano una partizione di $\mathbb{Z}$. Anzi le partizioni [B] e [C] di fatto sono le stesse.

Quesito 5.1.10. Deve trattarsi di una relazione che ad ogni elemento di X associa uno ed un solo elemento di X. L'unica relazione che ha questa caratteristica è quella rappresentata nella figura [A]. Precisamente, indicata con f la funzione, risulta:
$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3,\ f(4)=3$.
Negli altri casi questo non accade perché succede che a qualche elemento dell'insieme ne corrisponde più d'uno o non ne corrisponde alcuno. L'alternativa [A] è, pertanto, quella corretta.

Quesito 5.1.11. L'unica figura che non rappresenta una funzione di X in X è la [B], nella quale all'elemento 2 corrisponde più di un elemento di X, mentre all'elemento 4 non ne corrisponde nessuno. L'alternativa corretta è perciò [B].

Quesito 5.1.12. Il punto P ha ascissa 5/4 , per cui la sua ordinata è:

$$y\left(\frac{5}{4}\right)=\left|\left(\frac{5}{4}\right)^2-1\right|=\frac{9}{16}\ .$$

[D] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.13. [B] è l'alternativa corretta. Esplicitare lo schema di calcolo negli altri casi.

Quesito 5.1.14. Se con A si indica l'area di un triangolo di base b ed altezza h, risulta: $A=\frac{1}{2}bh$. Se la base raddoppia, ossia diventa 2b, e l'altezza si dimezza, ossia diventa $\frac{h}{2}$, l'area diventa: $A'=\frac{1}{2}(2b)\frac{h}{2}$, ossia: $A'=\frac{1}{2}bh=A$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 5.1.15. Se a, b sono i cateti di un triangolo rettangolo il suo perimetro è:

$$P=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Se un cateto raddoppia e l'altro si dimezza, il perimetro diventa:

$$P=(2a)+\left(\frac{b}{2}\right)+\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\,.$$

Non raddoppia, non si dimezza e non rimane invariato. [D] è l'alternativa corretta.

5.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 5.2.1. L'insieme D(6) dei divisori di 6 è l'insieme {1,2,3,6}. Considerato che 1 è divisore di ognuno degli elementi di D(6), mentre 2 e 3 sono divisori di se stessi oltre che di 6, che a sua volta è solo divisore di se stesso, il grafico G della relazione "è divisore", definita in D(6), è il seguente insieme:

$$G = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,2), (2,6), (3,3), (3,6), (6,6)\}.$$

Darne una rappresentazione cartesiana.

Quesito 5.2.2. Precisiamo anzitutto che l'insieme di riferimento è il seguente:

$$I = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

La rappresentazione tabellare della relazione $a\notin X\cap Y$, dove X e Y sono due elementi di I, è riprodotta nella tabella sottostante. La relazione è evidentemente non riflessiva, ma è simmetrica.

È non transitiva: infatti $\{a\}\mathcal{R}\{b\}$ giacché $a\notin\{a\}\cap\{b\}$ e così pure $\{b\}\mathcal{R}\{a\}$, ma $\{a\}\overline{\mathcal{R}}\{a\}$ giacché $a\in\{a\}\cap\{a\}$.

{a,b,c}	x		x	x			x	
{b,c}	x	x	x	x	x	x	x	x
{a,c}	x		x	x			x	
{a,b}	x		x	x			x	
{c}	x	x	x	x	x	x	x	x
{b}	x	x	x	x	x	x	x	x
{a}	x		x	x			x	
Ø	x	x	x	x	x	x	x	x
	Ø	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}

Quesito 5.2.3. La rappresentazione tabellare della relazione è riprodotta nella tabella sottostante. La relazione è evidentemente non riflessiva (più esattamente: mai riflessiva) ed è simmetrica. È non transitiva: infatti $a\neq b$ e $b\neq a$ ma $a=a$.

d	x	x	x	
c	x	x		x
b	x		x	x
a		x	x	x
	a	**b**	**c**	**d**

Quesito 5.2.4. La rappresentazione cartesiana della relazione è riprodotta nella figura sottostante (Fig. 5.7).

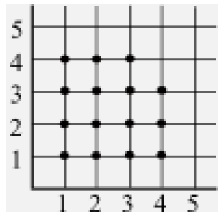

Fig. 5.7

La relazione è evidentemente non riflessiva ed è simmetrica. È non transitiva: infatti, indicata con $\mathcal{R}$ la relazione, $4\mathcal{R}1 \wedge 1\mathcal{R}4$ dal momento che $4^2+1^2 \leq 25$ e, ovviamente, $1^2+4^2 \leq 25$ ma $4^2+4^2>25$ e perciò $4\overline{\mathcal{R}}4$.

Quesito 5.2.5. È vero, la relazione inversa di "x<y" è "y>x". Attenzione a non confonderla con la proposizione <u>opposta</u> di "x<y", che è invece la proposizione "x non è minore di y", vale a dire "x≥y".

Quesito 5.2.6. Le corrispondenze biunivoche sussistenti fra gli insiemi {1,2,3} e {a,b,c} sono 6. Possiamo rappresentarle nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\a&b&c\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\a&c&b\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\b&a&c\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\b&c&a\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\c&a&b\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\c&b&a\end{bmatrix}$$

Quesito 5.2.7. Le tre situazioni sono rappresentate nell'ordine dai grafici:

(d)– funzione del tipo $y=\frac{k}{x}$,

(e)– funzione del tipo $y=a\,x^2$,

(c)– funzione $y=4\,x$, ancorché in un riferimento non monometrico.

Quesito 5.2.8. Si tratta di una funzione lineare a tratti, la cui rappresentazione cartesiana è riprodotta nella figura sottostante (Fig. 5.8) .

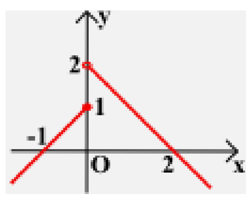

Fig. 5.8

Quesito 5.2.9. La funzione è:

$$y=\frac{4}{x}$$

dove x ed y sono espressi in centimetri, e il suo grafico è un ramo di iperbole equilatera, situato nel 1° quadrante, la cui rappresentazione cartesiana non presenta difficoltà. Se un cateto del triangolo misura 2 cm, l'altro cateto misura pure 2 cm e, di conseguenza, l'ipotenusa misura $2\sqrt{2}$ cm.

Quesito 5.2.10. La funzione cercata è:

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

e il suo grafico è un arco di parabola, situato nel 1° quadrante. Se il lato si dimezza, l'area del triangolo, che è direttamente proporzionala al quadrato del lato, diventa la quarta parte.

Quesito 5. 2. 11. Si tratta della funzione costante a tratti:

$$y=\begin{cases} 1 & \text{se } x\leq -1 \\ 2 & \text{se } -1<x<1 \\ -1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

5. 5 Antologia.

Le seguenti considerazioni sono tratte dal libro *Le matematiche*, a cura di A.D.Aleksandrov, A.N.Kolmogorov, M.A.Lavrent'ev, pubblicato nell'edizione italiana (trad. di Giovanni Venturini) da Boringhieri nel 1974 per i tipi Universale Scientifica.
Rafforzano le conoscenze storiche sulla nascita del concetto di funzione e, nel contempo, il concetto stesso di funzione, oltre a quello di variabile.

«Nel sedicesimo secolo il problema centrale della fisica era quello del moto. Le necessità pratiche e l'evoluzione generale delle scienze portavano a considerare in fisica questo e altri problemi di interdipendenza di grandezze variabili.
«Nacquero così i concetti di grandezza variabile e di funzione; l'estensione ad essi del campo d'indagine della matematica provocò la transizione a un nuovo stadio, quello della matematica delle grandezze variabili.
«La legge del moto di un corpo su una data traiettoria, per esempio su una linea retta, è definita dal modo in cui la distanza percorsa dal corpo aumenta nel tempo.
«Galileo (1564-1642) scoprì la legge della caduta dei gravi stabilendo che lo spazio percorso aumenta proporzionalmente al quadrato del tempo. Questo fatto è espresso nella ben nota formula:

$$s=\frac{g\,t^2}{2}, \qquad [1]$$

dove g è circa uguale a 9,81 m/s^2.
«In generale la legge del moto esprime la distanza percorsa in un tempo t. Qui il tempo t e lo spazio s sono rispettivamente la variabile "indipendente" e "dipendente", e il fatto che ad ogni tempo t corrisponda un ben definito spazio s si esprime dicendo che lo spazio s è funzione del tempo t.
«Come il concetto di numero reale rappresenta in modo astratto il valore di una grandezza arbitraria, una "variabile" è l'immagine astratta di una grandezza che varia, che assume valori diversi durante il processo considerato. Una variabile matematica x è qualcosa, o meglio tutto ciò, che può assumere valori numerici diversi. Questo è il significato generico di variabile; di volta in volta possiamo interpretarla come tempo, distanza o qualunque altra grandezza variabile.
«In modo del tutto analogo una funzione è l'immagine astratta della dipendenza di una grandezza rispetto a un'altra. Dire che y è funzione di x significa, in matematica, che ad ogni possibile valore di x corrisponde un determinato valore di y. La corrispondenza tra i valori di y e i valori di x si chiama funzione. Per esempio, in virtù della legge di caduta dei gravi, la distanza percorsa corrisponde al tempo di caduta secondo la formula [1].»