Capitolo 6 (Integrazione a unità 12-13-14)

Dati e previsioni

6.1 Quesiti a risposta chiusa

6.1.1 Cos'è la *media* di una successione di dati statistici?
[A] La loro semisomma
[B] La semisomma dei loro valori assoluti.
[C] Il rapporto fra la loro somma e il loro numero.
[D] Un valore diverso dai tre precedenti.

6.1.2 Un operaio ha realizzato, in 26 giornate lavorative, i seguenti guadagni:
- € 200 al giorno per 10 giorni,
- € 180 al giorno per 8 giorni,
- € 150 al giorno per 5 giorni,
- nessun guadagno per 3 giorni.

Il guadagno medio giornaliero dell'operaio è stato all'incirca di:
[A] € 13 [B] € 161 [C] € 177 [D] € 182

6.1.3 Un corpo percorre un certo cammino alla velocità media di circa 88,625 km/h e il cammino di ritorno alla velocità media di circa 55,403 km/h. Qual è la velocità media tenuta sull'intero percorso di andata e ritorno?
[A] All'incirca 72 km/h. [B] All'incirca 70 km/h.
[C] All'incirca 68 km/h. [D] Non si può calcolare, non essendo noto lo spazio percorso.

6.1.4 Considerati n dati statistici, si indichi con μ e con σ rispettivamente la loro media aritmetica e la deviazione standard. Se tutti gli n dati aumentano della stessa quantità, cosa si può dire dei nuovi valori di μ e σ ?
[A] μ e σ non mutano. [B] μ e σ aumentano entrambe.
[C] μ aumenta ma σ rimane invariata. [D] μ rimane invariata ma σ aumenta.

6.1.5 Si consideri l'estrazione dei 5 numeri del Lotto sulla Ruota di Napoli. Si indichi con p' la probabilità di estrarre la cinquina 10-20-30-40-50 e con p" quella di estrarre la cinquina 23-35-53-67-82. Quale delle seguenti alternative è quella corretta?
[A] p'>p". [B] p">p'.
[C] p'=p". [D] Di nessuna delle affermazioni precedenti si è certi.

6.1.6 Dai 90 numeri della "Tombola" se ne estraggono 5 a caso, senza rimettere nell'urna i numeri estratti. Dopo che per primo è stato estratto un numero pari e per secondo ancora un numero pari, qual è la probabilità che per terzo sia estratto di nuovo un numero pari?
[A] $\frac{45}{90}$ [B] $\frac{44}{90}$ [C] $\frac{43}{88}$ [D] $\frac{42}{88}$

6.1.7 Nel gioco del Lotto, sulla Ruota di Napoli, per primo è stato estratto il numero 90 e per secondo il numero 89. Qual è la probabilità che il numero 88 compaia nelle tre estrazioni che rimangono?
[A] $\frac{1}{90}$ [B] $\frac{3}{88}$ [C] $\frac{2}{88}$ [D] $\frac{1}{88}$

6.1.8 Una coppia di genitori ha tre figli. Qual è la probabilità che non più di due siano maschi?

[A] $\frac{1}{8}$ [B] $\frac{7}{8}$ [C] $\frac{1}{4}$ [D] $\frac{3}{4}$

6.1.9 Una coppia di genitori ha due figli, uno dei quali è maschio. Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio?

[A] $\frac{1}{4}$ [B] $\frac{1}{3}$ [C] $\frac{1}{2}$ [D] $\frac{3}{4}$

6.1.10 Dalle 40 carte di un mazzo da "Briscola" ne viene estratta una a caso e, senza guardarla, viene messa da parte. Quindi si estrae a caso una seconda carta. Qual è la probabilità che questa sia l'Asso di Coppe?

[A] $\frac{1}{39}$ [B] $\frac{1}{40}$ [C] $\frac{1}{41}$ [D] Impossibile da calcolare .

6.1.11 Un'urna contiene soltanto palline rosse e palline nere. Si estrae a caso una pallina. Si sa che la probabilità che sia rossa è 34%. Qual è la probabilità che essa sia nera?

[A] È pure il 34% [B] È il 50%
[C] È il 66% [D] Non si può calcolare poiché non è nota la composizione dell'urna

6.1.12 Un'urna contiene tre palline rosse ed una nera. Si estraggono a caso due palline senza reinserimento. Sia p' la probabilità che le due palline siano rosse e p" quella che siano una rossa e l'altra nera. Quale delle seguenti alternative è quella corretta?

[A] p'>p" [B] p">p'
[C] p'=p" [D] Non è possibile alcun confronto fra le due probabilità

6.1.13 Un'urna contiene 6 palline: 2 bianche, 2 rosse e 2 nere. Si estraggono a caso in sequenza due palline, senza reinserimento. La probabilità che siano dello stesso colore è:

[A] $\frac{1}{3}$ [B] $\frac{1}{4}$ [C] $\frac{1}{5}$ [D] $\frac{1}{6}$

6.1.14 Una fabbrica produce cellulari: 5 su 173 presentano difetti di fabbricazione. Decidi di comprare un cellulare di quella marca: qual è la probabilità che non presenti difetti di fabbricazione?

[A] Circa il 95% [B] Circa il 97%
[C] Circa il 99% [D] Un valore completamente diverso dai precedenti tre

6.1.15 La vittoria del Milan, in quella edizione della Champions League, era data a 2,49 dagli allibratori. Quale probabilità di vittoria essi attribuivano al Milan?

[A] Circa il 40% [B] Circa il 49%
[C] Circa il 67% [D] Completamente diversa dalle precedenti tre

6.1.16 In una classe, formata da 15 ragazze e 10 ragazzi, deve essere sorteggiata una delegazione costituita da una ragazza e da un ragazzo. Tra le ragazze vi sono 3 Mirella e tra i ragazzi 2 Mario. La probabilità che la delegazione non comprenda né una Mirella né un Mario è:

[A] 0,64 [B] 0,80 [C] 0,96 [D] 1,60

6.1.17 Guido è disposto a scommettere 5 euro (a condizione di guadagnarne 3) che domani sarà interrogato in Storia e 4 euro (a condizione di guadagnarne 2) che sarà interrogato in Matematica. Qual è la probabilità che, secondo il suo parere, ha Guido di essere interrogato in Storia e Matematica?

[A] $\frac{5}{24}$ [B] $\frac{1}{4}$ [C] $\frac{5}{12}$ [D] $\frac{7}{8}$

6.1.18 Si lanciano tre dadi, le cui facce, numerate da "1" a "6", hanno tutte la stessa probabilità di uscire. Puntando sull'uscita di tre "6", qual è il minimo numero di lanci che devono essere effettuati per avere più probabilità di vincere che di perdere?

[A] 130 [B] 140 [C] 150 [D] 160

6.1.19 Un'urna contiene 30 palline, delle quali 15 bianche, 9 nere e 6 rosse. A caso sono estratte due palline una di seguito all'altra, dopo aver rimesso nell'urna la prima pallina estratta. Quanto vale la probabilità che le due palline siano di colore diverso?

[A] 31% [B] 38% [C] 53% [D] 62%

6.1.20 Durante una festa paesana Tizio, un imbonitore con un fantasmagorico cappello in testa, sta facendo questo gioco. Fa vedere tre cartoncini uguali in tutto fuorché nel colore: uno è rosso su entrambe le facce, uno è nero su entrambe le facce, uno è rosso su una faccia e nero sull'altra. Infila i tre cartoncini in una busta e ne fa estrarre uno a caso da uno spettatore in modo però che del cartoncino estratto si veda solo una faccia. La faccia visibile è rossa. Tizio scommette alla pari che anche l'altra faccia è rossa.

[A] Il gioco è equo giacché l'imbonitore ha la stessa probabilità di vincere che di perdere.
[B] Il gioco non è equo giacché l'imbonitore ha più probabilità di vincere che di perdere.
[C] Il gioco non è equo giacché l'imbonitore ha più probabilità di perdere che di vincere.
[D] I dati sono insufficienti per concludere alcunché sull'equità del gioco.

6.1.21 Un'urna contiene complessivamente 12 palline bianche, 10 palline nere e 8 palline rosse. Sono estratte tre palline a caso, senza reinserimento. Qual è la probabilità che non abbiano lo stesso colore?

[A] 11,82% [B] 32,51% [C] 90,25% [D] 97,54%

6.1.22 Metà delle palline contenute in un'urna sono bianche, l'altra metà sono in parte nere e in parte rosse. Sono estratte tre palline a caso, con reinserimento della pallina estratta. Carlo punta 13 euro sull'evento che le tre palline uscite non siano tutte bianche; Vittorio punta 2 euro sull'evento che lo siano. Chi vince piglia tutto. Quale delle seguenti alternative è quella corretta?

[A] Il gioco è equo.
[B] Il gioco è sbilanciato a favore di Carlo.
[C] Il gioco è sbilanciato a favore di Vittorio.
[D] Non c'è modo di sapere alcunché circa l'equità del gioco poiché non si conosce l'esatta composizione dell'urna.

6.1.23 Giorgio deve rispondere ad un questionario costituito da 32 quesiti a scelta multipla, ciascuno con 4 alternative, di cui una sola corretta. Siccome ignora completamente l'argomento, decide di rispondere a tutti i quesiti in modo assolutamente casuale. Ad ogni risposta corretta sono attribuiti 3 punti, ad ogni risposta errata -1 punti, ad ogni risposta non data 0 punti. Qual è il punteggio più probabile che può ottenere Giorgio?

[A] -24 [B] $+8$ [C] 0 [D] Un punteggio diverso.

6.1.24 Un'urna contiene N palline, tra le quali 3 sono rosse ed una è nera, mentre le rimanenti hanno colori diversi. Si estraggono a caso due palline, senza reinserimento. Indicata con p' la probabilità che

siano entrambe rosse e con p” quella che siano una rossa e l’altra nera, indipendentemente dall’ordine, risulta che:
[A] p’=p”
[B] p’>p”
[C] p’<p”
[D] non è possibile confrontare p’ e p” poiché non si conosce l’esatta composizione dell’urna.

6. 2 Quesiti a risposta aperta.

6. 2. 1 Sono dati i due numeri 25.432 e 35.007. È vero che la media aritmetica dei due numeri è maggiore della loro media geometrica?

6. 2. 2 Una guarnigione militare deve essere rifornita delle divise per i soldati che la compongono: serve una media delle taglie dei soldati. Qual è quella che meglio si adatta alla situazione?

6. 2. 3 Si vuole valutare il livello medio di rendimento di una classe in seguito ad un compito in classe: naturalmente sono presi in esame i voti riportati dagli alunni in quel compito. Qual è il valore di sintesi che meglio si adatta alla situazione?

6. 2. 4 Per quale ragione la media aritmetica degli scarti di una serie di dati statistici dalla loro media aritmetica non può essere usata come indice di dispersione dei dati dalla loro media aritmetica?

6. 2. 5 Un ciclista percorre tre giri di pista alle velocità medie, su ogni giro, nell’ordine v_1, v_2, v_3. Dimostrare che la velocità media del ciclista sui tre giri è uguale alla *media armonica* delle tre velocità medie, vale a dire:

$$v=\frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}\ .$$

6. 2. 6 Un corpo è stato fatto cadere per 50 volte da una stessa altezza. Sono state trovate sperimentalmente le velocità di caduta del corpo e si è calcolato che la media aritmetica di tali velocità è stata di circa 5,89 m/s con una deviazione standard di 0.04 m/s. Quante delle velocità medie rilevate hanno un valore compreso fra 5,81 m/s e 5,97 m/s?

6. 2. 7 La media aritmetica e la deviazione standard di N dati statistici sono nell’ordine 275 e 12. Se gli N dati diminuiscono tutti dello stesso valore 20, quanto valgono la media aritmetica e la deviazione standard dei nuovi dati?

6. 2. 8 Paolo ha riportato un “4” e un “6” nei primi due compiti d’italiano. Ha concluso che la “media” dei suoi voti è $\frac{4+6}{2}$, cioè 5. Dopo aver riportato un “5” nel terzo compito, conclude che adesso la sua media è $\frac{5+5}{2}$, cioè 5. Paolo ha ragionato correttamente?

6. 2. 9 Si consideri l’operazione “$*$”, tale che $a*b=\frac{a+b}{2}$, definita nell’insieme dei numeri razionali non negativi. Gode della proprietà associativa?

6. 2. 10 Da un mazzo di carte da gioco “napoletane” si estraggono a caso in sequenza 4 carte, senza reinserirle nel mazzo. Delle due sequenze:
- Asso di Coppe, Asso di Spade, Asso di Bastoni, Asso di Denari;

- Tre di Spade, Cinque di Denari, Asso di Coppe, Re di Denari,

qual è la più probabile?

6.2.11 Nel lancio di un dado con le facce numerate da "1" a "6", aventi la stessa probabilità di uscire, per 4 volte consecutive è uscito un numero pari. È più probabile che esca un numero pari o un numero dispari nel quinto lancio?

6.2.12 Mario Rossi ha due figli: almeno uno di essi è maschio. Sia p' la probabilità che l'altro figlio sia femmina. Anche Giulio Bianchi ha due figli: il maggiore di essi è maschio. Sia p" la probabilità che l'altro figlio sia femmina. Risulta p'>p", p">p' oppure p'=p"?

6.2.13 Un'urna contiene 475 palline di tre colori diversi: rosso, nero, verde. Sono effettuate 73 estrazioni casuali di una pallina, che ogni volta è rimessa nell'urna. Gli esiti sono riportati nella tabella sottostante. Qual è, con accettabile approssimazione, la composizione dell'urna?

colore pallina	rosso	nero	verde
frequenza assoluta	17	34	22

6.2.14 Con riferimento alla medesima urna del quesito precedente, siano estratte tre palline, una di seguito all'altra, senza reinserimento. Le prime due palline siano una rossa e una nera. Qual è la probabilità che la terza pallina non sia verde?

6.2.15 Per una certa partita di calcio erano state fissate le seguenti quote dagli allibratori:

esito **1** a 1,90; esito **X** a 3,15; esito **2** a 4,00.

Ritieni che il gioco si possa definire equo?

6.2.16 Da un mazzo di carte "napoletane" si estrae a caso una carta. Quant'è la probabilità che si tratti di un Asso o di una carta di Denari?

6.2.17 A e B sono due eventi: in genere, la probabilità di A sapendo che si è verificato B è diversa dalla probabilità di B sapendo che si è verificato A. È possibile che queste due probabilità siano uguali?

6.2.18 Un giocatore abbia probabilità p di vincere una certa somma s e probabilità p' di perdere la somma s'. Posto che sia p+p'=1, si definisce *equo* un tale gioco se risulta ps=p's'.
Supponiamo ora che vi siano due giocatori, A e B, aventi le probabilità p_A e p_B di vincere, essendo $p_A+p_B=1$. Ammesso che puntino le rispettive somme s_A ed s_B e chi vince piglia tutto, dimostrare che, se e solo se il gioco è equo, risulta:

$$\frac{p_A}{p_B}=\frac{s_A}{s_B}.$$

6.2.19 Si lancia un dado con le facce numerate da 1 a 6. Si considerino le seguenti probabilità:
- p = probabilità che esca un numero pari,
- p' = probabilità che esca un numero pari sapendo che è uscito un numero composto,
- p" = probabilità che esca un numero pari sapendo che è uscito un numero non composto.

Verificare che risulta p≠p'+p".
Qual è esattamente una relazione generale che lega p, p' e p"?

6.2.20 In un esperimento la probabilità di un certo evento E è p. Nelle ultime 10 volte in cui l'esperimento è stato eseguito, l'evento E non si è verificato. Quanto vale la probabilità che tale evento si presenti per la prima volta tra 10 prove?

6.2.21 Marco gioca a dadi con un dado truccato: la probabilità che esca un numero pari è, infatti, diversa da quella che esca un numero dispari. Marco lancia due volte il dado. È più probabile che i due numeri usciti siano di uguale parità (cioè entrambi pari o entrambi dispari) o di parità diversa (cioè uno pari ed uno dispari)?

6.2.22 Un'urna contiene 18 palline bianche e 16 nere. Calcolare la probabilità che, estraendone due a caso, senza rimetterle nell'urna, esse siano di colore diverso.

6.2.23 Un'urna contiene 5 palline, di cui 3 bianche e 2 nere. Si estraggono a caso due palline senza reinserimento. Si può scommette alla pari sull'uscita di 2 palline bianche o su quella di 2 palline di colore diverso. Su quale dei due eventi conviene scommettere (alla pari)?

6.2.24 In una comunità di persone, quelle di sesso maschile sono il 49% e i maggiorenni (almeno 18 anni compiuti) sono il 75%; in particolare le persone di sesso femminile e minorenni (meno di 18 anni) sono il 13%. Si vuole consegnare un premio ad una persona sorteggiata a caso nella comunità. Qual è la probabilità che il fortunato vincitore sia una persona di sesso maschile o di età inferiore a 18 anni?

6.2.25 Calcolare la probabilità di indovinare un "ambo" al gioco del Lotto, giocando sulla Ruota di Napoli.

6.3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 6.1.1. Si definisce media di una successione di dati statistici un qualsiasi valore reale compreso fra il minore e il maggiore dei dati stessi, estremi inclusi. L'alternativa corretta è pertanto [D]. In realtà, a volte, nel linguaggio comune, capita di chiamare media di più numeri la media aritmetica, ma non è corretto. Ad esempio, nel caso dei numeri 4, 5 e 6 tanto per fissare le idee, la loro media aritmetica è 5, mentre una loro media è un qualsiasi numero reale compreso fra 4 e 6 inclusi. Tanto per dire sono medie i seguenti numeri: 4,1; 5; 5,7; 5,9.

Quesito 6.1.2. Il guadagno medio giornaliero dell'operaio è la media aritmetica ponderata dei vari guadagni, vale a dire, espresso in euro, è il seguente:

$$\frac{200\cdot 10+180\cdot 8+150\cdot 5+0\cdot 3}{26}\approx 161\,.$$

L'alternativa corretta è [B].

Quesito 6.1.3. Facciamo un ragionamento generale. Indichiamo con s il percorso di andata, che ovviamente è uguale a quello di ritorno. Siano inoltre t_1 il tempo impiegato nel viaggio di andata e t_2 quello impiegato nel viaggio di ritorno. La velocità media v_1 nel viaggio di andata e la velocità media v_2 nel viaggio di ritorno sono perciò: $v_1=s/t_1$ e $v_2=s/t_2$. Se v indica la velocità media sull'intero percorso di andata e ritorno, è allora:

$$v=\frac{2s}{t_1+t_2}=\frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}\,.$$

Questo valore è esattamente la *media armonica* dei valori v_1 e v_2. Nel caso in esame, si ha:

$$v=\frac{2\,v_1v_2}{v_1+v_2}=\frac{2\cdot 88{,}605\cdot 55{,}403}{88{,}605+55{,}603}\approx 68\ (\text{km/h}).$$

L'alternativa corretta è [C].

Quesito 6.1.4. La media aritmetica aumenta della stessa quantità di cui aumenta ciascuno dei dati, mentre la deviazione standard rimane invariata. Di ciò si può dare una dimostrazione rigorosa. L'alternativa corretta è perciò [C].

Quesito 6.1.5. Tutte le possibili cinquine hanno la stessa probabilità di uscire, quindi anche le due prese in considerazione. [C] è l'alternativa corretta.
Può capitare di pensare che la cinquina 10-20-30-40-50 sia meno probabile dell'altra perché, a livello inconscio, si fa il confronto fra la cinquina 10-20-30-40-50, in cui c'è un certo ordine, è una qualsiasi cinquina "disordinata". Ma, nel nostro caso, il confronto va fatto fra due cinquine particolari e nessuna delle due è privilegiata rispetto all'altra.

Quesito 6.1.6. Siccome nel gioco della Tombola i numeri estratti non sono rimessi nell'urna, il fatto che per primo sia stato estratto un numero pari e per secondo ancora un numero pari implica che nell'urna sono rimasti 88 numeri, di cui 43 pari. La probabilità che sia estratto un nuovo numero pari è perciò 43/88. [C] è l'alternativa corretta. Se, al contrario, i numeri estratti fossero rimessi nell'urna la probabilità di estrarre ancora un numero pari alla terza estrazione sarebbe 45/90.

Quesito 6.1.7. I casi possibili all'estrazione del numero 88 sono tanti quanti i numeri rimasti nell'urna dopo l'estrazione dei primi due, vale a dire 88. I casi favorevoli all'evento sono evidentemente 3. La probabilità è pertanto 3/88. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 6.1.8. La probabilità che non più di due dei tre figli siano maschi equivale alla probabilità che non ci siano tre maschi. Ora, considerando che i casi possibili sono 8:

MMM, MMF, MFM, MFF, FFF, FFM, FMF, FMM,

la probabilità che ci siano tre maschi è evidentemente 1/8, per cui la probabilità cercata è 7/8. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 6.1.9. I casi possibili, considerando entrambi i figli, sono i seguenti: MM, MF, FM, FF. Imponendo la condizione che uno di essi sia maschio, si deve escludere il caso FF, per cui in realtà i casi possibili sono tre: MM, MF, FM. Solo in un caso l'altro figlio è maschio. La probabilità cercata è 1/3. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 6.1.10. Il fatto che la prima carta estratta sia stata messa da parte senza guardarla non modifica l'informazione di cui si dispone e, pertanto, è come se non fosse stata estratta. La probabilità cercata è 1/40. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 6.1.11. Poiché l'urna contiene soltanto palline rosse e palline nere, gli eventi "la pallina estratta è rossa" e "la pallina estratta è nera" sono complementari. Siccome la probabilità che la pallina sia rossa è 34%=0,34; quella che sia nera è 1–0,34=0,66=66%. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 6.1.12. Se indichiamo con R_1, R_2, R_3 ed N le palline, riguardo alle due palline estratte si hanno le seguenti possibilità:

R_1-R_2, R_1-R_3, R_1-N, R_2-R_3, R_2-N, R_3-N, R_2-R_1, R_3-R_1, N-R_1, R_3-R_2, N-R_2, N-R_3.

Le coppie rosso-rosso sono 6: tante quante le coppie (non ordinate) rosso-nero. Le due probabilità sono uguali. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 6.1.13. Una delle due palline estratte avrà un colore X, non importa quale. Tra le cinque palline rimaste nell'urna una soltanto ha colore X. La probabilità di estrarla è evidentemente 1/5. Ed è questa anche la probabilità che le due palline estratte siano dello stesso colore. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 6.1.14. Siccome 5 cellulari su 173 sono difettosi, ne consegue che 168 su 173 non lo sono. La probabilità che il cellulare comprato non sia difettoso è pertanto:

$$\mathrm{p} = \frac{168}{173} \approx 0{,}971 \approx 0{,}97.$$

[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 6.1.15. Dare a 2,49 la vittoria del Milan significa che, se punto un euro, ne riscuoto 2,49, compreso l'euro puntato, per cui la probabilità di vittoria del Milan è valutata $\mathrm{p}=\frac{1}{2{,}49}\approx 0{,}4016\approx 40\%$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 6.1.16. Poiché la delegazione deve comprendere un maschio e una femmina, bisogna sorteggiare il maschio nel gruppo dei maschi e la femmina nel gruppo delle femmine. In base ai dati, la probabilità che la delegazione non comprenda nessuna delle tre "Mirella" è 12/15, quella che non comprenda nessuno dei due "Mario" è 8/10.
La probabilità cercata è allora $\mathrm{p}=\frac{12}{15}\cdot\frac{8}{10}=0{,}64$. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 6.1.17. Guido valuta che sia $\frac{5}{8}$ la probabilità che sia interrogato in Storia e $\frac{4}{6}$ quella che sia interrogato in Matematica. Egli, pertanto, valuta che sia $\mathrm{p}=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{12}$ la probabilità di essere interrogato in entrambe le discipline. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 6.1.18. La probabilità di ottenere tre "6" in un lancio è $\left(\frac{1}{6}\right)^3$, vale a dire $\frac{1}{216}$. Quella di non ottenerli è $1-\frac{1}{216}$, vale a dire $\frac{215}{216}$. La probabilità di non ottenere mai tre "6" in n lanci è $\left(\frac{215}{216}\right)^{\mathrm{n}}$, quella di ottenere almeno una volta tre "6" è $\mathrm{p}=1-\left(\frac{215}{216}\right)^{\mathrm{n}}$. Avere più probabilità di vincere che di perdere significa supporre che sia $\mathrm{p}>\frac{1}{2}$. Si tratta allora di calcolare qual è il più piccolo valore di n per cui ciò si verifica. Si vuole sapere insomma qual è il minimo valore di n perché risulti p>0,5. Ebbene, per questo è sufficiente una calcolatrice, mediante la quale si possono ottenere i risultati sintetizzati nella tabella sottostante:

n	148	149	150	151
p	0,496	0,499	0,501	0,503

Il minimo numero di lanci da effettuare è pertanto 150. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 6.1.19. La probabilità dell'evento E: «escono due palline di colore diverso» è la probabilità contraria dell'evento F: «escono due palline dello stesso colore». Pertanto, con evidente significato per i simboli usati:

$$p(E) = 1-p(F) = 1 - [p(BB)+p(NN)+p(RR)] = 1-\left[\left(\frac{15}{30}\right)^2+\left(\frac{9}{30}\right)^2+\left(\frac{6}{30}\right)^2\right] = \frac{31}{50} = 62\% .$$

L'alternativa corretta è [D].

Quesito 6.1.20. Se la faccia visibile è rossa i casi possibili, tenendo presente che la carta di colore rosso su entrambe le facce ne ammette due ($Rosso_A$-$Rosso_B$, $Rosso_B$-$Rosso_A$), sono i seguenti:

$Rosso_A$-$Rosso_B$, $Rosso_B$-$Rosso_A$, Rosso-Nero.

Dunque la probabilità che la seconda faccia sia rossa è 2/3, maggiore della probabilità 1/3 che sia nera. Il gioco è sbilanciato a favore di chi scommette sul rosso, cioè dell'imbonitore.
L'alternativa corretta è [B].

Quesito 6.1.21. È sufficiente calcolare la probabilità p' che le tre palline estratte siano dello stesso colore: la probabilità cercata p è l'opposta di questa. Vale a dire: p=1–p'. Si ha allora:

$$p = 1-\left(\frac{12}{30}\cdot\frac{11}{29}\cdot\frac{10}{28}+\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28}+\frac{8}{30}\cdot\frac{7}{29}\cdot\frac{6}{28}\right) \approx 90{,}25\% .$$

[C] è l'alternativa corretta.

Quesito 6.1.22. Dopo aver stabilito che la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$, conviene calcolare per prima cosa la probabilità dell'evento: "le tre palline estratte sono bianche". Si ha: $p=p(BBB)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. La probabilità che esse non siano tutte bianche è, di conseguenza: $q=1-p=\frac{7}{8}$.
Considerato che queste probabilità sono nell'ordine la probabilità p che ha Vittorio di vincere e la probabilità q che ha Carlo di vincere, risulta intanto: q/p=7.
Affinché il gioco sia equo questo rapporto dovrebbe essere uguale al rapporto delle rispettive puntate di Carlo e Vittorio. D'altro canto, considerato che Vittorio ha puntato 2 euro, indicata con x la puntata di Carlo, dovrebbe essere: x/2=7, ossia x=14 (€). Invece Carlo ha puntato 13 euro, cioè meno di quello che avrebbe dovuto, perché il gioco fosse equo. Il gioco è pertanto sbilanciato a favore di Carlo.
[B] è l'alternativa corretta.

Quesito 6.1.23. Rispondendo assolutamente a caso ad un quesito, la probabilità di azzeccare l'alternativa corretta è evidentemente 1/4, come dire che si azzecca una risposta corretta ogni 4 quesiti, per cui il numero più probabile di risposte corrette è 32/4 = 8. In virtù di queste 8 risposte "giuste" Giorgio ottiene 8×3=24 punti. Ma, avendo risposto in maniera errata ai 24 quesiti rimanenti, per questi ottiene il punteggio di 24×(–1)=–24. Complessivamente ottiene quindi 0 punti. Ha cioè la probabilità di ottenere lo stesso punteggio di chi non risponde ad alcun quesito. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 6.1.24. Si ha:

$$p'=p(RR)=\frac{3}{N}\cdot\frac{2}{N-1}=\frac{6}{N(N-1)} ; \qquad p''=p(RN \text{ o } NR)=\frac{3}{N}\cdot\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\cdot\frac{3}{N-1}=\frac{6}{N(N-1)} .$$

Pertanto p'=p", indipendentemente dal numero N di palline contenute nell'urna, purché naturalmente N≥4. [A] è l'alternativa corretta.

6.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 6.2.1. È vero. In generale, la media aritmetica di due numeri positivi diversi è maggiore della loro media geometrica, mentre le due medie sono uguali se i due numeri sono uguali.

Quesito 6.2.2. La moda.

Quesito 6.2.3. Sia la media aritmetica dei voti sia la loro mediana danno informazioni utili.

Quesito 6.2.4. La media aritmetica degli scarti di N dati statistici dalla loro media aritmetica è nulla, quali che siano i dati che si considerano. Per questa ragione non può fornire alcuna informazione sul modo in cui i dati si disperdono attorno alla loro media aritmetica.

Quesito 6.2.5. Il ragionamento è simile a quello esposto per rispondere all'esercizio n. 6.1.3.

Quesito 6.2.6. Si tratta semplicemente di constatare che gli estremi dell'intervallo preso in considerazione, vale a dire 5,81 m/s e 5,97 m/s, si possono scrivere rispettivamente nei modi seguenti:

$$(5{,}89-0{,}08)\ \text{m/s} \quad \text{e} \quad (5{,}89+0{,}08)\ \text{m/s},$$

ossia, posto $v=5{,}89$ m/s e $\sigma=0{,}04$ m/s, nei modi seguenti:

$$v-2\,\sigma \quad \text{e} \quad v+2\,\sigma.$$

Come noto, tra le 50 velocità medie rilevate, ne cadono in tale intervallo il 95,45%, vale a dire all'incirca 47.

Quesito 6.2.7. La nuova media aritmetica diminuisce, rispetto alla vecchia, della stessa quantità 20, di cui diminuiscono i dati statistici e perciò è 255. La deviazione standard rimane immutata e perciò è ancora 12.

Quesito 6.2.8. La "media", intesa qui ovviamente come "media aritmetica", dopo i primi due compiti è stata calcolata correttamente da Paolo, mentre nel calcolo della media dopo il terzo compito … dipende. Se egli si è reso conto che, essendo il terzo voto uguale alla media aritmetica dei primi due, allora la media aritmetica dei tre voti è rimasta invariata, ha ragionato correttamente. Se, diversamente, l'ha fatto come una sorta di ragionamento generale ha sbagliato. Infatti, se, tanto per fissare le idee, il terzo voto fosse stato "7", il ragionamento di Paolo avrebbe portato alla "media" 6, mentre la media corretta sarebbe stata $\frac{4+6+7}{3}$, cioè un po' meno di 6.

Per far capire meglio, conduciamo il ragionamento su tre dati generici a, b, c. La loro media aritmetica è naturalmente:

$$m=\frac{a+b+c}{3}\ .$$

Seguendo il ragionamento di Paolo, avremmo invece:

$$M=\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}=\frac{a+b+2c}{4}$$

ed è evidente che $M\neq m$. Se, tuttavia, $c=\frac{a+b}{2}$, e di conseguenza $a+b=2c$, avremmo: $M=\frac{2c+2c}{4}=c$, ma anche $m=\frac{2c+c}{3}=c$, per cui $M=m$.

Quesito 6.2.9. Se l'operazione "$*$" godesse della proprietà associativa, dovrebbe risultare: $(a*b)*c=a*(b*c)$, comunque siano presi i numeri razionali non negativi a, b, c. Andiamo a controllare.

$$(a*b)*c=\frac{a+b}{2}*c=\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}=\frac{a+b+2c}{4}\ ; \qquad a*(b*c)=a*\frac{b+c}{2}=\frac{a+\frac{b+c}{2}}{2}=\frac{2a+b+c}{4}\ .$$

Dunque: $(a*b)*c\neq a*(b*c)$. L'operazione non gode della proprietà associativa.

Quesito 6.2.10. Le due sequenze hanno la stessa identica probabilità di verificarsi. (Vedere risposta a quesito n. 6.1.5)

Quesito 6.2.11. Ciò che è avvenuto in precedenza non influenza la probabilità del nuovo lancio. La probabilità che esca un numero pari è perciò esattamente uguale a quella che esca un numero dispari: entrambe sono uguali ad 1/2.

Quesito 6.2.12. In generale, se non si hanno informazioni sul sesso dei due figli, ci sono 4 casi possibili (per primo è scritto il sesso del figlio maggiore): M-M, M-F, F-M, F-F.
Nel caso di Mario Rossi, dovendosi evidentemente escludere l'eventualità F-F, le possibilità sono: M-M, M-F, F-M,. Si ha, perciò: p'=2/3.
Nel caso di Giulio Bianchi, considerato che il figlio maggiore è M, i casi possibili sono: M-M, M-F, dovendosi escludere di necessità le eventualità: F-M, F-F. Si ha, perciò: p"=1/2.
In conclusione, p'>p".

Quesito 6.2.13. Si può legittimamente supporre che il numero N' delle palline di un dato colore sia tale che il rapporto fra tale numero e il numero complessivo N di palline contenute nell'urna sia uguale alla percentuale di palline estratte di quel colore (o frequenza relativa f); vale a dire N'/N=f, da cui: N'=f N. Pertanto:

- numero palline rosse $= \frac{17}{73} \cdot 475 \approx 111$,
- numero palline nere $= \frac{34}{73} \cdot 475 \approx 221$,
- numero palline verdi $= \frac{22}{73} \cdot 475 \approx 143$.

Quesito 6.2.14. L'estrazione delle prime due palline modifica la composizione dell'urna, che adesso contiene 473 palline, di cui 143 verdi. Quindi la probabilità che la terza pallina non sia verde è:

$$p = 1 - \frac{143}{473} \approx 69\% .$$

Quesito 6.2.15. Se il gioco fosse equo la somma delle probabilità dei tre eventi dovrebbe essere 1. Ora, si ha:

$$P(1)=\frac{1}{1{,}90}\approx 52{,}6\%, \quad P(X)=\frac{1}{3{,}15}\approx 31{,}7\%, \quad P(2)=\frac{1}{4{,}00}\approx 25{,}0\%,$$

e la somma delle probabilità è: P(1)+P(X)+P(2)=1,09, per cui il gioco non è equo.

Quesito 6.2.16. Si può rispondere ricorrendo alla definizione di probabilità: basta tener presente che i casi possibili sono 40 e quelli favorevoli all'evento sono 13 (l'Asso di denari, gli altri 3 Assi, le altre 9 carte di Denari). Ragion per cui la probabilità cercata è: p=13/40.
Si può rispondere anche ricorrendo alla "regola della somma". Vale a dire:

$$p = P(\text{Asso}) + P(\text{carta di Denari}) - P(\text{Asso o carta di Denari}) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{4}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{13}{40} .$$

Quesito 6.2.17. Risulta p(A|B)·p(B)=p(B|A)·p(A), per cui di regola p(A|B)≠p(B|A). Se, tuttavia, p(A)=p(B), è evidente che risulta pure p(A|B)=p(B|A). Si pensi, ad esempio, all'estrazione casuale di un numero della TOMBOLA ed agli eventi A: "il numero estratto è pari" e B: "il numero estratto è maggiore di 45". Si verifica facilmente che p(A)=p(B)=1/2 e pertanto p(A|B)=p(B|A). In effetti: p(A|B)=p(B|A)=23/45.

Quesito 6.2.18. Il giocatore A ha la probabilità di vincere la somma s_B con probabilità p_A e di perdere la somma s_A con probabilità p_B. Per cui, se il gioco è equo, deve risultare: $p_A s_B = p_B s_A$, da cui, dividendo entrambi i membri dell'uguaglianza per $p_B s_B$, segue la proporzione:

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{s_A}{s_B}.$$

Viceversa, se vale questa proporzione, risulta $p_A s_B = p_B s_A$, per cui il gioco è equo.
Si poteva ragionare sul giocatore B: l'esito sarebbe stato lo stesso.

Quesito 6.2.19. Basta calcolare che $p=1/2$, $p'=1$, $p''=1/4$ e constatare che $p'+p''\neq p$. In realtà, chiamata p_1 la probabilità che esca un numero composto, risulta: $p=p'p_1+p''(1-p_1)$. Infatti, calcolato che $p_1=1/3$, risulta:

$$p'p_1+p''(1-p_1)=1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}=p$$

In generale sappiamo che si ha;

$$p(H)=p(H|E)p(E)+p\left(H|\overline{E}\right)p\left(\overline{E}\right).$$

Quesito 6.2.20. Il fatto che nelle ultime 10 prove l'evento si sia o no presentato è del tutto irrilevante. La probabilità P che esso si presenti per la prima volta tra 10 prove non dipende da ciò che è accaduto prima. Essa vale in ogni caso $P=p(1-p)^9$.

Quesito 6.2.21. Possiamo supporre, per comodità, che la probabilità p(P) di un numero pari sia maggiore della probabilità p(D) di un numero dispari. Ma il ragionamento non cambia nel caso contrario. Supponiamo, in particolare, che lo scarto tra le due probabilità sia s. Questo significa che si ha:

$$p(P)=\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\ ,\quad p(D)=\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\ ,$$

dove s è un numero reale tale che $0<\frac{s}{2}<\frac{1}{2}$, vale a dire $0<s<1$. Si ha allora:

- $p(\text{numeri di uguale parità})=p(PP)+p(DD)=\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{s^2}{2}$;
- $p(\text{numeri di parità diversa})=1-p(\text{numeri di uguale parità})=\frac{1}{2}-\frac{s^2}{2}$.

La probabilità, pertanto, che i due numeri siano entrambi pari o entrambi dispari è maggiore della probabilità che siano uno pari e l'altro dispari. La differenza è esattamente uguale ad s^2.

Quesito 6.2.22. È sufficiente calcolare la probabilità p' che le due palline estratte siano dello stesso colore: la probabilità cercata p è l'opposta di questa. Vale a dire: $p=1-p'$. Si ha allora:

$$p=1-\left(\frac{18}{34}\cdot\frac{17}{33}+\frac{16}{34}\cdot\frac{15}{33}\right)\approx 51{,}34\%\ .$$

Quesito 6.2.23. Bisogna calcolare anzitutto le probabilità dei due eventi:

- $p(\text{2 palline bianche})=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$;
- $p(\text{2 palline di colore diverso})=1-[p(BB)+p(NN)]=1-\left(\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{10}$.

Si capisce che è più conveniente scommettere (alla pari) sull'uscita di due palline di colore diverso.

Quesito 6.2.24. Lo schema sottostante (Fig. 6.1) riassume la situazione.

Si capisce che “M” ed “F” stanno rispettivamente per “maschio” e “femmina”, mentre “ma” e “mi” stanno per “maggiorenne” e “minorenne”. Ragionando sullo schema, si desume facilmente anzitutto che le persone minorenni (meno di 18 anni) sono (in percentuale) 100–75=25 e, di conseguenza, i maschi minorenni sono (sempre in percentuale) 25–13=12 ed i maschi maggiorenni 49–12=37. Allora, la probabilità cercata è:

$$p = p(M)+p(mi)-p(M-mi) = 0{,}49+0{,}25-0{,}12 = 0{,}62.$$

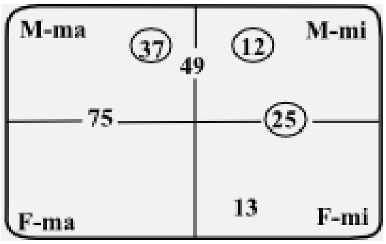

Fig. 6.1

Quesito 6.2.25. Si ricorda anzitutto che l’ambo sarà stato azzeccato se i due numeri giocati sono compresi fra i cinque estratti sulla “Ruota” del Lotto su cui si è scommesso. Ora, la probabilità che sia stato indovinato uno dei due numeri è 5/90; la probabilità che, azzeccato questo numero, sia stato indovinato il numero rimanente è 4/89. Pertanto la probabilità di azzeccare l’ambo è:

$$p=\frac{5}{90}\cdot\frac{4}{89}=\frac{2}{801}\ .$$

6.5 Antologia.

Nel “testo base” abbiamo accennato fugacemente al fatto che particolarmente in Russia alberghino i principali critici della concezione soggettiva della probabilità.

Allo scopo di fornire un’idea più chiara, riportiamo alcuni brani, relativi a questo aspetto della questione, tratti dal libro *Teoria della probabilità*, Roma, Editori Riuniti, 1986, scritto dal matematico russo Boris Vladimirovič Gnedenko (1912-1995):

« […] possiamo dividere la maggior parte delle definizioni di probabilità matematica in tre gruppi:

1. Definizioni di probabilità matematica derivanti da una misura quantitativa del grado di “certezza” dell’osservatore (la cosiddetta definizione “soggettiva” di probabilità - N.d.A.)
2. Definizioni che riducono il concetto di probabilità a quello di “uguale possibilità”, come concetto primitivo (la cosiddetta definizione “classica” di probabilità).
3. Definizioni che derivano dalla “frequenza” con cui si realizza un evento in un gran numero di prove (la definizione “statistica”).

« […] Se la probabilità matematica fosse una misura quantitativa del grado di certezza del ricercatore, allora la teoria della probabilità si ridurrebbe a qualcosa affine alla psicologia; in ultima analisi uno sviluppo consistente di una concezione così puramente soggettivista porterebbe inevitabilmente ad un idealismo soggettivo. Infatti, se si assume che la valutazione della probabilità è collegata esclusivamente allo stato del ricercatore, allora tutte le conclusioni tratte da asserzioni probabilistiche (del secondo tipo) sono private del loro contenuto oggettivo, che è indipendente dal ricercatore.

« […] Per tutti coloro che assumono una realtà esistente indipendentemente da noi e l’essenziale conoscibilità del mondo esterno, deve essere assolutamente chiaro che una definizione di probabilità matematica puramente soggettiva è del tutto inconsistente. »

Non è superfluo precisare che i brani riportati sono tratti da una versione italiana del libro di Gnedenko (traduzione di Gabriella Grosso e Carlotta Maffei), mentre l'originale dell'opera è un testo in inglese pubblicato nel 1962. Occorre dire, inoltre, che Gnedenko è stato allievo di Andrej Nikolavič Kolmogorov (1903-1987), il creatore della teoria assiomatica della probabilità (1933 – *Concetti fondamentali del calcolo delle probabilità*).