**Capitolo 6 (Integrazione a unità 38)**

## Misure di circonferenza e cerchio

### 6. 1 Quesiti a risposta chiusa.

**6. 1. 1** Attorno alla circonferenza dell'equatore della Luna si vuole distendere un nastro in modo da formare una nuova circonferenza concentrica alla prima ed in modo che la "distanza" fra le due circonferenze sia di 1,6 metri. Il nastro supera la circonferenza dell'equatore lunare di una lunghezza L tale che:

[A] $L \approx 10$ m; [B] $L \approx 100$ m;
[C] $L \approx 1000$ m; [D] L non si può calcolare per insufficienza di dati.

**6. 1. 2** Nel maggiore dei cerchi che individuano una corona circolare è tracciata una corda, lunga 10 cm e tangente alla circonferenza minore. Qual è l'area della corona?

[A] $100\,\pi$ cm$^2$. [B] $25\,\pi$ cm$^2$.
[C] $10\,\pi$ cm$^2$. [D] Non è possibile calcolarla per insufficienza di dati.

**6. 1. 3** Sono dati quattro settori circolari di ugual raggio. Hanno aree uguali ad $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ dell'area del cerchio da cui ognuno di essi è stato ottenuto. Se tra i quattro settori se ne elimina uno, i tre che rimangono:

[A] formano un cerchio se l'angolo al centro del settore eliminato misura 60°;
[B] formano un cerchio se l'angolo al centro del settore eliminato misura 72°;
[C] formano un cerchio se l'angolo al centro del settore eliminato misura 120°;
[D] non possono formare un cerchio in nessun caso.

**6. 1. 4** Due ciclisti, A e B, fanno una gara ad inseguimento su una pista circolare, partendo contemporaneamente da due posizioni diametralmente opposte. Esattamente dopo aver percorso 5 giri, il ciclista A raggiunge il ciclista B.

[A] È possibile calcolare sia il rapporto fra la velocità di A e quella di B sia la lunghezza della pista.
[B] È possibile calcolare il rapporto fra la velocità di A e quella di B ma non la lunghezza della pista.
[C] È possibile calcolare la lunghezza della pista ma non il rapporto fra la velocità di A e quella di B.
[D] È impossibile calcolare sia il rapporto fra la velocità di A e quella di B sia la lunghezza della pista.

**6. 1. 5** Sia k il rapporto fra l'area di un cerchio e quella di un esagono regolare inscritto. Risulta:

[A] $k=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. [B] $k=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. [C] $k=\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}$. [D] k non si può calcolare.

**6. 1. 6** Con riferimento alla figura sottostante (Fig. 6.1), l'area del cerchio è $\pi r^2$. Qual è l'area della regione ombreggiata?

[A] $\pi r^2$.  [B] $\frac{3}{2}\pi r^2$.  [C] $2r^2$.  [D] $4r^2$.

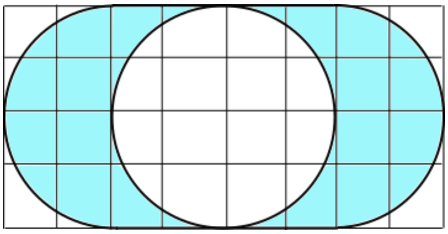


FIG. 6.1

## 6.2 Quesiti a risposta aperta.

**6.2.1** Una circonferenza di raggio 1 è divisa in n parti uguali dai punti $A_0$, $A_1$, $A_2$, …, $A_{n-1}$. Dimostrare che:

- se $n = 3$ si ha: $\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} = 3$;
- se $n = 4$ si ha: $\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_0A_2} \cdot \overline{A_0A_4} = 4$.

**6.2.2** Sulla circonferenza di diametro AB si prendano, da parti opposte di questo diametro, i punti C e D in modo che risulti: $\overline{AC}=5a$, $\overline{AD}=6a$, $\tan C\hat{A}D = \frac{3}{4}$, essendo a una lunghezza assegnata. Quanto vale l'area del quadrilatero ACBD?

**6.2.3** In una circonferenza di centro O è tracciata la corda AB. I punti C e D di tale corda la dividono in tre parti uguali. Sapendo che $\cos C\hat{O}D = 7/8$, quanto vale $\cos A\hat{O}B$ ?

**6.2.4** In uno stesso cerchio sono ricavati due settori circolari: uno avente l'angolo al centro di 45° e l'altro avente l'angolo al centro di 30°. Le superfici dei due settori sono grandezze commensurabili o incommensurabili? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

**6.2.5** L'arco AB di una circonferenza di centro O è 1/6 dell'intera circonferenza. Il settore circolare AOB è diviso dalla corda AB in due regioni. Queste due regioni sono superifici commensurabili o incommensurabili? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

**6.2.6** Di una medesima circonferenza, avente il raggio di 2 m, sono state ottenute le seguenti misure approssimate: $\frac{88}{7}$ m e $\frac{1420}{113}$ m. Quale di esse è l'approssimazione migliore?

**6.2.7** In un cerchio è inscritto un quadrilatero avente due lati paralleli, distanti fra loro 4 cm. Uno di questi lati misura 10 cm, mentre l'area del quadrilatero è 32 cm$^2$. Quant'è l'area della regione piana interna al cerchio ed esterna al quadrilatero?

## 6.3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

**Quesito 6.1.1.** Indicato con R metri il raggio dell'equatore della Luna, la differenza L fra la lunghezza del nastro e quella della circonferenza dell'equatore lunare, espressa in metri, è:

$$L = 2\pi(R+1,6) - 2\pi R = 2\pi\times 1,6 \approx 10,05.$$

[A] è l'alternativa corretta.

**Quesito 6. 1. 2.** Indicati con R ed r rispettivamente i raggi della circonferenza maggiore e di quella minore e con 2d la lunghezza della corda, l'area A della corona circolare è: $A = \pi\ (R^2 - r^2) = \pi\ d^2$. Siccome d = 5 cm, risulta $A = 25\ \pi\ cm^2$. [B] è l'alternativa corretta.

**Quesito 6. 1. 3.** Bisogna stabilire se è possibile eliminare una delle frazioni considerate in modo che la somma delle tre rimanenti sia 1. In effetti, constatato che $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, la frazione da eliminare è $\frac{1}{5}$, per cui il settore corrispondente ha angolo al centro pari alla quinta parte di 360°, ossia 72°. [B] è l'alternativa corretta.

**Quesito 6. 1. 4.** Nell'istante in cui il ciclista A raggiunge il ciclista B, A ha persorso esattamente 5 giri di pista mentre B ne ha percorsi 4,5. Il percoso $S_A$ di A ed il percorso $S_B$ di B sono pertanto: $S_A=5\times 2\pi r$ ed $S_B=4{,}5\times 2\pi r$, avendo indicato con r il raggio della pista. I tempi di percorrenza sono ovviamente uguali. Se allora chiamiamo n il rapporto fra la velocità di A e quella di B, deve essere dunque: $10\pi r=n\times 9\pi r$, da cui segue $n=10/9$, per cui è noto il rapporto fra le due velocità. Non ci sono invece elementi per calcolare la lunghezza della pista. [B] è l'alternativa corretta.

**Quesito 6. 1. 5.** Posto che sia r il raggio del cerchio, la sua area è $A'=\pi r^2$, mentre quella dell'esagono regolare inscritto (il cui lato è proprio r) è $A"= 3r^2\sqrt{3}/2$. Pertanto:

$$k = \frac{A'}{A"} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

[A] è l'alternativa corretta.

**Quesito 6. 1. 6.** L'alternativa corretta è [D]. La regione è infatti equivalente al quadrato di lato 2r.

## 6. 4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

**Quesito 6. 2. 1.** Sia per n=3 che per n=4 la dimostrazione è immediata.
Quando n=3 sia $A_0A_1$ sia $A_0A_2$ sono i lati di un triangolo equilatero, per cui sono lunghi $\sqrt{3}$. Il prodotto delle due lunghezze è 3.
Quando n=4, $A_0A_1$ e $A_0A_3$ sono i lati di un quadrato, per cui la loro lunghezza è $\sqrt{2}$, mentre $A_0A_2$ è un diametro e perciò è lungo 2. Il prodotto delle tre lunghezze è 4.
In generale, il prodotto delle n lunghezze $A_0A_1$, $A_0A_2$, $A_0A_3$, …, $A_0A_{n-1}$ è uguale ad n, ma la dimostrazione di ciò non è per nulla elementare anche se, per alcuni casi particolari (come ad esempio anche n=6) il procedimento è ancora semplice, e per altri (come ad esempio n=5) è abbordabile, quantunque con calcoli lunghi e noiosi. Il lettore, se lo ritiene opportuno, può cimentarsi proprio nella dimostrazione di questi due casi particolari.

**Quesito 6. 2. 2.** I triangoli ABC e ABD sono evidentemente rettangoli rispettivamente in C e in D. Conviene prolungare i lati AC e BD fino alla loro intersezione E: anche i triangoli ADE e BCE sono ovviamente rettangoli. Si ha allora:

$$\text{Area(ACBD)=Area(ADE)–Area(BCE)}=\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot \sin C\widehat{A}D - \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{CE},$$

per cui è sufficiente conoscere le misure di AE, CE e BC per calcolare l'area richiesta. I calcoli sono del tutto elementari e li lasciamo al lettore. A conti fatti, si trova:

$$\overline{AE}=\frac{15}{2}a\,,\quad \overline{CE}=\frac{5}{2}a\,,\quad \overline{BC}=\frac{10}{3}a\,.\ \text{Pertanto: Area(ACBD)}=\frac{28}{3}a^2.$$

**Quesito 6. 2. 3.** Indichiamo provvisoriamente con 3a la lunghezza della corda AB. Se C, D sono i punti di divisione della corda AB, con C più vicino ad A, ne consegue che i segmenti AC, CD e DB hanno tutti lunghezza a. Mediante il teorema del coseno applicato al triangolo COD relativamente al lato CD, si trova che il segmento CO è lungo 2a. Chiamato allora M il punto medio della corda AB, che è anche punto medio di CD, mediante il teorema di Pitagora applicato dapprima al triangolo rettangolo OMC e poi al triangolo rettangolo OMA, si trova: $\overline{OM}=\frac{a}{2}\sqrt{15}$, $\overline{OA}=a\sqrt{6}$. Ricorrendo di nuovo al teorema del coseno, ma applicato questa volta al triangolo AOB relativamente al lato AB, si trova $\cos A\widehat{O}B=\frac{1}{4}$.

**Quesito 6. 2. 4.** Bisogna calcolare il rapporto fra le aree dei due settori. Il primo, quello che ha l'angolo al centro di 45°, è i $\frac{45}{360}$ del cerchio; il secondo è i $\frac{30}{360}$ del cerchio. Pertanto il rapporto fra le aree dei due settori è: $\frac{A'}{A''}=\frac{45}{30}$ , vale a dire un numero razionale. Le due superfici sono pertanto commensurabili.

**Quesito 6. 2. 5.** La corda AB è lunga quanto il raggio r della circonferenza, per cui il triangolo AOB è un triangolo equilatero. Esso costituisce una delle regioni in cui il settore circolare AOB è diviso dalla corca AB. L'altra regione è un segmento circolare.

L'area S' del triangolo è : $S'=\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$ . L'area S" del segmento circolare è : $S''=\frac{\pi r^2}{6}-\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$ .

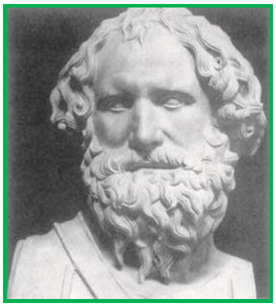
Pertanto: $\frac{S''}{S'}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-1$.

Si tratta di un numero irrazionale: le due superfici sono incommensurabili.

**Quesito 6. 2. 6.** La lunghezza "esatta" della circonferenza è 4π m. Nel caso della misura $\frac{88}{7}$ m, a π è attribuito il valore $\frac{22}{7}$, nell'altro caso è stato attribuito il valore $\frac{355}{113}$. Com'è noto, il primo di questi due valori fornisce un'approssimazione di π esatta fino alla 2ª cifra decimale, il secondo un'approssimazione esatta fino alla 6ª cifra decimale. La seconda approssimazione, evidentemente, è migliore della prima.

**Quesito 6. 2. 7.** Si spiega facilmente che il quadrilatero è un trapezio isoscele. Posto allora che b' e b" siano le sue basi e constatato che una di esse, ad esempio b', misura 10 cm, che l'altezza h del trapezio misura 4 cm e che la sua area è 32 cm², risulta $\frac{1}{2}(b'+b'')h=32$, da cui segue b"=6 (cm). Indicato con ABCD il trapezio in questione, siano AB e CD la base maggiore e la base minore e sia DH la sua altezza. Esse misurano nell'ordine: 10 cm, 6 cm, 4 cm. Chiamato M il punto medio di AB, si trova facilmente che MH e MD misurano rispettivamente 3 cm e 5 cm. Ne consegue che il punto M è equidistante dai vertici A, B, D (e quindi anche C) del quadrilatero, per cui esso è proprio il centro del cerchio circoscritto al quadrilatero, il cui raggio è perciò 5 cm. L'area della regione richiesta, espressa in $cm^2$, è pertanto. $S=25\pi-32$.

**6. 5 Archimede**: vita ed opere.



Archimede

È considerato il maggiore fisico e matematico dell'antichità. Lo storico della matematica Eric T. Bell [1] lo include nell'elenco dei "grandi matematici". Nacque a Siracusa circa nel 287 a.C., da giovane si recò ad Alessandria per seguire le lezioni del "maestro" Euclide. Lì fece amicizia con Eratostene di Cirene (275 circa – 194 a.C.), con il quale rimase poi in contatto epistolare. Ritornato in patria, ottenne risultati straordinari sia nel campo della matematica sia in quello della fisica. In particolare:

- compose opere di geometria *Sulla sfera e sul cilindro*, sulla *Misura del cerchio* e sulla *Quadratura della parabola* e inoltre condusse studi sul calcolo dei volumi della piramide e del cono; ma non sono tutte le sue opere matematiche;
- inventò lo specchio ustorio, una sorta di lamiera metallica a forma di specchio concavo, che fu utilizzato con successo, anche se solo provvisorio, nella guerra contro i romani che, sotto il comando di Marco Claudio Marcello, assediavano Siracusa;
- scoprì il principio idrostatico, oggi noto come "principio di Archimede", in base al quale ogni corpo immerso in un fluido subisce una diminuzione di peso uguale al peso del fluido che sposta. Si racconta che Archimede abbia scoperto questo principio mentre faceva il bagno in una vasca e, nel momento stesso in cui si rese conto di ciò, uscì dall'acqua e si mise a correre nudo per le strade di Siracusa gridando: "Èureka!", vale a dire: "Ho trovato!". Marco Vitruvio Pollione, ingegnere e scrittore latino, vissuto nel I sec. a.C., racconta che Archimede si stava occupando del problema in seguito alla richiesta, da parte di Gerone II, tiranno di Siracusa, di scoprire se era fondato il suo sospetto che l'orefice avesse falsificato una corona d'oro a lui destinata, sostituendo parte dell'oro con argento;
- scoprì e applicò i principi della leva. A proposito di questa scoperta, ad Archimede è attribuito il detto: "*Datemi un punto di appoggio e vi solleverò il mondo*": l'aneddoto è riferito da Pappo di Alessandria, geometra greco vissuto nel III-IV sec. d.C.;
- in un'opera dal titolo *Arenario* calcola il numero dei granelli di sabbia che occorrono per riempire l'universo. Il calcolo fu una sfida a coloro che ritenevano che, col sistema greco di

[1] Eric T. Bell, *I grandi matematici*, Sansoni editore, Firenze, 1966.

numerazione, non fosse possibile scrivere numeri così grandi.
Ad Archimede sono pure attribuiti, in particolare dai matematici arabi del IX sec. d.C., la formula per ottenere l'area di un triangolo conoscendo le misure dei lati (oggi nota come formula di Erone) ed il cosiddetto "teorema della corda spezzata". Ecco di che cosa si tratta. Siano AB e BC due corde di un dato cerchio ($AB<BC$) e siano M il punto medio dell'arco ABC ed H la proiezione ortogonale di M su BC (Fig. 6.2).

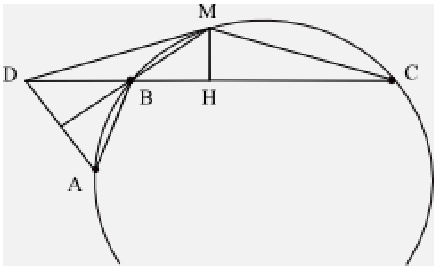



Fig. 6.2

Si dimostra allora che H è il punto medio della "corda spezzata" ABC, vale a dire: $AB + BH = HC$.
Per la dimostrazione di costruisce il punto D simmetrico di C rispetto ad H e si osserva che $DM=MC$. D'altronde $AM=MC$, per cui il triangolo MDA è isoscele sulla base DA. Ne consegue che $M\widehat{D}A=M\widehat{A}D$.
Poiché $M\widehat{D}C=M\widehat{C}D$ e $M\widehat{A}B=M\widehat{C}D$ allora $M\widehat{D}B=M\widehat{A}B$. Di conseguenza: $M\widehat{D}A-M\widehat{D}B=M\widehat{A}D-M\widehat{A}B$ cioè: $B\widehat{D}A=B\widehat{A}D$; quindi anche $DB=AB$.
Pertanto, essendo $DB+BH=HC$, risulta pure: $AB+BH=HC$. [c.v.d.]

Mentre c'è qualche dubbio sull'anno di nascita di Archimede, non ce ne sono invece su quello della sua morte: era il 212 a.C., durante il sacco di Siracusa ad opera delle truppe di Marcello, dopo che queste erano riuscite ad espugnare la città.
Sulle modalità della morte si raccontano diverse versioni. Lo storico e scrittore greco Plutarco (ca. 46-127 d.C.) nella *Vita di Marcello* ne riporta addirittura tre. Fra queste, la versione più nota, o perlomeno quella più citata, racconta che Archimede fu ucciso da un soldato di Marcello, poiché si era rifiutato di seguirlo se prima non avesse risolto il problema col quale era impegnato e messa in ordine la dimostrazione.