Capitolo 7 (integrazione a unità 16-17)

La geometria delle trasformazioni

7.1 Quesiti a risposta chiusa.

7.1.1 È FALSO che ogni isometria trasforma:
[A] ogni segmento in un segmento congruente
[B] ogni angolo in un angolo congruente
[C] ogni retta in una retta parallela
[D] due qualsiasi rette parallele in rette parallele

7.1.2 Due punti corrispondenti, A e A', NON sono sufficienti per individuare una:
[A] traslazione [B] simmetria centrale
[C] simmetria assiale [D] rotazione

7.1.3 Un'isometria non identica, avente almeno un punto unito, NON può essere una:
[A] traslazione [B] simmetria centrale
[C] simmetria assiale [D] rotazione

7.1.4 Due rette corrispondenti, r ed r', strettamente parallele, quante traslazioni determinano?
[A] Due e solo due. [B] Tre e solo tre.
[C] Almeno quattro. [D] La risposta non si può dare poiché i dati sono insufficienti.

7.1.5 Quale delle seguenti proposizioni è FALSA?
[A] Ogni traslazione, diversa dall'identità, trasforma un qualsiasi retta in una retta strettamente parallela.
[B] Esiste almeno una rotazione che trasforma ogni retta passante per il centro della rotazione in se stessa.
[C] Per ogni simmetria assiale, esiste almeno una retta, diversa dall'asse di simmetria, che la simmetria assiale trasforma in se stessa.
[D] Ogni simmetria centrale trasforma una qualsiasi retta in una retta parallela.

7.1.6 Quale delle seguenti trasformazioni geometriche presenta almeno una retta unita luogo di punti uniti?
[A] ogni traslazione [B] ogni simmetria centrale
[C] ogni rotazione [D] ogni simmetria assiale

7.1.7 Quale delle seguenti figure ha un centro di simmetria ed almeno un asse di simmetria?
[A] Parallelogramma [B] Trapezio isoscele
[C] Rombo [D] Nessuna delle figure considerate

7.1.8 Quale delle seguenti proposizioni è FALSA?
[A] Il prodotto di due isometrie è un'isometria.
[B] Il prodotto di due traslazioni è una traslazione.
[C] Il prodotto di due rotazioni è una rotazione.
[D] Il prodotto di due simmetrie assiali è una simmetria assiale.

7.1.9 Componendo tre generiche simmetrie assiali quale trasformazione è possibile ottenere?

[A] Una traslazione [B] Una simmetria centrale
[C] Una rotazione [D] Nessuna delle tre

7. 1. 10 Quale delle seguenti isometrie è speculare?
[A] Rototraslazione [B] Glissosimmetria
[C] Simmetria centrale [D] Prodotto di due simmetrie assiali

7. 2 Quesiti a risposta aperta.

7. 2. 1 Elenca quattro proprietà di figure geometriche che non variano (o, come anche si dice, sono *invarianti*) se la figura è sottoposta ad una trasformazione isometrica.

7. 2. 2 È vero che ogni isometria trasforma una qualsiasi retta in una retta parallela?

7. 2. 3 È corretto affermare che un vettore si identifica con un segmento orientato?

7. 2. 4 È corretto affermare che ogni simmetria assiale è una trasformazione involutoria? Che significa ciò?

7. 2. 5 Le traslazioni t' e t" sono determinate rispettivamente dai vettori $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OA''}$. Come si può costruire il vettore che determina la traslazione t' ∘ t" ?

7. 2. 6 Quanti e quali assi di simmetria presenta un quadrato?

7. 2. 7 È corretto affermare che ogni isometria trasforma ogni quadrato in un quadrato?

7. 2. 8 Il triangolo equilatero ABC subisce la traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$ e, a seguire, la rotazione intorno a B di ampiezza 60° in verso antiorario. Trovare le posizioni finali dei punti A, B, C.

7. 2. 9 Sono assegnati nel piano una retta r ed un punto P. Trovare almeno un'isometria che trasformi r nella retta s passante per P e perpendicolare ad r.

7. 2. 10 Considerato il triangolo isoscele ABC, rettangolo in A, sono costruiti, esternamente ad esso, due triangoli equilateri: il triangolo ABD ed il triangolo ACE. Trovare almeno un'isometria che porti i punti A, D e B rispettivamente in E, C ed A.

7. 2. 11. Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AB e sia I il suo incentro. Dimostrare che la misura dell'angolo $A\hat{I}B$ è invariante l variare del triangolo.

7. 3 Risposte commentate: **quesiti a risposta chiusa**.

Quesito 7. 1. 1. Le alternative [A], [B] e [D] non sono corrette: basta ricordare che ogni isometria conserva la lunghezza dei segmenti, l'ampiezza degli angoli e il parallelismo delle rette. Ne consegue che l'unica alternativa corretta è la [C]. In realtà, fra le isometrie, solo la traslazione e la simmetria centrale trasformano ogni retta in una retta parallela, ma non così, per esempio, la simmetria assiale.

Quesito 7. 1. 2. Due punti corrispondenti, A e A', sono sufficienti per individuare una traslazione (quella di vettore $\overrightarrow{AA'}$), ma anche una simmetria centrale (quella avente come centro il punto medio del segmento AA') e una simmetria assiale (quella avente come asse di simmetria l'asse del segmento AA'): le alternative [A], [B] e [C] non sono, dunque, corrette. L'unica alternativa corretta è [D].

Quesito 7.1.3. La simmetria centrale ha un punto unito: il centro della simmetria. La simmetria assiale ha infiniti punti uniti: tutti quelli dell'asse di simmetria. Anche la rotazione ha un punto unito: il suo centro. Le alternative [B], [C] e [D] non sono, pertanto, corrette. L'unica alternativa corretta è [A].

Quesito 7.1.4. L'alternativa corretta è [C]. In realtà due rette corrispondenti, r ed r', determinano infinite traslazioni: quelle i cui vettori hanno il primo estremo su una retta ed il secondo sull'altra retta.

Quesito 7.1.5. Ogni traslazione, diversa dall'identità, trasforma una retta in una retta strettamente parallela se e solo se la retta non ha la stessa direzione del vettore della traslazione. L'alternativa [A] è, pertanto, corretta.
Poiché v'è una sola alternativa corretta, è inutile indagare oltre.
Noi, tuttavia, vogliamo spiegare perché le altre alternative non sono corrette. Diciamo subito che non lo sono poiché evidentemente affermano qualcosa che non è falso, vale a dire qualcosa che è vero. Per quanto concerne l'alternativa [B], basta pensare alla simmetria centrale, che è una particolare rotazione. Riguardo alla [C], si sa che ogni retta perpendicolare all'asse di rotazione è trasformata in se stessa. Anche l'alternativa [D] non è corretta: infatti è vero che la simmetria centrale trasforma una qualsiasi retta in una parallela e precisamente la trasforma in sé stessa se la retta passa per il centro della simmetria ed in una retta strettamente parallela in ogni altro caso.

Quesito 7.1.6. Solo ogni simmetria assiale, tra le isometrie considerate, presenta almeno una retta unita luogo di punti uniti e questa retta è l'asse della simmetria. L'unica alternativa corretta è, pertanto, la [D].

Quesito 7.1.7. Le alternative [A] e [B] non sono corrette: il parallelogramma ha il centro di simmetria ma non ha assi di simmetria, mentre il trapezio isoscele ha un asse di simmetria ma non ha un centro di simmetria. Il rombo ha, invece, sia il centro di simmetria (il punto d'incontro delle diagonali) sia almeno un asse di simmetria (invero ne ha due: le due diagonali, appunto). L'alternativa [C] è pertanto corretta. Ovviamente l'alternativa [D] non è corretta.

Quesito 7.1.8. Il prodotto di due isometrie è un'isometria e, in particolare, quello di due traslazioni è una traslazione e quello di due rotazioni è una rotazione. Invece, il prodotto di due simmetrie assiali non è una simmetria assiale (è una traslazione se i due assi di simmetria sono paralleli oppure una rotazione se sono incidenti). L'alternativa corretta è pertanto la [D].

Quesito 7.1.9. Componendo due simmetrie assiali si ottiene un'isometria diretta e componendo questa con una simmetria assiale si ottiene un'isometria speculare. Siccome traslazione, simmetria centrale e rotazione sono isometrie dirette, componendo tre simmetrie assiali non è possibile ottenere alcuna di esse. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 7.1.10. [B] è la risposta corretta. La glissosimmetria è infatti il prodotto di una traslazione (isometria diretta) con una simmetria assiale (isometria speculare) e pertanto è un'isometria speculare. Alcuni la chiamano anche riflessotraslazione, altri antitraslazione.

7.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 7.2.1. Si tratta di elencare quattro invarianti dell'isometria. Per esempio: 1) ogni segmento è mutato in un segmento congruente; 2) ogni angolo è mutato in un angolo congruente; 3) ogni retta è trasformata in una retta; 4) due qualsiasi rette parallele sono trasformate in due rette parallele.

Quesito 7. 2. 2. È falso, poiché soltanto la traslazione e la simmetria centrale hanno quella proprietà. Può accadere che ci sia qualche altra isometria che trasformi rette particolari in rette parallele (per esempio, la simmetria assiale trasforma una retta parallela all'asse di simmetria in una retta parallela), ma nessun'altra isometria trasforma una qualsiasi retta in una retta parallela.

Quesito 7. 2. 3. No. Un vettore è una classe di segmenti orientati equipollenti (vale a dire aventi uguali lunghezza, direzione e verso). Uno dei segmenti orientati della classe può rappresentare il vettore, ma non si identifica con esso, dal momento che il vettore può essere rappresentato da un qualunque altro segmento orientato della classe.

Quesito 7. 2. 4. Lo è. Una trasformazione si dice *involutoria* se, ammesso che al generico punto P associ il punto P', la sua inversa associa P' a P. In altri termini, se applicata due volte, riproduce l'identità. Ogni isometria assiale ha questa proprietà, per questo è una trasformazione involutoria.

Quesito 7. 2. 5. Basta costruire il parallelogramma A'OA"A. La traslazione $t' \circ t''$ è determinata dal vettore $\overrightarrow{OA}$.

Quesito 7. 2. 6. Un quadrato ha 4 assi di simmetria: le 2 rette mediane (vale a dire le congiungenti i punti medi dei lati opposti) e le 2 rette diagonali.

Quesito 7. 2. 7. Sì, è corretto. Infatti ogni isometria trasforma ogni segmento in un segmento congruente ed ogni angolo in un angolo congruente. Ragion per cui, la figura trasformata di un quadrato, non solo è un quadrato, ma addirittura un quadrato congruente a quello dato.

Quesito 7. 2. 8. Aiutandosi con una figura, si scopre agevolmente che il punto A finisce in B, il punto B nel simmetrico di A rispetto a BC e C rimane in C. Il che equivale a dire che il triangolo ABC è trasformato nel triangolo che si ottiene con una rotazione di 60° in senso antiorario con centro in C.

Quesito 7. 2. 9. Indicato con Q il piede della perpendicolare ad r condotta per P, la rotazione di 90° intorno a Q trasforma r nella retta s cercata. Ovviamente non è l'unica isometria che assolve al compito ed il lettore può provare a trovarne altre.

Quesito 7. 2. 10. Onde evitare equivoci, incominciamo ad indicare con O il centro del triangolo ACE (Fig. 7.1).
Osserviamo adesso che la rotazione di 150° intorno ad A, in senso orario, lascia A al suo posto e porta B in E e D in C; successivamente la rotazione di 120° intorno all'originario punto O, in senso antiorario, porta A nella posizione originaria di E, l'attuale posizione di B in quella originaria di C e l'attuale posizione di D in quella originaria di A. Cosicché il prodotto delle due rotazioni finisce per trasformare A in E, B in C e D in A. È la trasformazione cercata.

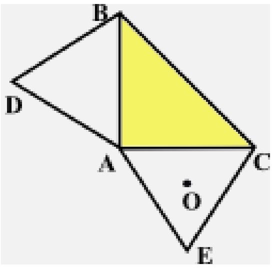

Fig. 7.1

Quesito 7.2.11. Poniamo $B\widehat{A}C=2\alpha$ e $A\widehat{B}C=2\beta$. Si ha evidentemente $2\alpha+2\beta=90°$ e perciò $\alpha+\beta=45°$. D'altro canto, essendo AI bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$ e BI bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$, risulta: $I\widehat{A}B=\alpha$ e $I\widehat{B}A=\beta$. Pertanto: $A\widehat{I}B=180°-\left(I\widehat{A}B+I\widehat{B}A\right)=180°-(\alpha+\beta)=180°-45°=135°$. Effettivamente la misura dell'angolo $A\widehat{I}B$ è sempre 135° e quindi invariante al variare del triangolo ABC, purché rettangolo in C.

7.5 Antologia.

Abbiamo avviato lo studio della geometria riflettendo sulla necessità di passare da un'indagine sulle proprietà delle figure geometriche basata sull'evidenza intuitiva ad una basata sul ragionamento deduttivo. Ci hanno convinti ad agire in questo senso alcune proprietà che sembravano vere sul piano intuitivo ma che, alla prova del ragionamento, si sono rivelate false.
Vogliamo concludere con due di queste proprietà "paradossali": la prima sarà illustrata in questo capitolo, la seconda nel successivo.
Segnaliamo, per inciso, che proprietà del genere sembra figurassero in una raccolta che completava gli *Elementi* di Euclide, ma che sarebbe andata perduta.
Lo studente sa già che le proprietà che mostreremo sono false, deve solo spiegare dov'è l'errore, che certamente c'è. Dovrebbe cercare di farcela da solo, ma in ogni caso può controllare le sue conclusioni con le spiegazioni che forniremo noi.
Anticipiamo che nei ragionamenti che condurremo un ruolo decisivo sarà assunto dalle figure.

«La funzione svolta dalle figure nelle dimostrazioni è ben nota; esse chiariscono non solo il contenuto del teorema ma anche lo sviluppo della dimostrazione stessa. [...]
«La funzione delle figure non va né sopravvalutata né sottovalutata. Riguardarle come una parte indispensabile della dimostrazione sarebbe esagerato. Da un punto di vista teorico una dimostrazione geometrica non necessita di figure; anzi il non usarle ha il vantaggio di eliminare ogni affidamento a ciò che risulta "evidente" dalla figura e che talvolta è "evidente" solo in apparenza ed è fonte di errori. In pratica tuttavia rinunciare alle figure condurrebbe alle stesse difficoltà che si incontrerebbero, per esempio, se volessimo eseguire a mente dei calcoli con numeri di parecchie cifre, o se volessimo giocare a scacchi senza guardare la scacchiera; il pericolo di commettere errori aumenterebbe considerevolmente.» [1]

COSTRUZIONE. Sia dato un segmento AB e sia P un suo punto interno, scelto in maniera casuale. Si divide il segmento AB in 3 parti uguali, ciascuna di queste 3 parti si divide a sua volta in 3 parti uguali e così all'infinito (Fig.7.2). Certamente uno dei punti di divisione finirà per coincidere con P.

FIG. 7.2

A questa conclusione conduce l'evidenza intuitiva, che però questa volta è fallace. Perché?

SPIEGAZIONE. Al punto A si associa il numero 0 e al punto B il numero 1. In questo modo ognuno dei punti di divisione ha ascissa del tipo $k/3^n$ (Fig. 7.3).

[1] Cfr.: Ya. S. Dubnov, *Errori nelle dimostrazioni in geometria*, (trad. dal russo di Adolfo Abortivi) , Milano, Progresso Tecnico Editoriale, 1965, pag. 2.

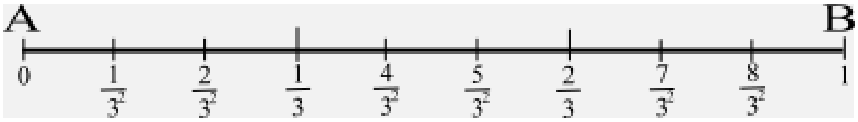

FIG. 7.3

Ora, evidentemente sul segmento AB esistono punti (e sono infiniti) che hanno ascisse di tipo diverso, come, tanto per fornire qualche esempio: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Se l'ascissa di P è uno di questi numeri, nessun punto di divisione coinciderà con P.