Capitolo 7 (Integrazione a unità 39-40)

Principio d'induzione. Numeri complessi

7.1 Quesiti a risposta chiusa.

7.1.1 Utilizzando il principio d'induzione si dimostra che tre delle seguenti proposizioni sono vere. Qual è la proposizione falsa?

[A] Il prodotto di tre qualsiasi numeri naturali consecutivi è divisibile per 6.

[B] Il numero $2n^3+3n^2+n$, ottenuto attribuendo ad n un qualsiasi valore naturale, è divisibile per 3.

[C] Per ogni intero $n>1$ risulta $3^n>n+2$.

[D] Il numero $n^2-79n+1601$, ottenuto attribuendo ad n un qualsiasi valore naturale, è un numero primo.

7.1.2 Si consideri la seguente espressione: 5^n+7^{2n-3}, dove ad n si attribuisce un valore intero maggiore di 1. Una sola delle seguenti alternative è corretta. Quale sia questa alternativa si può stabilire con semplici considerazioni. Una volta individuatala, dimostrare che la proposizione espressa da tale alternativa è vera utilizzando il principio d'induzione.

[A] L'espressione è divisibile per 4 per ogni $n>1$.

[B] L'espressione è divisibile per 8 per ogni $n>1$.

[C] L'espressione è divisibile per 16 per ogni $n>1$.

[D] L'espressione è divisibile per 32 per ogni $n>1$.

7.1.3 Scelti in maniera arbitraria due numeri complessi coniugati:

[A] la loro somma è un numero reale ma il loro prodotto non lo è;

[B] il loro prodotto è un numero reale ma la loro somma non lo è;

[C] la loro somma e il loro prodotto sono numeri reali;

[D] la loro somma e il loro prodotto non sono numeri reali.

7.1.4 L'espressione $\frac{2}{1+i}$, dove i è l'unità immaginaria, si può trasformare nella seguente:

[A] $i-1$; [B] $1-i$; [C] $2-2i$; [D] $2i-2$.

7.1.5 Una forma semplificata dell'espressione $\frac{i}{2+i}+\frac{1}{2-i}$, dove i è l'unità immaginaria, è:

[A] $i+1$; [B] $i+\frac{1}{3}$; [C] $\frac{3}{5}i+\frac{1}{5}$; [D] $\frac{3}{5}i+\frac{3}{5}$.

7.1.6 Quali sono le tre soluzioni nel campo complesso dell'equazione algebrica di 3° grado:

$$2x^3-2x^2+x-1=0\ ?$$

[A] $1, i\sqrt{2}, -i$; [B] $-1, i\sqrt{2}, -i$; [C] $1, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}$; [D] $-1, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}$.

7.1.7 Siano i numeri complessi $x=5+7i$ e $y=2+7i$. Risulta:

[A] $x>y$; [B] $y>x$; [C] $x=y$; [D] le relazioni precedenti sono tutte e tre false.

7. 2 Quesiti a risposta aperta.

7. 2. 1 Utilizzando il principio d’induzione, bisogna dimostrare che il numero n^2+n+1 è dispari. Come bisogna procedere?

7. 2. 2 Dimostrare per induzione che $n!>2^{n-1}$ per $n>2$.

7. 2. 3 Dimostrare per induzione che per ogni naturale n il numero $2^{2n+1}+3^{2n+1}+5^{2n+1}$ è divisibile per 10.

7. 2. 4 Mettere nella forma a+bi il coniugato del numero complesso $\frac{2+i}{2-i}$.

7. 2. 5 Un numero è tale che il suo opposto e il suo reciproco sono uguali. Esiste un tale numero nel campo reale? Esiste nel campo complesso?

7. 2. 6 Considerata la terna di numeri $\{2, 3, i\}$, esiste un’equazione algebrica di 3° grado, con coefficienti reali, che ha i numeri della terna come radici?

7. 2. 7 Dopo aver messo il numero 4i in forma trigonometrica, determinare le sue due radici quadrate.

7. 2. 8 Esistono due numeri reali la cui somma e il cui prodotto sono uguali ad un numero reale k assegnato? Se k=2 tali numeri sono reali o complessi? Qual è il loro valore?

7. 2. 9 Trovare le radici seste dell’unità nel campo complesso.

7. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 7. 1. 1. [D] è l’alternativa corretta. Si ha infatti che per n=80 l’espressione assume il valore 1681 che è uguale a 41^2.
In effetti si dimostra, proprio utilizzando il principio d’induzione, che le altre tre proposizioni sono vere. Riportiamo la dimostrazione per l’alternativa [C], lasciando al lettore il compito di dimostrare la veridicità delle altre due proposizioni.
Allora, per n=2 è vero che $3^n>n+2$. Ammettiamo che questa disuguaglianza sia vera per un generico n e dimostriamo che è ancora vera per n+1, vale a dire che si ha $3^{n+1}>(n+1)+2$. Ora si ha: $3^{n+1}=3^n\cdot 3$. D’altro canto, siccome si è ipotizzato che sia $3^n>n+2$, risulta: $3^{n+1}>(n+2)\cdot 3$. Ma $(n+2)\cdot 3=(n+2)+2(n+2)=[(n+1)+2]+(2n+1)$, perciò, a più forte ragione: $3^{n+1}>(n+1)+2$. Quindi la disuguaglianza è per ogni n>1.

Quesito 7. 1. 2. Si capisce subito che la sola proposizione vera è la [A]. Se infatti fosse vera [B], dovrebbe essere vera anche [A] dal momento che un numero divisibile per 8 lo è anche per 4. E un discorso analogo vale per la [C] e la [D]. Si tratta allora di dimostrare, utilizzando il principio d’induzione, che la [A] è vera.
Per n=2 l’espressione 5^n+7^{2n-3} assume il valore 32 che è un numero divisibile per 4. Ammettiamo che l’espressione dia luogo ad un numero divisibile per 4 per un generico n>1. Dobbiamo dimostrare che essa assume un valore divisibile per 4 anche per n+1. Vale a dire che risulta essere divisibile per 4 il numero $5^{n+1}+7^{2(n+1)-3}$.

Ora, il fatto che 5^n+7^{2n-3} sia un numero divisibile per 4 implica l'esistenza di un intero k, non nullo, tale che: $5^n+7^{2n-3}=4k$, da cui segue: $7^{2n-3}=4k-5^n$. Si ha di conseguenza:
$5^{n+1}+7^{2(n+1)-3} = 5^{n+1}+7^2\cdot 7^{2n-3} = 5^{n+1}+49(4k-5^n) = 5^n(5-49)+49\cdot 4k=4(49k-11\cdot 5^n)$.
Constatato ora che il numero $49k-11\cdot 5^n$ è un numero intero, dobbiamo concludere che il valore dell'espressione assegnata per n+1, è divisibile per 4. Quindi per ogni n>1 l'espressione assegnata è divisibile per 4.
Volendo, si può verificare agevolmente che le alternative [B], [C] e [D] sono da scartare. Basta constatare che per n=3 l'espressione assume il valore 468, che non è divisibile per 8 e perciò, a maggior ragione, non può esserlo per 16 né per 32.

Quesito 7. 1. 3. Due numeri complessi coniugati hanno la seguente forma: $a + b\,i$, $a - b\,i$, dove a, b sono numeri reali. Si trova subito che la loro somma è 2a ed il loro prodotto è a^2+b^2. Vale a dire che la loro somma e il loro prodotto sono numeri reali. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 7. 1. 4. Si ha: $\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$. L'alternativa corretta è [B].

Quesito 7. 1. 5. Si ha: $\dfrac{i}{2+i}+\dfrac{1}{2-i}=\dfrac{i(2-i)+(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2i-i^2+2+i}{4-i^2}=\dfrac{3}{5}i+\dfrac{3}{5}$.
L'alternativa corretta è [D].

Quesito 7. 1. 6. Il polinomio può essere fattorizzato facilmente:

$$2x^3-2x^2+x-1=2x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(2x^2+1).$$

L'equazione, pertanto, può essere scritta nel seguente modo equivalente: $(x-1)(2x^2+1)=0$.
Le sue soluzioni sono allora: $1,\ \dfrac{i}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{i}{\sqrt{2}}$. L'alternativa corretta è [C].
Un altro modo di procedere consiste nel controllare quale delle terne assegnate verifica l'equazione. Si controlla subito che – 1 non è soluzione dell'equazione poiché, sostituito al posto di x, dà luogo ad un numero negativo. Ne consegue che le alternative [B] e [D] sono da scartare. Si prova allora se – i è soluzione dell'equazione. Poiché:

$$2(-i)^3-2(-i)^2+i-1=2i+2+i-1\neq 0,$$

dobbiamo comcludere che non lo è. L'alternativa [A] perciò è pure da scartare.
Rimane l'alternativa [C], che per esclusione è quella valida.
Ci sarebbe una terza strada, più rapida delle altre, la quale richiede però che si sappia che le soluzioni di un'equazione algebrica con coefficienti reali sono o reali o complesse coniugate. Ne deriva che le alternative [A] e [B] si devono scartare. Anche l'alternativa [D] non è corretta dal momento che il valore – 1 non è una radice dell'equazione. Rimane l'alternativa [C], che per esclusione è quella valida.

Quesito 7. 1. 7. Nell'insieme dei numeri complessi non è definita una relazione d'ordine che conservi le proprietà strutturali rispetto all'addizione e alla moltiplicazione, per cui le alternative [A] e [B] non sono corrette. Dal momento che i due numeri non sono uguali anche l'alternativa [C] non è corretta. La sola alternativa corretta è [D].

7.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 7.2.1. Posto $A(n)=n^2+n+1$, si osserva che $A(0)$ è dispari. Si tratta allora di dimostrare che, se $A(k)$ è dispari, anche $A(k+1)$ è dispari. In effetti, per $n=k+1$, si ha:

$$(k+1)^2+(k+1)+1 = k^2+2k+1+k+1+1 = (k^2+k+1)+2(k+1).$$

E questo numero è dispari perché somma di un numero dispari e un numero pari.

Quesito 7.2.2. La disuguaglianza è vera per $n=3$. Bisogna dimostrare che, se è vera per $n=k$, con $k>3$, lo è per $n=k+1$. Vale a dire che, se $k!>2^{k-1}$, allora $(k+1)!>2^k$. Ora si ha in successione:

$$(k+1)!=k!\,(k+1)>2^{k-1}(k+1)=2^k\frac{k+1}{2}>2^k.$$

La disuguaglianza, per il principio d’induzione, è dunque vera per ogni $k>3$.

Quesito 7.2.3. Poniamo per comodità $N(n)=2^{2n+1}+3^{2n+1}+5^{2n+1}$. Intanto constatiamo che $N(0)=10$, per cui la proprietà è vera per $n=0$. Ammettiamo ora che $N(n)$ sia divisibile per 10 per un generico n. Ciò significa che esiste un intero k tale che $N(n)=10k$. Proviamo che $N(n+1)$ è divisibile per 10. Si ha:

$$N(n+1)=2^{2(n+1)+1}+3^{2(n+1)+1}+5^{2(n+1)+1}=2^{(2n+1)+2}+3^{(2n+1)+2}+5^{(2n+1)+2}=$$
$$=4\cdot 2^{2n+1}+9\cdot 3^{2n+1}+25\cdot 5^{2n+1}.$$

Osserviamo adesso che, essendo $N(n)=10k$, risulta $2^{2n+1}=10k-3^{2n+1}-5^{2n+1}$. Di modo che si ha:

$$N(n+1)=4\left(10k-3^{2n+1}-5^{2n+1}\right)+9\cdot 3^{2n+1}+25\cdot 5^{2n+1}=$$
$$=40k+5\cdot 3^{2n+1}+21\cdot 5^{2n+1}=40k+15\cdot 3^{2n}+5\cdot 21\cdot 5^{2n}=40k+15\left(3^{2n}+7\cdot 5^{2n}\right)=5\left[8k+3\left(3^{2n}+7\cdot 5^{2n}\right)\right].$$

Poiché 3^{2n} è un numero dispari e così pure $7\cdot 5^{2n}$, ne consegue che la loro somma è pari, ragion per cui esiste un intero p tale che $3^{2n}+7\cdot 5^{2n}=2p$. Pertanto: $N(n+1)=5(8k+3\cdot 2p)=10(4k+3p)$. Considerato che $4k+3p$ è certamente un intero, si desume che $N(n+1)$ è divisibile per 10. Come si voleva dimostrare. In definitiva, per il principio d’induzione, il numero $N(n)$ è divisibile per 10 per ogni naturale n.

Quesito 7.2.4. Mettiamo prima nella forma $a+bi$ il numero assegnato:

$$\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i.$$

Il coniugato del numero complesso è pertanto: $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$.

Si può procedere in altro modo, sapendo che il coniugato del rapporto di due numeri complessi è uguale al rapporto dei coniugati dei due numeri. Il lettore può sviluppare da sé questo procedimento.

Quesito 7.2.5. Se x è il numero, deve essere: $-x=\frac{1}{x}$, vale a dire: $x^2=-1$.

Nessun numero reale soddisfa a questa equazione. Invece nel campo complesso si ha: $x=\pm i$.

Quesito 7.2.6. Bisogna pensare ad una generica equazione algebrica di 3° grado, con coefficienti reali: $x^3+ax^2+bx+c=0$. Dopo aver sostituito al posto di x i valori della terna assegnata, si ottiene un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c. Se si trovano valori reali allora la terna va bene, altrimenti deve essere scartata. In effetti, non si ottengono valori reali, per cui la risposta alla domanda del quesito è NO.

Ci sarebbe una seconda strada, pressoché immediata, la quale richiede però che si sappia che le soluzioni di un'equazione algebrica con coefficienti reali sono o reali o complesse coniugate. Ne deriva che la terna assegnata, presentando un solo numero immaginario, non può risolvere alcuna equazione algebrica di 3° grado con coefficienti reali.

Quesito 7. 2. 7. Il numero 4i ha modulo 4 ed argomento 90°, per cui può essere messo nella seguente forma: $4i=4(\cos 90°+i\sin 90°)$.
Le sue radici quadrate sono sintetizzate nella seguente scrittura: $s(\cos\beta+i\sin\beta)$, dove:

$$s=\sqrt{4}=2,\ \ \beta=\frac{90°+k\,360°}{2}\text{ , con } k=0 \text{ o } k=1.$$

In sostanza, le due radici quadrate di 4i sono i seguenti numeri complessi:

$$r_1=2\ (\cos 45°+i\sin 45°)=i\sqrt{2}+\sqrt{2};\ \ r_2=2\ [\cos(45°+180°)+i\sin(45°+180°)]=-i\sqrt{2}-\sqrt{2}\ .$$

Quesito 7. 2. 8. Indicati con x, y i due numeri, devono essere soddisfatte le due condizioni seguenti: $x+y=k$, $xy=k$. Pertanto i due numeri risultano essere gli zeri dell'equazione $z^2-kz+k=0$. Affinché siano reali deve risultare $k^2-4k\geq 0$, vale a dire $k\leq 0$ oppure $k\geq 4$. In particolare, per $k=0$, i due numeri sono $x=y=0$; se $k=4$ i due numeri sono $x=y=2$.
Si capisce che per $k=2$ i due numeri sono complessi, anzi esattamente complessi coniugati, e per la precisione essi sono i numeri $1\pm i\sqrt{3}$.

Quesito 7. 2. 9. Si tratta di risolvere nel campo complesso la seguente equazione: $x^6-1=0$. La risoluzione può essere eseguita con semplici considerazioni algebriche. Basta constatare che si ha:

$$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1).$$

Le soluzioni dell'equazione sono pertanto i numeri reali 1 e −1 e le radici complesse coniugate delle seguenti equazioni:

$$x^2+x+1=0 \ \text{ e } \ x^2-x+1=0;\ \text{ vale a dire, nell'ordine: } \frac{1}{2}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{2}\left(1\pm i\sqrt{3}\right).$$

7. 5. Rafael Bombelli: vita ed opere**.**

Bombelli

La data di nascita di Rafael Bombelli non è certa, ma quasi tutti gli storici concordano nel fissarla nel 1526, a Bologna. E neppure sicura è quella della sua morte, avvenuta a Roma, nel 1572 secondo alcuni o nel 1573 secondo altri.

Il nome originario della sua famiglia era Mazzoli, ma fu cambiato in Bombelli per ragioni politiche.
Oltre che matematico, si guadagnò la fama di ingegnere idraulico e, come tale, contribuì alla bonifica delle paludi Pontine, sotto Papa Pio IV (Giovanni Angelo Medici, di Milano, 1499-1585).
Scrisse due opere a contenuto matematico, una di geometria, rimasta manoscritta, ed una di algebra, dal titolo *Algebra* per l’appunto, pubblicata in tre libri nell’anno 1572, poco prima della sua morte. Qui sotto (Fig. 7.1) compare il frontespizio di un’edizione del 1579, con il titolo completo: *L'Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, diuisa in tre libri con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica*.

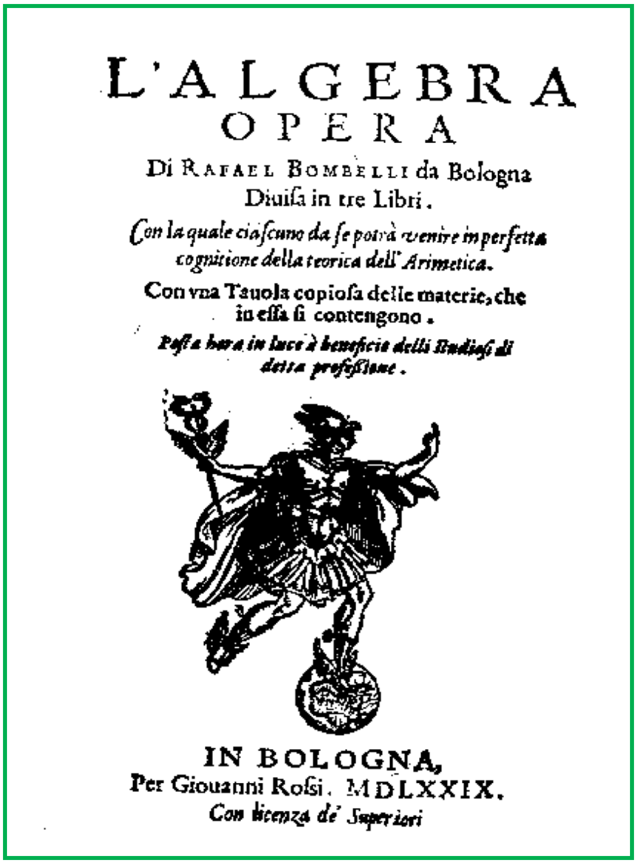
L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Fig. 7.1

Il manoscritto di geometria, riscoperto dal matematico Ettore Bortolotti (1866-1947), fu pubblicato nel 1929, nelle edizioni Zanichelli, Bologna, e costituì da allora il libro IV e il libro V dell’*Algebra*, ma la prima edizione dell’*Algebra*, in cinque libri, fu pubblicata solo nel 1966 ad opera dell’editore Feltrinelli, Milano, e può essere reperita nelle biblioteche di molte scuole.
L’*Algebra* di Bombelli influì all’epoca decisamente sullo sviluppo della matematica e fu molto letta ed apprezzata. Il filosofo e matematico tedesco G.W.Leibniz (1646-1716) ancora circa un secolo dopo la citò come esempio di opera magistrale, definendo Bombelli *maestro certamente egregio dell’arte analitica* (testuale: *egregium certe artis analyticae magistrum*). A parte il linguaggio e il simbolismo, che sono ancora propri dell’algebra sincopata, se non addirittura dell’algebra re-

torica, contiene molte delle cose che figurano in un moderno manuale di algebra. S'intende che la lettura dell'opera, proprio per queste ragioni, risulta poco agevole, ma è un eufemismo.

Di alcuni dei risultati ottenuti da Bombelli ci occupiamo in una nota storica inserita nell'unità 40 del testo base. Rimandiamo perciò a quella nota.
Qui ci limitiamo a dire che Bombelli introdusse i numeri complessi e li utilizzò con le stesse regole valide per i numeri reali, ma senza disporre di alcun fondamento logico. Fondamento che fu dato oltre due secoli più tardi da uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, il tedesco Carl F. Gauss (1777-1855). In realtà, i numeri aventi la forma di "radice quadrata di un numero negativo" all'inizio non furono considerati numeri veri e propri, ma solo una sorta di artificio di calcolo e, per questo, Cartesio (1596-1650) li (s)qualificò come "numeri immaginari". A quell'epoca non si parlava ancora di "numeri reali" e questa denominazione fu introdotta molto tempo dopo, proprio in contrapposizione ai "numeri immaginari", da un altro grande genio della matematica, il tedesco Georg Cantor (1845-1918).