Capitolo 8 (Integrazione a unità 18-19)

Il metodo delle coordinate

[**Nota Bene**. Qualora si incontrassero difficoltà nella risoluzione di qualche quesito, si suggerisce di ritornarci su dopo avere studiato le equazioni di 1° grado in un'incognita]

8.1 Quesiti a risposta chiusa.

8.1.1 Su una retta cartesiana sono fissati i punti $A\left(\frac{3}{2}\right)$ e $B\left(-\frac{7}{2}\right)$. Quale delle seguenti proposizioni afferma il FALSO?

[A] La misura del segmento orientato (A,B) è –5.

[B] Il segmento orientato (M,A), dove M è il punto medio del segmento AB, misura 5/2.

[C] Il punto C, simmetrico di A rispetto a B, ha ascissa –7.

[D] Il punto D, simmetrico di B rispetto ad A, ha ascissa 13/2.

8.1.2 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$. Quali sono le componenti del vettore $\overrightarrow{BA}$ secondo gli assi coordinati?

[A] $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ [B] (0,0) [C] $\left(-\frac{2}{4}, \frac{4}{6}\right)$ [D] $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$

8.1.3 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, sono assegnati i punti A(1,1), B(3,3), C(5,1). Cosa si può dire del triangolo ABC ?

[A] È rettangolo e isoscele
[B] È rettangolo ma non isoscele
[C] È isoscele ma non rettangolo
[D] Non è rettangolo né isoscele

8.1.4 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, sono assegnati i punti A(2,–1), B(–3,2), C(1,4). Quali sono le coordinate del vertice D del parallelogramma ADBC ?

[A] (6,1) [B] (–2,–3) [C] (–4,7) [D] Diverse dalle precedenti

8.1.5 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il punto di coordinate (–2,3). Quali sono le coordinate del suo simmetrico rispetto all'asse x ?

[A] (2,3) [B] (–2,–3) [C] (2,–3) [D] (3,–2)

8.1.6 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il segmento avente per estremi i punti A(3, –5) e B(–2,1). Quali sono le coordinate del punto P che, a partire da A, divide internamente il segmento AB in due parti, la prima doppia della seconda?

[A] $\left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ [B] $\left(\frac{4}{3}, -3\right)$ [C] $\left(-\frac{1}{3}, -1\right)$ [D] (– 1, –3)

8.1.7 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(4, –2) e B(–4,2). Quale delle seguenti proposizioni è FALSA?

[A] Il punto medio del segmento AB ha coordinate (0,0).

[B] Il vettore $\overrightarrow{BA}$ ha componenti (8,–4).

[C] Il segmento AB è lungo $4\sqrt{5}$.

[D] La traslazione che porta A in B ha componenti (–4,2).

8.1.8 Quali sono le equazioni della traslazione che muta la lettera "E" disegnata in rosso nella figura sottostante (Fig. 8.1) nella "E" disegnata in verde?

[A] $x'=x-8,\ y'=y-4$ [B] $x'=x+8,\ y'=y+4$ [C] $x'=x-6,\ y'=y-4$ [D] $x'=x+6,\ y'=y+4$.

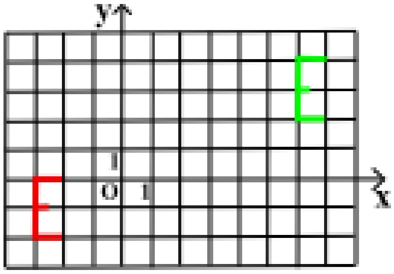

Fig. 8.1

8.1.9 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), qual è l'equazione della retta passante per il punto di coordinate (2,–3) ed avente coefficiente angolare 2 ?
[A] $2x+y=7$ [B] $2x+y=-7$ [C] $2x-y=7$ [D] $2x-y=-7$

8.1.10 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), quale delle seguenti proposizioni afferma il FALSO?
[A] Ogni equazione $y=px+q$, dove p, q sono numeri reali, rappresenta una retta.
[B] Ogni retta è rappresentata da un'equazione del tipo $y=px+q$,
dove p, q sono numeri reali.
[C] Tutte le rette parallele alla retta di equazioni $y=x$ hanno equazione del tipo $y=x+a$,
dove a è un numero reale.
[D] Tutte le rette perpendicolari alla retta di equazione $y=x$ hanno equazione del tipo $y=-x+a$,
dove a è un numero reale.

8.1.11 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), sono assegnate le rette di equazione $y=(m+3)x-1$, dove m è un parametro reale. Per quale valore di m si ottiene una retta parallela all'asse x?
[A] 0 [B] 1 [C] –3 [D] Nessun valore

8.1.12 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazione $y=(m+2)x-3$, dove m è un parametro reale. Per quale valore di m si ottiene una retta perpendicolare all'asse x?
[A] 0 [B] –2 [C] –3 [D] Nessun valore

8.1.13 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), sono assegnate le rette:

$$(a)\ y = (3m-2)\,x + m, \qquad (b)\ y = 3\,(m+1)\,x - 1,$$

dove m è un parametro reale. Quale delle seguenti proposizioni è FALSA?
[A] Esiste uno ed un solo valore di m cui corrispondono una retta delle (a) ed una retta delle (b) che risultino parallele.
[B] Non esiste alcun valore di m cui corrispondono una retta delle (a) e una retta delle (b) che risultino parallele.
[C] Per ogni retta scelta fra le (a) esiste una retta ad essa parallela fra le (b).
[D] Per ogni retta scelta fra le (b) esiste una retta ad essa parallela fra le (a).

8.1.14 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), sono assegnate le rette di equazione:

$$(1-k)\,x + (2k-1)\,y - 2k = 0,$$

dove k è un parametro reale. Quale delle seguenti affermazioni è VERA ?
[A] Tutte le rette passano per il punto di coordinate (4, 2).
[B] Fra tali rette quella parallela all'asse x si ottiene per k=1/2.
[C] Fra tali rette quella parallela all'asse y si ottiene per k=1.
[D] Le precedenti affermazioni sono tutte false.

8. 1. 15 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la retta di equazione $y=-2^{1/2}x$. Qual è la pendenza delle rette perpendicolari ad essa ?

[A] $\sqrt{2}$ [B] $-\sqrt{2}$ [C] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [D] $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

8. 2 Quesiti a risposta aperta.

8. 2. 1 Su una retta cartesiana sono assegnati i punti A e B di ascisse rispettivamente x_A e x_B. Qual è l'ascissa del punto P simmetrico di A rispetto a B? Quale quella del punto Q simmetrico di B rispetto ad A?

8. 2. 2 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2, −1), B(−2,2), C(0,3). Quali sono le coordinate del baricentro del triangolo ABC?

8. 2. 3 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy): a) Quali sono le equazioni della simmetria rispetto all'asse x? b) Quali quelle della simmetria rispetto all'asse y? c) Quali sono le equazioni della simmetria rispetto all'origine O?

8. 2. 4 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il punto di coordinate (a,b). Scrivere le coordinate dei punti simmetrici di esso rispetto all'origine, rispetto all'asse x e rispetto all'asse y.

8. 2. 5 Considerato il rettangolo ombreggiato nella figura sottostante (Fig. 8.2), dove le misure sugli assi coordinati sono espresse in centimetri, calcolarne il perimetro, l'area e le coordinate del centro.

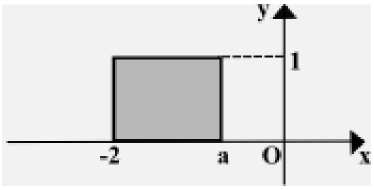

Fig. 8.2

8. 2. 6 Ogni retta del piano cartesiano (Oxy) è rappresentata da un'equazione del tipo y=mx+n, dove m, n sono parametri reali. È vero o falso?

8. 2. 7 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), sono assegnati i punti A(3,−3), B(2,3), C(−3,3). Sono allineati?

8. 2. 8 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazione y=(m−1)x+1. È vero o falso che, per ogni scelta m' di m, esiste un valore m" di m per cui le due rette di coefficiente angolare m'−1 ed m" −1, fra quelle assegnate, sono perpendicolari?

8.2.9 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati il punto $P\left(\frac{1}{2},2\right)$ e la retta r di equazione y=2x+1. Calcolare la distanza di P da r.

8.2.10 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazioni:

$$y=2^{1/2}x+\frac{1}{2}\,,\quad y=3^{1/3}x-\frac{1}{3}\,.$$

Quale di esse ha la pendenza maggiore?

8.2.11 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazioni:

$$y = 2\,x - 3 \quad \text{e} \quad y = 2\,x + 1.$$

Dopo aver spiegato perché sono parallele, calcolare la loro distanza.

8.2.12 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazione:

$$(2-k)\,x + (2k-1)\,y - 2 = 0,$$

dove k è un parametro reale. Fra tali rette determinare, posto che esista: a) quella che passa per l'origine degli assi; b) la parallela all'asse x; c) la parallela all'asse y.

8.2.13 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), trovare l'equazione dell'asse del segmento avente per estremi i punti A(1,0) e B(0,2).

8.2.14 I punti A, B, C, evidenziati nella figura sottostante (Fig. 8.3), sembrano essere allineati. Come si può procedere razionalmente, e non per verifiche più o meno sperimentali, per accertarsi se effettivamente lo sono?

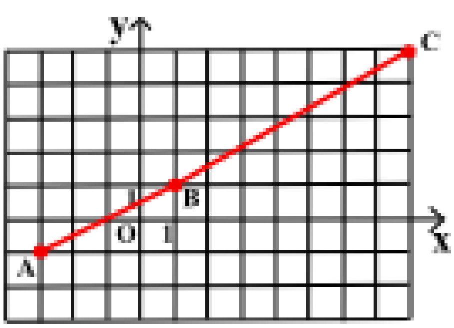

Fig. 8.3

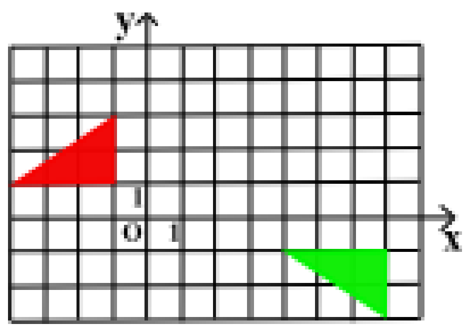

Fig. 8.4

8.2.15 Una riflessotraslazione trasforma il triangolo evidenziato in rosso in quello evidenziato in verde (Fig. 8.4). Trovare le equazioni della simmetria assiale e della traslazione che, eseguite nell'ordine, danno luogo alla riflessotraslazione.

8.3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 8.1.1. Si può controllare che le proposizioni [A], [B] e [D] affermano il vero, mentre la proposizione [C] afferma il falso. Infatti il punto C, simmetrico di A rispetto a B è tale che (A,B)=(B,C), ossia, passando alle ascisse dei punti: $x_B - x_A = x_C - x_A$, da cui segue:

$$-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=x_C+\frac{7}{2}\ \text{ e da qui: }\ x_C=-\frac{17}{2}\ .$$

[C] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 2. Componenti del vettore $\overrightarrow{BA}$ secondo gli assi coordinati: $x_A–x_B$, $y_A–y_B$. Nel caso specifico si ha:

$$x_A-x_B=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1\ ,\quad y_A-y_B=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\ .$$

[A] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 3. Da un'apposita figura s'intuisce che il triangolo è rettangolo e isoscele, ma si può provare ciò con un ragionamento rigoroso. Basta calcolare le lunghezze dei lati del triangolo. Orbene, si trova: $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$, $\overline{AC}=4$.
Questo è già sufficiente per concludere che il triangolo è isoscele sulla base AC. Siccome poi risulta $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$, possiamo anche concludere che esso è rettangolo. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 4. Il vertice D del parallelogramma ADBC è tale che:

$$x_D-x_A=x_B-x_C,\quad y_D-y_A=y_B-y_C.$$

Si trova, pertanto: $x_D=-2$, $y_D=-3$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 5. Due punti simmetrici rispetto all'asse x hanno la medesima ascissa e ordinate opposte, per cui il punto simmetrico di (–2,3) rispetto all'asse x è il punto (–2,–3). [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 6. Il punto P cercato è tale che $\overrightarrow{AP}=2\ \overrightarrow{PB}$, da cui, passando alle coordinate cartesiane dei punti:

$$x_P-x_A=2(x_B-x_P),\ \ y_P-y_A=2(y_B-y_P).$$

Da qui segue:

$$x_P=\frac{x_A+2x_B}{3}\ ,\ \ y_P=\frac{y_A+2y_B}{3}\ .$$

e, a conti fatti dopo aver sostituito: $x_P=-\frac{1}{3}$, $y_P=-1$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 7. Le proposizioni [A], [B] e [C] affermano il vero. La proposizione [D] afferma il falso, giacché la traslazione di cui si parla è quella di componenti (–8,4). [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 8. È sufficiente prendere in considerazione due punti corrispondenti, uno della "E" rossa ed uno della "E" verde, ad esempio i due punti situati all'estremità superiore destra delle due "E". Quello della "E" rossa ha coordinate (–2,0), quello della "E" verde ha coordinate (6,4). Si tratta allora di determinare le equazioni della traslazione che muta il primo punto nel secondo. Tali equazioni sono le seguenti: $x'=x+8$, $y'=y+4$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 9. La retta passante per il punto (2,–3) ed avente coefficiente angolare 2, ha equazione $y-(-3)=2(x-2)$, vale a dire: $2x-y=7$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 10. L'unica proposizione che afferma il falso è la [B]. Basti pensare alle rette del tipo $x=h$, che non possono mettersi nella forma $y=px+q$. [B] è pertanto l'alternativa corretta.

Quesito 8.1.11. Le rette parallele all'asse x hanno pendenza 0, per cui deve essere $m+3=0$, vale a dire $m=-3$. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 8.1.12. Le rette perpendicolari all'asse x hanno equazione del tipo $x=h$, dove h è un numero reale e per nessun valore di m l'equazione $y=(m+2)x-3$ può diventare di quel tipo. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 8.1.13. Affinché una retta delle (a) ed una delle (b) risultino parallele deve esistere un valore di m per cui: $3m-2=3(m+1)$, cioè $3m-2=3m+3$. Equazione impossibile. Pertanto l'alternativa corretta è [A].
A questo punto sarebbe inutile indagare oltre. Noi, nondimeno, ci proponiamo ugualmente di spiegare perché le altre alternative non sono corrette. Evidentemente non lo sono perché non affermano il falso, vale a dire affermano il vero. Riguardo alla [B], la risposta è già nella spiegazione che ha condotto alla scelta di [A]. Per quanto attiene alla [C], indicato con m' un qualsiasi valore di m capace di individuare una retta delle (a), affinché esista una retta delle (b) parallela ad essa deve esistere un valore di m tale che: $3m'-2=3(m+1)$, cioè: $m=m'-\frac{5}{3}$. Analogamente per la [D].

Quesito 8.1.14. Il punto (4,2) non soddisfa identicamente all'equazione della retta; si ha infatti: $4(1-k)+2(2k-1)-2k=2-2k$, che non è 0 per ogni valore di k, ma solo per $k=1$. L'alternativa [A] non è corretta.
Fra le rette assegnate quella parallela all'asse x è tale che $1-k=0$, cioè $k=1$. Anche l'alternativa [B] non è corretta.
Fra le rette assegnate quella parallela all'asse y è tale che $2k-1=0$, cioè $k=1/2$. Pure l'alternativa [C] non è corretta.
Dobbiamo concludere che l'alternativa corretta è [D].

Quesito 8.1.15. La pendenza cercata è uguale all'antireciproco di $-2^{1/2}$, che è esattamente:

$$\frac{1}{2^{1/2}}\text{ , vale a dire: }\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

[C] è l'alternativa corretta.

8.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 8.2.1. Se P è il punto simmetrico di A rispetto a B, bisogna tener presente che si ha: $x_P-x_B=x_B-x_A$, da cui segue: $x_P=2x_B-x_A$. Analogamente, se Q è il punto simmetrico di B rispetto ad A, si trova: $x_Q=2\,x_A-x_B$.

Quesito 8.2.2. Le coordinate del baricentro G del triangolo sono le seguenti:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{2-2+0}{3}=0\,,\quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-1+2+3}{3}=\frac{4}{3}\,.$$

Quesito 8.2.3. Le equazioni della simmetria rispetto all'asse x, si ottengono imponendo che i punti corrispondenti $P(x,y)$ e $P'(x',y')$ si trovino sulla stessa perpendicolare all'asse x e siano equidistanti da esso. Si trova: $x'=x,\ y'=-y$.
Analogamente si trovano le equazioni della simmetria rispetto all'asse y: $x'=-x,\ y'=y$; e della simmetria rispetto all'origine O: $x'=-x,\ y'=-y$.

Quesito 8.2.4. I punti simmetrici del punto (a,b) rispetto all'origine, rispetto all'asse x e rispetto all'asse y sono nell'ordine: $(-a,-b)$, $(a,-b)$, $(-a,b)$.

Quesito 8.2.5. Tenendo presente che a è un numero reale compreso fra -2 e 0, le lunghezze dei lati del rettangolo, espresse in centimetri, sono $2+a$ ed 1, per cui il suo perimetro è $P=2(3+a)$ cm, mentre la sua area è $A=(2+a)\ cm^2$. Le coordinate del centro si trovano in maniera altrettanto facile. Espresse naturalmente in centimetri, sono $\left(\frac{a-2}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Quesito 8.2.6. Falso. Basti pensare alle rette parallele all'asse y, che hanno equazioni del tipo $x=h$. Equazione che è impossibile mettere nella forma $y=mx+n$.

Quesito 8.2.7. È sufficiente trovare l'equazione della retta per due punti e verificare se il terzo punto appartiene o no alla retta. Ora, la retta AC ha equazione $y=-x$, ed il punto B non appartiene ad essa. Quindi i tre punti non sono allineati.

Quesito 8.2.8. Falso. Se infatti $m'=1$, per cui la retta corrispondente ha equazione $y=1$, nessun valore di m dà luogo ad una retta perpendicolare ad essa. Invece, per ogni altro valore m' di m, cui corrisponde la retta di equazione $y=(m'-1)x+1$, effettivamente al valore m", tale che $m''-1=\frac{1}{1-m'}$ corrisponde la retta di equazione $y=(m''-1)x+1$ perpendicolare alla prima.

Quesito 8.2.9. Siccome le coordinate del punto P soddisfano all'equazione della retta r, se ne desume che il punto appartiene alla retta. Per questo motivo: $dist(P,r)=0$.

Quesito 8.2.10. Bisogna confrontare i numeri $2^{1/2}$ e $3^{1/3}$. Si potrebbe fare ricorso ad uno strumento di calcolo automatico, ma vogliamo giungere al risultato senza tale supporto. Incominciamo allora ad elevare all'esponente $2\times3=6$ i due numeri. Essi diventano nell'ordine: 2^3 e 3^2 e siccome evidentemente il primo è minore del secondo, anche $2^{1/2}<3^{1/3}$, per cui è la seconda delle rette assegnate che ha la pendenza maggiore.

Quesito 8.2.11. Le due rette $r\equiv y=2x-3$ ed $s\equiv y=2x+1$ hanno la stessa pendenza e per questo sono parallele. Per calcolare la loro distanza, è sufficiente prendere un punto particolare di r, per esempio $P(0,-3)$, e calcolare la sua distanza da s, scritta nella forma $2x-y+1=0$. Si ha:

$$dist(r,s)=dist(P,s)=\frac{|2\,x_P-y_P+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|0-(-3)+1|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\ .$$

Naturalmente si poteva prendere un punto particolare di s, per esempio $(0,1)$ e calcolare la sua distanza da r: si sarebbe trovato lo stesso valore. Provare per credere.

Quesito 8.2.12. a) L'equazione della retta passante per l'origine dovrebbe avere termine noto nullo, ma per ogni valore di k il termine noto è -2: nessuna delle rette assegnate passa per l'origine. b) La parallela all'asse x si ottiene ponendo $2-k=0$: si ottiene $k=2$ ed in corrispondenza si ha la retta $3y-2=0$. c) La perpendicolare all'asse x si ottiene ponendo $2k-1=0$: si ottiene $k=1/2$ ed in corrispondenza si ha la retta $3x-4=0$.

Quesito 8.2.13. Basta trovare il luogo geometrico dei punti $P(x,y)$ tali che $\overline{PA}=\overline{PB}$ ossia $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$. Si ha pertanto:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2,$$

vale a dire, tenendo presente che $A(1,0)$ e $B(0,2)$:

$$(x-1)^2+y^2=x^2+(y-2)^2,$$

e in definitiva, dopo aver semplificato:

$$2x-4y+3=0.$$

Un procedimento alternativo che lo studente può eseguire da sé: si trova il coefficiente angolare della retta AB e le coordinate del punto medio M del segmento AB. Si trova quindi l'equazione della retta perpendicolare ad AB passante per M: è l'asse del segmento AB.

Quesito 8. 2. 14. Bisogna trovare l'equazione della retta AB e verificare se le coordinate di C la soddisfano o no. Naturalmente, prima di tutto è necessario stabilire quali sono le coordinate dei punti in questione. Dall'esame della figura si ha: A(–3,–1), B(1,1), C(8,5). Si trova l'equazione della retta AB: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Siccome $y(8)=\frac{9}{2}\neq 5$, possiamo concludere che C non appartiene alla retta AB e, pertanto, i punti A, B e C non sono allineati.

Quesito 8. 2. 15. La simmetria assiale può essere quella rispetto all'asse x e le sue equazioni sono: $x'=x,\ y'=-y$. La traslazione è allora quella che porta il punto (–1,–1) nel punto (7,–1). Le sue equazioni si trovano facilmente: $x'=x+8,\ y'=y$. Le equazioni della riflessotraslazione sono pertanto: $x'=x+8$, $y'=-y$.

8. 5 Antologia.

Proseguiamo il discorso avviato nel capitolo precedente e occupiamoci della seconda proprietà "falsa" di figure geometriche. Secondo Martin Gardner, la scoperta del paradosso che andiamo a descrivere risale al 1953 ed è da attribuirsi ad un prestigiatore statunitense.

TEOREMA. Somme di figure uguali non sempre sono equivalenti.
DIMOSTRAZIONE. È sufficiente mostrare una situazione in cui questo fatto si verifica. La situazione è quella della figura sottostante (Fig. 8.5), in cui sono disegnati due triangoli OAX uguali. Ebbene, nel primo caso quattro "pezzi" formano il triangolo, nel secondo gli stessi quattro "pezzi" non sono sufficienti a comporlo poiché un quadratino risulta scoperto. Dobbiamo concludere che somme di superfici uguali non sempre hanno la stessa area. Come si voleva dimostrare.

Dov'è l'errore?

SPIEGAZIONE. La spiegazione non è difficile, anche se di primo acchito può sembrare oscura.
Ricorriamo alla geometria analitica. Per questo riferiamo il piano della prima figura ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine nel punto O, l'asse x coincidente con la retta OX, orientata da O verso X, e l'asse y coincidente con la retta OY, orientata da O verso Y. Scriviamo per prima cosa le coordinate di alcuni punti fondamentali. In particolare:

$$O(0,0),\quad A(13,5),\quad B(8,3).$$

Troviamo quindi l'equazione della retta OA, che è $y=\frac{5}{13}x$ e verifichiamo che si ha: $y(8)=\frac{5}{13}\cdot 8=\frac{40}{13}$. Siccome $y(8)\neq 3$, dobbiamo concludere che il punto B non appartiene alla retta OA. Questo implica che la figura in questione non è un triangolo, come avevamo erroneamente pensato, ma un quadrilatero e precisamente un quadrilatero concavo, dal momento che $y(8)>3$ e di conseguenza il punto B è situato al di sotto della retta OA.

Anche la seconda figura si dimostra essere un quadrilatero e precisamente un quadrilatero convesso, dal momento che $y(5)<2$ e di conseguenza il punto C è situato al di sopra della retta OA.
Ebbene, dopo aver scomposto il quadrilatero della prima figura nelle quattro "tessere" sopra evidenziate, non si riesce a comporre il quadrilatero della seconda figura con le stesse "tessere". Per riuscirci bisogna aggiungere una quinta tessera, pari ad un quadratino. Come dire che l'area del quadrilatero OXAB è minore di quella del quadrilatero OXAC e la differenza è l'area di un quadratino.
In effetti:
A' = area del quadrilatero OXAB = 12+5+15=32;
A" = area del quadrilatero OXAC = 5+12+16=33.

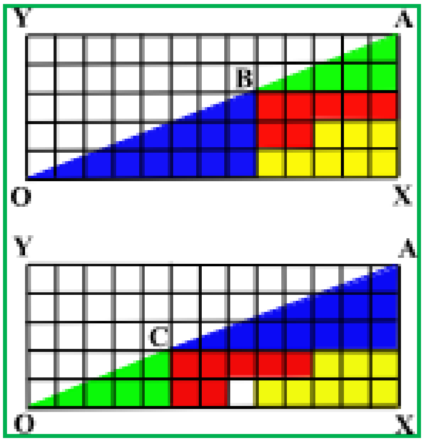

Fig. 8.5