Capitolo 8 (Integrazione a unità 41-42-43)

Parabola. Circonferenza . Equazioni polinomiali.

8. 1 Quesiti a risposta chiusa.

8. 1. 1 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), quale delle seguenti proposizioni afferma il falso?

[A] La parabola di equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+1$ interseca l'asse x i due punti distinti.

[B] La parabola di equazione $y=\frac{1}{4}x^2-2x+1$ è tangente all'asse x.

[C] Uno dei punti in cui la parabola di equazione $y=x^2-\left(1-\sqrt{2}\right)x$ interseca l'asse x è l'origine del sistema di riferimento, l'altro è un punto situato sul semiasse negativo delle ascisse.

[D] La parabola di equazione $y=-x^2-2$ non interseca l'asse x.

8. 1. 2 Di parabole di equazione $y=ax^2+bx+c$, assegnate in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e passanti per i punti di coordinate (2,2) e (2,–2):

[A] non ne esistono; [B] ne esiste una ed una soltanto;
[C] ne esistono due e soltanto due; [D] ne esistono infinite.

8. 1. 3 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si considerino la parabola p di equazione $y=2\,x^2$ e le parabole di equazioni:

$$y=2\,x^2+3\,x,\quad y=2\,x^2-3\,x+1,\quad y=-2\,x^2+2.$$

[A] Nessuna di tali parabole è congruente alla parabola p.

[B] Una ed una soltanto di tali parabole è congruente alla parabola p.

[C] Due e due soltanto di tali parabole sono congruenti alla parabola p.

[D] Le tre parabole sono tutte congruenti alla parabola p.

8. 1. 4 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti di coordinate (−1,4), (−1,−1) e (5,4). Il centro della circonferenza passante per essi ha coordinate:

[A] $\left(\frac{3}{2},2\right)$; [B] $\left(2,\frac{3}{2}\right)$; [C] $\left(\frac{3}{2},1\right)$; [D] $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

8. 1. 5 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'equazione: $(a-2)\,x^2+(a-2)\,y^2+x+y=0$. Essa è rappresentata da una circonferenza:

[A] se e solo se $a=3$; [B] se e solo se $a>2$;
[C] se e solo se $a<2$; [D] in casi diversi da quelli contemplati.

8. 1. 6 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione: $x^2+y^2-(a+1)x+(2a+5)y-2(a+3)=0$, dove a è un parametro reale. Essa è rappresentata da una circonferenza:

[A] per ogni valore di a;

[B] solo per $a=-4$ e per $a=-2$;

[C] per i soli valori di a interni all'intervallo reale $]-4,-2[$;

[D] per i soli valori di a esterni all'intervallo]–4,–2[.

8. 1. 7 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'equazione: $x^2+y^2-(2k-1)x+4k-6=0$, dove k è un parametro reale. Per i valori di k, per i quali l'equazione è rappresentata da una circonferenza:
[A] le circonferenze corrispondenti sono tutte tangenti fra loro;
[B] le circonferenze corrispondenti sono tutte secanti fra loro;
[C] le circonferenze corrispondenti sono o interne l'una rispetto all'altra o esterne;
[D] vi possono essere circonferenze tangenti ma anche secanti oppure non secanti.

8. 1. 8 L'equazione $8\,x^3=9$ ammette la seguente soluzione reale:
[A] $\frac{3}{2}$; [B] $\frac{3}{2\sqrt{2}}$; [C] $\sqrt[3]{1}$; [D] un valore diverso.

8. 1. 9 Qual è l'equazione di 5° grado avente come soluzioni reali il numero $\frac{1}{3}$ contato 3 volte e il numero $-\frac{1}{2}$ contato 2 volte?
[A] $(2x+1)^2\,(3x-1)^3=0$; [B] $(2x-1)^2(3x+1)^3=0$;
[C] $(2x+1)^3\,(3x-1)^2=0$; [D] $(2x-1)^3\,(3x+1)^2=0$.

8. 1. 10 Si consideri il seguente polinomio in x: $x^5 + h\,x^2 + k\,x - 2$, dove h, k rappresentano degli interi relativi. Il massimo numero di zeri razionali che esso teoricamente può ammettere è:
[A] 0 ; [B] 1 ; [C] 4 ; [D] 5 .

8. 1. 11 Si consideri il seguente polinomio: x^4+16.
[A] È fattorizzabile in ℝ ed ammette zeri razionali.
[B] È fattorizzabile in ℝ ed ammette zeri irrazionali.
[C] È fattorizzabile in ℝ ma non ammette zeri reali.
[D] Non è fattorizzabile in ℝ.

8. 1. 12 Si consideri il seguente polinomio: $4x^4+2x^2+1$.
[A] È fattorizzabile in ℝ ed ammette zeri razionali.
[B] È fattorizzabile in ℝ ed ammette zeri irrazionali.
[C] È fattorizzabile in ℝ ma non ammette zeri reali.
[D] Non è fattorizzabile in ℝ.

8. 1. 13 Il polinomio $x^3-4\,x^2+x+6$ si fattorizza nel seguente modo:
[A] $(x-1)(x-2)(x-3)$; [B] $(x+1)(x+2)(x+3)$;
[C] $(x+1)(x-2)(x-3)$; [D] $(x+1)(x+2)(x-3)$.

8. 1. 14 Il polinomio $x^3-4\,x^2-20\,x+48$ si fattorizza nel seguente modo:
[A] $(x-2)(x+4)(x-6)$; [B] $(x-1)(x+3)(x-5)$;
[C] $(x+2)(x+4)(x-6)$; [D] $(x-1)(x-3)(x+5)$.

8. 1. 15 Il plonomio x^3+2x^2-2x-4 è divisibile per uno ed uno soltanto dei binomi sottostanti. Quale?

[A] $2x+1$ [B] $2x-1$ [C] $x+2$ [D] $x-2$.

8. 2 Quesiti a risposta aperta.

8. 2. 1 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è vero che per tre punti, comunque scelti, passa una ed una sola parabola avente l'asse parallelo all'asse y?

8. 2. 2 Si considerino la parabola di equazione $y=2x^2$ e la retta di equazione $y=x-1$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy). Si vuole stabilire se sono secanti, tangenti o esterne. Come si procede?

8. 2. 3 Si considerano le due parabole di equazioni $y=a\,x^2+bx+c$ e $y=a'\,x^2+b'x+c'$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy). A quali condizioni devono sottostare i coefficienti delle equazioni affinché su una generica retta parallela all'asse y esse intercettino un segmento di lunghezza costante?

8. 2. 4 Si considerano le due parabole di equazioni $y=a\,x^2+bx+c$ e $y=a'\,x^2+b'x+c'$, assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy). A quali condizioni devono sottostare i coefficienti delle equazioni affinché esse siano congruenti?

8. 2. 5 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazioni: $y=x^2$ e $y=20\,x^2$. È vero o è falso che sono simili?

8. 2. 6 In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati una circonferenza mediante la sua equazione ed un punto mediante le sue coordinate. Si devono determinare le tangenti alla circonferenza condotte per il punto. Come si può procedere?

8. 2. 7 Per determinare le equazioni delle rette tangenti ad una circonferenza condotte per un dato punto si è proceduto come descritto nella risposta al precedente interrogativo. Però, una volta ottenuta la risolvente del sistema delle equazioni della circonferenza e della retta, l'annullarsi del suo discriminante non dà luogo ad un'equazione di 2° grado ma ad una di 1° grado. Cosa si conclude?

8. 2. 8 Determinare il punto P in cui il segmento CA interseca una circonferenza data, sapendo che C è il suo centro ed A un assegnato punto esterno alla circonferenza.

8. 2. 9 Si può affermare con certezza che l'equazione in x, $x^{16}+15\,x+1=0$, non ha soluzioni razionali?

8. 2. 10 Qual è l'equazione in x avente come uniche soluzioni, nel campo complesso, i numeri seguenti:

$$-1 \text{ (contato due volte)}, \ \frac{2}{3}, \ -\frac{1}{2}\,?$$

8. 2. 11 Si consideri la seguente equazione polinomiale: $x^{55}-1001\,x^2+2=0$.
È possibile dimostrare, con una modalità diversa da una verifica diretta, che essa non ammette la soluzione 105. È vero?

8. 2. 12 Dimostrare che l'equazione: $8\,x^3=27$ ha una sola radice reale.

8. 2. 13 Costruire un'equazione di 5° grado nell'indeterminata x, avente come soluzioni esattamente i numeri reali a, b, c, ciascuna contata una sola volta, e nessun'altra soluzione reale.

8. 2. 14 Si consideri la seguente equazione in x: $x^6+x^5-6\,h\,x^4-h\,x^2-h\,x+6=0$, dove h è un parametro che può assumere solo valori interi. Dimostrare che esiste uno ed un solo valore di h per il quale l'equazione ha radici intere. Quante sono queste radici?

8. 2. 15 Il polinomio x^4+1 ammette zeri reali? È fattorizzabile nell'insieme dei numeri reali?

8. 2. 16 Si consideri il trinomio x^4-x^2+1. È possibile fattorizzarlo nell'insieme dei numeri reali?

8. 2. 17 Se ad un numero naturale si somma 80 si ottiene il quadrato di un numero naturale, se si somma 124 si ottiene il quadrato di un altro numero naturale. Qual è tale numero?

8. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 8. 1. 1. Fra quelle considerate, l'unica proposizione che afferma il falso è [B]. In effetti, la parabola ivi considerata seca l'asse x in due punti distinti. [B] è dunque l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 2. L'equazione è tale che ad ogni x corrisponde uno ed un solo valore di y, per cui non può accadere che ad $x=2$ corrispondano i due valori $y'=2$ ed $y''=-2$. Non esistono parabole che soddisfino alle condizioni poste. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 8. 1. 3. Condizione necessaria e sufficiente affinché due parabole di equazioni $y=ax^2+bx+c$ e $y=mx^2+nx+p$ siano congruenti è che risulti $|a|=|m|$. Ne consegue che tutte e tre le parabole assegnate sono congruenti alla parabola p. L'alternativa corretta è [D].

Quesito 8. 1. 4. Si constata facilmente che i punti assegnati sono vertici di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa ha per estremi i punti (5,4) e (–1,–1). Il centro della circonferenza è pertanto il punto medio dell'ipotenusa, vale a dire il punto di coordinate $\left(2,\frac{3}{2}\right)$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 8. 1. 5. L'equazione è rappresentata da una circonferenza per ogni $a\neq 2$. L'alternativa corretta è [D].

Quesito 8. 1. 6. L'equazione è rappresentata da una circonferenza per tutti i valori di a per i quali risulta soddisfatta la seguente condizione:

$$(a+1)^2+(2a+5)^2+8(a+3)>0,\ \text{vale a dire: } a^2+6a+10>0\ .$$

Siccome questa disequazione è soddisfatta per ogni valore di a, l'alternativa corretta è [A].

Quesito 8. 1. 7. I valori di k, per i quali l'equazione è rappresentata da una circonferenza, sono tutti quelli che soddisfano alla condizione: $25\,k^2-4\,k+25>0$. Sono, perciò, tutti i valori di k. Basta allora attribuire a k due qualsiasi valori diversi tra loro e stabilire qual è la loro reciproca posizione: tutte le circonferenze sono, le une rispetto alle altre, in quella medesima posizione.
Ora, per $k=0$ e per $k=1/2$ si ottengono rispettivamente le equazioni:

$$x^2+y^2+x-6=0\ \text{ e }\ x^2+y^2-4=0\ .$$

Non ci vuol molto a stabilire che sono tangenti fra loro e tangenti alla retta di equazione x=2. L'alternativa corretta è dunque [A].
Un altro procedimento sarebbe possibile, ma richiede conoscenze sui fasci di circonferenze. Orbene, considerato che l'equazione si può scrivere nella forma seguente:

$$(x^2+y^2+x-6)+2\,k\,(-x+2)=0,$$

si desume che il fascio di circonferenze da essa rappresentato è generato dalla circonferenza di equazione $x^2+y^2+x-6=0$ e dalla retta di equazione x=2 (detta *asse radicale* del fascio). Siccome queste due curve sono tangenti allora tutte le circonferenze del fascio sono tangenti. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 8.1.8. L'equazione ammette una sola soluzione reale ed è il numero $\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$.
[D] è l'alternativa corretta.

Quesito 8.1.9. [A] è l'alternativa corretta. Detto per completezza, le radici dell'equazione [B] sono $\frac{1}{2}$ contato due volte e $-\frac{1}{3}$ contato tre volte, quelle dell'equazione [C] sono $\frac{1}{3}$ contato 2 volte e $-\frac{1}{2}$ contato tre volte, quelle della [D] sono $-\frac{1}{3}$ contato due volte e $\frac{1}{2}$ contato 3 volte.

Quesito 8.1.10. Comunque si prendano i valori interi h, k, gli zeri razionali del polinomio si trovano fra i possibili divisori del termine noto, che è 2, presi col doppio segno. Quindi gli zeri razionali del polinomio sono teoricamente i seguenti numeri: $+1,\ -1,\ +2,\ -2$.
E pertanto sono al massimo 4. [C] è l'alternativa corretta.
In realtà, le 4 radici razionali sono veramente teoriche poiché si può spiegare che il polinomio in un caso (h=2 e k=–1) ha esattamente tre zeri razionali (di cui uno contato due volte) ed in 5 casi (particolari valori interi di h, k) ha esattamente due zeri razionali, mentre in nessun altro caso presenta zeri razionali. Provi il lettore a fornire la spiegazione di ciò.

Quesito 8.1.11. Il polinomio è positivo per ogni x reale, essendo la somma di due quantità, di cui una è positiva o nulla e l'altra è positiva. Quindi certamente non ammette zeri reali, per cui le alternative [A] e [B] non sono corrette. Si tratta allora di stabilire se esso è fattorizzabile in ℝ o se non lo è. Ora, si può scrivere:

$$x^4+16=x^4+16+8\,x^2-8\,x^2=\left(x^2+4\right)^2-\left(2\,x\,\sqrt{2}\right)^2=\left(x^2+2\,x\,\sqrt{2}+4\right)\left(x^2-2\,x\,\sqrt{2}+4\right),$$

per cui il polinomio è fattorizzabile in ℝ. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 8.1.12. Il polinomio è positivo per ogni x reale, essendo la somma di tre quantità, di cui due sono positive o nulle e la terza è positiva. Quindi certamente non ammette zeri reali, per cui le alternative [A] e [B] non sono corrette. Si tratta allora di stabilire se esso è fattorizzabile in ℝ o se non lo è. Ora, si può scrivere:

$$4\,x^4+2\,x^2+1=4\,x^4+4\,x^2+1-2\,x^2=\left(2\,x^2+1\right)^2-\left(x\,\sqrt{2}\right)^2=\left(x^2+x\,\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\,\sqrt{2}+1\right),$$

per cui il polinomio è fattorizzabile in ℝ. [C] è l'alternativa corretta.

Quesito 8.1.13. Si potrebbe pensare di trovare uno zero del polinomio e poi, utilizzando la regola di Ruffini, trovare gli altri due e quindi fattorizzare. Processo lungo e dispendioso, al quale si deve ricorrere inevitabilmente (salvo rare eccezioni) se il quesito chiedesse di fattorizzare il polinomio senza fornire alternative. Ma, nel caso nostro, le alternative ci sono e la tecnica di risoluzione del quesito non è quella descritta sopra, ma una assolutamente immediata. Si tratta di riflettere sul termine noto del polinomio, vale a dire $+6$. Ebbene, il prodotto dei termini noti dei tre binomi in cui esso si fattorizza deve essere proprio $+6$. Questo significa che, dei termini noti di questi fattori, quelli negativi devono essere in numero pari (0 oppure 2). Di conseguenza le alternative [A] e [D] sono da scartare. Rimangono in piedi [B] e [C]. Ora, però, nel caso [B] tutti i termini sono positivi, per cui il polinomio prodotto, una volta sviluppato, non può che avere termini positivi. Non è il caso del polinomio assegnato. L'unica alternativa corretta è la [C]. Ci vuole più tempo a spiegarlo a parole che ad individuarla.

Quesito 8.1.14. Si ragiona più o meno come nel caso precedente, sul termine noto, vale a dire $+48$, al quale deve essere uguale il prodotto dei termini noti dei tre binomi in cui il polinomio assegnato di fattorizza. Le alternative [B] e [D] sono allora da scartare poiché tale prodotto è in tali casi diverso da $+48$. L'alternativa [C] è da scartare poiché il prodotto medesimo è negativo. Rimane in piedi la sola alternativa [A], che perciò è quella corretta.

Quesito 8.1.15. I binomi proposti hanno tutti zeri razionali e precisamente, presi nell'ordine:

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ -2,\ \ 2.$$

Si tratta di vedere quale di questi zeri è anche zero del polinomio assegnato. Osserviamo al riguardo che gli eventuali zeri di questo polinomio sono da ricercare fra i divisori, presi con il doppio segno, del suo termine noto (considerato che il termine di grado più elevato ha coefficiente 1), ossia tra i seguenti numeri: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Quindi, confrontando con gli zeri dei binomi proposti, solo -2 e 2 possono essere presi in considerazione. Dopo aver effettuato una verifica, si trova che l'unico di questi due numeri che è zero del polinomio è -2. Cosicché il polinomio assegnato è divisibile per $x+2$. [C] è l'alternativa corretta.

8.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 8.2.1. No. In generale non è così, ma solo se i tre punti non sono allineati e, inoltre, se due qualsiasi di essi non si trovano sulla stessa parallela all'asse y.

Quesito 8.2.2. Si trova dapprima l'equazione risolvente (in x) del sistema delle due equazioni; quindi si calcola il discriminante di questa equazione e si controlla il suo segno. A seconda che questo segno sia positivo, nullo o negativo, la parabola e la retta sono rispettivamente secanti, tangenti o esterne.

Quesito 8.2.3. Deve risultare $a=a'$ e $b=b'$. In tal caso, su una qualsiasi retta parallela all'asse y le due parabole intercettano un segmento di lunghezza $|c-c'|$.

Quesito 8.2.4. Basta che sia $a=\pm a'$, naturalmente con tali coefficienti non nulli poiché, in tal caso, non ci sarebbero più le parabole.

Quesito 8.2.5. È vero, anche se questo può sembrare strano, ove si pensi che la seconda parabola è molto più "stretta" della prima. In realtà, date due qualsiasi parabole, esiste una similitudine che trasforma l'una nell'altra e, pertanto, le due parabole sono simili.

Quesito 8. 2. 6. Si considera la generica retta passante per il punto: la sua equazione è $y-q = m(x-p)$, dove (p, q) sono le coordinate del punto. Quindi si trova l'equazione risolvente (per esempio nella variabile x) del sistema delle equazioni di questa retta e della circonferenza. Si ottiene un'equazione di 2° grado in x. Si annulla il discriminante di questa equazione e, di norma, si ottiene un'equazione di 2° grado nell'incognita m. Se questa equazione in m ammette soluzioni (due reali e distinte o due reali e coincidenti), si trovano tali soluzioni e si sostituiscono nell'equazione della retta di cui sopra. Si ottengono così le equazioni delle due tangenti (distinte se il punto è esterno alla circonferenza o coincidenti se appartiene alla circonferenza). Qualora l'equazione di 2° grado in m non ammettesse soluzioni reali allora il punto sarebbe interno alla circonferenza dal momento che per esso non si possono condurre tangenti alla circonferenza.

Quesito 8. 2. 7. Si conclude che vi sono due tangenti: una corrispondente al valore di m che risolve l'equazione di 1° grado ottenuta; l'altra è la perpendicolare all'asse x condotta per il punto, la cui equazione, del tipo $x=h$, non rientra nella tipologia $y=mx+n$ delle equazioni delle rette considerate.

Quesito 8. 2. 8. Di solito questa questione viene risolta trovando dapprima l'equazione della retta CA e, una volta risolto il sistema delle equazioni di questa retta e della circonferenza, scegliendo la soluzione giusta fra le due ottenute. Il procedimento è piuttosto lungo ed anche un po' noioso.
Ne proponiamo uno rapido ed elegante, che mette in luce ancora una volta la potenza del calcolo vettoriale. Si tratta di osservare semplicemente che si ha:

$$\overrightarrow{CP} = \frac{r}{\overline{CA}}\,\overrightarrow{CA}$$

dove r è il raggio della circonferenza. Da qui, posto di aver calcolato che $\frac{r}{\overline{CA}}=k$, si ottiene immediatamente:

$$x_P - x_C = k\,(x_A - x_C),\quad y_P - y_C = k\,(y_A - y_C),$$

da cui seguono i valori di x_P e y_P.

Quesito 8. 2. 9. Assolutamente sì. L'equazione, infatti, non è soddisfatta né per – 1 né per 1, che sono le uniche radici razionali che essa potrebbe ammettere. Questo, in base al seguente teorema: "Se un polinomio con coefficienti interi ha zeri razionali, questi si trovano nell'insieme delle frazioni aventi al numeratore un divisore del termine noto e al denominatore un divisore del termine di grado più elevato".

Quesito 8. 2. 10. L'equazione è la seguente: $(x+1)^2\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$, che ovviamente può essere scritta nella seguente forma equivalente: $6\,x^4+11\,x^3+2\,x^2-5\,x-2 = 0$.

Quesito 8. 2. 11. È vero. Infatti, se l'equazione ammette soluzioni razionali, queste sono da ricercarsi fra i numeri ±1 e ±3. Il numero 105, che è evidentemente un numero razionale, non è fra quei numeri.

Quesito 8. 2. 12. L'equazione si può scrivere nel seguente modo equivalente:

$$(2\,x-3)(4\,x^2+6\,x+9)=0$$

e pertanto si spezza nelle due equazioni $2x-3=0$ e $4\,x^2+6\,x+9=0$. La prima ammette la radice reale $\frac{3}{2}$, la seconda non ammette radici reali poiché il suo discriminante è negativo.

Quesito 8.2.13. L'equazione (di 5° grado nell'indeterminata x) deve essere del tipo seguente: $(x-a)(x-b)(x-c)p(x)=0$, dove $p(x)$ è un qualunque trinomio di 2° grado con discriminante negativo.

Quesito 8.2.14. Se l'equazione ammette radici intere, queste devono trovarsi fra i divisori del suo termine noto 6, presi con doppio segno, vale a dire fra i seguenti numeri: ±1, ±2, ±3, ±6. Ora, se $x=1$ è una di tali radici, sostituendola nell'equazione si ottiene: $h=1$, per cui l'equazione diventa: $x^6+x^5-6\,x^4-x^2-x+6=0$, e si trova abbastanza facilmente che ammette le seguenti radici intere: 1, –1, 2, –3.
In linea teorica si potrebbero ottenere valori interi di h per $x=-2$ o per $x=3$ o per $x=\pm 6$. Ma, come si può facilmente verificare, questo non accade. Per cui solo per $h=1$ l'equazione ha radici intere (sono per l'esattezza in numero di 4), mentre per ogni altro valore intero di h essa non solo non ha radici intere ma neppure razionali.

Quesito 8.2.15. Il polinomio x^4+1 è positivo per ogni x reale, per cui non ammette zeri reali. Ciò non di meno esso è fattorizzabile nel campo reale, purché naturalmente non si cerchino come fattori dei polinomi di 1° grado. Si ha in effetti:

$$x^4+1=x^4+1+2\,x^2-2\,x^2=\left(x^2+1\right)^2-2\,x^2=\left(x^2+1+x\sqrt{2}\right)\left(x^2+1-x\sqrt{2}\right).$$

Quesito 8.2.16. La risposta è sì. Si ha infatti, come nel caso precedente:

$$x^4-x^2+1=x^4+1+2\,x^2-3\,x^2=\left(x^2+1\right)^2-3\,x^2=\left(x^2+1+x\sqrt{3}\right)\left(x^2+1-x\sqrt{3}\right).$$

Quesito 8.2.17. Indichiamo con x il numero da determinare. Allora esistono un numero naturale a ed un numero naturale b tali che: $x+80=a^2$ ed $x+124=b^2$. È vero che abbiamo a che fare con un sistema di 4° grado di due equazioni nelle tre incognite a, b, x, ma con la condizione che tali incognite assumano valori naturali. La sua risoluzione non può seguire canoni standardizzati ma richiede un po' di immaginazione. Intanto si ha: $a^2-80=b^2-124$, da cui segue: $(b+a)(b-a)=44$. Ora $44=2^2\times 11$ e perciò: $44=2\times 22$ oppure $44=4\times 11$. Possono verificarsi allora le seguenti possibilità:

$$(1)\ b+a=22,\ b-a=2;\quad (2)\ b+a=11,\ b-a=4;\quad (3)\ b+a=44,\ b-a=1.$$

Solamente il caso (1) fornisce valori naturali per a, b. Precisamente: $a=10$, $b=12$. Ne consegue che $x=20$. In effetti: $20+80=10^2$, $20+124=12^2$.

8. 5 Paolo Ruffini: vita ed opere.


Ruffini

Paolo Ruffini nacque il 22 settembre 1765 a Valentano, un piccolo centro del Lazio, situato in provincia di Viterbo, nei pressi del lago di Bolsena, quasi al confine con la Toscana e l'Umbria, all'epoca facente parte dello Stato Pontificio. A Valentano il padre si era stabilito per esercitare la professione di medico, ma quando Paolo era ancora ragazzo la famiglia ritornò a Reggio Emilia, di dove era originaria. Paolo, almeno parzialmente, seguì le orme del padre. Dal 1783 frequentò infatti l'Università di Modena, dove si laureò sì in medicina, ma anche in matematica. Nel 1788 gli fu affidata la cattedra di analisi matematica all'Università di Modena e qualche anno più tardi anche il corso di matematica elementare. Dal 1791 cominciò a praticare anche medicina. Quando, nel 1808, l'Università fu chiusa da Napoleone, passò alla Scuola dell'Accademia Militare, istituita dallo stesso Napoleone. Dopo la sconfitta di Napoleone, nel 1814, l'Università di Modena fu riaperta e Ruffini non solo riprese ad insegnarvi matematica e medicina, ma fu pure nominato rettore, carica che ricoprì per il resto della sua vita. La morte lo colse il 9 maggio 1822, appena in tempo per avere la soddisfazione di vedersi riconosciuta la primogenitura nella scoperta di un risultato importante riguardante la risoluzione delle equazioni algebriche.

Dopo i tentativi non riusciti del matematico italo-francese Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) di risolvere per radicali le equazioni algebriche di 5° grado, Ruffini aveva potuto leggere la sua opera *Réflection sur la résolution algébrique des équations* (1770) e meditare sugli aspetti più interessanti. Le sue riflessioni lo portarono a pubblicare nel 1799 a Bologna un'opera dal lungo titolo *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*. In essa dimostrava per l'appunto che, a differenza delle equazioni dei primi quattro gradi, un'equazione generale di grado superiore non è risolubile per radicali.

La dimostrazione di Ruffini, che purtroppo conteneva dei punti oscuri, non fu accettata dai matematici dell'epoca. Egli ne pubblicò varie edizioni rivedute e corrette e, finalmente, nel settembre 1821, a meno di un anno dalla sua morte, ricevette una lettera da Augustin Louis Cauchy (1789-1857), con la quale il grande matematico francese riconosceva che Ruffini aveva effettivamente dimostrato l'insolubilità per radicali di un'equazione algebrica di grado maggiore del quarto.

Il teorema relativo è oggi universalmente denominato teorema di Ruffini-Abel poiché giunse allo stesso risultato di Ruffini il matematico norvegese Niels Henrik Abel (1802-1829), il quale pubblicò i suoi risultati nel 1826, ma è certo che li aveva ottenuti almeno un paio d'anni prima, all'età di 22 anni. (1)

Ruffini pubblicò due altre opere a contenuto matematico.
Una è del 1804 e reca il titolo *Sopra la dimostrazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado*: vi sono contenuti il celebre *teorema di Ruffini* e l'altrettanto celebre *schema di Ruffini* per la divisione di un polinomio di grado qualunque per un binomio di primo grado.
Un'altra è un contributo alla probabilità ed è stata pubblicata nel 1821: ha per titolo *Riflessioni critiche sopra il saggio filosofico intorno alle probabilità del signor conte Laplace*. (2)

[1] Se qualcuno fosse interessato ad approfondire questo argomento e pure la storia completa delle equazioni algebriche, scendendo anche nei minimi aspetti tecnici delle questioni affrontate, lo può fare in: Silvio Maracchia, *Storia dell'Algebra*, Napoli, Liguori Editore, 2005.
[2] Pierre Simon de Laplace (1749-1827) era, in realtà, figlio di contadini, ma per i suoi meriti scientifici fu nominato "conte" dell'Impero da Napoleone e, dopo la Restaurazione, entrò alla Camera dei Pari come "marchese", tant'è che al giorno d'oggi è inteso come il "marchese de Laplace". Quando però pubblicò il libro cui si riferisce Ruffini, vale a dire *Essai philosophique des probabilités* (1814), si fregiava effettivamente del titolo di conte.