Capitolo 9 (Integrazione a unità 20-21-22)

Equazioni, disequazioni, sistemi e problemi di 1° grado

9.1 Quesiti a risposta chiusa.

9.1.1 Se $2x+1=3$ allora quanto vale $3x+2$?

[A] 4 [B] 5 [C] 6 [D] 7

9.1.2 Considerata l'equazione $(3k+1)x=k-2$, nell'incognita x, dove k è un parametro reale, quale delle seguenti proposizioni è VERA?

[A] È indeterminata per $k=2$ [B] È impossibile per $k=-1/3$

[C] È determinata per $k\neq-3$ [D] Le affermazioni precedenti sono tutte false

9.1.3 Considerata la relazione:

$$k\,(a-4)=2\,a-r\,,$$

dove i parametri k, a, r possono assumere qualsiasi valore reale, quale delle seguenti proposizioni è VERA ?

[A] Se $r=8$ e $a\neq 4$ allora $k=2$; [B] Se $2\,a=r$ allora $k=0$;

[C] Se $k=0$ e $a\neq 0$ allora $r=3$; [D] Se $k\neq -2$ allora $a=\frac{4k-r}{k+2}$.

9.1.4 Sono date le due equazioni $ax+b=0$ e $2x+3=0$, dove a, b sono numeri reali qualsiasi, con $a\neq0$. La soluzione della prima equazione è un numero maggiore di quella della seconda se risulta:

[A] $\frac{b}{a}<\frac{3}{2}$ [B] $\frac{b}{a}>\frac{3}{2}$ [C] $\frac{b}{a}<\frac{2}{3}$ [D] $\frac{b}{a}>\frac{2}{3}$

9.1.5 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), sono assegnate le rette di equazioni:

$$\text{(a)}\ \ y=(3m-1)\,x+2m,\qquad \text{(b)}\ \ y=2\,(m+2)\,x-3,$$

dove m è un parametro reale. Quale delle seguenti proposizioni è FALSA?

[A] Esiste uno ed un solo valore di m cui corrispondono una retta delle (a) ed una retta delle (b) che risultino parallele.

[B] Non esiste alcun valore di m cui corrispondono una retta delle (a) e una retta delle (b) che risultino parallele.

[C] Per ogni retta scelta fra le (a) esiste una retta ad essa parallela fra le (b).

[D] Per ogni retta scelta fra le (b) esiste una retta ad essa parallela fra le (a).

9.1.6 Si consideri la seguente disequazione in x:

$$m\,x>2\,,$$

dove m è un parametro reale. Quale delle seguenti affermazioni è VERA ?

[A] La disequazione è soddisfatta per ogni x reale se $m=0$.

[B] La disequazione è soddisfatta dagli x reali per cui si ha $x<2/m$ se $m<0$.

[C] La disequazione è soddisfatta dagli x reali per cui si ha $x>m/2$ se $m>0$.

[D] Le proposizioni precedenti affermano tutte e tre il falso.

9.1.7 Un signore ripartisce fra i suoi tre figli alcune monete d'oro nel modo seguente: al 1° figlio assegna la metà delle monete più una; al 2° ne assegna un terzo delle rimanenti; al 3° assegna le monete che restano. Qual è il minimo numero di monete che il padre deve possedere affinché al 3° figlio ne vadano almeno 7 ? [Si tenga presente che il numero di monete che vanno a ciascun figlio è un intero]

[A] 22 [B] 24 [C] 26 [D] 28

9.1.8 Gli x reali che soddisfano alla condizione $-1\leq 3-x\leq 3$ sono tali che:
[A] $-1\leq x\leq 0$ [B] $-4\leq x\leq 0$ [C] $0\leq x\leq 1$ [D] $0\leq x\leq 4$

9.1.9 Si considerino le seguenti lunghezze, espresse in metri:

$$3x-2,\quad 2x-4,\quad x+3,$$

con $x>0$. Per quali x possono essere assunte come misure dei lati di un triangolo ?
[A] Nessun x [B] $\frac{2}{3}<x<2$ [C] $2<x<\frac{9}{4}$ [D] $x>\frac{9}{4}$

9.1.10 Si consideri il seguente sistema di equazioni in x, y:

$$\begin{cases} ax-y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale. Per quali valori di a è determinato ?
[A] $a\neq 2$ [B] $a\neq 1$ [C] $a\neq -1$ [D] $a\neq -2$

9.1.11 Un numero N di due cifre, scritto nel consueto sistema decimale di numerazione, è tale che la cifra delle decine supera di 2 unità quella delle unità. Inoltre, il numero supera di 9 unità quello che si ottiene da esso scambiando di posto le due cifre. Di numeri siffatti quanti ne esistono ?
[A] 0 [B] 1 [C] Infiniti [D] Un numero finito ma imprecisato

9.1.12 Un automobilista va dal casello A al casello B di un'autostrada ed è costretto a tenere la velocità media di 30 km/h. Nel percorso di ritorno, da B ad A, trovando la strada completamente libera, vorrebbe tenere una velocità media v tale da realizzare la velocità media di 60 km/h sull'intero percorso di andata e ritorno. Qual è il valore di v ?
[A] 90 km/h [B] 150 km/h
[C] Non esiste [D] Esiste ma non si può calcolare per insufficienza di dati.

9.1.13 Per quale valore del parametro reale a l'espressione $\frac{3}{2}-5a$ può esprimere la probabilità di un evento casuale?
[A] $0\leq a\leq \frac{1}{10}$ [B] $\frac{1}{10}\leq a\leq \frac{3}{10}$ [C] $-\frac{3}{10}\leq a\leq -\frac{1}{10}$ [D] $a\geq \frac{3}{10}$

9.1.14 Un'urna contiene palline rosse e palline nere, ma le rosse superano di una unità le nere. Si estraggono a caso due palline senza reinserimento. Sapendo che è 2/7 la probabilità che esse siano entrambe rosse, qual è il numero di palline rosse presenti nell'urna ?
[A] 2 [B] 3 [C] 4 [D] 5

9.1.15 Uno scommettitore punta € 10 sulla vittoria della Roma nel prossimo incontro di calcio, sperando, in caso di vincita, di guadagnarne 7, in base alle quote del bookmaker. Quale quota ha stabilito questi per la vittoria della Roma?
[A] $\frac{17}{10}$ [B] $\frac{10}{17}$ [C] $\frac{10}{7}$ [D] $\frac{7}{10}$

9.1.16 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), sono assegnate le rette di equazione $(3-2m)x-(2-3m)y+1=0$, dove m è un parametro reale. Tutte le rette passano per uno stesso punto. Quali sono le sue coordinate ?

[A] $\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)$ [B] $\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$ [C] $\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{2}\right)$ [D] $\left(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right)$

9. 1. 17 In quei due giorni, lunedì e martedì, la Borsa di Milano aveva perduto rispettivamente il 3,0% e il 2,5%, ma improvvisamente, il mercoledì ebbe un rimbalzo notevole fino a recuperare esattamente le perdite dei due giorni precedenti. Quale fu l'aumento registrato dalla Borsa di Milano quel mercoledì ?
[A] Fu del 5,5% [B] Fu superiore al 5,5%
[C] Fu inferiore al 5,5% [D] Non si può calcolare per insufficienza di dati.

9. 2 Quesiti a risposta aperta.

9. 2. 1 Le grandezze I, C, i, t sono legate dalla relazione I=Cit. Esprimere ciascuna delle indeterminate che figurano nella formula in funzione delle altre.

9. 2. 2 Giorgio vuole sorprendere Piero e gli propone di eseguire una serie di operazioni.
Giorgio: «Pensa un numero. Moltiplicalo per 4. Aggiungi 3. Togli il doppio del numero che hai pensato. Dimmi adesso quale numero hai ottenuto.»
Piero: «Ho ottenuto 15.»
Giorgio: «Hai pensato al numero 6.»
Piero: «Hai indovinato.»
Chiaramente Giorgio non è un indovino. Allora, come ha fatto ad indovinare?

9. 2. 3 Si consideri la seguente equazione nell'incognita k: (2k–1)x=k. Per quali valori di x risulta determinata?

9. 2. 4 Posto P(z)=az+1, dove a è un parametro reale non nullo, per quale valore di x risulta P(P(x))=P(x) ?

9. 2. 5 Si consideri la seguente disequazione in x: 2>kx, dove k è un numero reale negativo. È vero che essa è risolta per x>2/k ?

9. 2. 6 I valori x, per cui risulta: 0<x–2<1, sono quelli per cui si ha: 0<x<3. È vero o falso ?

9. 2. 7 Si considerino le seguenti lunghezze, espresse in cm: 2, x+2, x–2, con x>0. Per quali x possono essere assunte come misure dei lati di un medesimo triangolo ?

9. 2. 8 Si considerino le seguenti lunghezze, espresse in metri: 17, 13, a, con a>0. Per quali valori di a possono essere assunte come lati di un medesimo triangolo? A questa domanda Pierino rispose rapidamente: "Per a<30". Pierino ha risposto correttamente ?

9. 2. 9 Nella seguente disequazione in x:

$$(2p-3)\,x < 2,$$

il parametro p rappresenta la probabilità di un evento. Qual è la soluzione della disequazione ?

9. 2. 10 Si consideri il sistema formato dalle due equazioni seguenti nelle incognite x, y:

$$k\,x = 1 \quad \text{e} \quad x - 2\,y = k.$$

Per quali valori del parametro reale k esso è determinato, indeterminato o impossibile ?

9. 2. 11 Considerata la seguente equazione nell'incognita k:

$$(k-1)\,x - y - 2\,k + 3 = 0,$$

esiste una coppia (x,y) per la quale risulta indeterminata ?

9. 2. 12 Uno scommettitore punta la somma s’ sul verificarsi di un evento, a condizione di incassare, nella valutazione del bookmaker, la somma s se l’evento si verifica. Qual è la quota fissata dal bookmaker sul verificarsi dell’evento?

9. 2. 13 In un borsellino sono contenute 20 monete, che possono essere da 1 euro, da 50 centesimi di euro e da 10 centesimi di euro. In particolare: le monete da 1 euro sono il doppio di quelle da 50 centesimi, le quali sono il triplo di quelle da 10 centesimi. Qual è il valore complessivo delle monete contenute nel borsellino ?

9. 2. 14 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), i punti (x, y), per i quali risulta:

$$3\,|x|+2\,|x-y|\leq 5,$$

individuano una regione limitata di piano. Calcolarne l’area.

9. 2. 15 Considerata l’equazione $2(x-a)-(ax-1)=0$, determinare per quale valore del parametro reale a risulta $x>1$.

9. 2. 16 Sapendo che il prodotto delle due variabili positive x, y è 2, determinare per quale coppia di valori x, y la quantità $2x+y$ è minima.

9. 2. 17 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), la regione piana R è individuata dalle condizioni:

$$0\leq x\leq 2,\ x+2y\leq 6,\ y\geq 0,$$

Esiste un punto della regione che rende massima la quantità $4x+5y$?

9. 2. 18 Un imprenditore deve versare a tre operai le somme x, y, z. Si sa che:

$$3x + 2y = € \, 8.800, \quad 3y + 2z = € \, 8.350, \quad 3z + 2x = € \, 7.600.$$

Quanto vale la somma complessiva $x+y+z$?

9. 2. 19 Trovare tutte le coppie di numeri naturali la cui somma è 150 e il cui massimo comune divisore è 30.

9. 2. 20 Un numero n di due cifre, assegnato nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, è un quadrato perfetto. Aumentando di una unità le sue cifre, si ottiene ancora un numero di due cifre che è un quadrato perfetto. Trovare il numero n.

9. 3 Risposte commentate: quesiti a risposta chiusa.

Quesito 9. 1. 1. Se $2x+1=3$ allora $x=1$, per cui $3x+2=3\cdot 1+2=5$. L’alternativa corretta è [B].

Quesito 9. 1. 2. Per $k=2$ l’equazione diventa $7x=0$ ed ammette la soluzione $x=0$. La proposizione [A] è falsa.
Per $k=-1/3$, diventa $0x=-7/3$ ed è impossibile. La proposizione [B] dice il vero e perciò è l’alternativa corretta.
Non occorre altro, ma, constatato che ovviamente l’alternativa [D] non è corretta, vediamo perché anche la [C] non lo è.

Di fatto, tra i valori k diversi da -3 c'è anche $k=-1/3$, per il quale l'equazione è impossibile.

Quesito 9.1.3. Se $r=8$, l'equazione diventa $k(a-4)=2(a-4)$. Per cui, siccome $a\neq4$, $k=2$. [A] è l'alternativa corretta.
E questo basta per concludere con questo quesito. Ciò non di meno, vogliamo spiegare perché le altre alternative non sono corrette.
Se $2a=r$, l'equazione diventa $k(a-4)=0$. È $k=0$ solo se $a\neq4$. L'alternativa [B] non è corretta.
Se $k=0$, l'equazione diventa $2a-r=0$. Per cui $r=2a$ e, siccome $a\neq0$, r assume un qualunque valore diverso da 0, non solo $r=3$. L'alternativa [C] non è corretta.
Risolvendo l'equazione rispetto ad a, si trova: $a=\frac{4k-r}{k-2}$ se $k\neq2$. L'alternativa [D] non è corretta.

Quesito 9.1.4. La soluzione della prima equazione è $-\frac{b}{a}$, quella della seconda è $-\frac{3}{2}$. Deve essere, perciò: $-\frac{b}{a}>-\frac{3}{2}$, ossia: $\frac{b}{a}<\frac{3}{2}$. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 9.1.5. Affinché le equazioni rappresentino due rette parallele deve essere $3m-1=2(m+2)$, ossia $m=5$. Quindi la [A] dice il vero. Di fatto, per $m=5$, si hanno le due rette parallele $y=14x+10$ e $y=14x-3$. In conseguenza della verità della [A], la [B] è una proposizione falsa ed è per questo l'alternativa corretta.
Non occorrerebbe altro, ma spieghiamo ugualmente perché la [C] afferma il vero. Scegliere una qualunque retta fra le (a) significa assumere per m un qualsiasi valore. Si tratta di stabilire allora se, fissato un generico m, esiste un valore m' tale che $3m-1=2(m'+2)$. Si trova $m'=\frac{3}{2}(m-1)$. In modo analogo si procede per la [D].

Quesito 9.1.6. La proposizione [A] afferma il falso. Infatti se $m=0$ la disequazione diventa $0\cdot x>2$ e non è mai soddisfatta.
Per quanto riguarda la proposizione [B], se $m<0$, dividendo entrambi i membri della disequazione per m, dovendo cambiare il senso della disequazione si ha appunto $x<2/m$. La proposizione dice il vero. L'alternativa [B] è corretta.
E con ciò avremmo finito l'indagine sul quesito, ma, essendo la [D] evidentemente non corretta, vogliamo spiegare perché pure la [C] non è corretta. Se infatti $m>0$ si ha $x>2/m$.

Quesito 9.1.7. Se x è il numero complessivo delle monete:

- al 1° figlio ne vanno $\frac{x}{2}+1$ e al secondo $\frac{1}{3}\left(x-\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)$;
- al 3° figlio ne vanno allora $x-\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)\right)=\frac{1}{3}(x-2)$.

Deve essere, perciò: $\frac{1}{3}(x-2)\geq7$, vale a dire: $x\geq23$.
Constatato che x deve essere pari e che non può essere $x=22$, vediamo che succede se $x=24$. In tal caso, al 1° figlio andrebbe un numero intero di monete ($12+1=13$), ma al 2° non potrebbe andare un numero intero di monete. Anche questo numero deve essere scartato. Per $x=26$, al 1° figlio vanno 14 monete, al 2° ne vanno 1/3 di 12, cioè 4, al 3° infine vanno 8 monete. È questo, vale a dire 26, il minimo numero di monete che il padre deve possedere. L'alternativa corretta è [C].

Quesito 9.1.8. Da $-1\leq 3-x\leq 3$, sommando -3 ai tre membri, segue: $-4\leq -x\leq 0$ e da qui $0\leq x\leq 4$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 9.1.9. Osserviamo anzitutto che deve essere, non solo $x>0$, ma anche $x>2/3$ ed $x>2$; in sostanza $x>2$. Deve poi verificarsi che ogni lato risulti minore della somma degli altri due. Vale a dire:

- $3x-2<(2x-4)+(x+3)$, da cui segue: $-2<-1$, che è sempre vera.
- $2x-4<(3x-2)+(x+3)$, da cui segue: $2x>-5$, che è sempre vera.
- $x+3<(3x-2)+(2x-4)$, da cui segue: $4x>9$, ossia: $x>9/4$.

Dovendo allora essere $x>2$ ed $x>9/4$, è sufficiente che sia $x>9/4$. [D] è l'alternativa corretta.

Quesito 9.1.10. Affinché il sistema sia determinato deve essere $-a+2\neq 0$, vale a dire: $a\neq 2$. L'alternativa corretta è [A].

Quesito 9.1.11. Poniamo $N=10y+x$, dove x ed y sono interi compresi fra 1 e 9 inclusi. Per le condizioni poste dal problema, devono essere soddisfatte le due relazioni seguenti:

$$y = x + 2, \quad 10\,y + x = (10\,x + y) + 9.$$

Sostituendo nella seconda il valore di y dato dalla prima e semplificando, si ottiene la seguente equazione risolvente: $0\cdot x=9$. Si tratta evidentemente di un'equazione impossibile, per cui anche il problema è impossibile: non esiste alcun numero avente le caratteristiche descritte. [A] è l'alternativa corretta.

Quesito 9.1.12. Se si indica con s il percorso da A a B (ovviamente uguale a quello da B ad A) e con t' e t" rispettivamente i tempi di percorrenza dei due percorsi, le corrispondenti velocità medie sono: $v'=s/t'$ e $v''=s/t''$. La velocità media v_m, su tutto il percorso, è allora:

$$v_m = \frac{2s}{t' + t''} = \frac{2}{\frac{t'}{s} + \frac{t''}{s}} = \frac{2}{\frac{1}{v'} + \frac{1}{v''}} = \frac{2\,v'v''}{v' + v''}.$$

Siccome $v'=30$ km/h e $v''=v$, affinché sia $v_m = 60$ km/h deve risultare: $60=\frac{2\times 30\times v}{30+v}$, da cui segue: $30+v=v$; equazione evidentemente impossibile. [C] è l'alternativa corretta.
Si ricorda che la velocità:

$$\frac{2}{\frac{1}{v'} + \frac{1}{v''}}$$

è la *media armonica* delle due velocità v' e v".

Quesito 9.1.13. Deve essere soddisfatta la condizione $0\leq \frac{3}{2}-5a\leq 1$. Risolvendo si ottiene: $\frac{1}{10}\leq a\leq \frac{3}{10}$. [B] è l'alternativa corretta.

Quesito 9.1.14. Indicato con n il numero di palline nere presenti nell'urna, quello delle palline rosse è $n+1$, per cui nell'urna sono presenti $2n+1$ palline; di conseguenza la probabilità che le due palline estratte siano entrambe rosse è:

$$p(RR)=\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{n}{2n}=\frac{n+1}{2(2n+1)}\ .$$

Affinché questa probabilità sia 2/7, deve risultare:

$$\frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{2}{7}\ ,$$

da cui segue $n=3$. Pertanto nell'urna vi sono 4 palline rosse. L'alternativa corretta è [C].
Un altro procedimento consiste nel proseguire per tentativi, fino a trovare quella corretta, fra le 4 alternative proposte. Naturalmente si trova l'alternativa [C]. In questo caso, infatti, essendo 4 le palline bianche, sono evidentemente 3 quelle nere, per cui si ha:

$$p(RR)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7}.$$

Quesito 9.1.15. La probabilità p dello scommettitore di guadagnare 7 euro, puntandone 10, è:

$$p=\frac{10}{10+7}=\frac{10}{17}\ .$$

Siccome la quota q è tale che $p=1/q$, allora si ha:

$$q=\frac{17}{10}\ .$$

[A] è l'alternativa corretta.

Quesito 9.1.16. Si può procedere in vari modi. Uno consiste nell'imporre che l'equazione $(3-2m)x-(2-3m)y+1=0$, considerata nell'incognita m, sia indeterminata, vale a dire che sia del tipo $0\cdot m=0$. Allora, dopo qualche elaborazione, l'equazione può essere scritta nel modo seguente:

$$(-2x+3y)m+(3x-2y+1)=0.$$

Bisogna imporre che sia $-2x+3y=0$ e $3x-2y+1=0$. Una volta risolto il sistema di queste due equazioni nelle incognite x, y, si trova: $x=-\frac{3}{5},\ y=-\frac{2}{5}$. [D] è l'alternativa corretta.
Un altro procedimento consiste nel prendere due qualsiasi rette fra quelle assegnate (per esempio quelle che si hanno per $m=0$ e per $m=1$), trovare il loro punto comune e verificare con quale delle alternative coincide. Se, tuttavia, fra le alternative ce ne fosse una che insinua il dubbio sull'esistenza di un tale punto comune a tutte le rette, il ragionamento precedente dovrebbe proseguire: bisogna verificare che, sostituite le coordinate del punto trovato nella equazione generale delle rette considerate, si ottiene l'identità $0=0$.
Una terza modalità consiste nel sostituire le coordinate proposte da ciascuna alternativa nell'equazione generale delle rette assegnate fino a quando non si trova quella giusta.

Quesito 9.1.17. Il lunedì la Borsa perse il 3,0%, per cui fissando a 100 la quota iniziale, quella finale fu $100\times(1-0{,}03)=97$. Il martedì, avendo la Borsa perso il 2,5%, la quota di chiusura fu $97\times(1-0{,}025)=94{,}575$. Il rimbalzo del mercoledì, pari ad x%, portò la quota di nuovo a 100, per cui risulta: $94{,}975\cdot(1+x)=100$. Una volta risolta questa equazione in x, si trova: $x\approx5{,}29$. Il rialzo fu di circa il 5,3%. [C] è l'alternativa corretta.

9.4 Risposte commentate: quesiti a risposta aperta.

Quesito 9.2.1. Si ha:

$$C=\frac{I}{i\,t}\ ;\quad i=\frac{I}{C\,t}\ ;\quad t=\frac{I}{C\,i}\ .$$

Quesito 9.2.2. Formalizziamo le operazioni suggerite da Giorgio, una volta indicato con x il numero pensato da Piero. Si ha in successione:

$$x;\quad 4x;\quad 4x+3;\quad (4x+3)-2x.$$

In sostanza si ottiene l'espressione 2x+3. Se, come comunica Piero, quest'espressione deve valere 15, si ottiene l'equazione: 2x+3=15, da cui segue: x=6.
S'intende che, con le stesse operazioni, se Piero avesse ottenuto come risultato (certamente dispari): 21 oppure 45, eccetera, Giorgio avrebbe posto 2x+3=21 e avrebbe ottenuto x=9, oppure 2x+3=45 e avrebbe ottenuto x=21. E così via.
Si capisce che, volendo, si possono inventare quante procedure si vogliono ed apparire indovini: basta però ricordarle e ricordare l'espressione cui porta la procedura di calcolo.

Quesito 9.2.3. Per $x\neq\frac{1}{2}$. Infatti, dopo qualche semplice elaborazione, l'equazione diventa $(2x-1)k=x$ e solo per $x\neq\frac{1}{2}$ risulta determinata.

Quesito 9.2.4. Si osserva che è: $P(x)=ax+1$ e $P(P(x))=a(ax+1)+1=a^2x+a+1$. Deve, dunque, essere soddisfatta la seguente equazione in x:
$a^2x+a+1 = ax+1$, ossia, essendo $a\neq 0$: $(a-1)x+1 = 0$.
Si trova allora che se a=1 l'equazione è impossibile, se invece $a\neq 1$ l'equazione ha la soluzione $x=\frac{1}{1-a}$.

Quesito 9.2.5. È vero. Infatti, per risolverla bisogna dividere entrambi i membri della disequazione per il numero negativo k e si ottiene per l'appunto $x>2/k$.

Quesito 9.2.6. È falso. I valori cercati sono quelli per cui si ha: $2<x<3$, ottenuti sommando 2 a tutti e tre i termini della relazione considerata.

Quesito 9.2.7. Considerato che la lunghezza maggiore è evidentemente x+2, deve risultare $x+2<2+x-2$. E questo non accade per alcun x.

Quesito 9.2.8. Pierino è stato troppo precipitoso. Devono essere soddisfatte le seguenti condizioni: $17<13+a$, $13<17+a$, $a<17+13$.
La prima è soddisfatta per $a>4$, la seconda per ogni a ($a>0$) e la terza per $a<30$. Dunque i valori di a cercati sono quelli per cui si ha: $4<a<30$. La sola condizione $a<30$, come afferma Pierino, non basta.

Quesito 9.2.9. Bisogna tener presente che è $0\leq p\leq 1$, per cui $2p-3<0$. Ne discende che la disequazione $(2p-3)\,x < 2$ è risolta per $x>\frac{2}{2p-3}$.

Quesito 9.2.10. Se k=0 la prima disequazione è impossibile, di conseguenza anche il sistema lo è. Se $k\neq 0$, è determinato e la sua soluzione è:

$$x=\frac{1}{k}\ ,\quad y=\frac{1-k^2}{2k}\ .$$

Per nessun valore di k il sistema è indeterminato.

Quesito 9.2.11. Incominciamo a scrivere l'equazione (considerata nell'incognita k) in forma normale:

$$(x-2)k-(x+y-3)=0.$$

Affinché risulti indeterminata, deve essere del tipo $0\cdot k=0$. Devono pertanto essere soddisfatte contemporaneamente le due seguenti equazioni in x, y: $x-2=0$, $x+y-3=0$.
Una volta risolto il loro sistema, si trova x=2, y=1. Pertanto solamente la coppia (2,1) ha i requisiti richiesti.

Quesito 9. 2. 12. La probabilità dell'evento su cui si scommette può essere espressa in due modi:

$$p=\frac{s'}{s} \quad e \quad p=\frac{1}{q} .$$

Deve essere, pertanto:

$$q=\frac{s}{s'} .$$

Quesito 9. 2. 13. Indichiamo con x, y, z nell'ordine i numeri di monete da 1 euro, 50 centesimi di euro, 10 centesimi di euro. Deve essere: $x+y+z=20$, $x=2y$, $y=3z$.
Risolto il sistema nelle incognite x, y, z, si trova: $x=12$, $y=6$, $z=2$. Di conseguenza il valore delle monete è € 15,20.

Quesito 9. 2. 14. Con riferimento alla disequazione $3|x|+2|x-y|\leq 5$, bisogna esaminare diverse situazioni per sciogliere i valori assoluti.

- Se $x\geq 0$ e $x-y\geq 0$, la disequazione diventa: $3x+2(x-y)\leq 5$, ossia $5x-2y\leq 0$.
  La regione che rappresenta questa situazione è quella disegnata in rosso nella figura sottostante (Fig. 9.1).
- Se $x\geq 0$ e $x-y<0$, la disequazione diventa: $3x-2(x-y)\leq 5$, ossia $x+2y\leq 5$.
  La situazione è rappresentata dalla regione disegnata in verde.
- Se $x<0$ e $x-y\geq 0$, la disequazione diventa: $-3x+2(x-y)\leq 5$, ossia $-x-2y\leq 5$.
  La regione disegnata in celeste rappresenta questo caso.
- Se $x<0$ e $x-y<0$, la disequazione diventa: $-3x-2(x-y)\leq 5$, ossia $-5x+2y\leq 5$.
  La regione blu rappresenta questo caso.

La regione di piano rappresentata dalla disequazione assegnata è, in definitiva, il parallelogramma ABCD, dove $A\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$, $B\left(0,-\frac{5}{2}\right)$, $C\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$, $D\left(0,\frac{5}{2}\right)$. La sua area S, doppia di quella del triangolo ABD, è pertanto:

$$S=\overline{BD}\cdot dist(A,y)=5\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{3} .$$

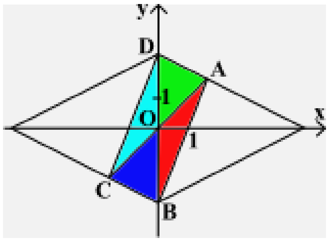

Fig. 9.1

Quesito 9. 2. 15. Dapprima si trova la radice dell'equazione:

$$x=\frac{2a-1}{2-a},$$

quindi si impone che sia maggiore di 1:

$$\frac{2a-1}{2-a}>1.$$

Basta risolvere questa disequazione rispetto all'indeterminata a. Si trova $1<a<2$.

Quesito 9. 2. 16. Siccome xy=2, allora (2x)(y)=4. Ne consegue che la somma 2x+y è tale che le due variabili positive 2x ed y hanno prodotto costante e pertanto essa è minima quanto 2x=y. D'altronde xy=2, per cui x(2x)=2, cioè $x^2=1$, ossia x=1. Di conseguenza y=2. L coppia cercata è (1,2).

Quesito 9. 2. 17. La regione R è quella ombreggiata nella figura sottostante (Fig. 9.2).

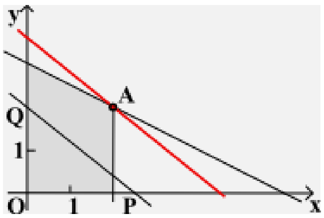

Fig. 9.2

Per risolvere la questione proposta poniamo 4x+5y=k. Otteniamo così un fascio di rette parallele, la generica delle quali è la retta PQ, dove P $\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ e Q $\left(0, \frac{k}{5}\right)$. Si tratta di valutare qual è la retta che taglia la regione R nel punto che determina il massimo valore di k. Ed è evidente che questo punto è il punto A(2,2). Ragion per cui: max(4x+5y)=4·2+5·2=18.

Quesito 9. 2. 18. Attenzione! Non è richiesto di calcolare x, y, z, ma la loro somma. E questa può essere calcolata, almeno in questo caso particolare, senza conoscere i valori di x, y, z. Infatti, sommando membro a membro le tre equazioni:

$$3x + 2y = € \, 8.800, \quad 3y + 2z = € \, 8.350, \quad 3z + 2x = € \, 7.600,$$

si trova:

$$5x+5y+5z = € \, 24.750$$

e da qui:

$$x+y+z = € \, 4.950 \, .$$

Naturalmente, se si vogliono conoscere i valori di x, y, z, bisogna risolvere il sistema delle tre equazioni precedenti e si trova:

$$x = € \, 1.700, \;\; y = € \, 1.850, \;\; z = € \, 1.400.$$

Quesito 9. 2. 19. Si potrebbe procedere per tentativi, ma è più interessante seguire un ragionamento generale, che può essere applicato anche in situazioni in cui i due numeri da determinare abbiano somma ben maggiore di 150, nel qual caso i tentativi potrebbero essere infruttuosi.

I due numeri sono tali che il loro M.C.D. è 30, quindi devono essere entrambi multipli di 30. Indicandoli dunque con a, b, devono esistere due interi positivi h, k tali che: a=30h, b=30k; deve essere inoltre: a+b=150, per cui deve essere a<150 e b<150.

Ora, dalla relazione a+b=150 segue: b=150–a. Attribuiamo allora ad a i valori 30h, al variare di h.

Per h=1 si ha a=30 e b=120. La coppia {30, 120} risolve il problema.

Per h=2 si ha a=60 e b=90. La coppia {60, 90} risolve il problema.

Non ci sono altre coppie poiché per h=3 e h=4 si ritrovano le coppie precedenti, mentre per h≥5 non è più soddisfatta la condizione a<150.

In conclusione, due coppie e due soltanto risolvono il problema: {30, 120} e {60, 90}.

Quesito 9.2.20. Si potrebbe procedete per tentativi, prendendo in esame i numeri di due cifre che sono quadrati perfetti, vale a dire: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Si trova che solo 25 soddisfa alle richieste del problema.
Noi però vogliamo seguire una strada diversa. Una strada che può essere generalizzata anche al caso in cui il numero da cercare avesse più di due cifre, nel qual caso la ricerca per tentativi, pur possibile, sarebbe però molto faticosa, anche perché non c'è garanzia che un tale numero effettivamente esista.
Scriviamo il numero n in forma polinomiale: $n=10a+b$. Aumentando le sue cifre a, b di una unità si ottiene il numero $m=10(a+1)+(b+1)$. Entrambi i numeri n ed m sono quadrati perfetti. Ciò significa che esistono due numeri naturali h, k tali che risulti:

$$h^2=10a+b,\ k^2=10(a+1)+(b+1).$$

Da qui, sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda, segue: $k^2-h^2=11$, e pertanto: $(k+h)(k-h)=11$. Siccome i numeri $k+h$ e $k-h$ sono numeri naturali, l'uguaglianza precedente è possibile se e solo se risulta contemporaneamente: $k+h=11$ e $k-h=1$. Di conseguenza, una volta risolto il sistema delle due equazioni in h, k, si trova: $h=5$, $k=6$. Il numero cercato è pertanto $n=25$.

9.5 Antologia.

«Ragazzi – esordì il prof Gauss – oggi vi propongo un problema sui *quadrati magici*. Si tratta di incasellare dei numeri opportuni in modo che le somme dei numeri di ogni riga, di ogni colonna e di ogni diagonale siano uguali. Ebbene i numeri che dovete inserire sono quelli che completano il quadrato della figura sottostante (Fig. 9.3)

	203	
176		**212**

FIG. 9.3

Vi ricordo che a questi quadrati, nell'antichità, erano attribuite doti magiche e da qui il loro nome. Sembra, infatti, che messi sulla parte ammalata del corpo, avessero il potere di guarirla. Chissà che il quadrato che completerete, messo sulla vostra testa, non abbia il potere di farvi diventare dei provetti matematici?
Vi voglio dare un indizio che può aiutarvi a verificare se avete fatto bene: la somma costante dei numeri di una riga o di una colonna o di una diagonale è uguale al numero che è formato dal prefisso telefonico dei film e telefilm americani, mentre la somma di tutti i numeri del quadrato magico coincide con l'anno della morte del grande matematico francese Pierre de Fermat.»

Come devono procedere gli alunni del prof Gauss per completare il quadrato? Provare a risolvere la questione da soli prima di proseguire nella lettura.

RISOLUZIONE.
Conviene indicare con delle lettere i numeri da inserire nelle caselle vuote, come nella figura 9.4.

c	203	d
b	a	e
176	f	212

FIG. 9.4

158	203	194
221	185	149
176	167	212

Fig. 9.5

Confrontando la seconda colonna e la terza riga, deve essere: 203+a+f=176+f+212, e pertanto: 203+a=176+212, da cui segue: a=185.
Confrontando adesso la diagonale contenente c con la prima colonna, si ha: c+185+212=c+b+176, e pertanto: b+176=185+212, da cui segue: b=221.
Proseguendo con ragionamento analogo si trova: c=158.
A questo punto conosciamo tutti e tre i numeri della prima colonna e perciò conosciamo la loro somma, che è per l'appunto la somma costante dei numeri di ogni colonna, di ogni riga e di ogni diagonale. Essa è:

$$s = 176+b+c = 176+221+158 = 555$$

ed effettivamente rappresenta il prefisso telefonico usato, per ragioni di riservatezza, nei film americani.
Ora, si ottiene subito la somma S di tutti i numeri del quadrato magico, che è evidentemente:

$$S = 3\ s = 3\times555 = 1665$$

e realmente coincide con l'anno della morte di Fermat.
Il calcolo dei numeri delle caselle che rimangono, vale a dire e ed f, è immediato: e=149, f=167.
Il quadrato magico completo è rappresentato in figura 9.5.

Nella storiella, ovviamente inventata, si citano i nomi di due matematici realmente esistiti, anzi di due fra i più grandi della storia della nostra disciplina e precisamente, in ordine cronologico:

- Pierre de Fermat (1601-1665), letterato e giurista francese, matematico per hobby, definito "il principe dei dilettanti" da alcuni storici della matematica;
- Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matematico tedesco, considerato "il principe dei matematici" all'epoca in cui visse.

Ad entrambi la matematica deve molte scoperte, in particolare nel settore dell'Aritmetica, che anche per merito loro diventò un campo di ricerca importantissimo.