ATTENZIONE!!!
Tutto il materiale proposto può essere scaricato gratuitamente senza alcun impegno da parte di coloro che vogliono usufruirne.

Matematica (Gratuita) per le Scuole Superiori

INTEGRAZIONE 2
(UNITÀ 1-27)

GUIDA ALLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI … COMPLICATI

1. Introduzione.

Alcuni dei problemi proposti nelle prime 27 unità in cui si articola il prodotto on-line

Matematica (gratuita) per le scuole superiori – Biennio

richiedono un impegno severo da parte degli studenti ed una concentrazione particolarmente alta. Non escludiamo che qualcuno di quei problemi potrebbe mettere in seria difficoltà più di uno studente.
Si tratta di problemi di varia natura: a volte sono problemi non standard, altre volte problemi ordinari ma la cui risoluzione è abbastanza complessa, altre volte infine problemi familiari ma con insidie particolari che potrebbero costituire un ostacolo insormontabile. Anche qualche esercizio può presentare più di un'insidia.
L'aiuto del professore può essere certamente utile per la risoluzione di tali questioni. Ma probabilmente il tempo a disposizione del docente non permette di soffermarsi a lungo su di esse per un'adeguata riflessione, col rischio che molte cose potrebbero rimanere oscure.
Proprio al fine di evitare questo inconveniente ci permettiamo qui un'analisi sufficientemente approfondita di quei problemi ed esercizi, fornendo di alcuni una risoluzione completa, di altri una traccia di risoluzione, di altri ancora qualche semplice suggerimento. Questi problemi (o esercizi) sono contrassegnati nel testo base col simbolo ®. Il lettore ne farà l'uso che ritiene più appropriato alle sue esigenze. Altri problemi, particolarmente interessanti, sono addirittura proposti e risolti nello stesso testo base, all'interno della sezione "verifiche".

Concludono l'analisi dei problemi … complicati altri problemi di varia natura … anche più complicati. Il lettore dovrebbe cimentarsi a trovarne da solo un procedimento risolutivo prima di procedere alla lettura della risoluzione. Avvertiamo che alcuni di questi problemi riguardano argomenti di studio del 1° biennio ma trattati in unità successive alla 27, come "Poligoni inscrivibili e circoscrivibili" (U29), "Omotetie e similitudini nel piano" (U30), "Applicazioni della similitudine" (U31).

Ribadiamo che eventuali comunicazioni possono essere inviate al seguente indirizzo:
mategratis16@gmail.com

2. Dall'unità 1 – Numeri naturali e numeri interi

- ESERCIZIO n. 21 (Laboratorio di matematica).

L'ultima cifra a destra dello sviluppo della potenza 47^{47}, scritto nel consueto sistema decimale di numerazione, è:

[A] 1; [B] 3; [C] 7; [D] 9.

Una sola alternativa è corretta: individuarla senza l'uso di strumenti di calcolo automatico e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

RISOLUZIONE. Basta osservare che risulta:

$$47^{47} = 47^{44+3} = (47^4)^{11} \cdot 47^3.$$

Ora, 47^4 ha come sviluppo un numero, la cui ultima cifra è la stessa dell'ultima cifra dello sviluppo della potenza 7^4 e perciò 1. Cifra che rimane invariata per successivi elevamenti a potenza. Per cui la cifra cercata è l'ultima cifra dello sviluppo della potenza 47^3, che è uguale all'ultima cifra dello sviluppo della potenza 7^3, vale a dire 3. L'alternativa corretta è, pertanto, la [B].

- ESERCIZIO n. 22 (Laboratorio di matematica).

Alle ore 9 sono inseriti in una provetta dei germi che hanno la capacità di riprodursi rapidamente. Il loro numero, infatti, raddoppia ogni 5 minuti e, alle ore 10 la provetta è completamente riempita di germi. A che ora la provetta è piena di germi esattamente a metà?

RISOLUZIONE. La risoluzione può essere molto complicata o molto banale: dipende da quale "parte" viene affrontata. Se tento di fare i conti partendo dall'inizio e raddoppiando via via, rischio di non venirne fuori. Se, al contrario, parto dalla fine, capisco subito che 5 minuti prima di essere riempita completamente, la provetta era riempita per metà. Per cui, l'ora richiesta è: ore 9 e 55 minuti.

- ESERCIZIO n. 28.

Si sa che 2^{10}=1024. Quale fra le seguenti potenze di 10 è quella che più si avvicina a 2^{70}?

[A] 10^{24}. [B] 10^{21}. [C] 10^{14}. [D] 10^{7}.

RISOLUZIONE. Il procedimento da seguire è piuttosto semplice. Si ha: $2^{10}\approx 10^3$. Per cui:

$$2^{70} = (2^{10})^7 \approx (10^3)^7 = 10^{21}.$$

[B] è l'alternativa corretta.

Complementi.
Proponiamo la dimostrazione di uno dei più importanti e fondamentali teoremi dell'aritmetica.
TEOREMA. ***La scomposizione di ogni numero naturale in fattori primi è unica***.
DIMOSTRAZIONE. Ci riferiamo ad un numero particolare ma la dimostrazione vale in generale.
Sia allora il numero 140. Una sua fattorizzazione è $2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Vogliamo dimostrare che non ne esiste un'altra.
Ammettiamo allora che esistano dei numeri primi (non necessariamente distinti) a, b, c, d tali che risulti:

$$140 = a \cdot b \cdot c \cdot d\,,\ \text{ vale a dire: } \ 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = a \cdot b \cdot c \cdot d.$$

Si constata che 2 è un divisore del primo membro, per cui deve esserlo anche del secondo e siccome tutti i fattori del secondo membro sono numeri primi, almeno uno di essi deve essere uguale a 2. Supponiamo che sia $a=2$.
Continuando con lo stesso ragionamento si spiega che deve essere, per esempio: $b=2$, $c=5$, $d=7$.
Non esiste perciò una scomposizione di 140 diversa da $2^2 \cdot 5 \cdot 7$. E così per ogni numero naturale.

3. Dall'unità 2 – Numeri razionali

- ESERCIZIO n. 5.

Dato un numero decimale A, si ricorda che E(A) indica la parte intera di A.
Dimostra che le seguenti uguaglianze:

$$E(A+B) = E(A) + E(B)\ , \quad E(AB) = E(A) \cdot E(B)$$

non valgono sempre (cioè non sono vere quali che siano i numeri decimali A, B).

RISOLUZIONE. Si tratta di trovare un esempio in cui le uguaglianze non valgono. In effetti, se A=2,5 e B=3,6 non vale né la prima né la seconda uguaglianza.

- ESERCIZIO n. 9.

Ricordando che con la scrittura E(x) si indica la parte intera del numero x, i numeri interi positivi n, minori di 1.000, tali che:

$$E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n}{2} + \frac{n}{3}$$

sono esattamente:

[A] 58 ; [B] 115 ; [C] 166 ; [D] 193.

Una sola alternativa è corretta: individuala e fornisci un'esauriente spiegazione della scelta operata.

RISOLUZIONE. Bisogna constatare che l'uguaglianza è possibile solo se $E\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{n}{2}$ ed $E\left(\frac{n}{3}\right)=\frac{n}{3}$; il che accade solo se n è divisibile sia per 2 sia per 3, ossia se n è divisibile per 6. Si tratta allora di calcolare quanti numeri minori di 1.000 sono divisibili per 6, vale a dire quanto vale 1.000 div 6, e il valore è 166. L'alternativa corretta è [C].

4. Dall'unità 4 – Approssimazioni

- ESERCIZIO n. 4 in paragrafo n. 4.1.1.

Stima, nel modo più rapido possibile e senza usare strumenti di calcolo automatico, quali delle seguenti espressioni hanno valori appartenenti all'intervallo [2, 3] e quali no.

$$\text{[A]}\ \ \frac{327}{145}+\frac{408}{153}\,,\quad \text{[B]}\ \ \frac{2377}{1400}+\frac{2945}{3291}\,,\quad \text{[C]}\ \ \frac{2987}{2999}+\frac{1874}{2001}\,,\quad \text{[D]}\ \ \frac{150}{277}+\frac{277}{150}\,.$$

RISOLUZIONE. Si tratta di stimare un intervallo, il meno ampio possibile, entro cui collocare il valore di ciascuna frazione e poi procedere con alcune regole di calcolo.
Nel caso [A] risulta che la prima frazione è compresa fra 2 e 3 (infatti il numeratore è maggiore del doppio del

denominatore, che è 290, e minore del triplo, che è 435); anche la seconda frazione è compresa fra 2 e 3. Dunque si ha: $2<\frac{327}{145}<3$ e $2<\frac{408}{153}<3$. Pertanto, sommando membro a membro: $4<\frac{327}{145}+\frac{408}{153}<6$. L'espressione ha un valore che non è compreso nell'intervallo [2,3].
Nel caso [B], la prima frazione è compresa fra 1,5 e 2 (infatti il numeratore è maggiore di 1400+700, che è una volta e mezza il denominatore, ed è minore del doppio del denominatore, che è 2800); mentre la seconda frazione è compresa fra 0,5 ed 1. Dunque: $1{,}5<\frac{2377}{1400}<2$ e $0{,}5<\frac{2945}{3291}<1$. Pertanto: $2<\frac{2377}{1400}+\frac{2945}{3291}<3$. L'espressione ha un valore che è compreso nell'intervallo [2,3].
Ragionando allo stesso modo sulle altre due espressioni, si stabilisce rapidamente che l'espressione [C] ha un valore che non è compreso in quell'intervallo, mentre il valore della [D] lo è.

5. Dall'unità 5 – Polinomi e operazioni con essi

- ESERCIZIO n. 13 (Laboratorio di matematica).

Scrivi la somma dei primi n numeri naturali a partire da 1. Sei in grado di trovare una formula per calcolarla rapidamente?
RISOLUZIONE. L'occasione è propizia per fornire qualche riferimento storico.
Il filosofo e matematico ellenico **Nicomaco** di Gerasa (I sec. d.C.), nella sua opera *Introduzione all'aritmetica*, riferisce che i Pitagorici (circa VI-V sec. a.C.) trattarono dei cosiddetti "numeri figurati". Di questi numeri si occupò in maniera approfondita il matematico alessandrino **Diofanto** (II-III sec. d.C.) in un suo testo che ci è pervenuto dal titolo *Numeri poligonali*. Fra i "numeri poligonali" rientrano, in particolare, i ***numeri triangolari*** (Fig. 1).
Ebbene, proprio dall'esame dei numeri triangolari, deriva la formula:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Infatti, osservando un qualunque numero triangolare, s'intuisce facilmente che la somma dei suoi punti è uguale a quella dei numeri da 1 al numero n dei punti della base. D'altronde questa somma è uguale alla metà dei punti che costituiscono la figura che si ottiene mettendo assieme opportunamente due numeri triangolari uguali (Fig. 2). Poiché la totalità di questi punti è n(n+1), la somma dei primi n numeri a partire da 1 è appunto $\frac{n(n+1)}{2}$.

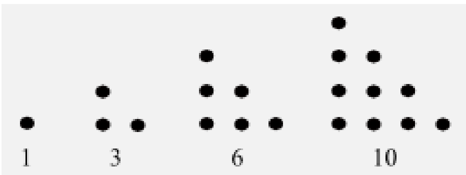

FIG. 1

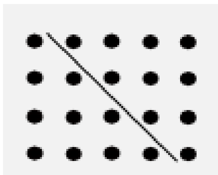
FIG. 2

S'intende che <u>questa non è una vera dimostrazione</u>. Per ottenerne una vera basta generalizzare con le dovute cautele il procedimento che, si racconta, **Carl F. Gauss** (grande matematico tedesco, 1777-1855) avrebbe scoperto addirittura all'età di 10 anni, ancorché limitato alla somma dei numeri da 1 a 100.
Si dispongono su una riga, in ordine crescente, i numeri da 1 ad n e su una riga sottostante, ma in ordine decrescente, gli stessi numeri da n a 1:

1	2	3	4	...	n−2	n−1	n
n	n−1	n−2	n−3	...	3	2	1

La somma di due numeri in colonna è sempre n+1, quindi la somma complessiva delle n coppie di numeri disposti sulle due righe è n(n+1). La somma dei numeri di una sola riga, vale a dire la somma dei numeri da 1 a n è perciò $\frac{n(n+1)}{2}$.

- ESERCIZIO n. 18.

Utilizzando le formule dei cosiddetti "prodotti notevoli", calcolare rapidamente e senza l'uso di strumenti di calcolo automatico i valori delle seguenti espressioni numeriche:

a) $59.674 \times 59676 - 59675^2$;   b) $4.786^2 - 4.784 \times 4.788$;
c) $26^2 - 24^2$;   d) $102^2 - 98^2$.

RISOLUZIONE. Bisogna constatare che la prima espressione è del tipo: $(a-1)(a+1)-a^2$ e perciò (basta sviluppare) vale -1; la seconda è del tipo: $a^2-(a-2)(a+2)$ e perciò è uguale a 4.
Riguardo alla terza e quarta espressione basta notare che sono del tipo $(a+b)^2-(a-b)^2$, espressione il cui valore è 4ab. Ora, nella prima di queste due espressioni a=25 e b=1, per cui 4ab=100; nella seconda a=100 e b=2, per cui 4ab=800.

6. Dall'unità 6 – Divisione dei polinomi. Fattorizzazione

- ESERCIZIO n. 7,1).

Dimostrare le seguenti proposizioni sui ***numeri naturali*** nell'ordine in cui sono proposte:
a) Il quadrato di un numero pari o dispari e rispettivamente un numero pari o dispari.
b) Se il quadrato di un numero è pari o dispari, anche il numero è rispettivamente pari o dispari.
c) Non esiste alcun numero dispari il cui doppio sia il quadrato di un numero.
d) Non esistono due numeri dispari la somma dei cui quadrati sia il quadrato di un numero.

RISOLUZIONE. La proposizione a) è piuttosto banale. Per la b) si suggerisce una dimostrazione per assurdo, che comunque lasciamo a chi legge. Noi andiamo ad occuparci delle proposizioni c) e d).
c) Consideriamo un qualunque numero dispari, $a=2n+1$. Il suo doppio è $2a=2(2n+1)$. Se questo fosse il quadrato di un numero, esisterebbe un numero naturale k tale che $k^2=2(2n+1)$. Ne consegue che k^2 è un numero pari. Per la precedente proposizione b) anche k deve essere pari. Ossia esiste un naturale h tale che $k=2h$ e, di conseguenza: $k^2=4h^2$. Dunque k^2 è divisibile per 4. Sennonché $2(2n+1)$ non è divisibile per 4, quindi l'uguaglianza $k^2=2(2n+1)$ non può sussistere. In conclusione, la proposizione è dimostrata.
d) Siano $a=2m+1$ e $b=2n+1$ due qualsiasi numeri dispari. Si ha:

$$a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=2[2k+1]$$

avendo posto $k=m^2+n^2+m+n$, che certamente è un numero naturale. Quindi a^2+b^2 è il doppio di un numero naturale dispari e, per la precedente proposizione c), non può essere il quadrato di un numero naturale. Anche l'ultima proposizione è così dimostrata.

- ESERCIZIO n. 7,18).

Si può controllare facilmente che si ha:

$$(2\times3\times4\times5)+1=121=11^2,\quad (6\times7\times8\times9)+1=3.025=55^2,\quad (26\times27\times28\times29)+1=570.025=755^2.$$

Dimostrare che, in generale, il prodotto di 4 qualsiasi numeri naturali consecutivi, aumentato di 1, è il quadrato di un numero naturale.

RISOLUZIONE. <u>Il coefficiente di difficoltà di questo esercizio è elevato</u>. Indicato con a un generico numero naturale, i suoi successivi sono evidentemente a+1, a+2, a+3. Si tratta di dimostrare che il numero $N=a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ è un quadrato perfetto. Osserviamo allora che si ha:

$$N = a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 = a(a+3)(a+1)(a+2) + 1 =$$
$$= (a^2+3a)(a^2+3a+2) + 1 = (a^2+3a)^2 + 2(a^2+3a) + 1 = (a^2+3a+1)^2.$$

- ESERCIZIO n. 7,19).

Considerata l'espressione $a_n=2n+1$, calcolare la somma dei 1.000 termini:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{999}+a_{1.000}\ .$$

RISOLUZIONE. Possiamo seguire due procedimenti: uno che diremo naturale, un secondo che diremo artificioso.
Il primo procedimento richiede la conoscenza della formula che fornisce la somma dei primi n numeri naturali a partire da 1. Si ha infatti:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{999}+a_{1000} = (2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+(2\cdot3+1)+\ldots+(2\cdot999+1)+(2\cdot1.000+1) =$$
$$= 2\cdot(1+2+3+\ldots+999+1.000)+\left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{1000\text{ addendi}}\right) = 2\cdot\frac{1.000\cdot1.001}{2}+1.000 = 1.000\cdot1.002=1.002.000\ .$$

Il secondo procedimento è basato sulla seguente formula: $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$.

Ragion per cui:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{999}+a_{1000}=\left(2^2-1^2\right)+\left(3^2-2^2\right)+\left(4^2-3^2\right)+\ldots+\left(1.000^2-999^2\right)+\left(1.001^2-1.000^2\right)=$$
$$=1.001^2-1^2=(1.001+1)(1.001-1)=1.002\cdot 1.000=1.002.000\ .$$

7. Dall'unità 7 – Geometria: dall'intuizione alla dimostrazione

- QUESTIONE n. 1, proposta come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 7.9.

Assegnato un quadrilatero Q qualsiasi, considera il quadrilatero Q' avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero dato.
Il quadrilatero Q' è un quadrilatero particolare?
Il quadrilatero Q' può essere un rettangolo? Quale condizione deve essere soddisfatta perché questo accada?
Il quadrilatero Q' può essere un rombo? Quale condizione deve essere soddisfatta perché questo succeda?
Il quadrilatero Q' può essere un quadrato? Sotto quali condizioni?

RISOLUZIONE. Sia ABCD un qualsiasi quadrilatero e siano nell'ordine M, N, R, S i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA (Fig. 3). I due segmenti MS ed NR sono paralleli e congruenti giacché entrambi sono paralleli alla diagonale BD ed entrambi sono congruenti alla metà di detta diagonale. Dunque il quadrilatero MNRS – avente due lati opposti paralleli e congruenti – è un parallelogramma.
Se poi le diagonali del quadrilatero ABCD fossero perpendicolari, i lati MS ed RS del parallelogramma MNRS sarebbero paralleli a due rette perpendicolari fra loro e quindi sarebbero essi stessi fra loro perpendicolari. Per cui tale parallelogramma sarebbe in effetti un rettangolo.
Se invece tali diagonali fossero congruenti, i lati MS ed RS sarebbero congruenti a segmenti congruenti e quindi sarebbero congruenti fra loro. Pertanto il parallelogramma MNRS sarebbe un rombo.
Ovviamente tale parallelogramma sarebbe un quadrato se le diagonali del quadrilatero ABCD fossero contemporaneamente perpendicolari e congruenti.

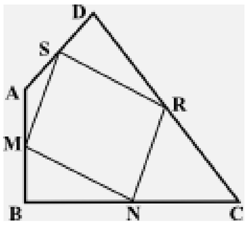

FIG. 3

UNA BREVE ANNOTAZIONE. L'esercizio può essere parzialmente invertito. In questo modo, per esempio: "Se il quadrilatero avente per vertici i punti medi di un quadrilatero dato è un rettangolo, quale caratteristica ha il quadrilatero dato?" E simili.

- QUESTIONE n. 2, proposta come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 7.9.

Ti proponi di ricoprire il pavimento di una stanza utilizzando mattonelle uguali, aventi la forma di poligoni regolari dello stesso numero di lati. Lo puoi fare con mattonelle della forma di triangoli equilateri.
Lo puoi fare pure con mattonelle della forma di quadrati?
Lo puoi fare con mattonelle aventi la forma di un qualsiasi poligono regolare?

RISOLUZIONE. Affinché sia possibile la copertura bisogna che gli angoli dei poligoni i cui vertici concorrono in uno stesso punto abbiano come somma 360°. Come dire che ognuno di essi (hanno uguale ampiezza) deve essere un sottomultiplo di 360°. Sappiamo che ogni angolo interno di un poligono regolare ha ampiezza $\alpha=\frac{(n-2)\ 180°}{n}$, per cui questo angolo deve essere un sottomultiplo di 360°. Ora:

- per n=3 si ha α=60° che è 1/6di 360°: ricopertura possibile;
- per n=4 si ha α=90° che è 1/4 di 360°: ricopertura possibile;
- per n=5 si ha α=108° che non è sottomultiplo di 360°: ricopertura impossibile;
- per n=6 si ha α=120° che è 1/3 di 360°: ricopertura possibile;

- per $n \geq 7$ si ha $\alpha \geq 120°$, per cui già la somma di 3 angoli supera 360°: ogni ricopertura è impossibile con soli poligoni regolari di almeno 7 lati.

In conclusione, i soli poligoni regolari che rispondono allo scopo sono i triangoli equilateri (Fig. 4), i quadrati (Fig. 5) e gli esagoni regolari (Fig. 6).

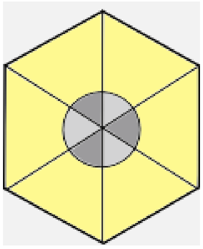
FIG. 4

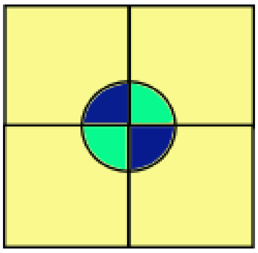
FIG. 5

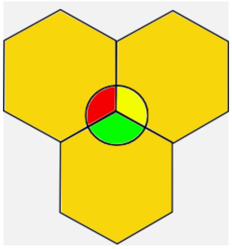
FIG. 6

Si può constatare anche, per esempio, che:

a) è vero che con i pentagoni regolari non è possibile ricoprire un pavimento, ma la cosa è possibile utilizzando mattonelle di forma pentagonale e mattonelle di qualche altra forma (per esempio opportuni rombi di lati uguali a quelli del pentagono e di due forme diverse – Fig. 7);
b) è vero che con gli ottagoni regolari non è possibile ricoprire un pavimento, ma la cosa è possibile utilizzando mattonelle di forma ottagonale e mattonelle di altra forma (per esempio quadrati di lati uguali a quelli dell'ottagono – Fig. 8);
c) è possibile utilizzare assieme esagoni regolari e triangoli equilateri per una pavimentazione (Fig. 9)

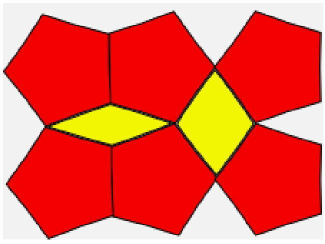
FIG. 7

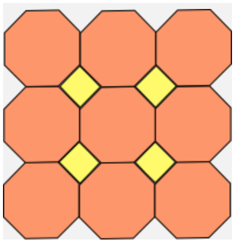
FIG. 8

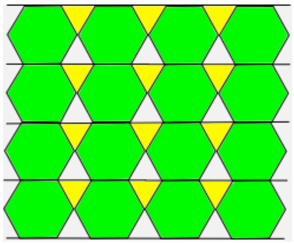
FIG. 9

8. Dall'unità 8 – Aree dei poligoni. Teoremi di Pitagora e di Euclide

- QUESTIONE proposta come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 8.3.

Devi calcolare l'area di ciascuna delle superfici raffigurate sotto in scala naturale. Vale a dire che 1 cm sulla carta vale 1 cm nella realtà. Non disponi di formule apposite ma ti basta conoscere un valore approssimato delle aree.
Sei in grado di fornire una valutazione anche grossolana di qualche area?
Come pensi di procedere per avere la migliore approssimazione possibile?

RISOLUZIONE. Affrontiamo la risoluzione con considerazioni generali sulla faccenda.
Di metodi di valutazione approssimata di un'area ce ne sono diversi.
Un primo metodo potrebbe essere quello di scomporre la superficie, quand'è possibile, in superfici più comode, come per esempio rettangoli: si può ricorrere a questo metodo per la valutazione dell'area della prima delle tre superfici proposte (la lettera "F" coricata).
Un secondo metodo è il cosiddetto "metodo della quadrettatura": consiste nel ricoprire di quadratini di area nota una determinata superficie e di contare il numero di quelli che sono completamente contenuti in essa e il numero di quelli che la contengono (Fig. 10). A questo metodo si può ricorrere per valutare l'area della seconda delle figure proposte.
Un altro metodo è detto "metodo delle rette di compensazione": si tratta di tracciare uno o più convenienti rettangoli in modo che parte della superficie da valutare sia contenuta in essi e parte cada all'esterno con l'accorgimento che la parte interna "scoperta" e quella esterna "coperta" siano pressoché equivalenti (Fig. 11). La somma delle aree dei rettangoli costruiti è all'incirca quella della superficie da valutare. A questo metodo si può ricorrere per valutare la superficie della terza delle figure assegnate.

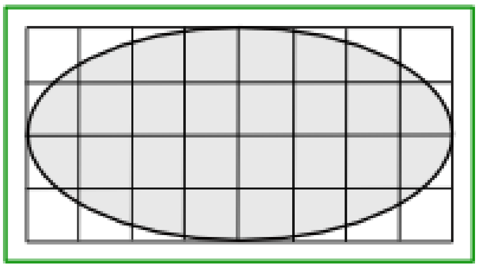

FIG. 10

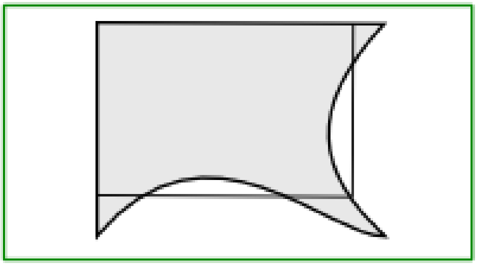

FIG. 11

- ESERCIZIO n. 2.19.

Di un trapezio si conoscono le misure – 20 cm, 12 cm, 6 cm – rispettivamente della base maggiore, della base minore e dell'altezza.
I dati forniti sono sufficienti per determinare l'area e il perimetro del trapezio?
Calcolare le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che congiungono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.

RISOLUZIONE. La prima parte è banale: i dati forniti sono sufficienti per il calcolo dell'area, non lo sono per quello del perimetro.
È la seconda parte, relativa al calcolo delle aree dei 4 triangoli, che richiede attenzione. Intanto è indifferente prendere l'una o l'altra diagonale: le aree dei triangoli non cambiano. In realtà l'altezza del trapezio passante per il punto medio della diagonale considerata è divisa in due parti uguali da tale punto, per cui i due triangoli aventi come basi le basi del trapezio hanno aree 30 cm^2 e 18 cm^2. D'altra parte gli altri due triangoli sono equivalenti a questi due e perciò le loro aree sono le stesse, cioè 30 cm^2 e 18 cm^2.

- ESERCIZIO n. 2.32.

Calcolare l'area di un ottagono regolare di lato lungo L.

RISOLUZIONE. Conviene ricorrere ad un completamento della figura. Basta, in effetti, considerare le rette di quattro lati che non hanno estremi in comune: esse individuano un quadrato. Se da questo quadrato si sottraggono i quattro triangoli (rettangoli e congruenti) esterni all'ottagono, che con la costruzione precedente si sono venuti a formare, si ottiene esattamente l'area dell'ottagono.

- ESERCIZIO n. 2.34.

Nel trapezio ABCD, la base maggiore AB è lunga 5/2 della base minore DC. Sapendo che l'area del triangolo ABC è 35 m^2, calcolare l'area del trapezio.

RISOLUZIONE. Indicata con h l'altezza del trapezio, che è anche altezza dei due triangoli, si ha:

$$\frac{A(ADC)}{A(ABC)}=\frac{\frac{1}{2}\overline{DC}\cdot h}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h}=\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}}=\frac{2}{5}\ .$$

Dunque:

$$A(ADC)=\frac{2}{5}A(ABC)=\frac{2}{5}\cdot 35=14\ (m^2)\ .$$

Di conseguenza, l'area del trapezio è: $A(ABCD)=35+14=49\ (m^2)$.

- ESERCIZIO n. 2.35.

Considerato un quadrato ABCD, si supponga che due formiche si muovano, partendo contemporaneamente da A, dove sono esattamente sovrapposte l'una all'altra: la prima percorre di continuo il perimetro del quadrato sempre nello stesso verso di rotazione, la seconda percorre la diagonale AC in moti continui di andata e ritorno. Dimostra che, se le due formiche si muovono con la stessa velocità, non s'incontrano più dopo la partenza, nel senso che non saranno più esattamente sovrapposte.

RISOLUZIONE. Ragioniamo per assurdo. Se le due formiche s'incontrassero dopo la partenza, potrebbero farlo solo in A o in C. In entrambi in casi dovrebbero aver percorso lo stesso cammino.
Questo, nel caso di incontro in A, sarebbe $n\cdot 4L$ per la formica che si muove lungo il perimetro del quadrato ed

$m \cdot 2L\sqrt{2}$ per quella che si muove lungo la diagonale, essendo m ed n due interi. Dovrebbero, dunque, esistere due interi m, n tali che risulti:

$$n \cdot 4L = m \cdot 2L\sqrt{2} \text{ ossia: } \frac{n}{m} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Il che è impossibile.

Analogamente, ragionando nel caso di incontro in C, si trova che dovrebbero esistere due interi m ed n tali che risulti:

$$\frac{2n+1}{2m+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Ed anche questo è impossibile.

Dunque le due formiche non s'incontreranno più dopo la partenza.

Naturalmente deve essere soddisfatta la condizione di una "esatta sovrapposizione" poiché un contatto parziale è possibile. In effetti questo si verifica in A per i valori interi di n, m per i quali si ha:

$$\frac{n}{m} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{per esempio: } n=5, m=7)$$

e si verifica in C per i valori interi di n, m per i quali risulta:

$$\frac{2n+1}{2m+1} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{per esempio: } n=4, m=6).$$

- ESERCIZIO n. 2.44.

I tre fratelli Aldo, Giovanni e Giacomo hanno ricevuto in eredità dai loro genitori un appezzamento di terreno avente la forma di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono lunghi 72 m e 96 m. Vorrebbero suddividere l'appezzamento in tre parti ugualmente estese ma non sanno come fare. Sei in grado di suggerire loro qualche soluzione?

RISOLUZIONE. In realtà di soluzioni ce n'è più d'una, ma quella più immediata (anche se forse non è la più gradevole sul piano estetico) consiste nel suddividere l'ipotenusa BC del triangolo ABC in tre parti uguali: BD, DE, EC. I triangoli ABD, ADE, AEC hanno evidentemente la stessa area.

- ESERCIZIO n. 2.55.

I numeri naturali a, b, c sono le misure, rispetto alla medesima unità di misura, di tre segmenti. Sapendo che si tratta di numeri primi tali che $a>c>b$, determinarli in modo che l'area del rettangolo di dimensioni $a+b$ e c sia 80.

RISOLUZIONE. Deve risultare: $(a+b)c=80$. Ora, bisogna tener presente che $80=2^4 \cdot 5$, per cui, ricordando che a, b, c sono numeri primi, si possono ipotizzare solamente le due seguenti situazioni:

$$a+b=16,\ c=5, \qquad \text{oppure:} \qquad a+b=40,\ c=2 .$$

In realtà la seconda di esse è da scartare poiché, affinché risulti $c>b$, come imposto dalla traccia, dovrebbe essere $b=1$, che però non è un numero primo, come invece dovrebbe essere. Rimane soltanto la prima situazione, dalla quale si desume l'unica condizione compatibile con le condizioni imposte dal problema: $a=13, b=3, c=5$.

9. Dall'unità 9 – Prime nozioni di logica

- QUESTIONE N. 1 proposta come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 9.8.

Un insieme di persone è così assortito: 15 sono tifosi di calcio, 12 di basket e 5 di entrambi gli sport. Quante persone costituiscono l'insieme?

RISOLUZIONE. Per evitare di prendere qualche abbaglio dando una risposta affrettata (pensando, per esempio, che le persone siano 15+12+5, vale a dire 32), è utile illustrare la situazione con un diagramma di Eulero-Venn, come nella figura (Fig. 12), dove C indica l'insieme dei tifosi di calcio, in numero di 15, B quello dei tifosi di basket, in numero di 12, ed $E=B\cap C$ quello di entrambi gli sport, in numero di 5.

Poiché, allora, E comprende 5 persone, quelle che tifano solo calcio sono 15–5=10 e quelle che tifano solo basket sono 12–5=7.

Le persone che formano l'insieme in questione sono pertanto complessivamente 5+10+7, cioè 22.

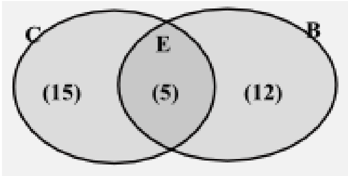

FIG. 12

In generale, si può affermare che, indicando con $N(X)$ il numero degli elementi di un generico insieme X, risulta:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B);$$

nel caso particolare in esame, per l'appunto:

$$N(C \cup B) = N(C) + N(B) - N(C \cap B) = 15 + 12 - 5 = 22 .$$

Questioni di tal genere sono importanti, specialmente all'interno del calcolo delle probabilità.

- ESERCIZIO n. 23.

In un'urna ci sono 10 palline, di cui 6 bianche e 4 nere. Determinare il minimo numero di palline che bisogna estrarre per avere la certezza che ne esistano almeno 2:

a) bianche; b) nere; c) dello stesso colore; d) di colore diverso.

RISOLUZIONE. Il minimo numero di palline che bisogna estrarre dall'urna per avere la certezza che ne esistano:

a) almeno 2 bianche è 6 (le 4 nere e altre 2);
b) almeno 2 nere è 8 (le 6 bianche e altre 2);
c) almeno 2 dello stesso colore è 3 (le prime due possono essere una bianca e l'altra nera, ma la terza …);
d) almeno 2 di colore diverso è 7 (le prime 6 potrebbero essere tutte bianche).

- ESERCIZIO n. 24.

L'onorevole Pinco Pallino, nel corso di un suo intervento in Parlamento, in un momento di foga oratoria fece questa affermazione imprudente: «Tutti coloro che si trovano in questa sala dicono solo bugie». Secondo te, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false?

a) Tutti coloro che si trovano nella sala dicono solo bugie.
b) Tutti coloro che si trovano nella sala dicono solo la verità.
c) Qualcuno di coloro che si trovano nella sala dice solo bugie e qualcuno dice solo la verità.
d) Di nessuna delle tre affermazioni precedenti si può dire con certezza se sia vera o falsa.

RISOLUZIONE. L'alternativa a) è falsa, giacché se "tutti coloro che si trovano nella sala dicono solo bugie", allora anche l'onorevole dice solo bugie e quindi non è vero che … .

Anche l'alternativa b) è falsa, giacché se "tutti coloro che si trovano nella sala dicono solo la verità", allora anche l'onorevole dice solo la verità e quindi è vero che … .

Poiché l'alternativa a) e l'alternativa b) sono false, bisogna concludere che "nella sala c'è qualcuno che non dice solo bugie e c'è qualcuno che non dice solo la verità". Ma questo non implica che necessariamente "ci siano alcuni che dicono solo bugie e ci siano alcuni che dicono solo la verità". Potrebbe essere così, ma potrebbe essere pure che tutti i presenti nella sala dicano a volte bugie e a volte verità. Per quanto riguarda l'onorevole è evidentemente una delle volte in cui dice una bugia. Dell'alternativa c), dunque, non si può dire né che è vera né che è falsa. Ovviamente d) è un'alternativa falsa, dal momento che della a) e della b) si può dire con certezza che sono false.

- ESERCIZIO n. 27.

In un concorso per il reclutamento dei docenti, tra i quesiti segnalati dal Ministero vi era anche il seguente:

Se tutti i boiardi sono polemici e nessun campanaro è polemico, si può logicamente concludere che:

a) Nessun campanaro è un boiardo *b) Alcuni boiardi sono polemici*
c) Alcuni boiardi sono campanari *d) Tutti i campanari sono boiardi*

Il Ministero segnalava l'alternativa a) come unica alternativa corretta.

Spiega in maniera esauriente perché la segnalazione del ministero è errata.

RISOLUZIONE. La situazione può essere schematizzata come in figura (Fig. 13), dove P, B, C indicano nell'ordine l'insieme dei polemici, quello dei boiardi e quello dei campanari.

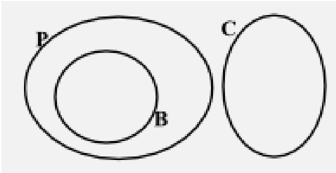

FIG. 13

Si evince che: “nessun campanaro è un boiardo”, ma anche che “alcuni boiardi (addirittura tutti) sono polemici”. Quindi le alternative corrette sono due e non solo la prima.

- ESERCIZIO n. 28.

Andrea, Cristiano e Leo sono i tre calciatori più pagati dalla squadra del Borgorosso F. C., ma non nella stessa misura. Si hanno le seguenti informazioni:
1) Quello, tra loro, che è pagato di meno è Andrea o Leo.
2) Però, o Cristiano è quello pagato di meno o Leo è quello pagato di più.
Qual è la graduatoria?

RISOLUZIONE. Non può essere Cristiano il calciatore meno pagato poiché in tal caso sarebbe falsa l’informazione 1). Quindi, in virtù della 2), deve essere vero che Leo è il calciatore più pagato. Se ne desume, ritornando alla 1), che Andrea è quello pagato di meno. In definitiva la graduatoria in senso crescente è la seguente: Andrea, Cristiano, Leo.

- ESERCIZIO n. 29.

In un cassetto sono disposti alla rinfusa 20 calzini, dei quali 10 sono rossi, 6 sono neri e 4 sono blu. Determinare il minimo numero di calzini che bisogna estrarre dal cassetto per avere la certezza che due di essi: a) siano dello stesso colore; b) siano di colore nero; c) non siano di colore rosso.

RISOLUZIONE.
a) Dopo aver estratto 3 calzini può accadere che siano di colori diversi fra loro, ma il 4° calzino è certamente di uno dei colori già estratti. 4 è il numero richiesto.
b) Può accadere che i primi 14 calzini estratti siano i 10 rossi e i 4 blu, ma i due successivi sono certamente di colore nero. 16 è il numero cercato.
c) Il minimo numero di calzini da estrarre per avere la certezza che ve ne siano 2 che non risultino di colore rosso è 17. Può accadere infatti che i primi 16 siano i 10 calzini rossi e i 6 calzini neri.

- ESERCIZIO n. 30.

L’intersezione di tre insiemi, ciascuno formato da 5 elementi, è costituita da un solo elemento. Si indichi con MIN il numero minimo di elementi che può contenere l’insieme unione dei tre insiemi e con MAX il massimo numero. Delle seguenti alternative una sola è corretta: individuarla e fornire un’esauriente spiegazione della scelta operata.
[A] $\text{MIN}=7, \text{MAX}=10$. [B] $\text{MIN}=8, \text{MAX}=10$.
[C] $\text{MIN}=7, \text{MAX}=13$. [D] $\text{MIN}=8, \text{MAX}=13$.

RISOLUZIONE. L’alternativa corretta è [C]. Due opportuni diagrammi di Eulero-Venn lo provano (chi legge è invitato a disegnarli). Riguardo al minimo i tre insiemi, presi a due a due, hanno in comune 3 elementi, di cui uno soltanto è comune a tutti e tre gli insiemi. Riguardo al massimo i tre insiemi, presi sempre due a due, non hanno elementi comuni oltre all’unico che è comune a tutti e tre.

- ESERCIZIO n. 31.

Si prendano in esame le seguenti uguaglianze:
1) $\{x \mid x \text{ è } la\ cifra\ delle\ unità\ del\ numero\ a^{100}, a \in \mathbb{N}\} = \{0,1,5,6\}$
2) $\{x \mid x \text{ è } la\ cifra\ delle\ unità\ del\ numero\ a^{102}, a \in \mathbb{N}\} = \{0,1,4,5,6,9\}$.
Delle seguenti alternative una sola è corretta: individuarla e fornire un’esauriente spiegazione della scelta operata.
[A] La 1) è vera e la 2) è falsa. [B] La 1) è falsa e la 2) è vera.
[C] La 1) e la 2) sono entrambe vere. [D] La 1) e la 2) sono entrambe false.

RISOLUZIONE. È sufficiente ragionare sulle unità del numero a. Nella tabella sottostante sono riportate le unità sia di a sia di a^{100} e di a^{102}. Da essa si evince che l’alternativa corretta è [C].

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^{100}	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
a^{102}	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

10. Dall'unità 10 – Prodotto cartesiano. Relazioni

- ESERCIZIO n. 1, lettera i, in paragrafo n. 10.3.4

Stabilisci di quali delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva godono le seguenti relazioni nei rispettivi insiemi:

…

i) "xy è un numero primo" in $\mathbb{N}-\{0,1\}$.

…

RISOLUZIONE. Si tratta intanto della relazione vuota giacché il prodotto di due numeri naturali maggiori di 1 mai potrà essere un numero primo.

Essa è certamente non riflessiva, anzi per la precisione è mai riflessiva: infatti, per ogni x dell'insieme, risulta $x\overline{R}x$.

È simmetrica poiché non è vero che esistono x, y tali che contemporaneamente xRy ed $y\overline{R}x$, cioè <u>non è vero che la relazione è non simmetrica</u>; quindi è simmetrica.

Infine è transitiva: si può far vedere, infatti, ragionando come nel caso precedente, <u>che non è vero che è non transitiva</u>.

Facciamo notare che, nella dimostrazione della proprietà simmetrica svolge un ruolo fondamentale, la negazione della proposizione:

$$\forall x,y\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ xRy\rightarrow yRx,$$

che è la proposizione:

$$\exists x,y\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ \tilde{}(\ xRy\rightarrow yRx),$$

vale a dire:

$$\exists x,y\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ xRy \wedge y\overline{R}x.$$

Discorso analogo per la dimostrazione della proprietà transitiva.

Si tratta, come si può constatare, di una situazione abbastanza complessa.

- ESERCIZIO n. 2, in paragrafo 10.3.4

Dimostra che:

Se una relazione R, definita in un dato insieme I, è tale che per ogni $x\in I$ esiste almeno un $y\in I$ tale che xRy e se la R è simmetrica e transitiva allora è pure riflessiva.

Successivamente fornisci degli esempi di relazioni non riflessive, facendo vedere che per esse viene meno almeno una delle tre ipotesi formulate nell'enunciato suddetto; vale a dire una delle seguenti proposizioni:

1ª) $\forall x\in I, \exists y\in I$ tale che xRy; 2ª) R è simmetrica; 3ª) R è transitiva.

RISOLUZIONE. La dimostrazione richiesta è piuttosto semplice. Schematicamente:

$\forall x\in I, \exists y\in I$: xRy;

per la proprietà simmetrica: $xRy \rightarrow yRx$;

per la proprietà transitiva: $xRy \wedge yRx \rightarrow xRx$. [c.v.d.]

In base al teorema, allora, se una relazione non è riflessiva, significa che viene meno almeno una delle tre condizioni poste: 1ª) $\forall x\in I, \exists y\in I$ tale che xRy; 2ª) R è simmetrica; 3ª) R è transitiva.

Per esempio:

- La relazione R tale che xRy se "x ed y sono entrambi dispari", definita in $\mathbb{N}$, è simmetrica e transitiva ma non è riflessiva (aRa non è vera se a è pari); perciò cade la prima delle tre condizioni suddette: di fatto un qualsiasi numero pari non è in relazione con nessun elemento di $\mathbb{N}$.
- La relazione "è minore", definita in $\mathbb{N}$, è non riflessiva ma per essa cade la seconda delle condizioni mentre continuano a valere la prima e la terza.
- La relazione R tale che xRy se "x+y è dispari", definita in $\mathbb{N}$, è evidentemente non riflessiva ma per essa cade la condizione tre ($1R4\wedge 4R3$ ma $1\overline{R}3$), mentre valgono sia la 1 sia la 2.

- ESERCIZIO n. 7

Nella figura (Fig. 14) sono rappresentati i grafi di due relazioni definite nel medesimo insieme {1, 2, 3, 4, 6, 12}. Fornire di entrambe la rappresentazione matriciale ed enunciare per ciascuna relazione una proposizione che la caratterizzi.

Della seconda relazione (Fig. 14b) esiste un grafo più semplice di quello rappresentato qui. Sapresti costruire questo nuovo grafo?

RISOLUZIONE. Lasciamo a chi legge la rappresentazione matriciale delle due relazioni. Noi ci limitiamo ad osservare che una proposizione che caratterizza la prima di esse è "x è divisore proprio di y" ed una proposizione che caratterizza la seconda è "x è minore di y". Si desume subito che un grafo più semplice di quello rappresentato in figura 14b è quello rappresentato nella figura sottostante (Fig. 15).

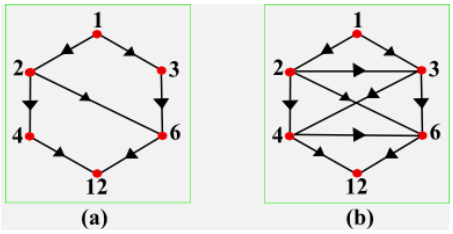

FIG. 14

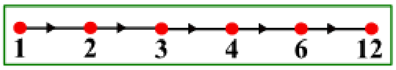

FIG. 15

- ESERCIZIO n. 8

Posto che in un dato insieme J sia definita una relazione R che sia riflessiva, simmetria e transitiva, è lecito affermare che la proprietà riflessiva è una diretta conseguenza delle proprietà simmetrica e transitiva, in base al seguente ragionamento?

«Comunque si scelgano a, b nell'insieme J, in virtù della proprietà simmetrica: aRb→bRa ed in virtù della proprietà transitiva: aRb e bRa → aRa ».

RISOLUZIONE. Il ragionamento funziona se accade che ad ogni elemento dell'insieme J la relazione R associ qualche elemento di J. Solo così, infatti, si può dire che "se aRb allora … " per ogni scelta di a, b in J. Ma se questo non accade il ragionamento cade in difetto. Per esempio, posto che J sia l'insieme ℕ dei numeri naturali e R la relazione "ab è dispari", prendendo a=2, non esiste alcun naturale b tale che 2Rb, per cui il ragionamento cade in difetto. E di fatto questa relazione è simmetrica e transitiva, ma non è riflessiva.

11. Dall'unità 13 – Probabilità: un primo approccio

- ESERCIZI (alcuni) proposti in paragrafo n. 13.2.4

1. Si estrae a caso uno dei 90 numeri della tombola. Calcola la probabilità che esso sia un numero: a) pari; b) primo; c) divisibile per 7; d) divisore di 90.
4. Un'urna contiene delle palline, che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 12 palline sono bianche, 10 nere, 4 palline bianche sono di plastica, 3 palline nere sono di vetro. Viene estratta a caso una pallina dall'urna. Calcola la probabilità che sia: a) bianca; b) nera; c) di plastica; d) di vetro; e) bianca e di plastica; f) bianca e di vetro; g) nera e di plastica; h) nera e di vetro.
5. Una coppia di genitori programma di avere 3 figli. Qual è la probabilità che almeno 2 di essi siano di sesso maschile?

RISOLUZIONE.

- Sull'esercizio 1 ricordiamo soltanto – per quanto riguarda il punto b) – che il numero "1" non è considerato "primo".
- In merito all'esercizio 4 è evidente che prima di tutto bisogna determinare la composizione dell'urna. È chiaro intanto (Fig. 16) che le palline sono in tutto 22, di cui 12 bianche e 10 nere.

Siccome 4 palline bianche sono di plastica, ovviamente 8 sono di vetro. E siccome 3 palline nere sono di vetro, chiaramente 7 sono di plastica. Il tutto è sintetizzato nel diagramma della figura 2, dove BP sta per "bianche di plastica", NP sta per "nere di plastica", e così via. A questo punto il calcolo delle varie probabilità diventa banale.

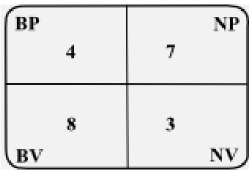

FIG. 16

- Relativamente all'esercizio 5, si ricorda che la probabilità di un figlio maschio è uguale a quella di una figlia femmina, per cui la situazione è analoga a quella in cui, nel lancio di una moneta "Testa-Croce", effettuata tre volte, si chiede di calcolare la probabilità che almeno due volte esca "Testa". Allora, considerato che lo spazio di probabilità è costituito dai seguenti 8 eventi:

$$\{TTT,\ TTC,\ TCT,\ TCC,\ CTT,\ CTC,\ CCT,\ CCC\},$$

e che quelli favorevoli sono i seguenti 4: $\{TTT, TTC, TCT, CTT\}$, la probabilità cercata è evidentemente 1/2.

- ESERCIZIO n. 7 in paragrafo n. 13.2.7

Un'urna contiene 2 palline bianche e 3 palline nere. Si considerino i seguenti esperimenti:
a) si estrae una pallina e, senza rimetterla nell'urna, se ne estrae un'altra;
b) si estrae una pallina e, dopo averla rimessa nell'urna, se ne estrae un'altra;
c) si estraggono simultaneamente due palline.
In ciascuno dei tre esperimenti calcola la probabilità che le due palline estratte siano: 1) bianche; 2) nere.

RISOLUZIONE. Più avanti, se si vuole, si potrà ritornare su quest'esercizio per risolverlo ricorrendo alla regola del prodotto. Per il momento bisogna accontentarsi di un procedimento meno sofisticato, ma forse più comprensibile. Trattiamo soltanto del caso 1) in cui le due palline estratte sono bianche.

a) Un grafo (Fig. 17a) mostra tutte le possibilità. Pertanto i casi possibili sono 20. I casi favorevoli all'evento BB sono evidentemente 2; per cui:

$$p_{a1} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Invece quelli favorevoli all'evento NN sono 6; per cui:

$$p_{a2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

b) Il grafo di figura 17b mostra tutte le possibilità. I casi possibili sono allora 25. Quelli favorevoli all'evento BB sono 4; pertanto: p_{b1}=4/25. Invece i casi favorevoli all'evento NN sono 9; per cui: p_{b2}=9/25.

c) Il grafo di figura 17a può andar bene anche per risolvere questo punto. Si ha: p_{a3}=1/10, p_{b3}=3/10.

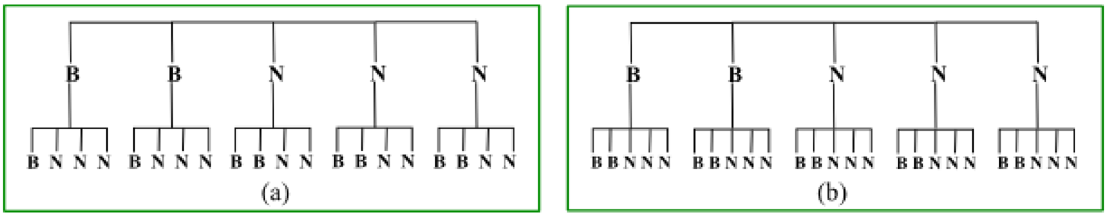

FIG. 17

Si fa notare come, in questa specifica situazione, il caso c) si identifichi con il caso a). Nel prossimo esercizio – nel quale si proporrà ancora di estrarre simultaneamente due palline, ma con probabilità che esse siano di colore diverso – questo non accadrà.

- ESERCIZIO n. 8 in paragrafo n. 13.2.7

Un'urna contiene 15 palline bianche e 17 palline nere. Si considerino gli stessi esperimenti dell'esercizio precedente. Nei primi due calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia nera e la seconda sia bianca. Nel terzo esperimento calcolare la probabilità che le due palline siano una bianca ed una nera.

RISOLUZIONE. Anche su quest'esercizio si potrà ritornare dopo aver studiato la regola del prodotto.
Sui primi due esperimenti il ragionamento si sviluppa come quello seguito nell'esercizio 7. Solo che, dato il gran numero di casi, è conveniente disegnare un grafo più sintetico anche se forse meno chiaro dei precedenti.

1) Nel 1° caso il grafo può essere allora pensato e rappresentato come in figura 18a. Se ne desume che i casi possibili

sono in numero di:

$$15\times14 + 15\times17 + 17\times15 + 17\times16 = 992;$$

mentre i casi favorevoli all'evento NB sono in numero di: $17\times15=255$. Pertanto:

$$p_1 = 255/992 \approx 25{,}71\% \,.$$

2) Il grafo che sintetizza l'andamento dell'esperimento è disegnato in figura 18b. I casi possibili sono allora in numero di:

$$15\times15 + 15\times17 + 17\times15 + 17\times17 = 1024;$$

mentre quelli favorevoli all'evento NB sono in numero di: $17\times15=255$. Pertanto:

$$p_2 = 255/1024 \approx 24{,}90\ \% \,.$$

3) Come nell'esercizio precedente, anche adesso (Fig. 18a) il grafo è lo stesso del punto 1). Ma bisogna fare attenzione. Bisogna tenere presente, infatti, che adesso l'evento BN e l'evento NB sono equivalenti. Per cui, mentre i casi possibili rimangono in numero di 992, quelli favorevoli all'evento BN e/o NB sono in numero di: $15\times17 + 17\times15 = 510$. Pertanto: $p_3=510/992\approx51{,}41\%$. Praticamente: $p_3=2p_1$.

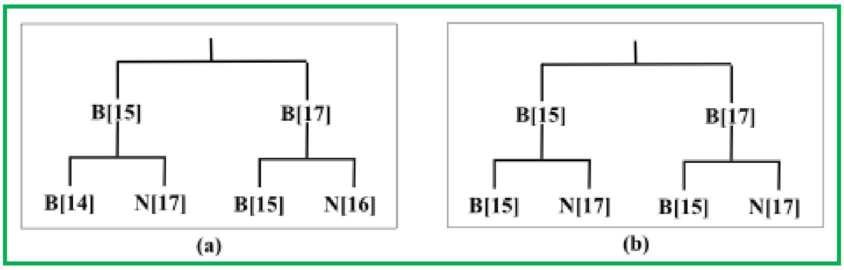

FIG. 18

- ESERCIZIO n. 17 in paragrafo n. 13.2.7

Paola lancia una moneta e Marco ne lancia due: Marco vince se ottiene più "teste" di Paola, altrimenti vince Paola. La probabilità che esca "testa" e quella che esca "croce" sono le stesse su tutte e tre le monete. Chi ha più probabilità di vincere, Paola o Marco?

RISOLUZIONE. Bisogna ipotizzare il lancio contemporaneo delle tre monete, quella di Paola e le due di Marco, e considerare tutti i possibili eventi, che sono i seguenti:

$$\underbrace{\text{T-TT}}_{(1)}\quad \underbrace{\text{T-TC}}_{(2)}\quad \underbrace{\text{T-CT}}_{(3)}\quad \underbrace{\text{T-CC}}_{(4)}\quad \underbrace{\text{C-TT}}_{(5)}\quad \underbrace{\text{C-TC}}_{(6)}\quad \underbrace{\text{C-CT}}_{(7)}\quad \underbrace{\text{C-CC}}_{(8)}$$

In 4 casi (1-5-6-7) vince Marco poiché ottiene più teste di Paola, ed in 4 casi (1-2-3-8) vince Paola giacché Marco non ottiene più teste di lei. La probabilità di vincita è, dunque, 1/2 per entrambi i giocatori.

- ESERCIZIO n. 18 in paragrafo n. 13.2.7

Si scelgano a caso due punti sulla superficie terrestre (supposta sferica). Qual è la probabilità che siano entrambi nell'emisfero boreale?

RISOLUZIONE. La risoluzione di questo problema non richiede considerazioni sofisticate, come si potrebbe pensare. Basta constatare infatti che c'è una simmetria. In realtà, se si sceglie un punto a caso, non c'è alcuna ragione di supporre che appartenga all'uno o all'altro dei due emisferi, per cui la probabilità che esso sia situato nell'emisfero boreale è 1/2. Di conseguenza, la probabilità che, scegliendo un altro punto, anch'esso si trovi nell'emisfero boreale, sapendo che il primo scelto vi si trovi già, è 1/4. Tutto sommato, il modello è analogo al lancio di due monete "oneste".

- ESERCIZIO n. 1, proposto come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 13.4.3

Attorno ad un tavolo vi sono 4 sedie contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, 4. Quattro persone, esse pure contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, 4, vi si mettono sedute scegliendo a caso i posti. Si vuole calcolare la probabilità che:
a) la persona "1" si sieda sulla sedia "1";
b) le persone "1" e "2" vadano a sedersi rispettivamente sulle sedie "1" e "2".
Più in generale si vuole calcolare la probabilità che sulle sedie contrassegnate dai rispettivi numeri:
1) non capiti alcuna persona;
2) si sieda una ed una sola persona;

3) capitino tre persone e tre soltanto;
4) capitino due persone al più;
5) si siedano due persone almeno.

RISOLUZIONE. La risposta alla prima domanda è pressoché immediata. Basta infatti notare che, indipendentemente da quello che fanno le altre tre persone, la persona “1” ha una possibilità su 4 di sedersi proprio sulla sedia “1” e perciò la probabilità cercata è $p=1/4$.
Ma proviamo a modificare leggermente il problema e ammettiamo che la sua richiesta sia di calcolare la probabilità che le persone "1" e "2" vadano a sedersi rispettivamente sulle sedie "1" e "2".
Un ragionamento come quello precedente sarebbe bastato per trovare la soluzione? Forse sì, ma con alcune complicazioni. Avremo modo di ritornare sulla faccenda. Per il momento, proprio per risolvere questa questione ed altre simili ad essa sulla stessa vicenda, è preferibile immaginare una situazione analoga a quella proposta ma di più facile gestione.
A ben riflettere il problema è analogo al seguente:
Da un’urna si estraggono, una di seguito all'altra, le quattro palline che vi sono contenute. Supponendo che queste palline siano contrassegnate con i numeri 1, 2, 3, 4, qual è la probabilità che la pallina “1” venga estratta per prima?
Ora, le possibili successioni ordinate con cui sono estratte le palline dall’urna possono essere rappresentate con un grafo (Fig. 19).

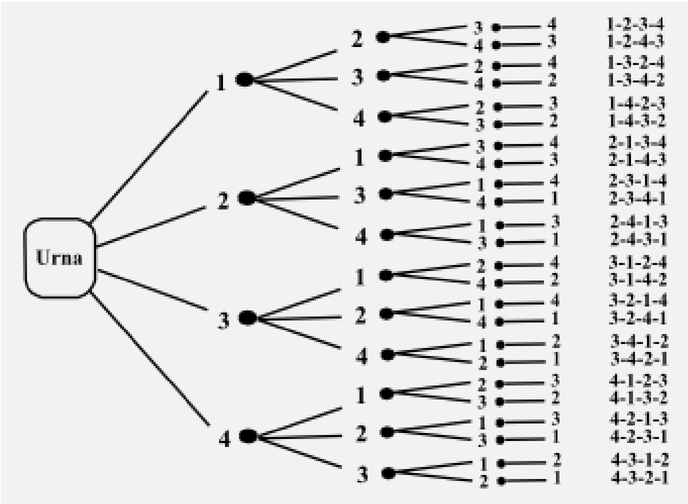

FIG. 19

Da esso si conta che esse sono 24 (numero dei casi possibili), mentre quelle che presentano “1” al primo posto sono 6 (numero dei casi favorevoli all’evento contemplato dal problema originario). Dunque la probabilità cercata è:

$$p=\frac{6}{24}=\frac{1}{4},$$

esattamente come prima (ma in modo più complicato).
Ma dal grafo di figura 19 si possono contare anche quante volte le palline “1” e “2” escono al 1° e 2° posto rispettivamente. E quindi si può calcolare la probabilità di questo evento. Quanto vale?
Inoltre il grafo permette di risolvere facilmente altri problemi sulla stessa questione. Si tratta, come nei due casi suddetti, di controllare quando il numero che contrassegna una pallina coincide col numero d’ordine dell’estrazione della pallina stessa e di contare quante sono queste coincidenze.
Così, per esempio, nell’estrazione caratterizzata dalla seguente successione: 1-4-3-2, vi sono due coincidenze: la pallina “1” estratta al 1° posto e la pallina “3” al 3º; mentre nella successione 2-1-4-3 non ci sono coincidenze.
Osservando allora che le coincidenze possono andare, nel nostro esperimento, da un minimo di 0 ad un massimo di 4, si può compilare la tabella sottostante.

Numero delle coincidenze	0	1	2	3	4
Numero delle successioni	9	8	6	0	1

A questo punto diventa semplice calcolare la probabilità che sulle sedie contrassegnate dai rispettivi numeri: non capiti alcuna persona; si sieda una ed una sola persona; capitino tre persone e tre soltanto; capitino due persone al più; si siedano due persone almeno.

- ESERCIZIO n. 3, proposto come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 13.4.3

Durante una festa paesana Tizio, con un fantasmagorico cappello in testa, sta facendo questo gioco. Fa vedere tre cartoncini uguali in tutto fuorché nel colore: uno è rosso su entrambe le facce, uno è nero su entrambe le facce, uno è rosso su una faccia e nero sull'altra. Infila i tre cartoncini in una busta e ne fa estrarre uno a caso da uno spettatore in modo però che del cartoncino estratto si veda solo una faccia. Che questa sia rossa o che, indifferentemente, sia nera scommette alla pari che l'altra faccia è dello stesso colore. Pensi che il gioco sia equo?

RISOLUZIONE. Evidentemente il gioco sarebbe equo se la probabilità (che la seconda faccia del cartoncino estratto abbia lo stesso colore della prima) fosse 1/2.
Ora, se la prima faccia è rossa i casi possibili, tenendo presente che la carta di colore rosso su entrambe le facce ne ammette due (Rosso$_A$-Rosso$_B$, Rosso$_B$-Rosso$_A$), sono i seguenti:

Rosso$_A$-Rosso$_B$, Rosso$_B$-Rosso$_A$, Rosso-Nero.

Dunque la probabilità che la seconda faccia sia rossa è 2/3.
Se, al contrario, la prima faccia del cartoncino estratto è nera, i casi possibili sono i seguenti:

Nero$_A$-Nero$_B$, Nero$_B$-Nero$_A$, Nero-Rosso.

Anche in questo caso la probabilità che la seconda faccia sia nera è 2/3.
In ogni caso, la probabilità che la seconda faccia del cartoncino estratto sia dello stesso colore della prima è 2/3. Il gioco non è equo ma sbilanciato a favore di chi punta sul verificarsi dell'evento che la seconda faccia sia dello stesso colore della prima.

12. Dall'unità 14 – Probabilità: approfondimenti

- ESERCIZIO n. 9

In una classe composta da 14 ragazze e 9 ragazzi deve essere scelta a sorteggio una delegazione formata da una ragazza e un ragazzo. Tra le ragazze vi sono 3 Lucia e tra i ragazzi 2 Roberto. Calcolare la probabilità che la delegazione includa: 1) una Lucia; 2) un Roberto; 3) una Lucia e un Roberto; 4) una Lucia e/o un Roberto; 5) nessuna Lucia e nessun Roberto.

RISOLUZIONE. Possono essere seguiti due procedimenti.
A) PRIMO PROCEDIMENTO (si usa la sola definizione di probabilità).
I casi possibili sono tanti quanti i modi di abbinare ciascuna delle 14 ragazze ad ognuno dei 9 ragazzi, cioè $14\cdot9=126$.

1) I casi favorevoli sono tanti quanti i modi di abbinare ciascuna delle 3 Lucia ad ognuno dei 9 ragazzi, cioè $3\cdot9=27$. Dunque: $p_1 = 27/126 \approx 21{,}43\%$.
2) $p_2 = 28/126 \approx 22{,}22\%$.
3) I casi favorevoli sono tanti quanti i modi di abbinare ciascuna delle 3 Lucia ad ognuno dei 2 Roberto, cioè $3\cdot2=6$. Dunque: $p_3 = 6/126 \approx 4{,}76\%$.
4) L'evento «nella delegazione ci sono una Lucia e/o un Roberto» è il contrario dell'evento «nella delegazione non c'è alcuna Lucia né alcun Roberto». Ed i casi favorevoli a quest'ultimo evento sono $(14-3)(9-2)=77$. Dunque: $p_4 = 1 - 77/126 \approx 38{,}89\%$.
5) Questa probabilità è stata trovata sopra: $p_5 = 77/126 \approx 61{,}11\%$.

B) SECONDO PROCEDIMENTO (si usano le regole della somma e del prodotto).

1) Qualunque sia il ragazzo, la probabilità che nella delegazione ci sia una Lucia è: $p_1=3/14\approx 1{,}43\%$.
2) $p_2 = 2/9 \approx 22{,}22\%$.
3) $p_3 = p_1p_2 = \frac{3}{14}\cdot\frac{2}{9} \approx 4{,}76\%$.
4) $p_4 = p_1+p_2-p_1p_2 = \frac{3}{14}+\frac{2}{9}-\frac{6}{126} \approx 38{,}89\%$.
5) $p_5 = 1-p_4 \approx 61{,}11\ \%$.

- ESERCIZIO n. 15

Un’urna contiene 50 palline, delle quali 20 bianche, 18 nere e 12 rosse. Vengono estratte una dopo l’altra tre palline e, ogni volta, la pallina estratta viene rimessa nell’urna. Calcolare la probabilità che: 1) le tre palline estratte siano bianche; 2) le tre palline estratte siano nere; 3) almeno due delle palline estratte siano bianche.

RISOLUZIONE. Si possono seguire due procedimenti

A) PRIMO PROCEDIMENTO.

1) La probabilità cercata è:

$$p_1=\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}\approx 6{,}4\% .$$

2) La probabilità cercata è:

$$p_2=\frac{18}{50}\cdot\frac{18}{50}\cdot\frac{18}{50}\approx 4{,}67\% .$$

3) Bisogna determinare la probabilità p_3 che esca una terna che, a prescindere dall’ordine, sia di questo tipo:

bianca, bianca, X,

dove X indica uno qualunque dei tre colori considerati.

Se allora indichiamo con E l’evento in esame, possiamo dire che risulta:

$$E = E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4\cup E_5\cup E_6\cup E_7,$$

dove:

- E_1 è l’evento: «esce la terna ordinata (bianca, bianca, bianca)»;
- E_2 è l’evento: «esce la terna ordinata (bianca, bianca, nera)»;
- E_3 è l’evento: «esce la terna ordinata (bianca, nera, bianca)»;
- E_4 è l’evento: «esce la terna ordinata (nera, bianca, bianca)»;
- E_5 è l’evento: «esce la terna ordinata (bianca, bianca, rossa)»;
- E_6 è l’evento: «esce la terna ordinata (bianca, rossa, bianca)»;
- E_7 è l’evento: «esce la terna ordinata (rossa, bianca, bianca)».

Poiché gli eventi E_i (i=1,2,...,7) sono incompatibili, per il principio delle probabilità totali risulta:

$$p(E) = \Sigma p(E_i).$$

D’altra parte:

$$p(E_1)=\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50},\quad p(E_2)=P(E_3)=p(E_4)=\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{18}{50},\quad p(E_5)=p(E_6)=p(E_7)=\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{12}{50}.$$

Dunque: $p_3 = p(E) = 35{,}2\%$.

B) SECONDO PROCEDIMENTO.

Il procedimento seguito per risolvere il punto 3) è quello concettualmente più elementare: non si è fatto altro che elencare tutte le possibili situazioni. Si può seguire un procedimento più sofisticato.

Detto sempre E l’evento in esame, possiamo osservare che risulta:

$$E = E_1\cup E_2\cup E_3 ,$$

dove:

- E_1 è l’evento: «esce la terna ordinata (bianca, bianca, X)»;
- E_2 è l’evento: «esce la terna ordinata (bianca, X, bianca)»;
- E_3 è l’evento: «esce la terna ordinata (X, bianca, bianca)».

I tre eventi E_1, E_2, E_3 sono compatibili. Basta osservare che se X è “bianca” essi coincidono. Ne deriva che:

$$\begin{aligned}p(E) = P(E_1\cup E_2\cup E_3) &= p[(E_1\cup E_2)\cup E_3] = p(E_1\cup E_2)+p(E_3) - p[(E_1\cup E_2)\cap E_3] =\\ &= p(E_1)+p(E_2)-p(E_1\cap E_2)+p(E_3)-p[(E_1\cap E_3)\cup(E_2\cap E_3)] =\\ &= p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)-p(E_1\cap E_2)-[p(E_1\cap E_3)+p(E_2\cap E_3)-p(E_1\cap E_2\cap E_3)] =\\ &= p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)-p(E_1\cap E_2)-p(E_1\cap E_3)-p(E_2\cap E_3)+p(E_1\cap E_2\cap E_3);\end{aligned}$$

poiché:

$$p(E_1)=p(E_2)=p(E_3)=\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50} ,\qquad p(E_1\cap E_2)=p(E_1\cap E_3)=p(E_2\cap E_3)=p(E_1\cap E_2\cap E_3)=\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{20}{50}$$

allora si ottiene: $p_3 = p(E) = 35{,}2\%$.

- ESERCIZIO n. 16

Un'urna contiene 50 palline, delle quali 25 bianche, 15 nere e 10 rosse. Vengono estratte una dopo l'altra tre palline senza rimetterle nell'urna. Calcolare la probabilità che: 1) le tre palline estratte siano nere; 2) almeno due delle tre palline estratte siano nere; 3) due delle tre palline estratte e due soltanto siano nere; 4) la prima e la terza pallina siano rosse e la seconda no; 5) le tre palline estratte siano dello stesso colore.

RISOLUZIONE.

1) La probabilità cercata è:
$$p_1=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\cdot\frac{13}{48}\approx 2{,}32\%.$$
2) Il ragionamento, nella prima parte, si articola grossomodo come quello seguito per risolvere il punto 3) dell'es. precedente. Per cui, detto E l'evento in esame e chiamati:
   - E_1 l'evento: «esce la terna ordinata (nera, nera, X)»,
   - E_2 l'evento: «esce la terna ordinata (nera, X, nera)»,
   - E_3 l'evento: «esce la terna ordinata (X, nera, nera)»,

   risulta:
$$p(E) = p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)-p(E_1\cap E_2)-p(E_1\cap E_3)-p(E_2\cap E_3)+p(E_1\cap E_2\cap E_3).$$
   D'altronde:
$$p(E_1)=p(E_{11})+p(E_{12}),$$
   dove E_{11} ed E_{12} sono gli eventi disgiunti:
   - E_{11}: «esce la terna ordinata (nera, nera, nera)»,
   - E_{12}: «esce la terna ordinata (nera, nera, non nera)»;

   per cui:
$$p(E_{11})=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\cdot\frac{13}{48}\,,\qquad p(E_{12})=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\cdot\frac{35}{48}\,,$$
   e pertanto:
$$p(E_1)=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\,.$$
   Inoltre: $p(E_2)=p(E_{21})+p(E_{22})$, dove E_{21} ed E_{22} sono gli eventi disgiunti:
   - E_{21}: «esce la terna ordinata (nera, nera, nera)»,
   - E_{22}: «esce la terna ordinata (nera, non nera, nera)»;

   per cui:
$$p(E_{21})=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\cdot\frac{13}{48}\,,\qquad p(E_{22})=\frac{15}{50}\cdot\frac{35}{49}\cdot\frac{14}{48}\,,$$
   e pertanto:
$$p(E_2)=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\,.$$
   Ancora, ragionando come nei due casi precedenti, si trova:
$$p(E_3)=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\,.$$
   Insomma:
$$p(E_1)=p(E_2)=p(E_3)=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\,.$$
   Inoltre:
$$p(E_1\cap E_2)=p(E_1\cap E_3)=p(E_2\cap E_3)=p(E_1\cap E_2\cap E_3)=\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\cdot\frac{13}{48}.$$
   Per cui: $p_2 = p(E) \approx 21{,}07\%$.
3) La probabilità p_3 si ottiene in due modi diversi:
   - dopo aver calcolato la precedente probabilità p_2 ed aver osservato che $p_3=p_2-p(E_0)$, dove E_0 è l'evento: «esce la terna (nera, nera, nera)»;
   - direttamente, dopo aver osservato che $p_3=p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)$, dove E_1, E_2, E_3 sono gli eventi incompatibili:
     - E_1: «esce la terna ordinata (nera, nera, non nera)»,

- E_2: «esce la terna ordinata (nera, non nera, nera)»,
- E_3: «esce la terna ordinata (non nera, nera, nera)».

In ogni caso si trova:

$$p_3 = 18,75\%.$$

4) La probabilità cercata è:

$$p_4=\frac{10}{50}\cdot\frac{40}{49}\cdot\frac{9}{48}\approx 3,06\% .$$

5) La probabilità cercata è: $p_5=p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)$, dove E_1, E_2, E_3 sono gli eventi incompatibili:
- E_1: «esce la terna ordinata (bianca, bianca, bianca)»,
- E_2: «esce la terna ordinata (nera, nera, nera)»,
- E_3: «esce la terna ordinata (rossa, rossa, rossa)».

Per cui:

$$p_5 = \frac{25}{50}\cdot\frac{24}{49}\cdot\frac{23}{48}+\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}\cdot\frac{13}{48}+\frac{10}{50}\cdot\frac{9}{49}\cdot\frac{8}{48}\approx 14,67\% .$$

- ESERCIZIO n. 25

Disponi di un bastoncino. A caso lo dividi in tre parti. Qual è la probabilità che queste parti costituiscano i lati di un triangolo.

La formulazione e una risoluzione di questo problema sono dovute al matematico francese **Émile Lemoine** (1840-1912).

RISOLUZIONE. Descriviamo tre procedimenti completamente diversi per risolverlo. In tutti e tre escludiamo che il triangolo possa essere degenere, cioè che una parte del bastoncino possa essere uguale alla somma delle altre due. Negli ultimi due procedimenti ci affideremo in maniera intuitiva al concetto di "probabilità geometrica" che qui preliminarmente vogliamo però precisare, non prima di aver segnalato che il concetto sarà ripreso e approfondito più avanti nel corso degli studi. Ecco una definizione parziale di "probabilità geometrica":

Se i casi che si possono verificare sono rappresentati dai punti di una certa superficie S e quelli favorevoli all'evento che si considera sono rappresentati dai punti di una superficie S' contenuta in S, allora la probabilità p dell'evento è espressa dalla formula:

$$p=\frac{\text{area di S'}}{\text{area di S}} .$$

- 1° PROCEDIMENTO. Indichiamo con a, b, c le tre parti in cui il bastoncino è diviso in maniera del tutto casuale.

Dal confronto di ognuna di tali lunghezze con la somma delle altre due – nel senso che la lunghezza può essere minore o maggiore della somma delle altre due – derivano tanti casi teorici quante sono le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti distinti (relazione di minore, relazione di maggiore) presi a 3 a 3, vale dire $2^3=8$ casi. E precisamente:

$$a<b+c\begin{cases} b<c+a \begin{cases} c<a+b & [1] \\ c>a+b & [2] \end{cases} \\ b>c+a \begin{cases} c<a+b & [3] \\ c>a+b & [4] \end{cases} \end{cases} \qquad a>b+c\begin{cases} b<c+a \begin{cases} c<a+b & [5] \\ c>a+b & [6] \end{cases} \\ b>c+a \begin{cases} c<a+b & [7] \\ c>a+b & [8] \end{cases} \end{cases}$$

Ma di essi, i casi [4], [6], [7], [8] non si possono proprio presentare perché descrivono situazioni incompatibili (come il caso [4], giacché dovrebbe essere contemporaneamente b>c e c>b). Si possono presentare, invece, i casi [1], [2], [3], [5].

Ora, però, di questi 4 casi possibili, tutti equiprobabili, solamente il caso [1] è favorevole all'evento (le 3 lunghezze a, b, c possono essere infatti lati di un triangolo); gli altri 3 casi non lo sono (in ognuno di essi infatti c'è una lunghezza che non è minore della somma delle altre due). La probabilità cercata è pertanto:

$$p=\frac{1}{4}.$$

- 2° PROCEDIMENTO. Supponiamo che il segmento-bastoncino assegnato sia lungo h. Considerata h come l'altezza del triangolo equilatero ABC, detto P un punto scelto casualmente internamente al triangolo e indicate con x, y, z le sue distanze dai lati BC, CA, AB rispettivamente, affinché queste tre distanze siano lati di un triangolo occorre naturalmente che ognuna di esse sia minore della somma delle altre due o, nel caso degenere, al più uguale.

Questo accade se P risulta appartenere al triangolo LMN, dove L, M, N sono i punti medi dei lati BC, CA, AB rispettivamente (Fig. 21).

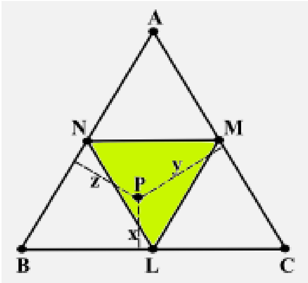

FIG. 21

Infatti, siccome l'altezza del triangolo LMN è h/2, allora per P interno a tale triangolo la massima distanza di P dai lati del triangolo è minore di h/2. D'altra parte, essendo $x+y+z=h$, posto che tale massima distanza sia x, deve risultare: $y+z=h-x>h/2$. Dunque $y+z>x$. Di conseguenza anche $z+x>y$ e $x+y>z$.

Se P appartiene al contorno di LMN una distanza di P dai lati del triangolo è zero. Perciò da scartare.

Se P è esterno al triangolo LMN la massima distanza di P dai lati del triangolo ABC (cioè x) supera h/2, per cui $y+z<h/2$ e di conseguenza $y+z<x$. Ancora da scartare.

La probabilità p cercata coincide dunque con quella che, scelto a caso un punto interno al triangolo ABC, esso risulti interno pure ad LMN.

D'altra parte l'area del triangolo LMN è la quarta parte di quella del triangolo ABC, pertanto la probabilità cercata è $p=1/4$.

- 3° PROCEDIMENTO. Se indichiamo con a la lunghezza del bastoncino e con x ed y le lunghezze di due dei tre pezzi in cui esso è casualmente ripartito, la lunghezza del terzo pezzo è evidentemente $a-(x+y)$. Per la possibilità del problema deve risultare:

$$0 < x < a, \quad 0 < y < a, \quad 0 < x + y \leq a.$$

Queste tre disequazioni individuano la superficie del triangolo evidenziata in figura 21.

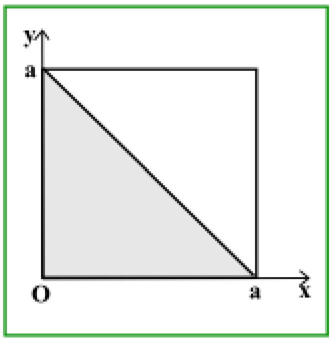

FIG. 21

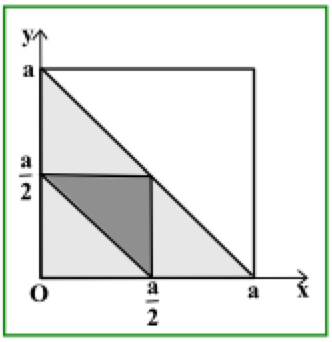

FIG. 22

I casi favorevoli al verificarsi dell'evento sono espressi dalle seguenti disequazioni:

$$x < y+(a-(x+y)), \text{ cioè: } x<a/2 \ ; \quad y < x+(a-(x+y)), \text{ cioè: } y<a/2 \ ;$$
$$a-(x+y) < x+y, \text{ cioè: } x+y>a/2.$$

Queste altre condizioni individuano il triangolino più rimarcato di figura 22. Poiché questo triangolino è la quarta parte del triangolo grande, ne consegue che la probabilità cercata è $p=1/4$.

- ESERCIZIO n. 27

Valeria gioca a TESTA o CROCE con una moneta non bilanciata: la probabilità che esca TESTA è, infatti, diversa da quella che esca CROCE. Valeria lancia due volte la moneta. È più probabile che le due facce uscite siano uguali o siano diverse?

RISOLUZIONE. Possiamo supporre che la probabilità che, in un lancio esca "testa" sia maggiore di quella che esca "croce", ma il ragionamento non cambia nel caso contrario. Sia dunque:

$$p(T)=\frac{1}{2}+h \quad e \quad p(C)=\frac{1}{2}-h\,,$$

essendo h un numero reale tale che 0<h<1/2. Si ha allora:

$$p(\text{facce uguali})=p(TT)+p(CC)=\left(\frac{1}{2}+h\right)^2+\left(\frac{1}{2}-h\right)^2=\frac{1}{2}+2h^2,$$

$$p(\text{facce diverse})=1-p(\text{facce uguali})=1-\left(\frac{1}{2}+2h^2\right)=\frac{1}{2}-2h^2.$$

In altre parole, la probabilità che le due facce uscite siano uguali è maggiore di quella che siano diverse.

13. Dall'unità 16 – Le isometrie nel piano

- ESERCIZIO n. 1, proposto come laboratorio di matematica in chiusura di paragrafo n. 16.7

Si deve andare dalla posizione A alla posizione B, ma bisogna farlo toccando la retta s in un suo qualsiasi punto P. Trova la posizione di P per la quale il cammino AP+PB sia il più breve.

RISOLUZIONE. La risoluzione del problema, con l'uso della simmetria assiale, diventa del tutto elementare.
Costruito il punto A', simmetrico di A rispetto alla retta s (Fig. 23), e congiunto A' con B, risulta evidentemente A'B<A'P+PB; di conseguenza, essendo A'Q=AQ e A'P=AP, se P è un qualsiasi punto di s, distinto da Q, risulta: AQ+QB<AP+PB. Dunque Q è il punto che risponde alla richiesta del problema. È facile spiegare che, considerata la perpendicolare QN ad s, risulta: $A\hat{Q}N=N\hat{Q}B$.

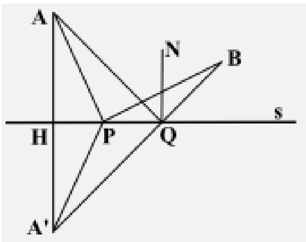

FIG. 23

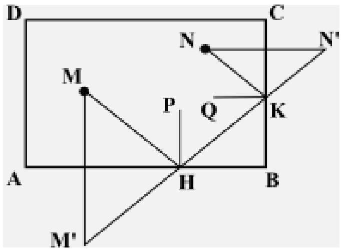

FIG. 24

- ESERCIZIO n. 2, proposto come laboratorio di matematica in chiusura di paragrafo n. 16.7

Sul tavolo del bigliardo ABCD vi sono due palline: una nella posizione M, l'altra in N.

a) La prima pallina viene lanciata in modo da urtare la seconda dopo che ha toccato la sponda AB. In quale punto la pallina tocca la sponda?
b) La pallina posta in M viene lanciata contro la sponda AB in modo da toccare anche la sponda BC prima di urtare la pallina posta in N. In quali punti la pallina deve toccare le due sponde?

RISOLUZIONE. Anche queste questioni si risolvono ricorrendo alla simmetria assiale.
In verità il punto a) non è altro che la questione precedente considerata da un altro punto di vista, a condizione che si supponga che l'angolo di incidenza di una pallina sulla sponda di un bigliardo sia uguale all'angolo di riflessione. Occupiamoci pertanto del punto b). Si tratta di determinare un punto H su AB e un punto K su BC in modo che, condotta per H la perpendicolare HP ad AB e per K la perpendicolare KQ a BC (Fig. 24), risulti: $M\hat{H}P=P\hat{H}K$ e $H\hat{K}Q=Q\hat{K}N$. Ebbene basta considerare il punto M' simmetrico di M rispetto ad AB e il punto N' simmetrico di N rispetto a BC: i punti in cui il segmento M'N' interseca rispettivamente AB e BC sono i punti H e K cercati.

- ESERCIZIO n. 10

Il quadrato ABCD e il triangolo equilatero ABE hanno in comune il lato AB e nessun altro punto. Il quadrato ruota in senso orario intorno al triangolo in modo che, nella nuova posizione assunta, abbia in comune con esso solo un lato. Quanti giri deve fare il quadrato per ritornare nella posizione originaria?

[A] 1 ; [B] 2 ; [C] 3 ; [D] 4 .

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una sufficiente spiegazione della scelta operata.

RISOLUZIONE. Nel primo giro il quadrato si porta in una posizione equivalente ad una sua rotazione antioraria di 90° intorno al suo centro. Come dire che i vertici del quadrato subiscono la permutazione definita dalla seguente sostituzione:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}.$$

Ci vogliono, perciò 4 giri (360°:90°=4) affinché il quadrato ritorni alla posizione iniziale. [D] è l'alternativa corretta.

- ESERCIZIO n. 12

Fra i triangoli di data base e di uguale area determinare quello che ha il perimetro minore e dimostrare che è il triangolo isoscele sulla base assegnata.

RISOLUZIONE. Intanto è evidente che se AB è la base assegnata dei triangoli e tutti i triangoli hanno la stessa area, allora devono avere la stessa altezza h. Quindi il terzo vertice P del generico triangolo deve essere situato su una parallela r ad AB distante h da essa. Si tratta allora di individuare su r il punto C per il quale risulta minima la somma AC+CB. Ma questo è un problema che sappiamo risolvere (non è altro che il problema di Erone): basta prendere il punto A' simmetrico di A rispetto ad r e congiungere A' con B. Il punto C è l'intersezione di A'B con r. Il triangolo ABC è quello cercato. Che esso sia isoscele sulla base AB è facilmente dimostrabile.
Un idoneo software matematico permette di visualizzare la situazione.

14. Dall'unità 17 – Composizione di isometrie

Le caratteristiche di questa unità, che sono prevalentemente di tipo teorico, non richiedono molti esercizi. Ne abbiamo proposti pochissimi sotto forma di quesiti a scelta multipla con un numero imprecisato di risposte corrette che bisogna individuare e spiegare. Qualche considerazione può essere utile, al fine di evitare di commettere errori, che sono per lo più di natura logica piuttosto che geometrica:

- ESERCIZIO n. 6

Tra le isometrie considerate, ove si escluda l'identità, quelle che hanno almeno un punto unito sono solo le seguenti:
a) la rotazione: il suo centro è l'unico punto unito;
b) la simmetria assiale: l'asse di simmetria è luogo di punti uniti.

- ESERCIZIO n. 7

Tutte le isometrie considerate possono trasformare una retta in una parallela. Precisamente:
a) la traslazione trasforma ogni retta in una parallela;
b) una particolare rotazione, la simmetria centrale, trasforma ogni retta in una parallela;
c) la simmetria assiale trasforma una retta parallela o perpendicolare all'asse di rotazione in una parallela;
d) una particolare rototraslazione, quella in cui la rotazione è la simmetria centrale, trasforma ogni retta in una parallela;
e) la glissosimmetria trasforma una retta parallela o perpendicolare all'asse della simmetria assiale in una parallela.

- ESERCIZIO n. 8

Un'isometria piana che trasformi una determinata retta r in una retta r' perpendicolare ad r può essere:
a) una particolare rotazione (quella di ampiezza 90° + k 180°, $\forall k \in \mathbb{Z}$);
b) una simmetria assiale, ma solo se la retta forma un angolo di 45° con l'asse di simmetria;
c) una particolare rototraslazione (quella in cui la rotazione ha ampiezza 90°+k180°, $\forall k \in \mathbb{Z}$);
d) una glissosimmetria, ma solo se la retta forma un angolo di 45° con l'asse della simmetria.

- ESERCIZIO n. 9

La risposta A) è sbagliata, le altre sono giuste. Che le risposte B), C) e D) siano corrette è immediata conseguenza del fatto che ogni isometria trasforma un segmento in un segmento congruente, rette parallele in rette parallele e ogni angolo in un angolo congruente.

- ESERCIZIO n. 10

La risposta A) è sbagliata, le altre sono giuste. Sulla correttezza delle alternative C) e D) vale quanto detto sopra. Anche l'alternativa B) è corretta: è sufficiente che il vettore che individua la traslazione sia perpendicolare all'asse di simmetria, nel qual caso ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria è trasformata in se stessa.

15. Dall'unità 20 – Equazioni di 1° grado

- ESERCIZIO n. 73

Con riferimento al "quadrato magico" qui rappresentato, utilizzando soltanto i numeri 10, 14 e un terzo numero da determinare, riempire le 7 caselle vuote in modo che rimanga invariata la somma dei tre numeri situati su ogni riga, su ogni colonna e su ogni diagonale.

10		14

RISOLUZIONE. Chiamato x il numero da determinare, l'unica configurazione possibile (a meno di uno scambio fra la prima e la terza riga) è la seguente:

x	14	10
10	x	14
14	10	x

Se ne desume che deve essere: $x+x+x=x+10+14$, vale a dire: $x=12$.

- ESERCIZIO n. 77

Un ricco signore lascia dei gioielli in eredità ai suoi figli. Precisamente: al primogenito lascia 1 gioiello più 1/10 della parte rimanente; al secondo nato lascia 2 gioielli più 1/10 di quelli rimanenti; al terzo nato lascia 3 gioielli più 1/10 della parte restante; e, così via, fino all'ultimo nato. Dopo che è stata compiuta la spartizione, i vari figli constatano che hanno ricevuto in eredità esattamente lo stesso numero di gioielli. Quanti sono i gioielli? Quanti i figli?

RISOLUZIONE. Ammesso che i gioielli siano n:

- al 1° figlio ne vanno: $1+\frac{1}{10}(n-1)=\frac{9+n}{10}$; perciò ne rimangono: $n-\frac{9+n}{10}=\frac{9}{10}(n-1)$;
- al 2° figlio ne vanno: $2+\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}(n-1)-2\right)=\frac{9}{100}(n+19)$.

Siccome ai due figli va lo stesso numero di gioielli, deve risultare:

$$\frac{9+n}{10}=\frac{9}{100}(n+19).$$

Da qui, una volta risolta l'equazione in n, segue: $n=81$.

Si può verificare, a questo punto, che al 1° figlio, come al 2°, vanno 9 gioielli. Per stabilire, allora, quanti sono i figli, considerato che tutti ottengono lo stesso numero di gioielli, basta dividere 81 per 9: si ottiene 9.

In definitiva: 81 gioielli sono lasciati in eredità a 9 figli.

- ESERCIZIO n. 79 (laboratorio di matematica)

Un automobilista va dalla città A alla città B tenendo una media di 60 km/h.

a) Supposto che faccia il viaggio di ritorno alla media di 90 km/h, qual è la sua velocità media sull'intero percorso di andata e ritorno?

b) Quale velocità media dovrebbe tenere sul percorso di ritorno da B ad A affinché la sua velocità media sull'intero percorso sia di 120 km/h?

Discutine in classe con i tuoi compagni e, se necessario, chiedete aiuto al professore.

RISOLUZIONE. È verosimile che qualcuno tenti approcci diversi alla risoluzione del problema, senza ricavarne nulla perché fuorviato dal fatto di non conoscere la distanza percorsa dall'automobilista. In realtà, questo dato non occorre, giacché il procedimento matematico corretto porta ad escluderlo dai calcoli. Vediamolo questo procedimento.

Indicate con v_1, v_2 e v_3 le velocità medie tenute dall'automobilista rispettivamente nel percorso di andata, in quello di ritorno e nel percorso intero, e indicati con s il cammino da A a B (ovviamente uguale a quello da B ad A) e con t_1, t_2 i tempi di percorrenza del percorso di andata e di quello di ritorno, è noto che v_3 è la media armonica di v_1 e v_2.

Perciò: $v_3=\dfrac{2}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}}=\dfrac{2\,v_1v_2}{v_1+v_2}$.

Questa formula permette di risolvere entrambe le questioni.

a) Nel primo caso si ha v_1=60 (km/h) e v_2=90 (km/h). Per cui, dopo aver sostituito e calcolato, si ottiene v_3=72 (km/h).
b) Nel secondo caso si ha v_1=60 (km/h) e v_3=120 (km/h). Dopo aver sostituito si ottiene la seguente equazione in v_2:

$$120=\frac{120\,v_2}{60+v_2}$$

che si semplifica nella forma seguente: $v_2=60+v_2$, che evidentemente è impossibile. Per cui la seconda parte del problema non ha soluzione.

- ESERCIZIO n. 80 (laboratorio di matematica)

Il numero 135 è il più piccolo numero di tre cifre tale che: $135=1^1+3^2+5^3$. Verificarlo e verificare, inoltre, che tra i numeri di 3 cifre solo altri tre hanno la stessa caratteristica.

RISOLUZIONE. Non si esclude un tentativo da parte di qualcuno, consistente in una verifica di tutti i numeri compresi fra 100 e 999. Procedimento lungo e dispendioso che prevede 900 verifiche. Meglio affidarsi preventivamente a qualche forma di ragionamento che possa restringere il campo di ricerca. Ora, un generico numero di tre cifre – a, b, c – può essere messo nella forma seguente: $100a+10b+c$, dove a, b, c sono numeri naturali compresi fra 0 e 9 inclusi, ma con $a\neq0$. Si tratta di trovare quali di tali numeri soddisfano alla condizione:

$$100\,a+10\,b+c=a^1+b^2+c^3.$$

Risolvendo rispetto all'incognita a, si trova:

$$a=\frac{1}{99}\Big(b(b-10)+c^2(c-1)\Big).$$

A questo punto si può osservare che, per un determinato valore di c, i valori di a che corrispondono ai valori di b che vanno da 1 a 4 coincidono con quelli che corrispondono ai valori di b che vanno rispettivamente 9 a 6. In realtà: b(b–10) assume valori uguali per b=1 e b=9, per b=2 e b=8, per b=3 e b=7, b=4 e b=6. Finalmente ha senso fare dei tentativi, attribuendo a c i valori compresi fra 0 e 9 inclusi ed a b i valori compresi fra 0 e 5 inclusi: complessivamente 60 tentativi, invece dei 900 supposti inizialmente senza alcun ragionamento preventivo.

A conti fatti si trovano i seguenti numeri di tre cifre: 135, 175, 518, 598.

- ESERCIZIO n. 86

Fabio è titolare di un negozio di generi alimentari. Si trova in un momento di ristrettezze economiche ed ha bisogno immediato di € 5000 per concludere un affare importante. Non potendo far di meglio, decide di rivolgersi ad un usuraio, il quale è sì disposto a concedergli il prestito, ma a condizione di ricevere € 7500 alla scadenza di 30 giorni a partire dall'indomani. Fabio fa un po' di conti e, confidando negli incassi dei giorni seguenti, valuta che mettendo da parte, a cominciare dall'indomani, una certa somma S e aumentandola ogni giorno di € 5, allo scadere dei 30 giorni disporrà della somma necessaria a rimborsare l'usuraio. Quanto vale S?

RISOLUZIONE. Il totale T che Fabio deve mettere da parte nei 30 giorni successivi, per poter disporre di € 7500 che deve all'usuraio, è, espresso in euro:

$$T=S+(S+5)+(S+2\times5)+(S+3\times5)+\dots+(S+29\times5)=$$
$$=30\,S+5\,(1+2+3+\dots+29)=30\,S+5\,(29\times30)/2=30\,S+2175.$$

Affinché risulti $T=7500$ (€) deve essere:

$$30\,S+2175=7500 \quad \text{e perciò:}\quad S=\frac{7500-2175}{30}\approx 177{,}5\ (€).$$

- ESERCIZIO n. 87

Visitando il blog della sua amica Maria, Giulio osserva che i visitatori sono invitati a dare il loro parere sul blog con un voto. Un messaggio indica la media aggiornata dei voti. A Giulio piace molto il blog e decide di dare come voto la media aumentata di un punto. Dopo la sua valutazione, la pagina internet si aggiorna automaticamente. Giulio constata che la media è aumentata di 0,02 punti. Si chiede allora quante persone hanno votato prima di lui. Calcolate il numero di utenti che hanno votato il blog di Maria prima di Giulio.

[Tratto dal sito web *matematicasenzafrontiere*, 2008]

RISOLUZIONE. La risoluzione è piuttosto elementare. Basta un minimo di riflessione. Se si indica con M la media dei voti prima del voto di Giulio e con n il numero dei votanti che lo hanno preceduto, la somma di tali voti è evidentemente nM; ragion per cui i dati del problema si formalizzano nella seguente equazione:

$$\frac{nM+(M+1)}{n+1}=M+0{,}02,$$

da cui segue n=49.

Ovviamente i dati non sono sufficienti per determinare M.

- ESERCIZIO n. 88

In classe arriva Mario, un nuovo studente. Ha un'altezza che supera di 6 cm l'altezza media degli studenti della classe e, dopo il suo arrivo, l'altezza media aumenta di 2 mm. Quanti alunni vi sono nella classe prima dell'arrivo di Mario?

RISOLUZIONE. Indicati con n il numero degli alunni prima dell'arrivo di Mario e con M la media delle loro altezze, espressa in centimetri, deve risultare:

$$\frac{n\,M+(M+6)}{n+1}=M+0{,}2\ .$$

Da qui, a conti fatti, segue: n=29.

Si capisce che i dati disponibili non bastano a determinare la media M.

- ESERCIZIO n. 96

Alcuni gettoni sono disposti su n righe ed altrettante colonne in modo da formare una sorta di quadrato. I gettoni sono di due colori diversi, rosso e giallo, e sono distribuiti in due regioni, i rossi da una parte e i gialli dall'altra, separate da una corda parallela ad uno dei lati del quadrato. Si sa che i gettoni gialli sono 39 in più di quelli rossi.

a) Calcolare il numero complessivo di gettoni, sapendo che questo numero è inferiore a 500.

b) Presi a caso due dei gettoni in questione, è più probabile che siano di colore diverso o dello stesso colore?

RISOLUZIONE. Indichiamo con n il numero dei gettoni disposti su una riga. Tale numero è ovviamente uguale a quello dei gettoni disposti su una colonna. Se m è il numero dei gettoni rossi, quello dei gettoni gialli è m+39.

a) Incominciamo a trovare il numero complessivo dei gettoni. Dal momento che i gettoni rossi sono separati nettamente da quelli gialli, si capisce che deve essere $39=kn$, dove k è un numero intero. D'altro canto $39=3\times 13$, per cui deve essere: 1) $k=3,\ n=13$, oppure 2) $k=13,\ n=3$. La seconda situazione evidentemente non può sussistere poiché, se così fosse, vi sarebbero complessivamente 9 gettoni: il che è assurdo, dovvendo essere essi certamente più di 39. Rimane la prima situazione e pertanto il numero complessivo dei gettoni è $13\times 13=169$. Potrebbe essere anche 39=39×1, per cui sarebbe: 1) k=1, n=39, oppure 2) k=39, n=1. Come sopra, la seconda situazione non può sussistere poiché vi sarebbe un solo gettone. Rimarrebbe la prima situazione, ma in tal caso i gettoni sarebbero 39×39=1541, cioè più di 500, il che non può essere.

b) Per rispondere alla seconda domanda bisogna sapere quanti sono i gettoni gialli e quanti quelli rossi. Siccome $m+(m+39)=169$, si desume che $m=65$ e questo è il numero dei gettoni rossi. Di conseguenza il numero dei gettoni gialli è $65+39=104$. Possiamo adesso calcolare la probabilità che, presi a caso due gettoni, essi siano dello stesso colore. Si ha:

$$p_1=\frac{65}{169}\cdot\frac{64}{168}+\frac{104}{169}\cdot\frac{103}{168}=\frac{11}{21}.$$

La probabilità che i due gettoni siano di colore diverso è evidentemente la probabilità contraria di questa, per cui essa è:

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{11}{21} = \frac{10}{21}.$$

Questa probabilità è chiaramente minore dell'altra.

- ESERCIZIO n. 97

Al veglione di San Silvestro partecipano uomini e donne e il numero di queste ultime è una volta e mezza quello degli uomini. Si sa che Carlo balla con 9 donne, Piero con 10, Guido con 11 e, così via, fino a Giacomo che balla con tutte le donne presenti. Quanti uomini partecipano al veglione? Quante donne?

RISOLUZIONE. Indichiamo provvisoriamente con N il numero degli uomini presenti al veglione. Quello delle donne è ovviamente $\frac{3}{2}$N. Disponiamo quindi gli N uomini in ordine crescente, in base al numero di donne con cui ciascuno di essi balla:

1) Carlo, che è il primo, nel senso che è quello che balla con il minor numero di donne, balla con 9 donne: $9=1+8$;
2) Piero, che è il secondo, balla con 10 donne: $10=2+8$;
3) Guido, cioè il terzo, balla con 11 donne: $11=3+8$;
4) …………;

N) Giacomo, che è il ballerino numero N, balla tutte le donne, che lo ricordiamo sono in numero di $\frac{3}{2}$N per cui: $\frac{3}{2}$N =N+8.

Una volta risolta quest'equazione $\frac{3}{2}\mathrm{N}=\mathrm{N}+8$, si ottiene: $\mathrm{N}=16$.

Gli uomini sono pertanto in numero di 16 e, di conseguenza, le donne sono in numero di 24.

16. Dall'unità 21 – Disequazioni di 1° grado

- ESERCIZIO proposto come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 21.2

In ognuna delle caselle vuote di ciascuno dei quadrati "magici" sottostanti bisogna inserire un numero intero positivo in modo che la somma dei tre numeri situati su ogni riga, su ogni colonna e su ogni diagonale rimanga invariata.
I numeri da inserire nelle caselle di uno stesso quadrato sono diversi fra loro e da quelli già inseriti. Come pensi di procedere?

2		6
	5	

8		
10		14

	16	
10		18

5	10	9

	16	
	14	

28		4

RISOLUZIONE. Non si tratta di risolvere la questione per tentativi più o meno brillanti, ma di trovare una strategia che consenta di risolvere la questione in generale. C'è da dire, comunque, che in una prima fase di discussione, anche i tentativi possono andare bene, a condizione che gli eventuali risultati siano assunti come congetture da verificare attraverso il ragionamento. In particolare, con riferimento all'ultimo quadrato, siamo sicuri che l'eventuale soluzione trovata sia l'unica e non ne esistano altre? Come possiamo garantirci questo? Appunto mediante il ragionamento.
Indichiamo una volta per tutte con S la somma costante dei tre numeri situati su una medesima riga o colonna o diagonale.
Relativamente al 1° quadrato:

- nella prima casella della seconda riga va evidentemente il numero che, sommato a 2, dà lo stesso valore della somma 5+6, vale a dire che in quella casella ci va il numero 9;

- nell'ultima casella della seconda riga va, come sopra, il numero che, sommato a 6, dà lo stesso valore della somma 2+5, vale a dire che in quella casella ci va il numero 1.

A questo punto, una volta osservato che sono noti tutti i numeri della riga centrale, si ha: S=15. La prosecuzione è banale.

La risoluzione dei quadrati dal 2° al 6° è via via più complessa, ma sempre ad un livello accessibile agli studenti cui la proposta è rivolta. Per esempio, con riferimento all'ultimo quadrato, una volta indicato con a il numero da collocare nella prima casella della prima riga:

- nella casella centrale va il numero S-32;
- nell'ultima casella dell'ultima riga va il numero $S-(a+S-32)$, cioè $32-a$;
- nell'ultima casella della prima riga va il numero $S-(4+32-a)$, cioè $S+a-36$;
- nella prima casella dell'ultima riga va il numero $S-a-28$;

per cui, considerando i tre numeri della seconda diagonale, deve essere:

$$(S-a-28)+(S-32)+(S+a-36)=S\,,$$

da cui segue S=48.

Adesso, dopo qualche altra considerazione, si giunge al seguente quadrato:

a	$36-2a$	$12+a$
28	16	4
$20-a$	$2a-4$	$32-a$

Da esso si evince che deve essere:

$$2a-4>0,\ 20-a>0,\ 36a-2a>0,\ 32-a>0,\ \text{ ossia: } 2<a<18.$$

Ne consegue che ad a può essere assegnato qualsiasi valore intero compreso fra 3 e 17 inclusi. In realtà, i casi in cui a appartiene all'insieme $\{4, 8, 10, 12, 16\}$ devono essere esclusi poiché i 9 numeri da inserire non sono due a due diversi fra loro. Inoltre le seguenti coppie di valori di a: $\{3,17\}$, $\{5,15\}$, $\{6,14\}$, $\{7,13\}$, $\{9,11\}$ danno luogo a quadrati identici, a meno di scambi fra la prima e la terza riga. Per questo, in ultima analisi, i quadrati "diversi" sono soltanto 5, ottenuti per $a=3$, $a=5$, $a=6$, $a=7$, $a=9$.

- ESERCIZIO n. 6

Degli angoli interni di un poligono convesso esattamente 3 sono ottusi. Determinare il massimo numero di lati di un tale poligono.

RISOLUZIONE. Sia n il numero dei lati del poligono. Esattamente 3 dei suoi angoli interni sono ottusi, per cui, da una parte la loro somma è inferiore a $3\cdot180°$ e dall'altra i rimanenti n–3 angoli interni sono acuti o, al più retti, perciò la loro somma è, al massimo, (n–3)·90°. La somma degli angoli interni del poligono deve quindi essere minore di $3\cdot180°+(n-3)\cdot90°$.

D'altro canto questa somma misura $(n-2)\cdot180°$. Deve essere, dunque, soddisfatta la seguente relazione:

$$(n-2)\cdot180°<3\cdot180°+(n-3)\cdot90°.$$

Da qui segue $n<7$ e, di conseguenza, è 6 il massimo numero di lati cercato.

17. Dall'unità 22 – Rette e sistemi lineari

- ESERCIZIO n. 3 in paragrafo 22.5.3

Le tre piazze più importanti di una certa città sono disposte nei vertici A, B, C di un triangolo. Se si va dalla piazza A alla piazza B passando per C si percorrono 3,5 km; se si va da A a C passando per B si percorrono 2,3 km; se si va da B a C passando per A si percorrono 2,8 km. Determinare quanto distano tra loro le tre piazze.

Di per sé la risoluzione di questo problema è banale. Vogliamo mostrare tuttavia un procedimento risolutivo che esula dai canoni ordinari. In base ai dati del problema risulta (le misure sono ovviamente espresse in kilometri):

$$AC+BC=3{,}5;\quad AB+BC=2{,}3;\quad AB+AC=2{,}8.$$

Si ha pertanto: $2(AB+AC+BC)=8{,}6$; ossia: $AB+AC+BC=4{,}3$. E, di conseguenza:

$$AB=4{,}3-3{,}5=0{,}8;\quad AC=4{,}3-2{,}3=2;\quad BC=4{,}3-2{,}8=1{,}5.$$

- ESERCIZI proposti come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 22.6.2

La <u>prima</u> questione propone di dimostrare le seguenti proprietà:

PROPRIETÀ 1. Se due variabili reali positive hanno somma costante, il loro prodotto è massimo quando esse sono uguali.

PROPRIETÀ 2. Se due variabili reali positive hanno prodotto costante, la loro somma è minima quando esse sono uguali.

La loro dimostrazione è ricondotta sostanzialmente alla formula seguente:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy.$$

Ebbene, se x+y è costante, è evidente che xy è massimo quando x–y=0, cioè quando x=y. Parimenti, se xy è costante, x+y risulta minima quando x=y.

La <u>seconda</u> questione, mutuata dal progetto OCSE/PISA 2003, riguardante la valutazione degli studenti quindicenni, propone la risoluzione del seguente problema:

I lati di un piccolo parco triangolare hanno le seguenti misure: 10 m, 10 m, 12 m.

Il proprietario intende collocare nel parco un lampioncino che lo illumini totalmente, ma senza spreco. In quale posizione conviene collocare il lampione?

E se le misure dei lati fossero le seguenti: 5 m, 12 m, 13 m ?

Oppure le seguenti: 10 m, 10 m, 16 m ?

Si tratta di riuscire a capire che il lampione deve essere collocato nel circocentro del triangolo. Dopo di che bisogna riferire il piano del triangolo ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e determinare le coordinate di tale circocentro. Nel 1° caso (triangolo acutangolo) il circocentro è interno al triangolo, nel 2° (triangolo rettangolo) il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa, nel 3° caso (triangolo ottusangolo) il circocentro è esterno al triangolo e quindi il proprietario non ha la possibilità di disporre il lampione nel parco.

- ESERCIZIO n. 4 in "verifiche"

Di un poligono convesso si sa che la media aritmetica delle ampiezze dei suoi angoli interni, espresse in gradi sessagesimali, è 144°. a) Quanti lati ha il poligono? b) Qual è la somma dei suoi angoli interni?

RISOLUZIONE. Indicati con n il numero dei lati del poligono e con S la somma dei suoi angoli interni, si ha:

$$\frac{S}{n}=144°,\ \ S=(n-2)180°.$$

Basta risolvere il sistema delle due equazioni in n ed S.

18. Dall'unità 23 – Circonferenza e cerchio

- ESERCIZIO n. 1 presentato come laboratorio di matematica in chiusura del paragrafo n. 23.4

Sono date due circonferenze, i cui centri distano 8 cm e i cui raggi misurano 2 cm e 4 cm.

a) Servendoti di riga graduata e compasso, disegna una circonferenza di raggio 3 cm tangente alle due circonferenze date.
b) Esiste una sola di tali circonferenze?
c) Il raggio della circonferenza tangente alle due circonferenze assegnate può avere qualsiasi misura?

RISOLUZIONE. La circonferenza k di centro K abbia raggio 2 cm; la circonferenza c di centro C abbia raggio 4 cm. La distanza dei centri K e C sia di 8 cm (Fig. 25).

La circonferenza γ da costruire deve avere raggio 3 cm e risultare tangente ad entrambe le circonferenze k, c. Si tratta allora di trovare il centro di γ, cioè il punto O tale che:

$$KO = (2+3)\text{ cm} = 5\text{ cm}\ ,\ \ CO = (4+3)\text{ cm} = 7\text{ cm}\ .$$

Si descrive la circonferenza k' avente il centro in K e raggio 5 cm e la circonferenza c' avente il centro in C e raggio 7 cm. Siccome 5+7>8 le due circonferenze k' e c' sono secanti: siano O' e O" i loro punti comuni. La circonferenza γ' avente centro in O' e raggio 3 cm e la circonferenza γ" avente il centro in O" e raggio 3 cm risolvono il problema. Invece di 3 cm il raggio della circonferenza tangente alle due circonferenze date può avere una lunghezza di a cm tale che in ogni caso risulti: (2+a)+(4+a)>8, cioè a>1.

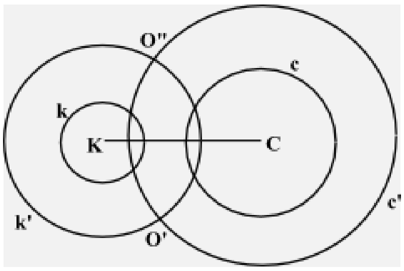

FIG. 25

- ESERCIZIO n. 3

Considerata una semicirconferenza C di diametro AB e centro O, detta t la tangente ad essa in A e condotta per un suo generico punto M, distinto da A e da B, la retta s tangente a C, indicare con P l'intersezione di s con t, con Q l'intersezione di s con la perpendicolare ad AB per O e con R la proiezione ortogonale di P su OQ.

a) Dimostrare che i due triangoli PRQ ed OMQ sono congruenti qualunque sia M.
b) Indicato quindi con r il raggio di C, dimostrare che:
   - se AP>r, il quadrilatero OMRP è un trapezio isoscele;
   - se AP<r, il quadrilatero ORMP è un trapezio isoscele.

RISOLUZIONE. I triangoli PRQ ed OMQ sono congruenti perché sono entrambi rettangoli ed hanno congruenti gli angoli $Q\hat{P}R$ e $M\hat{O}Q$ ed i lati PR ed OM. Di conseguenza:

$$PQ \cong OQ \text{ e } QR \cong QN \text{ e inoltre } P\hat{Q}R \cong O\hat{Q}M.$$

A questo punto si dimostra facilmente che:

- se AP>r allora $R\hat{P}O \cong M\hat{O}P$ e $P\hat{R}M \cong O\hat{M}R$.
  Sicché, chiamata α l'ampiezza dei primi due angoli e β quella degli altri due, con riferimento al quadrilatero OMRP si ha $2\alpha+2\beta=360°$, da cui segue $\alpha+\beta=180°$ e quindi le rette RM e PO sono parallele perché, tagliate dalla trasversale PR, formano angoli coniugati interni supplementari; di conseguenza il quadrilatero OMRP è un trapezio isoscele;
- se AP<r allora $R\hat{O}P \cong M\hat{P}O$ e $P\hat{M}R \cong O\hat{R}M$. Sicché ... (come sopra).

- ESERCIZIO n. 10

Due circonferenze sono tangenti internamente in un punto A. Condotta per A una secante comune, si dicano M ed N rispettivamente i punti in cui essa interseca ulteriormente la circonferenza esterna C e quella interna C'. Considerata poi la corda PQ di C tangente in N a C', si chiamino R l'ulteriore punto in cui AP interseca C' ed S quello in cui l'interseca AQ. Si dimostri che:

a) MP∥NR ed MQ∥NS; b) PQ∥RS.

RISOLUZIONE. Ipotizzando che i punti N e P si trovino dalla stessa parte rispetto alla retta diametrale condotta per A, si dicano H e K i punti in cui questa retta seca le circonferenze C e C' rispettivamente. Nel quadrilatero ARNK, inscritto in C', gli angoli in A e in N sono supplementari; così pure sono supplementari gli angoli in A e in M del quadrilatero APMQ, inscritto in C. Quindi $R\hat{N}H \cong P\hat{M}K$. D'altronde gli angoli $A\hat{N}H$ e $A\hat{M}K$ sono entrambi retti, quindi risulta $R\hat{N}A \cong P\hat{M}A$ e perciò le due rette RN e PM sono parallele. Ora, nel quadrilatero ARNS gli angoli in A e in N sono supplementari e nel quadrilatero APMQ sono supplementari gli angoli in A e in M. Quindi $R\hat{N}S \cong P\hat{M}Q$ e, in conseguenza di quanto provato prima, $A\hat{N}S \cong A\hat{M}Q$. Sicché anche NS è parallela ad MQ.

Il parallelismo tra PQ ed RS si desume dopo aver provato che $P\hat{Q}M \cong R\hat{S}N$ (entrambi gli angoli sono congruenti a $P\hat{A}M$). Di fatto, siccome $M\hat{Q}A \cong N\hat{S}A$ allora, per differenza, $P\hat{Q}A \cong R\hat{S}A$ e di conseguenza PQ∥RS.

NOTA BENE. È opportuno riprendere quest'esercizio dopo lo studio delle omotetie [1]. Sarà interessante notare come l'uso delle proprietà di queste trasformazioni geometriche semplifichi, fino quasi a banalizzarle, dimostrazioni che altrimenti – esattamente come in questo esercizio – risultano piuttosto complicate o, quanto meno, prolisse.

[1] Cfr.: Unità 30: Omotetie e similitudini nel piano.

- ESERCIZIO n. 15

Il quadrilatero ABCD, avente le diagonali perpendicolari, ha i vertici su una circonferenza di centro O. Detti M ed N rispettivamente i punti medi dei lati AD e BC, dimostrare che i triangoli AMO e CNO sono congruenti. Dopo aver esteso il ragionamento all'altra coppia di lati opposti AB e DC, dedurne che la distanza di O da un qualsiasi lato del quadrilatero è la metà della lunghezza del lato opposto a quello considerato.

RISOLUZIONE. $A\hat{O}M \cong A\hat{C}D$ poiché entrambi gli angoli sono la metà dell'angolo $A\hat{O}D$; $B\hat{D}C \cong C\hat{A}M$ perché complementari degli angoli congruenti $A\hat{C}D$ e $M\hat{O}A$; d'altronde $B\hat{D}C \cong N\hat{O}C$ poiché entrambi gli angoli sono la metà dell'angolo $B\hat{O}C$; quindi $O\hat{A}M \cong N\hat{O}C$. Siccome $OA \cong OC$, i due triangoli rettangoli AMO e CNO sono congruenti. In particolare:

$$OM \cong NC \text{ e } ON \cong AM. \text{ Ossia: } OM = \frac{1}{2} BC \text{ e } ON = \frac{1}{2} AD.$$

Analogamente per l'altra coppia di lati opposti AB e DC.

- ESERCIZIO n. 26

I raggi OA e OB di una medesima circonferenza sono perpendicolari. Sul prolungamento di OA, dalla parte di A, si prenda un punto C tale che $AC=\frac{2}{3}OA$ e per C si conduca la tangente al minore degli archi AB della circonferenza considerata e si chiami D il punto in cui essa seca la retta OB. Sapendo che il segmento CD è lungo 50a, dove a è una lunghezza assegnata, si trovi dapprima il raggio della circonferenza e successivamente il perimetro e l'area del quadrilatero ABDC.

RISOLUZIONE. Dapprima: $\overline{OC}=\overline{OA}+\frac{2}{3}\overline{OA}=\frac{5}{3}\overline{OA}=\frac{5}{3}\overline{OH}$, dove H è il punto di contatto di CD con la circonferenza. Quindi: $\overline{HC}=\frac{4}{3}\overline{OH}$ e $\overline{DC}=\frac{\overline{OC}^2}{\overline{HC}}=\frac{25}{12}\overline{OH}$. Pertanto: $\frac{25}{12}\overline{OH}=50a$, da cui: $\overline{OH}=25a$.
Da qui in poi nessuna difficoltà.

- ESERCIZIO n. 27

Un trapezio rettangolo è tale che la sua base maggiore contiene il diametro di un semicerchio, mentre gli altri lati sono tangenti ad esso. Le basi del trapezio sono lunghe 8 a e 4 a, dove a è una lunghezza data. La sua diagonale minore e i segmenti che ne congiungono il punto medio con gli estremi dell'altra diagonale dividono il trapezio in quattro triangoli: calcolare le loro aree.

RISOLUZIONE. L'altezza del trapezio, condotta per il vertice dell'angolo ottuso, forma due triangoli rettangoli congruenti: uno col lato obliquo e uno con la diagonale minore. Indicata con x (cm) la lunghezza di uno dei segmenti tangenti alla circonferenza condotti per il vertice dell'angolo ottuso, si può constatare che il lato obliquo del trapezio, uguale alla diagonale minore, è lungo $4+x$ (in cm ovviamente) mentre il raggio del cerchio, uguale all'altezza del trapezio, è lungo $x-4$. Pertanto, per il teorema di Pitagora, applicato ad uno dei due triangoli suddetti, risulta: $(x+4)^2 = 4^2 + (4-x)^2$, da cui segue $x=1$.
Il resto è banale.

- ESERCIZIO n. 32

Piero e Massimo sono due bravi ciclisti che fanno una gara ad inseguimento su una pista circolare lunga 500 m. Partono, come d'uso, da due posizioni diametralmente opposte. Piero viaggia alla velocità costante di 65 km/h e Massimo alla velocità costante di 62 km/h. Quanto dista Piero da Massimo 6 secondi prima di doppiarlo?

RISOLUZIONE. La lunghezza della pista è un dato irrilevante. Il problema equivale a chiedere quanto cammino percorre in 6 secondi un corpo che si muove alla velocità costante di $(65-62)$ km/h. Si ha:

$$\text{distanza} = 3 \text{ km/h} \times 6 \text{ s} = 3 \times (1000/3600) \text{ m/s} \times 6 \text{ s} = 5 \text{ m}.$$

19. Dall'unità 24 – Equazioni, sistemi e problemi di 2° grado

- ESERCIZIO n. 2 proposto in chiusura del paragrafo n. 24.2.1

Siano α e β le radici dell'equazione $P(x)=0$; siano invece α^2 e β^2 le radici dell'equazione $x^2+ax+b=0$.
Calcolare il valore di a+b, sapendo che:

a) $P(x)=x^2-3x-6$; b) $P(x)=2x^2-x-2$; c) $P(x)=3x^2+5x+1$.

RISOLUZIONE. Naturalmente l'esercizio può essere risolto calcolando dapprima i valori di α e β e poi quelli di α^2 e β^2; per passare quindi al calcolo di a e b e, di conseguenza alla loro somma: questo procedimento è estremamente noioso per le lungaggini di calcolo che comporta. Utilizzando le formule di Viète, il procedimento diventa invece abbastanza rapido. Ci occupiamo solo del caso a), dal momento che gli altri due sono analoghi.
Per le formule di Viète, si ha evidentemente: $\alpha^2+\beta^2=-a$ e $\alpha^2\beta^2=b$, perciò: $a+b=\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)$. Da qui segue in successione:

$$a+b = \alpha^2\beta^2 - [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta] = (\alpha\beta)^2 + 2\alpha\beta - (\alpha+\beta)^2 .$$

D'altro canto, ancora per le formule di Viète, è: $\alpha+\beta=3$ e $\alpha\beta=-6$. Pertanto, dopo aver sostituito:

$$a+b = (-6)^2 + 2(-6) - 3^2 = 15.$$

- ESERCIZIO n. 78

Due corpi, A e B, si muovono con velocità costanti su due rette perpendicolari, partendo contemporaneamente dallo stesso punto O. Sapendo che la velocità di A supera di 12 km/h quella di B e che, dopo 45 minuti dalla partenza, i due corpi distano 45 km, determinare le loro velocità.

RISOLUZIONE. Indicate con x, y le due semirette perpendicolari aventi la stessa origine O, sulle quali si muovono rispettivamente i corpi A e B, le leggi orarie dei due moti, ammesso di assumere uguale a 0 l'istante in cui i due corpi partono, sono: $x=V_At$, $y=V_Bt$. Siccome $V_A=V_B+12$, posto $V_B=V$, tali leggi assumono la forma seguente:

$$x = (V+12)\ t,\ \ y = V\ t.$$

La distanza AB tra i due corpi, nel generico istante t, è tale che:

$$\overline{AB}^2=x^2+y^2=\left((V+12)^2+V^2\right)\ t^2=\left(2V^2+24V+144\right)\ t^2.$$

Se ammettiamo che t sia espresso in ore (h) e consideriamo che 45 minuti equivalgono a $\frac{3}{4}$ d'ora, in questo istante deve risultare:

$$\left(2V^2+24V+144\right)\ \left(\frac{3}{4}\right)^2=45^2.$$

ossia, a conti fatti:

$$V^2+12V-1728 = 0.$$

Una volta risolta questa equazione e accettata la sola soluzione positiva $V=36$, si conclude che le velocità dei due corpi sono rispettivamente: $V_B=36$ km/h e $V_A=48$ km/h.

- ESERCIZIO n. 79

Due corpi, A e B, si muovono con velocità costanti su due rette perpendicolari. Sono partiti dallo stesso punto O ma B è partito 10 minuti prima di A. Sapendo che la velocità di A supera di 12 km/h quella di B e che, dopo 45 minuti dalla partenza di B, i due corpi distano 45 km, determinare le loro velocità.

RISOLUZIONE. L'impostazione di questo esercizio è come la precedente. Solo che adesso, siccome i due corpi non partono contemporaneamente, si assume uguale a 0 l'istante in cui parte B. Di modo che, osservato che 10 minuti equivalgono a $\frac{1}{6}$ di ora, le due leggi orarie, rispettivamente del corpo A e del corpo B, sono le seguenti:

$$x=(V+12)\left(t-\frac{1}{6}\right),\quad x=V\ t.$$

Ragionando come sopra e tenendo presente che l'istante in cui la distanza è di 45 km è $t = 45$ minuti $= 3/4$ h, si perviene alla seguente equazione risolvente:

$$65V^2+588V-142272 = 0.$$

Una volta risolta questa equazione e accettata la sola soluzione positiva $V\approx 42{,}5$ si conclude che le velocità dei due corpi sono rispettivamente: $V_B=42{,}5$ km/h e $V_A=54{,}5$ km/h.

- ESERCIZIO n. 81

Un'urna contiene 30 palline, che possono essere rosse o verdi, separate però in due compartimenti: in uno vi sono palline di plastica, nell'altro palline di vetro. In particolare, 5 palline sono di plastica rossa e 4 palline sono di vetro verde. Si estraggono due palline a caso, una di plastica ed una di vetro e si sa che è $\frac{11}{20}$ la probabilità che una di esse sia di plastica rossa o di vetro verde. Calcolare quante sono le palline di plastica e quante quelle di vetro.

RISOLUZIONE. Indicato con R l'evento "esce pallina di plastica rossa" e con V l'evento "esce pallina di vetro verde", risulta:

$$P(R\cup V)=P(R)+P(V)-P(R\cap V).$$

Posto uguale ad x il numero delle palline di plastica verde, quello delle palline di vetro rosso è evidentemente $30-(5+4+x)=21-x$; inoltre: il numero delle palline di plastica è $5+x$ e quello delle palline di vetro è $25-x$. Ragion per cui si ha:

$$P(R\cup V)=\frac{5}{5+x}+\frac{4}{25-x}-\frac{5}{5+x}\cdot\frac{4}{25-x}=\frac{125-x}{(5+x)(25-x)}\ ;$$

per i dati del problema deve essere: $P(R\cup V)=\frac{11}{20}$. Di modo che si ha la seguente equazione risolvente:

$$\frac{125-x}{(5+x)(25-x)}=\frac{11}{20}\ .$$

Una volta risolta questa equazione si ottiene $x=15$. La radice $75/11$ è evidentemente da scartare. Ragion per cui le palline di plastica sono 20 e quelle di vetro sono 10.

- ESERCIZIO n. 83

Paolo ha percorso i 720 km che separano casa sua dal luogo della villeggiatura ad una certa velocità media V. In seguito ad alcuni calcoli ha constatato che, se avesse viaggiato ad una velocità media superiore di 10 km/h rispetto a quella tenuta, avrebbe risparmiato esattamente 1 h di tempo. Calcolare la velocità tenuta da Paolo ed il tempo impiegato a compiere il percorso.

RISOLUZIONE. Il problema si riconduce facilmente al seguente sistema:

$$\begin{cases} V\,t=720 \\ (V+10)(t-1)=720 \end{cases}$$

Non è esattamente un sistema di 2° grado. Ma può essere ricondotto agevolmente al sistema seguente:

$$\begin{cases} V\,t=720 \\ V-10\,t+10=0 \end{cases}$$

- ESERCIZIO n. 88

Posto che P(z) indichi il binomio $az+b$, dove a, b sono numeri reali, con $a\neq 0$, determinare i valori di a, b per cui si ha identicamente:

$$P(P(x)) = P(x) + P(x+1).$$

RISOLUZIONE. Osserviamo, anzitutto, che si ha:

$$P(x) = ax+b,\ \ P(x+1) = a(x+1)+b,\ \ P(P(x)) = P(ax+b) = a(ax+b)+b.$$

Deve, pertanto, sussistere la seguente uguaglianza:

$$a(ax+b)+b = (ax+b) + (a(x+1)+b),$$

vale a dire, dopo aver sviluppato e ordinato:

$$(a^2-2a)\,x + (ab-a-b) = 0.$$

Affinché questa uguaglianza sia identicamente vera, devono essere soddisfatte le due seguenti condizioni:

$$a^2 - 2a = 0,\quad ab - a - b = 0.$$

Risolvendo il sistema di queste due equazioni e tenendo presente che $a\neq 0$, si ottiene: $a=b=2$.

- ESERCIZIO n. 118

Le misure dei cateti di un triangolo rettangolo, espresse in metri, sono numeri interi tali che il quadrato della loro differenza supera di un numero quadrato il numero che esprime la misura del cateto minore.

a) Determinare, attraverso le misure dei cateti, tutti i triangoli la cui area è compresa fra 10 m² e 100 m².

b) Fra i triangoli trovati ce n'è qualcuno le misure dei cui lati formano una terna pitagorica?

RISOLUZIONE. Indichiamo con x, y le misure, espresse in metri, dei cateti del triangolo, essendo x, y due numeri interi positivi tali che $x>y$. La traccia del problema suggerisce la seguente equazione:

$$(x-y)^2 = y + a^2$$

dove a è un intero positivo.

a) Dalla relazione precedente, prendendo la sola radice positiva, si ottiene il seguente valore di x:

$$x = y + \sqrt{y+a^2}\,.$$

Affinché x sia un intero il numero $y+a^2$ deve essere un quadrato perfetto, vale a dire deve esistere un numero intero b tale che $y+a^2=b^2$ ossia $y=b^2-a^2$. Sotto questa condizione è $x=y+b$. Compiliamo allora la seguente tabella (è utile un foglio elettronico) dove è anche indicata l'area S del triangolo, espressa in metri quadrati:

a	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6
b>a	2	3	4	3	4	5	4	5	5	6	6	7	7
$y=b^2-a^2$	3	8	15	5	12	21	7	16	9	20	11	24	13
x=y+b	5	11	19	8	16	26	11	21	14	26	17	31	20
S=xy/2	7,5	**44**	142,5	**20**	**96**	273	**38,5**	168	**63**	260	**93,5**	372	130

È inutile indagare per valori di a, b diversi da quelli elencati nella tabella, dal momento che si otterrebbero comunque aree maggiori di 100 m^2. Cosa che si spiega agevolmente.
Dalla tabella si evince che vi sono 6 triangoli la cui area è compresa fra 10 m^2 e 100 m^2 e sono quelli i cui cateti (x,y), espressi in metri, hanno i seguenti valori: (11,8), (8,5), (16,12), (11,7), (14,9), (17,11).

b) Tra le soluzioni trovate ce n'è una, ed una soltanto, che porta ad una terna pitagorica ed è la soluzione x=16, y=12; per la quale l'ipotenusa del triangolo, sempre in metri, è z=20.

- ESERCIZIO n. 119

Nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, un numero naturale che termina per 5 si può mettere nella forma seguente: $10a+5$, dove a è un numero naturale.

a) Dimostrare che il quadrato di un tale numero è un numero che si può mettere nella forma seguente: $100a(a+1)+25$. Verificare con qualche esempio particolare.

b) Un numero N di 4 cifre è un quadrato perfetto e termina per 25. Se il numero formato dal gruppo delle prime due cifre è moltiplicato per 6, si ottiene ancora un numero M di 4 cifre che è un quadrato perfetto e termina per 25. Trovare N ed M.

RISOLUZIONE (parziale). Tralasciamo il punto a) e occupiamoci del punto b).
Descriviamo due procedimenti, uno semplice, al limite della banalità, ed uno complicato.
Riguardo al primo procedimento si tratta semplicemente di costruire una tabella dei numeri che terminano per 5 ed hanno come quadrato un numero di 4 cifre. La tabella è la seguente:

n	35	45	55	65	75	85	95
n^2	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025

È facile scoprire che i due numeri cercati sono $N=1225$ ed $M=7225$.
Andiamo ad occuparci adesso del procedimento complicato.
I numeri N ed M hanno la forma seguente: $N=100a(a+1)+25$, $M=100b(b+1)+25$, essendo a, b numeri naturali tali che $3\le a<b\le 9$. Il gruppo delle prime due cifre del numero N è il numero $a(a+1)$, quindi il numero M è tale che: $M=600a(a+1)+25$. Deve essere perciò: $600a(a+1)+25=100b(b+1)+25$, vale a dire:

$$b(b+1)=6a(a+1) \quad \text{ossia:} \quad b^2+b-6a(a+1)=0\,.$$

Si tratta di vedere quali soluzioni ammette quest'equazione nell'incognita b, tenendo presente che sia b sia a sono numeri naturali tali che $3\le a<b\le 9$. Intanto è chiaro che, affinché b sia un numero naturale, condizione necessaria è che il discriminante dell'equazione sia un quadrato perfetto. Constatiamo che questo discriminante è $\Delta=1+24a(a+1)$ e, operando tutti i possibili tentativi (a=3,4,5,6,7,8), si trova che solo per a=3 esso è un quadrato perfetto e precisamente $\Delta=289=17^2$. Ne consegue che l'unica equazione che può fornire un valore accettabile e quella che si ottiene per a=3, nel qual caso, risolvendo l'equazione si trovano due valori di b: 8 e –9, ma solo il primo è accettabile. In definitiva i due numeri cercati sono:

$$N=100\cdot 3\cdot 4+25=1225 \quad \text{e} \quad M=100\cdot 8\cdot 9+25=7225.$$

20. Dall'unità 25 – Disequazioni di 2° grado

Nell'unità 25, n. 25.2.3, del testo base, abbiamo accennato alla possibilità di studiare il segno di un trinomio di 2° grado con metodo algebrico, con un metodo cioè che prescinde dalla rappresentazione grafica del trinomio, non solo nelle conclusioni ma anche nella dimostrazione. Qui ce ne vogliamo occupare diffusamente a beneficio di chi ne fosse interessato.

Sia allora il trinomio ax^2+bx+c, dove a, b, c sono numeri reali assegnati con $a\neq0$. Distinguiamo tre situazioni a seconda del segno del suo discriminante $\Delta=b^2-4ac$.

- Sia **Δ<0**. È noto (cfr.: unità 24, n. 24.1.2) che si ha:

  $$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

  Siccome l'espressione dentro le parentesi quadre è positiva per ogni x reale, possiamo concludere che:
  il trinomio assume lo stesso segno di a per ogni x reale.
- Sia **Δ=0**. In virtù della stessa formula precedente si ha:

  $$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

  Siccome il quadrato al secondo membro è positivo per ogni x reale, tranne che per $x=-b/2a$, in cui il trinomio è nullo, possiamo concludere che:
  il trinomio assume lo stesso segno di a per ogni x reale tranne che per x=–b/2a .
- Sia **Δ>0**. Chiamate x_1 e x_2, con $x_1<x_2$, gli zeri (reali) del trinomio, è noto (cfr.: unità 24, n. 24.2.2) che si ha:

  $$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\,.$$

  Per $x<x_1$ e per $x>x_2$ i due binomi $x-x_1$ e $x-x_2$ sono concordi e pertanto il loro prodotto è positivo. Invece per $x_1<x<x_2$ i due binomi sono discordi e pertanto il loro prodotto è negativo. Possiamo concludere allora che:
  il trinomio assume lo stesso segno di a per valori esterni all'intervallo $]x_1,\,x_2[$ e segno opposto a quello di a per valori interni a quell'intervallo.

21. Dall'unità 27 – Nozioni di calcolo combinatorio. Il binomio di Newton.

- ESERCIZIO n. 20.

Nell'usuale sistema di numerazione decimale:

a) Quante sono le coppie (non ordinate) di numeri naturali minori di 10?

b) Quante di queste coppie sono formate da numeri non consecutivi?

c) Quanti sono i numeri di tre cifre tutte dispari? (N.B.: il numero tredici va pensato nella forma 13 e non 013 e così in tutti i casi analoghi)

d) Quanti sono i numeri di tre cifre in cui almeno una cifra è pari?

RISOLUZIONE.

Le risposte alle domande a) e b) sono nell'ordine: 45 e 36.

Per rispondere alla domanda c), bisogna osservare che le cifre dispari sono 5 e calcolare in quanti modi possono essere disposte a 3 a 3, anche ripetendole: questo numero è 5^3, cioè 125.

La risposta alla domanda d) richiede di sapere quanti numeri di tre cifre si possono formare con le nove cifre del sistema decimale e togliere da tale numero il numero dei numeri formati da tre cifre tutte dispari. Si trova: Il primo numero è dato dal numero dei numeri che vanno da 100 a 999, estremi inclusi, e tale numero è 999–99=900. Il secondo è 125, come già è stato calcolato. Di conseguenza il numero cercato è 990–125=775.

- ESERCIZIO n. 47 (proposto come LABORATORIO DI MATEMATICA)

Mediante un idoneo strumento di calcolo automatico si può controllare che lo sviluppo di:

- 24! presenta 4 zeri finali;
- 25! presenta 6 zeri finali;
- 124! presenta 28 zeri finali;
- 125! presenta 31 zeri finali.

Prova, discutendone in classe con i tuoi compagni ed eventualmente con l'aiuto del professore, a darne una spiegazione razionale. Prova inoltre a generalizzare determinando il numero degli zeri finali di n!, dove n è un qualsiasi numero naturale.

Calcola quindi quanti sono gli zeri finali dei numeri 200! e 1000!

Risolvi infine le seguenti questioni:

a) Esiste un numero naturale n tale che n! termini con 5 zeri?

b) Qual è il più piccolo numero naturale n tale che n! termini con 7 zeri?
c) Qual è il più grande numero naturale n tale che n! termini con 7 zeri?

RISOLUZIONE. Nell'usuale sistema di numerazione un numero N termina con k zeri se è divisibile per 10^k, cioè per $2^k \cdot 5^k$. Quindi N, scomposto in fattori primi, deve avere la forma seguente: $N=a \cdot 2^k \cdot 5^k$, dove a è un numero naturale non divisibile né per 2 né per 5.
Ora è evidente che il numero n! presenta almeno una volta il fattore 2 se è $n \geq 2$ e presenta almeno una volta il fattore 5 se è $n \geq 5$. Quindi è d'obbligo indagare sui numeri n non minori di 5. D'altro canto, per tali numeri, il numero $N=n!$ contiene il fattore 2 molte più volte del fattore 5. Per esempio, il numero $5!=120=2^3 \cdot 3 \cdot 5$ presenta 3 volte il fattore 2 ed appena una volta il fattore 5. Pertanto, al fine di stabilire con quanti zeri termina il numero $N=n!$, è sufficiente stabilire quante volte compare in esso il fattore 5, senza preoccuparci del fattore 2, che certamente compare un numero di volte maggiore.
Ora, siccome $n!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, si capisce che la parte intera del quoziente $n/5$ indica quanti dei termini $1, 2, 3,$ ... $n-1$, n presentano almeno una volta il fattore 5. Tra questi termini, però, se n è sufficientemente grande, ce ne potrebbero essere di quelli che presentano almeno 2 volte il fattore 5 (per esempio $25=5^2$) e questi termini sono dati dalla parte intera del quoziente $n/5^2$. Sono poi dati dalla parte intera del quoziente $n/5^3$ i termini che presentano almeno 3 volte il fattore 5. E, così via, sono $n/5^k$ i termini che contengono il fattore 5 esattamente k volte, essendo k il massimo numero naturale tale che 5^k non supera n.
A questo punto, ricordando che la parte intera del generico numero x si indica solitamente con [x], possiamo concludere.
Il numero degli zeri con cui termina il numero n! è dato dalla seguente espressione:

$$\left[\frac{\mathbf{n}}{5}\right]+\left[\frac{\mathbf{n}}{5^2}\right]+\left[\frac{\mathbf{n}}{5^3}\right]+\cdots+\left[\frac{\mathbf{n}}{5^{\mathbf{k}}}\right]$$

dove k è il massimo numero naturale tale che $5^{\mathbf{k}}$ non supera n.
Così, a titolo di esempio:

- 24! presenta 4 zeri finali giacché si ha $\left[\frac{24}{5}\right]=4$ e 1 è il massimo numero tale che 5^1 non supera 24. Infatti: $5^2>24$.
- 25! presenta 6 zeri finali giacché si ha $\left[\frac{25}{5}\right]+\left[\frac{25}{5^2}\right]=6$ e 2 è il massimo numero tale che 5^2 non supera 25.

Lasciamo a chi legge di spiegare perché 124! ha 28 zeri finali e 125! termina con 31 zeri e di determinare con quanti zeri terminano i numeri 200! e 1000!. Così come lasciamo a che legge la risoluzione delle ultime tre questioni.

22. PROBLEMI VARI, CON ALTO COEFFICIENTE DI DIFFICOLTÀ.

A) Sia la seguente equazione nell'incognita x, nella quale a, b sono numeri primi (positivi):

$$3\,x^2-a\,x+b=0\,.$$

Determinare le sue radici sapendo che sono numeri razionali.

RISOLUZIONE. Descriviamo il procedimento che ci pare il più economico, ma non è l'unico procedimento possibile. Indicate con x' e x" le radici dell'equazione, in virtù di una delle formule di Viète, risulta: $x'x''=b/3$. Ora, siccome b è un numero primo, i casi possibili affinché si verifichi l'ultima uguaglianza, sono due:

1) $x'=1,\ x''=b/3$; 2) $x'=1/3,\ x''=b$.

Nel primo caso, siccome una radice dell'equazione è 1, deve essere: $3-a+b=0$, da cui segue: $a=b+3$. Bisogna considerare due situazioni, a seconda che b sia un numero dispari o pari.
Se b è un numero dispari, a $(=b+3)$ è un numero pari maggiore di 2 e perciò non può essere primo. Situazione non accettabile.
Se b è un numero pari, essendo primo, non può essere che il numero 2. In questo caso $a=2+3=5$. Situazione accettabile, nella quale (essendo $a=5$ e $b=2$) l'equazione diventa:

$$3\,x^2-5\,x+2=0\,,\quad \text{da cui segue:}\quad x=\frac{5\pm 1}{6}=\begin{cases}1\\2/3\end{cases}.$$

Ragionando in maniera analoga nel secondo caso, l'equazione diventa:

$$3\,x^2-7\,x+2=0\,,\quad \text{da cui segue:}\quad x=\frac{7\pm 5}{6}=\begin{cases}2\\1/3\end{cases}.$$

B) I due problemi seguenti sono mutuati uno da Michele Pellerey [2], l'altro da George Polya [3].

Cinque quadrati uguali sono disposti a croce (Fig. 26).

1) Trasformare la croce in un quadrato avente la stessa area.
2) Trasformare la croce in un rettangolo avente la stessa area e tale che la dimensione maggiore sia il doppio della minore.

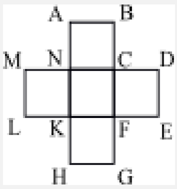

FIG. 26

RISOLUZIONE.

- Il problema 1) non presenta eccessive difficoltà e si potrebbe pervenire alla sua soluzione anche per semplici tentativi. Ciò non di meno noi preferiamo seguire una via più razionale.

Osserviamo allora che, indicata per comodità con a la lunghezza dei lati dei 5 quadrati uguali, l'area della croce è evidentemente $5a^2$. Ragion per cui il quadrato da costruire ha lato x tale che $x^2=5a^2$. Possiamo constatare che, potendo scrivere anche $x^2=a^2+(2a)^2$, il lato del quadrato che cerchiamo è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti a e $2a$. A questo punto il gioco è fatto: il lato del quadrato è il segmento AL, ipotenusa del triangolo rettangolo AKL, i cui cateti sono $LK=a$ e $AK=2a$ (Fig. 27). E il quadrato cercato è subito costruito: è il quadrato ALGD.

Osserviamo che, una volta capito qual è il quadrato, non solo la sua costruzione è banale, ma risulta elementare dimostrare che esso è equivalente alla croce, senza fare considerazioni di natura algebrica: basta constatare che i due triangoli ANP e LMP sono equivalenti. Lasciamo a chi legge di trarre le conclusioni.

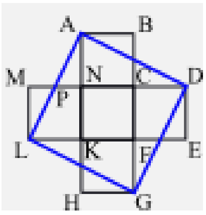

FIG. 27

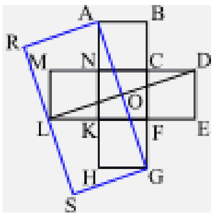

FIG. 28

- Leggermente più complessa risulta la risoluzione del problema 2).

Procediamo anche qui con considerazioni preliminari di tipo algebrico. Al riguardo osserviamo che se la dimensione maggiore del rettangolo è x, quella minore è $x/2$ e la sua area è $x^2/2$. Deve dunque risultare: $x^2=10a^2$. Possiamo constatare che, potendosi scrivere anche $x^2=a^2+(3a)^2$, il lato maggiore del rettangolo è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti a e $3a$. Esso è pertanto il segmento AG, ipotenusa del triangolo rettangolo ABG, i cui cateti sono $AB=a$ e $BG=3a$ (Fig. 28). L'altro lato del rettangolo è lungo ovviamente $3a/2$. Considerato ora che AG e LD sono le diagonali di un quadrato e sono perciò uguali e perpendicolari e si bisecano, si capisce che il lato minore del rettangolo è uguale e parallelo ad LO.

Anche adesso, una volta compreso qual è il rettangolo, la sua costruzione è semplice. Un po' più difficile è dimostrare, senza ricorrere a considerazioni di tipo algebrico, che il rettangolo ha la stessa area della croce. A questo riguardo occorre dimostrare che i poligoni concavi ANMLR e LKHGS sono equivalenti ai poligoni concavi AODCB e GODEF. Lasciamo a chi legge di spiegare perché e di trarre le debite conclusioni.

C) Nell'unità 7, n.7.9.6, del testo base, si propone, fra gli esercizi collocati alla fine del paragrafo medesimo, la dimostrazione di alcune proprietà del triangolo isoscele e precisamente:

[2] Michele Pellerey, *Le competenze – Che cosa sono*, in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, n.5, 2015, organo del Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, pag. 517 e seg.

[3] George Polya, *La scoperta matematica*, vol. I, Milano, Feltrinelli, ed. 1982, pagg. 44-45 e 180.

In ogni triangolo isoscele:
- le altezze relative ai lati uguali sono uguali;
- le mediane relative ai lati uguali sono uguali;
- le bisettrici relative ai lati uguali sono uguali.

Si tratta di un esercizio relativamente semplice, su cui non ci soffermiamo, lasciando a chi legge l'onere della dimostrazione.
Noi vogliamo invece occuparci delle proposizioni che invertono le tre proprietà, vale a dire:

Un triangolo è isoscele se ha uguali (1) due altezze oppure (2) due mediane oppure (3) due bisettrici.

Le dimostrazioni di queste proprietà hanno coefficienti di difficoltà non comparabili fra loro. In effetti, mentre la dimostrazione della prima proprietà è ancora del tutto elementare, lo è un po' meno quella della seconda, anche se ancora accessibile. Invece la dimostrazione della terza proprietà è veramente un rompicapo che ha messo e mette in difficoltà matematici navigati. Pare che una dimostrazione di questa proprietà, s'intende con gli strumenti della geometria sintetica, sia avvenuta per la prima volta non più di due secoli fa.
È sulle dimostrazioni di queste tre proprietà che intendiamo soffermarci.

- *Proprietà 1*. **Se un triangolo ha due altezze uguali allora è isoscele**.

Dimostrazione. Nel triangolo ABC, che provvisoriamente supponiamo acutangolo, siano BH e CK le due altezze uguali (Fig. 29a). I triangoli BHC e CKB sono uguali perché entrambi rettangoli con l'ipotenusa BC in comune e i cateti BH e CK uguali. Di conseguenza sono uguali gli angoli $B\hat{C}H$ e $C\hat{B}K$. Come dire che sono uguali gli angoli in C e in B del triangolo ABC, che pertanto è isoscele sulla base BC.
La disamina dei casi in cui il triangolo è rettangolo o ottusangolo è lasciata a chi legge.

- *Proprietà 2*. **Se un triangolo ha due mediane uguali allora è isoscele**.

Dimostrazione. È necessaria la conoscenza della seguente proprietà delle mediane di un triangolo:

Le mediane di ogni triangolo passano per uno stesso punto (chiamato baricentro), il quale divide ciascuna mediana in due parti, delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra. [4]

Diamo per acquisita questa proprietà e procediamo con la dimostrazione della proprietà 2.
Considerato allora il triangolo ABC, siano BM e CN le due mediane uguali e sia G il loro punto comune (Fig. 29b). Per la proprietà testé enunciata si ha:

$$\mathrm{BG}=\frac{2}{3}\mathrm{BM},\quad \mathrm{GM}=\frac{1}{3}\mathrm{BM},\quad \mathrm{CG}=\frac{2}{3}\mathrm{CN},\quad \mathrm{GN}=\frac{1}{3}\mathrm{CN}.$$

Di conseguenza: $\mathrm{BG}=\mathrm{CG}$ e $\mathrm{GN}=\mathrm{GM}$. I due triangoli BGN e CGM sono pertanto uguali per il 1° criterio di uguaglianza e dunque $\mathrm{BN}=\mathrm{CM}$. Ma, essendo M punto medio di AC ed N punto medio di AB, è evidentemente AC=AB.
Il triangolo ABC è perciò isoscele sulla base BC.

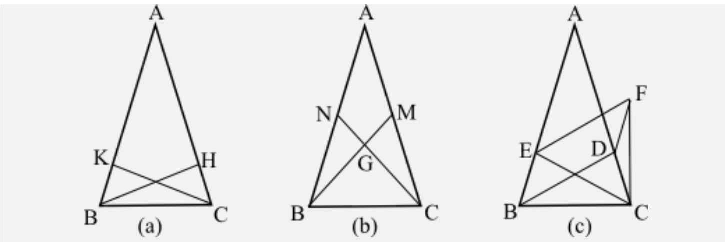

FIG. 2

- *Proprietà 3*. **Se un triangolo ha due bisettrici uguali allora è isoscele**.

Dimostrazione. Come abbiamo detto sopra, riportiamo una dimostrazione in ambito di geometria sintetica. Detto per inciso, sembra che di dimostrazioni diverse di questa proprietà ce ne siano almeno una sessantina. Quella da noi riprodotta è forse la prima ed è dovuta allo svizzero **Jakob Steiner** (1796-1863), ritenuto il più grande geometra dai tempi del greco Apollonio di Perga (III sec. a.C.).

---

[4] Confronta Unità 18: Retta cartesiana. Vettori e traslazioni nel piano cartesiano, in coda al paragrafo 18.3.4.

Considerato allora il triangolo ABC, siano BD e CE le due bisettrici uguali (Fig. 29c). Se fosse BE=CD i due triangoli BCD e CBE sarebbero uguali e, di conseguenza, sarebbero uguali gli angoli $B\hat{C}D$ e $C\hat{B}E$ ed il triangolo ABC sarebbe isoscele sulla base BC.
Basta perciò dimostrare che è BE=CD per concludere che il triangolo ABC è isoscele. Lo facciamo ragionando per assurdo, dimostrando che non può essere né BE>CD né CD>BE.
Supponiamo dapprima che sia BE>CD.
Nei due triangoli BCE e CBD, aventi due lati ordinatamente uguali (BC in comune e CE=BD), essendo BE>CD risulta $B\hat{C}E>C\hat{B}D$.
Costruiamo ora il punto F in modo che il quadrilatero convesso BDFE sia un parallelogramma e uniamo F con C.
Siccome $D\hat{B}E=E\hat{F}D$ e $E\hat{C}A>E\hat{B}D$ allora $E\hat{C}A>E\hat{F}D$.
Siccome inoltre BE>CD e BE=DF, risulta DF>CD e, di conseguenza, $D\hat{C}F>D\hat{F}C$.
Cosicché si avrebbe: $E\hat{C}A+D\hat{C}F>E\hat{F}D+D\hat{F}C$, ossia: $E\hat{C}F>E\hat{F}C$.
Ma questa conclusione è assurda dal momento che il triangolo ECF, avendo EF=EC giacché entrambi uguali a BD, è isoscele sulla base CF. Quindi non può essere BE>CD.
In modo analogo si esclude che possa essere CD>BE.
Rimane in piedi l'unica possibilità che sia BE=CD e quindi il triangolo ABC è isoscele.

D) PROBLEMA. I punti di coordinate (x,y), considerati in un piano cartesiano (Oxy), soddisfano alla seguente equazione:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

essendo n un numero naturale.
Spiegare perché esattamente 3 punti hanno coordinate intere positive quando n è un numero primo, mentre tali punti sono più di 3 quando n è un numero composto.

RISOLUZIONE. Se x, y sono numeri positivi (interi), deve risultare:

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{n}\,,\quad \frac{1}{y}<\frac{1}{n}\qquad \text{e perciò:}\quad x>n,\;\; y>n\,.$$

Esistono pertanto due numeri interi positivi u, v tali che: $x=n+u$, $y=n+v$. L'equazione assegnata diventa:

$$\frac{1}{n+u}+\frac{1}{n+v}=\frac{1}{n}\qquad \text{ossia:}\quad uv=n^2.$$

Ora, se n è un numero primo solamente le 3 coppie ordinate $(1,n^2)$, (n,n), $(n^2,1)$ soddisfano all'equazione (prova per n=2 e per n=3). Ne consegue che i punti cercati sono solamente quelli che hanno le seguenti coordinate: $(n+1,n+n^2)$, $(2n,2n)$, $(n+n^2,n+1)$.
Se n è un numero composto, per esempio $n=a^2$, oltre ai tre punti suddetti, soddisfano all'equazione, che adesso diventa $uv=a^4$, anche le seguenti coppie ordinate: (a,a^3), (a^2,a^2), (a^3,a).
Di conseguenza, passando al caso generale, i punti con coordinate intere positive sono almeno 6 (prova per n=4 e per n=6).

E) PROBLEMA. Due traghetti fanno la spola tra i porti di Messina e Villa San Giovanni. Viaggiano a velocità costanti, ma diverse fra loro, su rotte parallele alla congiungente i due porti. Il traghetto più veloce parte da Messina nello stesso istante in cui l'altro parte da Villa San Giovanni. I due traghetti s'incrociano a 3,4 km dal porto più vicino. Un volta raggiunte le rispettive mete si fermano entrambi per lo stesso tempo e ripartono, incrociandosi di nuovo a 2 km dal porto più vicino.

a) Qual è la distanza fra i due porti?
b) È vero che il rapporto fra le due velocità è approssimativamente uguale al rapporto fra la diagonale ed il lato di uno stesso quadrato?

RISOLUZIONE. Si tratta di una questione con un alto coefficiente di difficoltà. La figura sottostante (Fig. 30) non è indispensabile.
a) È invece fondamentale l'altra figura (Fig. 31), che schematizza la situazione. In essa il tratto rosso rappresenta il percorso del traghetto più veloce, quello che parte da Messina e che indichiamo con A; il tratto blu rappresenta il

traghetto più lento, quello che parte da Villa S. Giovanni e che indichiamo con B.

FIG. 30

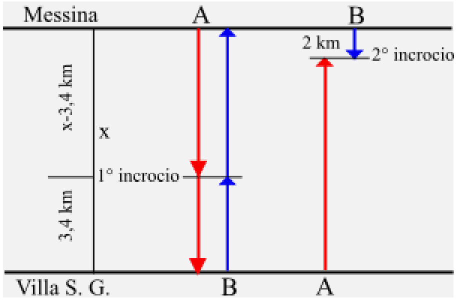

FIG. 31

Indichiamo con x la distanza dei due porti.
Osserviamo che il tragitto complessivo compiuto dai due traghetti, tra l'istante della loro partenza dai rispettivi porti e il 1° incrocio, è uguale proprio ad x, mentre il loro tragitto complessivo fra il 1° e il 2° incrocio è 2x. Questo significa che il tragitto di ciascun traghetto tra il 1° e il 2° incrocio è il doppio di quello che lo stesso traghetto ha compiuto fra la partenza e il 1° incrocio.
Ragioniamo sul traghetto A. Tra la partenza e il 1° incrocio esso ha compiuto x–3,4 km, mentre tra il 1° e il 2° incrocio ha compiuto 3,4+(x–2) km. Deve essere pertanto:

$$3{,}4 + (x - 2) = 2 \cdot (x - 3{,}4) \quad \text{da cui segue:} \quad x = 8{,}2.$$

È pertanto di 8,2 km la distanza fra i due porti.
[Se avessimo ragionato sul traghetto B, considerato che esso ha compiuto 3,4 km fra la partenza e il 1° incrocio ed ha compiuto (x–3,4)+2 km fra il 1° e il 2° incrocio, ponendo questo secondo valore uguale al doppio del primo avremmo ottenuto ancora e ovviamente x=8,2.]
b) Riguardo al rapporto delle velocità u e v del traghetto A e del traghetto B rispettivamente, bisogna ricordare che esse, pur differenti fra loro, sono costanti. Ragion per cui il loro rapporto è uguale al rapporto dei percorsi compiuti dai due traghetti in un medesimo tempo. Se questo tempo è l'intervallo che intercorre fra la partenza dei due traghetti e il 1° incrocio, considerato che, in questo intervallo di tempo, il traghetto A ha compiuto 8,2–3,4 km = 4,8 km, mentre il traghetto B ha compiuto 3,4 km, si ha:

$$\frac{u}{v} = \frac{4{,}8}{3{,}4} \approx 1{,}41\,.$$

Valore approssimativamente uguale al rapporto $\sqrt{2}$ fra la diagonale ed il lato di un quadrato.

Il problema può essere risolto con un altro procedimento, forse più "tradizionale" del primo, ma non più semplice. Lo descriviamo relativamente al solo punto a).
a) Indichiamo ancora con x km la distanza tra i due porti, con u la velocità del traghetto più veloce e con v la velocità dell'altro traghetto. Nell'istante t′ (contato dall'istante in cui i due traghetti partono dai rispettivi porti) in cui i traghetti s'incrociano la prima volta, il traghetto meno veloce ha percorso evidentemente 3,4 km, mentre l'altro traghetto ha percorso (x–3,4) km. Risulta perciò:

$$x - 3{,}4 = ut',\ \ 3{,}4 = vt' \ \text{ e da qui: } \ \frac{x - 3{,}4}{3{,}4} = \frac{u}{v}.$$

Il traghetto più lento giunge nel porto di Messina con un ritardo t rispetto al momento in cui l'altro traghetto giunge nel porto di Villa S. Giovanni, e questo medesimo ritardo conserva alla ripartenza, dopo la sosta che ha la stessa durata per entrambi i traghetti. Cosicché, indicato con t″ l'istante in cui essi s'incrociano la seconda volta (t″ è contato dal momento in cui riparte da Villa S. Giovanni il traghetto più veloce), risulta:

$$x - 2 = ut'',\ \ 2 = v(t'' - t)\,.$$

Occupiamoci adesso di t. Se indichiamo con t_1 il tempo che impiega il traghetto più veloce a compiere l'intera traversata e con t_2 il tempo che impiega l'altro traghetto, risulta chiaramente:

$$t_1 = \frac{x}{u} \ \text{ e } \ t_2 = \frac{x}{v} \ \text{ e pertanto: } \ t = t_2 - t_1 = \frac{x}{v} - \frac{x}{u} = \frac{x}{uv}(u - v)\,.$$

In questo modo la seconda delle due relazioni precedenti diventa:

$$2 = v\left(t'' - \frac{x}{uv}(u - v)\right).$$

Dal confronto fra questa relazione e la prima delle due suddette si desume la seguente relazione:

$$\frac{2(x-1)}{x+2} = \frac{u}{v}.$$

Confrontando questo valore di u/v con quello trovato in precedenza, si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{x-3{,}4}{3{,}4} = \frac{2(x-1)}{x+2}.$$

Risolta la quale ed escludendo la radice nulla, si trova $x = 8{,}2$. Ovviamente come prima.

NOTA BENE. La distanza 8,2 km non è forse la distanza esatta fra i due porti, ma questo è irrilevante ai fini del problema. I dati non sono sufficienti per calcolare la durata della traversata né le velocità dei due traghetti.