Matematica (Gratuita)
Per Scuole Superiori

INTEGRAZIONE 2
(UNITÀ 28-88)

GUIDA ALLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI … COMPLICATI

1. Introduzione.

Alcuni dei problemi proposti nelle 61 unità in cui si articola il prodotto on-line

Matematica (gratuita) per le scuole superiori

richiedono un impegno molto severo da parte degli studenti ed una concentrazione particolarmente alta. Osiamo affermare che qualcuno di quei problemi potrebbe mettere in seria difficoltà molti studenti se non tutti addirittura.
Si tratta di problemi di varia natura: a volte sono problemi non standard, altre volte problemi ordinari ma la cui risoluzione è abbastanza complessa, altre volte infine problemi familiari ma con insidie particolari che potrebbero costituire un ostacolo insormontabile. Anche qualche esercizio può presentare più di un'insidia.
L'aiuto del professore può essere certamente utile per la risoluzione di tali questioni. Ma probabilmente il tempo a disposizione del docente non permette di soffermarsi a lungo su di esse per un'adeguata riflessione, col rischio che molte cose potrebbero rimanere oscure.
Proprio al fine di evitare questo inconveniente ci permettiamo qui un'analisi sufficientemente approfondita di quei problemi ed esercizi, fornendo di alcuni una risoluzione completa, di altri una traccia di risoluzione, di altri ancora qualche semplice suggerimento. Questi problemi (o esercizi) sono contrassegnati nel testo base col simbolo ®. Il lettore ne farà l'uso che ritiene più appropriato alle sue esigenze. Altri problemi, particolarmente interessanti, sono addirittura proposti e risolti nello stesso testo base, all'interno della sezione "verifiche".
Approfittiamo dell'occasione per dimostrare teoremi e/o formule che nello sviluppo teorico non erano state dimostrate, per lo più perché non accessibili a tutti. Chi ne fosse interessato può cimentarsi nello studio di tali dimostrazioni

Rbadiamo che eventuali comunicazioni possono essere inviate al seguente indirizzo:
mategratis16@gmail.com

2. Dall'unità 29 – Poligoni inscrivibili e circoscrivibili

- ESERCIZIO n. 22.

Sia ABC un qualsiasi triangolo e siano P, Q, R tre punti arbitrari presi internamente ai lati BC, CA, AB nell'ordine. Dimostrare che le tre circonferenze passanti per i punti (A,R,Q), (B,P,R), (C,Q,P) hanno un punto in comune.

RISOLUZIONE. Considerato il triangolo ABC ed i punti P, Q, R, presi internamente ai lati BC, CA, AB nell'ordine, disegniamo la circonferenza passante per i punti A,R,Q e quella passante per i punti B,P,R. Si presentano due situazioni, a seconda che esse risultino tangenti (in R – Fig. 1) o secanti (in R ed in un altro punto O – Fig. 2).
Nel primo caso, tracciata la tangente comune AT alle due circonferenze, si costata che gli angoli $Q\hat{A}R$ e $Q\hat{R}T$ sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{RQ}$. Parimenti, sono uguali gli angoli $P\hat{B}R$ e $P\hat{R}T$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{RP}$. Pertanto si ha:

$$Q\hat{A}R+P\hat{B}R=Q\hat{R}X+P\hat{R}X=Q\hat{R}P.$$

Di conseguenza gli angoli $Q\hat{R}P+A\hat{C}B=\pi$. Ne consegue che il quadrilatero CQRP, avendo due angoli opposti supplementari, è inscrivibile in una circonferenza. D'altronde questa circonferenza è proprio quella che passa per i punti C,Q,P e di conseguenza la proprietà è dimostrata.
Nel secondo caso, consideriamo i due quadrilateri AROQ e BPOR, inscritti nelle due circonferenze prese in

esame e ragioniamo anche sul quadrilatero CQOP. L'angolo $\widehat{ARO}$ è uguale all'angolo $\widehat{CQO}$ poiché entrambi sono supplementari dell'angolo $\widehat{OQA}$; parimenti l'angolo $\widehat{ORB}$ è uguale all'angolo $\widehat{OPC}$ poiché entrambi sono supplementari dell'angolo $\widehat{BPO}$. D'altro canto, gli angoli $\widehat{ARO}$ e $\widehat{ORB}$ sono supplementari. Di conseguenza, anche gli angoli $\widehat{CQO}$ e $\widehat{OPC}$ sono supplementari e, quindi, il quadrilatero CQOP è inscrivibile in una circonferenza. Siccome questa circonferenza è proprio quella che passa per i punti C,Q,P, la proprietà è dimostrata.

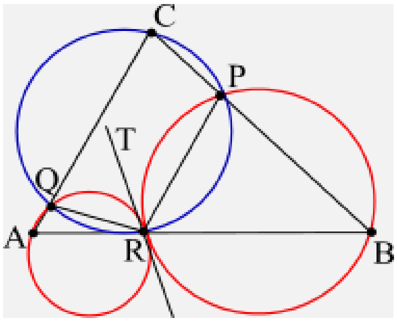

FIG. 1

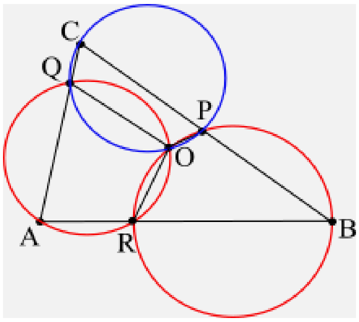

FIG. 2

3. Dall'unità 30 – Omotetie e similitudini nel piano

- ESERCIZIO in 30.6.2, c).

È dato il parallelogramma ABCD, la cui diagonale minore AC è perpendicolare ai lati paralleli AB e CD. Indicate con E ed F le proiezioni ortogonali dei vertici A e C rispettivamente sulla diagonale BD, dimostrare che il quadrilatero AECF è un parallelogramma simile a quello dato.

RISOLUZIONE (traccia). Sia ABCD il parallelogramma, in cui la diagonale minore AC è perpendicolare ai lati AB e CD, e siano E ed F le proiezioni ortogonali dei vertici A e C sulla diagonale maggiore BD. Sia inoltre O il punto d'incontro delle diagonali. (Si suggerisce di disegnare la figura)

Si dimostra anzitutto che il quadrilatero AECF è un parallologramma. Si può fare in più modi.

Per esempio, facendo vedere che il punto O, il quale biseca certamente la diagonale AC, biseca pure la diagonale EF. È sufficiente dimostrare che i due triangoli rettangoli OEA e OFC sono congruenti.

Bisogna provare quindi che i parallelogrammi ABCD ed AECF sono simili e per questo basta dimostrare che vale la proporzione $AD : AF = AB : AE$ e che gli angoli $\widehat{ABC}$ ed $\widehat{EAF}$ sono congruenti.

Riguardo alla proporzione si inizia a ragionare sui triangoli simili OAB ed OEA. Da questa similitudine si ottiene la seguente catena di proporzioni: OB:OA=OA:OE=AB:AE (e si ottiene pure che $\widehat{ABO}\cong\widehat{EAO}$). D'altro canto, siccome OD=OB ed OF=OE, risulta pure che OD:OA=OA:OF. Se ne desume che anche i triangoli ODA ed OAF , i quali hanno l'angolo in O in comune, sono simili e, di conseguenza, AD:AF=OA:OF (e pure $\widehat{ODA}\cong\widehat{OAF}$). Siccome OE=OF si ha anche: AD:AF=OA:OE. Ma, come visto prima: OA:OE=AB:AE, per cui AD:AF=AB:AE.

Per quanto concerne la congruenza degli angoli $\widehat{ABC}$ ed $\widehat{EAF}$, basta tener presente che, nel corso della precedente dimostrazione si è ottenuto che $\widehat{ABO}\cong\widehat{EAO}$ ed $\widehat{ODA}\cong\widehat{OAF}$. D'altro canto $\widehat{ODA}\cong\widehat{OBC}$, per cui anche $\widehat{OBC}\cong\widehat{OAF}$. Ne consegue che $\widehat{ABO}+\widehat{OBC}\cong\widehat{EAO}+\widehat{OAF}$, vale a dire $\widehat{ABC}\cong\widehat{EAF}$.

- PROBLEMA n. 24.

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si prenda un qualsiasi punto $D\in[AB]$ e si costruisca il triangolo ECD, isoscele sulla base CD e simile al triangolo ABC, in modo che il punto E stia

dalla stessa parte di A rispetto a BC. Detto O il punto intersezione dei segmenti AC e DE, si dimostri che:
1) i triangoli EOC ed AOD sono simili e, di conseguenza, che lo sono pure i triangoli EOA e COD;
2) il punto E si trova sulla parallela a BC condotta per A;
3) il quadrilatero ADCE è inscrivibile in un cerchio.

RISOLUZIONE.
1) Ci riferiamo alla figura 3. Il triangolo EOC è simile al triangolo AOD giacché i due triangoli hanno congruenti gli angoli in O (sono opposti al vertice) e inoltre $D\widehat{E}C=D\widehat{A}O$ poiché angoli al vertice di triangoli isosceli simili. Di conseguenza EO:AO=OC:OD.

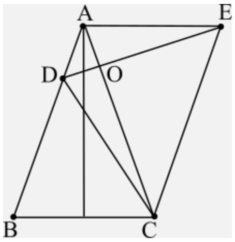

FIG. 3

Ne consegue pure che i triangoli EOA e OCD sono simili perché hanno due lati in proporzione e gli angoli che li comprendono congruenti. Pertanto $E\widehat{A}O=O\widehat{D}C$.
2) L'angolo $E\widehat{A}O$ è congruente all'angolo $A\widehat{C}B$ poiché entrambi gli angoli sono congruenti all'angolo $E\widehat{D}C$, perciò le rette AE e BC sono parallele.
3) Nel quadrilatero AECD risulta:

$$D\widehat{A}C=D\widehat{E}C,\quad C\widehat{A}E=E\widehat{D}C,\quad A\widehat{C}E=A\widehat{D}E,\quad A\widehat{C}D=A\widehat{E}D,$$

per cui:

$$D\widehat{A}C+C\widehat{A}E+A\widehat{C}E+A\widehat{C}D=D\widehat{E}C+E\widehat{D}C+A\widehat{D}E+A\widehat{E}D$$

o anche:

$$\left(D\widehat{A}C+C\widehat{A}E\right)+\left(A\widehat{C}E+A\widehat{C}D\right)=\left(A\widehat{D}E+E\widehat{D}C\right)+\left(A\widehat{E}D+D\widehat{E}C\right)$$

cioè:

$$D\widehat{A}E+A\widehat{E}C=A\widehat{D}C+A\widehat{E}C\ .$$

Di conseguenza il quadrilatero è inscrivibile in un cerchio.

- PROBLEMA n. 25.

Si consideri la seguente proposizione: "In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

[Tratto dall'esame di Stato 2007, indirizzo sperimentale, sessione suppletiva]

RISOLUZIONE. Indicato con ABC il triangolo isoscele sulla base BC, si chiami P un qualsiasi punto di questa base e siano M ed N le proiezioni ortogonali di P rispettivamente sui lati AB e AC. Chiamato H il punto medio di BC, dalla similitudine dei triangoli AHB e PMB segue: $\frac{\overline{MP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$, mentre da quella dei triangoli AHC e PNC segue: $\frac{\overline{NP}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}}$. Si ha, pertanto: $\overline{MP}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}\cdot\overline{BP}$ e $\overline{NP}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}\cdot\overline{PC}$, da cui, dopo qualche altra considerazione, si ottiene:

$$\overline{MP}+\overline{NP}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}\cdot\overline{BC}$$

La proposizione è dunque vera.
In realtà, la risoluzione di questo problema è più immediata se basata sulla teoria dell'equivalenza Basta

considerare che la somma dei triangoli APB e APC è uguale al triangolo ABC, per cui si ha:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{MP}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{NP}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}\ .$$

Da qui segue subito la stessa relazione trovata prima.

C'è di più: siccome $\frac{\overline{AH}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}}$ è l'altezza del triangolo, relativa ad uno dei lati uguali, la somma delle distanze di P da tali lati è esattamente uguale a questa altezza.

- PROBLEMA n. 47.

Si tratta di un problema piuttosto complesso che richiede, oltre ad abilità nella risoluzione dei problemi geometrici, anche una buona conoscenza dell'algebra. Si ispira ad un altro problema, proposto e risolto da **Erone** di Alessandria (I-II sec. d.C.) nella sua *Metrica*:

Dato il triangolo rettangolo ABC, i cui cateti AB e AC misurano rispettivamente 40 m e 30 m, determinare un punto D sul lato AB, un punto E sul lato BC e un punto F sul lato CA, in modo che il triangolo DEF abbia area 168 m^2 ed i triangoli ADF, BED, CEF siano equivalenti.

RISOLUZIONE. Bisogna dire che Erone si occupò del problema con riferimento ad un triangolo generico e, quindi, più complessa ancora ne è la risoluzione (*Metrica*, libro III, problema IV).

Ad ogni modo, nel caso nostro, dopo aver costatato che l'area di ognuno dei triangoli ADF, BED, CFE è 144 m^2, si suggerisce di porre $\overline{DB}$=x e $\overline{FC}$=y. Si trova subito l'equazione:

$$(40-x)\ (30-y)=288.$$

Per trovare la seconda equazione si suggerisce di prendere in considerazione i due triangoli ABE e BED, aventi la stessa altezza EH, per cui si ottiene:

$$A(ABE)=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\frac{2\ A(BED)}{\overline{DB}}=40\cdot\frac{144}{x}\ ;$$

analogamente, prendendo in considerazione i due triangoli AEC e CFE, aventi la stessa altezza EK, si trova:

$$A(AEC)=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{EK}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\frac{2\ A(CFE)}{\overline{FC}}=30\cdot\frac{144}{y}\ ;$$

siccome A(ABE)+A(AEC)=A(ABC), una volta sostituito e semplificato si ottiene per l'appunto la seconda equazione:

$$3x+4y=\frac{5}{12}xy\ .$$

Le due equazioni ottenute, elaborate convenientemente, portano al seguente sistema:

$$\begin{cases}3x+4y=120\\ xy=288\end{cases}$$

Dopo qualche altra considerazione, in particolare sui triangoli simili ABC e HBE, si trovano le due soluzioni del problema: $\overline{AD}_1$=24, $\overline{BE}_1$=30, $\overline{CF}_1$=12; $\overline{AD}_2$=16, $\overline{BE}_2$=20, $\overline{CF}_2$=18.

- PROBLEMA n. 48

Anche questo problema richiede una particolare attenzione. Si ispira esso pure ad un altro problema, proposto e risolto da **Luca Pacioli** (1445-1515 circa) nella sua *Summa*.

In un triangolo isoscele ciascuno dei lati congruenti misura 10 cm e la base misura 12 cm. In esso sono inscritte tre circonferenze congruenti in modo che ciascuna sia tangente a due lati del triangolo ed una di esse sia tangente alle altre due. Determinare il raggio delle circonferenze.

RISOLUZIONE. I centri delle tre circonferenze – O, P, Q – che si trovano ovviamente sulle bisettrici degli angoli interni del triangolo (Fig. 4), sono a due a due equidistanti dai lati del triangolo. Ne consegue che i lati del triangolo OPQ sono ordinatamente paralleli a quelli del triangolo ABC, per cui i due triangoli sono

omotetici e perciò simili.
Considerato, poi, che la circonferenza di centro O è tangente sia alla circonferenza di centro P sia a quella di centro Q, dopo aver posto uguale ad x il raggio delle tre circonferenze congruenti, risulta evidentemente: $\overline{OP}=\overline{OQ}=2x$. Inoltre, siccome $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{OP}:\overline{PQ}$, ricordando che AB e BC misurano rispettivamente 10 cm e 12 cm, si ottiene: $\overline{PQ}=\frac{12}{5}x$.

D'altra parte, si ha: $\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=8$ (cm) ed $\overline{NM}=x$.
Si può, inoltre, calcolare la misura di AO in funzione di x. Basta prendere in esame i due triangoli simili ABM e AOD. Si ha: $\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{DO}:\overline{BM}$, da cui segue: $\overline{AO}=\frac{5}{3}x$.

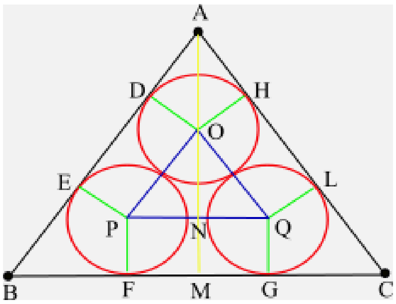

FIG. 4

E si può, ancora, calcolare ON in funzione di x. Si ha, infatti: $\overline{ON}:\overline{PQ}=\overline{AM}:\overline{BC}$, da cui segue: $\overline{ON}=\frac{8}{5}x$. Risulta infine:

$$\overline{AM}=\overline{AO}+\overline{ON}+\overline{NM}=\frac{5}{3}x+\frac{8}{5}x+x=\frac{64}{15}x\,.$$

Pertanto: $\frac{64}{15}x=8$, e perciò: $x=\frac{15}{8}$ (cm).

- PROBLEMA n. 53

Considerato il trapezio ABCD, sia E il punto comune alle sue diagonali. I due triangoli EAB ed ECD hanno aree rispettivamente 75 cm^2 e 27 cm^2. I dati assegnati sono sufficienti per calcolare le misure delle basi del trapezio? Lo sono per calcolare la sua area?

RISOLUZIONE. I dati non sono sufficienti per calcolare le misure delle basi del trapezio: si può al più stabilire che il loro rapporto è $\frac{5}{3}$, come si evince da quanto diremo fra breve. I dati sono invece sufficienti per il calcolo dell'area del trapezio. Chiamati infatti EH l'altezza del triangolo EAB ed EK quella del triangolo ECD, sfruttando il fatto che questi due triangoli sono omotetici, con caratteristica di valore assoluto uguale a $\sqrt{\frac{75}{27}}$ vale a dire $\frac{5}{3}$, si ha: $\frac{\overline{EH}}{\overline{EK}}=\frac{5}{3}$, da cui segue facilmente: $\frac{\overline{EH}+\overline{EK}}{\overline{EK}}=\frac{5+3}{3}$, e perciò: $\frac{\overline{HK}}{\overline{EK}}=\frac{8}{3}$. A questo punto si trova agevolmente che:

$$\text{area}(ACD)=\text{area}(BCD)=\frac{8}{3}\,\text{area}(EDC)=\frac{8}{3}\cdot 27=72\ (\text{cm}^2).$$

Di conseguenza, a conti fatti: area(ABCD)=192 cm^2.

4. Dall'unità 31 – Applicazioni della similitudine

- UN TEOREMA INTERESSANTE.

Un teorema interessante, che enuncia un risultato inaspettato e comunque al di là di ogni intuizione elementare, è quello che lega i lati del decagono regolare, dell'esagono regolare e del pentagono regolare inscritti in un medesimo cerchio: pensiamo che sia giusto che gli studenti ne abbiano conoscenza. Riteniamo, invece, che non sia opportuno soffermarsi sulla sua dimostrazione. Dimostrazione che, tuttavia, può interessare a qualche studente particolarmente motivato allo studio della matematica. Per questo pensiamo di proporne una qui appresso (Il teorema è presente negli *Elementi* di Euclide – XIII, 10 – ma la dimostrazione è diversa da questa).

TEOREMA.

I lati del pentagono regolare, dell'esagono regolare e del decagono regolare inscritti in un cerchio sono nell'ordine l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo.

DIMOSTRAZIONE.

Supponiamo assegnata una circonferenza k' di centro O (Fig. 5) e tracciata la corda AB, uguale al lato del decagono regolare inscritto in essa. Si ha: $A\widehat{O}B=36°$, $O\widehat{A}B=O\widehat{B}A=72°$.

Tracciamo adesso la circonferenza k" avente il centro in A e raggio AO e diciamo C il punto in cui essa interseca il prolungamento di AB dalla parte di B. In questa circonferenza k" la corda OC, corrispondente ad un angolo al centro di 72°, è evidentemente uguale al lato del pentagono regolare inscritto. Siccome questa circonferenza k" è uguale alla circonferenza k', OC è uguale al lato del pentagono regolare inscritto in k'. Conduciamo adesso dal punto C la tangente CD alla circonferenza k', essendo D il punto di contatto. Per il teorema della tangente e della secante risulta:

$$CA : CD = CD : CB;$$

d'altra parte il lato AB del decagono regolare inscritto nella circonferenza k' è parte aurea del raggio OA uguale a CA, per cui risulta pure:

$$CA : AB = AB : CB.$$

Ne consegue che AB=CD.

Dunque nel triangolo ODC, rettangolo in D: OC è uguale al lato del pentagono regolare inscritto nella circonferenza k', OD è il lato dell'esagono regolare inscritto nella stessa circonferenza, CD è il lato del decagono regolare inscritto in k'. Il teorema è dimostrato.

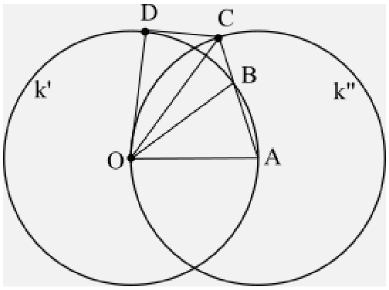

FIG. 5

- PROBLEMA n. 2.

In un triangolo rettangolo un cateto è lungo il doppio dell'altro. Condotta la bisettrice del maggiore dei due angoli acuti del triangolo, dimostrare, con un procedimento analitico, che il minore dei segmenti in cui detta bisettrice divide il cateto maggiore è sezione aurea del cateto minore. Provare inoltre a condurre anche una dimostrazione esclusivamente con considerazioni di geometria sintetica.

RISOLUZIONE. La dimostrazione per via analitica è elementare: basta porre uguale ad a il cateto minore del triangolo e calcolare che il minore dei due segmenti in questione è lungo $\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Più impegnativa è la dimostrazione per via sintetica. Indicato con ABC il triangolo rettangolo in A, sia AC = 2 AB (disegnare la figura). Conviene tracciare la semicirconferenza circoscritta al triangolo ed indicare con O il suo centro e con D ed E i punti in cui la bisettrice dell'angolo in B seca rispettivamente il cateto AC e, ulteriormente, la semicirconferenza. Indicata poi con H l'intersezione del raggio OE col cateto AC, risulta AH=HC=AB; per cui, dopo aver constatato che gli angoli $E\hat{C}A$ ed $E\hat{B}A$ sono congruenti, si desume che sono congruenti i triangoli rettangoli EHC e DAB. Ne consegue che EH=AD.
Siccome, nel triangolo rettangolo DEC, HC:EH=EH:DH e siccome HC=AB ed EH=AD, si ha pure AB:AD=AD:DH. D'altro canto DH=AH–AD=AB–AD, per cui, come volevasi dimostrare:

$$AB : AD = AD : (AB–AD).$$

- PROBLEMA n. 28.

Nel triangolo rettangolo ABC i cateti AB e AC sono lunghi rispettivamente 12b e 16b, dove b è una lunghezza assegnata. Indicato con P il punto del cateto AC tale che AP è lungo 5b e chiamato M il punto medio dell'ipotenusa, sia Q l'intersezione del cateto AB con la perpendicolare a PM condotta per M.

1) Provare che il quadrilatero APMQ è inscrivibile in una circonferenza c.
2) Detto N l'ulteriore punto in cui c interseca BC, calcolare l'area del pentagono APNMQ.
3) Calcolare infine l'area del pentagono trasformato di quello suddetto nell'omotetia di centro A e di caratteristica 2.

RISOLUZIONE (Suggerimenti). Per il calcolo dell'area del pentagono APNMQ basta osservare che si ha:

$$A(APNMQ) = A(ABC) – A(BMQ) – A(PNC).$$

L'area del triangolo PNC, a sua volta, si trova in base alla formula $A(PNC)=\frac{1}{2}\overline{NC}\cdot\overline{PR}$, dove PR è ovviamente l'altezza relativa al lato NC.

5. Dall'unità 34 – Nozioni di calcolo vettoriale

Nel paragrafo 34.3.2 abbiamo enunciato, senza dimostrarle, le seguenti **proprietà del prodotto di un numero reale per un vettore**:

- $1\,\vec{v} = \vec{v}$
- $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
- $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$

dove α, β sono numeri reali qualunque e $\vec{v}, \vec{w}$ sono vettori qualunque.

Qui vogliamo invece procedere alla loro dimostrazione, o meglio alla dimostrazione delle ultime tre, dal momento che la prima proprietà è banale. Supporremo che sia $\alpha>0$ e $\beta>0$. Ma la dimostrazione, con qualche adattamento, si può ripetere anche se è $\alpha<0$ e $\beta<0$ oppure $\alpha>0$ e $\beta<0$ oppure infine $\alpha<0$ e $\beta>0$. I casi in cui uno dei due numeri α, β è nullo sono del tutto banali. Lasciamo a chi legge il compito di prendere in esame tutte le possibilità.

- Incominciamo con la proprietà $\alpha(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)\vec{v}$.

Sia $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ il vettore assegnato (Fig. 6) e sia O un qualunque punto non appartenente alla retta AB. Sulla semiretta OA si prendano il punto M tale che $\frac{OM}{OA}=\beta$ e il punto P tale che $\frac{OP}{OM}=\alpha$ e si conducano per tali punti le parallele alla retta AB, chiamando N e Q nell'ordine le loro intersezioni con la retta OB. Si ha:

$$\frac{OM}{OA}=\frac{MN}{AB} \quad \text{e} \quad \frac{OP}{OM}=\frac{PQ}{MN},$$

da cui segue:

$$\overrightarrow{MN}=\beta\,\overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ}=\alpha\,\overrightarrow{MN}$$

e perciò:

$$\overrightarrow{PQ}=\alpha\left(\beta\,\overrightarrow{AB}\right).$$

D'altro canto si ha:

$$\frac{MN}{AB}\cdot\frac{PQ}{MN}=\beta\alpha \quad \text{da cui segue:} \quad \frac{PQ}{AB}=\alpha\beta$$

e perciò:

$$\overrightarrow{PQ}=(\alpha\beta)\overrightarrow{AB}.$$

Infine, come volevasi dimostrare:

$$\alpha(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)\vec{v}.$$

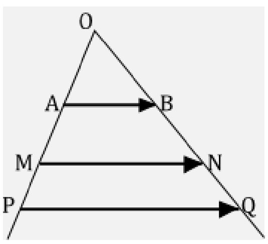

FIG. 6

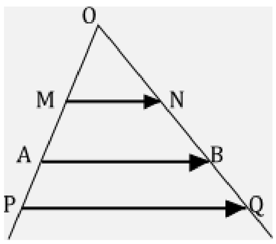

FIG. 7

- Occupiamoci adesso della proprietà $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$.

Sia $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ il vettore assegnato (Fig. 7) e sia O un qualunque punto non appartenente alla retta AB. Sulla semiretta OA si prendano i punti M e P tali che $\frac{OM}{OA}=\alpha$ e $\frac{OP}{OM}=\beta$ e si conducano per essi le parallele alla retta AB, chiamando N e Q nell'ordine le loro intersezioni con la retta OB. Si ha:

$$\frac{OM}{OA}=\frac{MN}{AB} \quad \text{e} \quad \frac{OP}{OA}=\frac{PQ}{AB},$$

da cui segue:

$$\overrightarrow{MN}=\alpha\,\overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ}=\beta\,\overrightarrow{AB}.$$

D'altro canto si ha:

$$\frac{MN}{AB}+\frac{PQ}{AB}=\alpha+\beta \quad \text{da cui segue:} \quad \frac{MN+PQ}{AB}=\alpha+\beta$$

e perciò:

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AB}.$$

Infine, come volevasi dimostrare:

$$(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}.$$

- Dimostriamo infine l'ultima relazione: $\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}$.

Bisogna distinguere due casi a seconda che i due vettori $\vec{v},\vec{w}$ siano paralleli o no.

1° CASO: $\vec{v},\vec{w}$ sono paralleli. Siano allora $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{BC}$ i due vettori (Fig. 8a) e sia O un qualunque punto non appartenente alla retta AC. Si prenda sulla semiretta OB il punto N tale che $\frac{ON}{OB}=\alpha$. Si tracci quindi per N la parallela ad AC e siano M e P i punti in cui essa interseca nell'ordine le rette OA e OC. Si ha:

$$\frac{MN}{AB}=\frac{ON}{OB} \quad \text{e} \quad \frac{NP}{BC}=\frac{ON}{OB}$$

e perciò:

$$\overrightarrow{MN}=\alpha\,\overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{NP}=\alpha\,\overrightarrow{BC}\,.$$

D'altronde, dalle precedenti proporzioni segue:

$$\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}$$

da cui:

$$\frac{MN+NP}{AB+BC}=\frac{MN}{AB} \quad \text{ossia:} \quad \frac{MP}{AC}=\alpha$$

e perciò:

$$\overrightarrow{MP}=\alpha\,\overrightarrow{AC}\,.$$

D'altro canto:

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP} \rightarrow \overrightarrow{MP}=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{AC}=\vec{v}+\vec{w}\,.$$

In definitiva, segue la relazione che si doveva dimostrare:

$$\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}\,.$$

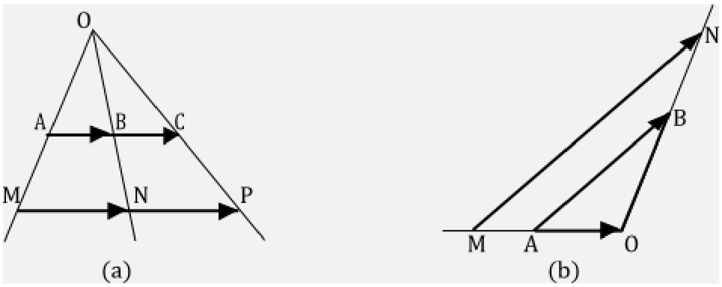

FIG. 8

2° CASO: $\vec{v}, \vec{w}$ non sono paralleli. Siano allora $\vec{v}=\overrightarrow{AO}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{OB}$ i due vettori (Fig. 8b). Si ha evidentemente:

$$\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AB}\,.$$

Sulla semiretta OA si prenda il punto M tale che $\frac{OM}{OA}=\alpha$ e si tracci per M la parallela ad AB, chiamando N la sua intersezione con la retta OB. Si ha:

$$\frac{MO}{AO}=\frac{ON}{OB}=\frac{MN}{AB}\,,$$

da cui segue:

$$\overrightarrow{MO}=\alpha\,\overrightarrow{AO}\,, \quad \overrightarrow{ON}=\alpha\,\overrightarrow{OB}\,, \quad \overrightarrow{MN}=\alpha\,\overrightarrow{AB}\,.$$

Siccome $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{MN}$, si ha infine la relazione cercata:

$$\alpha(\vec{v}+\vec{w})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{w}\,. \qquad \text{[c.v.d.]}$$

6. Dall'unità 35 – Nozioni di calcolo matriciale

- PROBLEMA n. 15 (proposto come "laboratorio di matematica").

Un numero di tre cifre, scritto nell'usuale sistema di numerazione decimale, è un quadrato perfetto (è, cioè, il quadrato di un numero naturale). Se ciascuna delle sue cifre è aumentata di una unità, si ottiene ancora un quadrato perfetto. Bisogna trovare i due numeri.

RISOLUZIONE. Indicate con a, b, c le tre cifre del primo numero e indicato con p^2 il numero, dove p è a sua volta un numero naturale, se q^2 è il secondo numero, dove q è ancora un numero naturale, deve risultare simultaneamente:

$$100\,a + 10\,b + c = p^2, \quad 100\,(a+1) + 10\,(b+1) + (c+1) = q^2.$$

Sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda, si ottiene: $111 = q^2 - p^2$.
E da qui, tenendo presente che 111=3×37, segue: (q – p)(q + p) = 3×37.
Ora, questa uguaglianza è possibile solo in due casi:
1) che risulti: q–p=3 e q+p=37. Risolvendo si trova: p=17, q=20. Di modo che i due numeri cercati sono: 289 e 400;
2) oppure che risulti: q–p=1 e q+p=111. Risolvendo si trova: p=55, q=56. Di modo che i due numeri sarebbero 3025 e 3136, da scartare giacché quelli cercati sono numeri di tre cifre.

- PROBLEMA n. 17.

Il perimetro del pentagono ABCDE è 30 m. Si sa poi che:

AB+BC = 7 m,   BC+CD = 10 m,   CD+DE = 15 m,   DE+EA = 17 m.

Calcolare le misure dei lati del pentagono.

RISOLUZIONE. Di per sé la risoluzione di questo esercizio è banale sul piano concettuale. Ne parliamo per una particolare ragione. È molto probabile che molti lo risolvano meccanicamente senza riflettere, invischiandosi in una congerie di calcoli. Facciamo notare come invece la risoluzione sia molto semplice ed immediata. Basta constatare che dalla prima e terza relazione si desume che la somma dei lati AB, BC, CD, DE è 22 m, per cui il lato EA misura 30–22=8 (m). Di conseguenza, passando progressivamente dall'ultima relazione alla prima: DE=17–8=9 (m), CD=15–9=6 (m), BC=10–6=4 (m), AB=7–4=3 (m).
Allo stesso modo, si potevano prendere in esame la seconda e la quarta relazione. In tal caso si trova per prima la misura di AB e, a seguire, tutte le altre.

- PROBLEMA n. 18.

Se si somma ciascuno di tre numeri assegnati alla media aritmetica degli altri due si ottengono i seguenti numeri: 33, 36, 45. Calcolare la media aritmetica dei tre numeri assegnati.

RISOLUZIONE.
Anche di questo problema la risoluzione è banale, ma anche in questo caso si segnala una particolarità interessante. Certo, si possono dapprima determinare i tre numeri e poi calcolare la loro media aritmetica, compito che lasciamo al lettore. Noi vogliamo seguire una strada alternativa.
Incominciamo a indicare con a, b, c i tre numeri assegnati. Per i dati della traccia risulta:

$$a + \frac{b+c}{2} = 33,\quad b + \frac{c+a}{2} = 36,\quad c + \frac{a+b}{2} = 45.$$

Da qui, sommando membro a membro, segue:

$$(a+b+c) + \left(\frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} + \frac{a+b}{2}\right) = 33 + 36 + 45,$$

vale a dire:

$$(a+b+c) + (a+b+c) = 114 \quad \text{ossia: } a+b+c = \frac{114}{2}$$

e di conseguenza la media aritmetica M dei tre numeri assegnati è:

$$M = \frac{a+b+c}{3} = 19.$$

L'aspetto più interessante di questo procedimento è che risulta facilmente generalizzabile ad un numero qualsiasi n di numeri assegnati. Se infatti si conoscono le somme $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ di ciascuno di essi con la media aritmetica degli altri, la somma S degli n numeri assegnati è:

$$\mathbf{S = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{2}}$$

e la loro media aritmetica M è pertanto:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{s_1} + \mathbf{s_2} + \cdots + \mathbf{s_n}}{\mathbf{2n}}.$$

7. Dall'unità 37 – Nozioni di trigonometria

- RISOLUZIONE DI UN PARTICOLARE TRIANGOLO.

Fermiamo la nostra attenzione su una questione proposta come "laboratorio di matematica". Riguarda sostanzialmente la

risoluzione di un triangolo nel caso in cui siano noti due lati (per esempio a, b) e l'angolo opposto ad uno di essi (per esempio α).

Ebbene possono esserci nessuna, una o due soluzioni.

DIMOSTRAZIONE. Incominciamo ad osservare che dal teorema dei seni deriva:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} ,$$

per cui il problema può avere soluzioni solo se risulta: $b\sin\alpha \le a$.

Ammesso che una soluzione esista, per trovarla basta calcolare β, quindi γ ed a seguire, col teorema dei seni, si trova c.

Ma non sempre tale soluzione esiste. Esaminiamo allora i vari casi che si possono presentare (il supporto di una figura, come la figura 9, può essere utile):

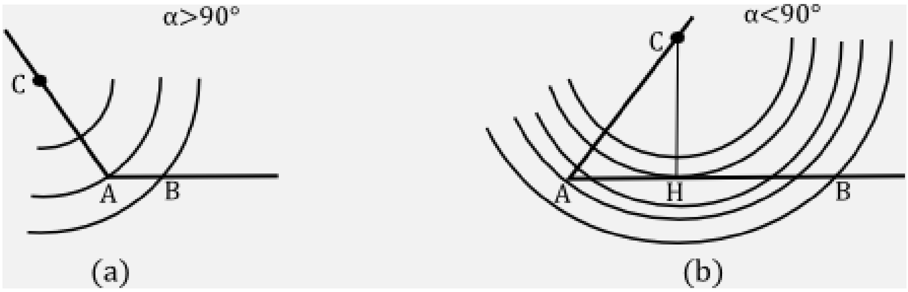

FIG. 9

a) Innanzitutto, come detto, se $b\sin\alpha > a$, cioè $\sin\beta > 1$, il problema è evidentemente impossibile.

b) Se $b\sin\alpha = a$, per cui $\sin\beta = 1$ e perciò β=90°, il problema ammette una soluzione solo se α<90°, è impossibile se $\alpha \geq$90°.

c) Se $b\sin\alpha < a$, per cui $\sin\beta < 1$, esistono due angoli supplementari, β_1 e β_2, che soddisfano alla condizione $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$. Bisogna considerare allora dei sottocasi secondo che risulti a>b, a=b, a<b:

   c1) se a>b, per cui α>β, dei due angoli β_1 e β_2, si può accettare solo l'angolo acuto: una soluzione;

   c2) se a=b, per cui α=β, nel caso in cui sia $\alpha\geq$90° il problema non ha soluzioni; nel caso invece in cui sia α<90°, dei due angoli β_1 e β_2, si può accettare solo l'angolo acuto: una soluzione;

   c3) se a<b, per cui α<β, nel caso in cui sia $\alpha\geq$90° il problema non ha soluzioni; nel caso invece in cui sia α<90°, entrambi gli angoli β_1 e β_2, uno acuto e l'altro ottuso, sono accettabili: due soluzioni.

- PROBLEMA n. 12.

Il signor Giorgio, proprietario terriero, intende regalare un orto all'amico Mario, matematico per hobby, ma a condizione che egli riesca a risolvere un problema. L'orto ha la forma di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa misura 30 m ed i cui cateti hanno misure espresse, sempre in metri, da numeri interi. Mario deve anzitutto calcolare le misure dei cateti e poi stabilire se sull'ipotenusa esiste un punto le cui distanze dai vertici del triangolo sono tutte espresse, sempre in metri, ancora da numeri interi e se ne esiste uno solo. Mario ottiene l'orto in regalo. Come ha fatto a risolvere il problema?

RISOLUZIONE. Sia ABC il triangolo rettangolo in A. Le misure dei suoi lati devono formare evidentemente una terna pitagorica. L'unica possibile, supposto AB<AC, è la seguente: $\overline{BC}=30$, $\overline{AB}=18$, $\overline{AC}=24$, dove naturalmente le misure sono espresse in metri. Ora, sull'ipotenusa esiste un punto che è equidistante dai vertici del triangolo ed è il punto medio, circocentro del triangolo. Si tratta di vedere se ne esistono altri. Poniamo al riguardo $\overline{BP}=n$, con n intero tale che $0<n<30$. Per il teorema del coseno, applicato al triangolo ABP, una volta costatato che $\cos\widehat{B}=\frac{3}{5}$, si ha:

$$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{PB}^2-2\,\overline{AB}\cdot\overline{PB}\cos\widehat{B}=18^2+n^2-2\cdot 18\cdot n\cdot\frac{3}{5}=n^2+108\left(3-\frac{n}{5}\right).$$

Affinché si possa sperare di ottenere un valore intero della misura di AP, deve essere anzitutto n multiplo di 5, vale a dire $n=5k$, con k intero tale che $0<k<6$. Pertanto: $\overline{AP}^2=25k^2+108(3-k)$. Attribuendo a k i valori interi da 1 a 5, si ottengono nell'ordine i seguenti valori di $\overline{AP}^2$: 241, 208, 225, 292, 409. Solo 225 porta ad un valore intero della misura di AP ed esattamente 15. Siccome questo valore di AP si ha per k=3, cui corrisponde n=15, si ha pure: $\overline{BP}=15$.

Insomma l'unico punto che risolve la questione è il punto medio dell'ipotenusa, che è equidistante dai vertici del triangolo.

- PROBLEMA n. 47.

È dato il triangolo ABC, rettangolo in A. Indicato con M il punto medio del cateto AB, si traccino la corda MD parallela alla mediana del triangolo condotta per B e la corda ME parallela alla mediana condotta per A.

1) Dimostrare che il quadrilatero CDME non è inscrivibile né circoscrivibile ad un cerchio.
2) Ammesso che l'angolo $A\widehat{C}B$ misuri 60°, calcolare le misure degli angoli $M\widehat{D}C$ e $D\widehat{M}E$, espresse in gradi sessagesimali e approssimate ad 1 secondo.

RISOLUZIONE (traccia)

1) Se il quadrilatero in questione fosse circoscrivibile ad un cerchio dovrebbe risultare: EC+MD=DC+ME. Ora, si trova piuttosto agevolmente che:

$$EC=\frac{3}{4}BC,\quad MD=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{1}{4}AC\right)^2},\quad DC=\frac{3}{4}AC,\quad MC=\frac{1}{4}BC.$$

La relazione precedente implica pertanto:

$$\frac{3}{4}BC+\sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{1}{4}AC\right)^2}=\frac{3}{4}AC+\frac{1}{4}BC.$$

Da qui, posto per comodità BC=a e AC=x, dopo qualche semplice elaborazione si ottiene la seguente equazione in x:

$$\sqrt{4a^2-3x^2}=3x-2a$$

la quale fornisce l'unica soluzione x=a, che però deve essere scartata dovendo essere ovviamente x<a.

In conclusione, non può essere EC+MD=DC+ME e pertanto il quadrilatero CDME non è circoscrivibile ad un cerchio.

Se questo quadrilatero fosse inscrivibile in un cerchio, dovrebbe risultare: $D\widehat{C}E+D\widehat{M}E=C\widehat{D}M+C\widehat{E}M$. Ora, se questo è vero, si dimostra che deve essere $C\widehat{E}M=A\widehat{D}M$. E si trova pure che:

$$\tan C\hat{E}M = \tan\left(180° - 2\,D\hat{C}E\right) = -\frac{2\,AB \cdot AC}{BC^2} \quad \text{e} \quad \tan A\hat{D}M = \frac{2\,AB}{AC}.$$

Deve risultare pertanto:

$$\frac{2\,AB}{AC} + \frac{2\,AB \cdot AC}{BC^2} = 0 \quad \text{cioè} \quad BC^2 + AC^2 = 0.$$

Risultato impossibile. Il quadrilatero CDME pertanto non è neppure inscrivibile in un cerchio.

2) Posto che l'angolo del triangolo, avente vertice in C, misuri 60°, si trova che $\tan M\hat{D}C = -2\sqrt{3}$ e pertanto: $M\hat{D}C \approx 102°6'7''$. Di conseguenza: $D\hat{M}E = \left(180° - M\hat{D}C\right) + 60° = 137°53'53''$.

8. Dall'unità 41 – Parabola

In chiusura del paragrafo 41.5.6 abbiamo fatto la seguente affermazione non dimostrata:
Se una parabola è riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed è $y=ax^2+bx+c$ la sua equazione e se la retta t che determina un segmento parabolico non è perpendicolare all'asse di simmetria della parabola allora l'area S di tale segmento è data dalla medesima formula che si ha nel caso in cui t è perpendicolare all'asse della parabola. Vale a dire:

$$S = \frac{|a|}{6}(x_A - x_B)^3$$

dove x_A e x_B, con $x_A > x_B$, sono le ascisse rispettivamente dei punti A e B in cui t interseca la parabola.
Qui ci proponiamo di fornire la dimostrazione a beneficio di chi ne fosse interessato.

DIMOSTRAZIONE. Incominciamo a supporre che l' equazione della parabola sia $y=ax^2$, con a>0 (Fig. 10).
L'area S del segmento parabolico determinato dalla retta AB, dove $A\left(x_A, ax_A^2\right)$ e $B\left(x_B, ax_B^2\right)$, si ottiene sottraendo dall'area del trapezio AA'B'B quelle dei due triangoli mistilinei OA'A e OB'B.
Ora è noto che:

- area triangolo mistilineo OA'A $= \frac{1}{3}\,OA' \cdot A'A = \frac{1}{3}\,x_A \cdot ax_A^2 = \frac{1}{3}ax_A^3$;
- area triangolo mistilineo OB'B $= \frac{1}{3}\,OB' \cdot B'B = \frac{1}{3}(-x_B) \cdot ax_B^2 = -\frac{1}{3}ax_B^3$.

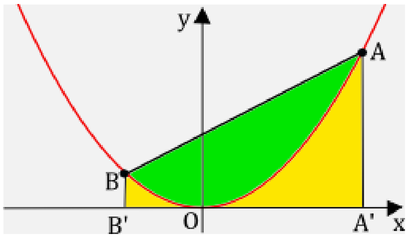

FIG. 10

D'altro canto:

- area trapezio $AA'B'B = \frac{1}{2}\left(A'A + B'B\right) \cdot A'B' = \frac{1}{2}\left(ax_A^2 + ax_B^2\right)(x_A - x_B)$.

Pertanto l'area S del segmento parabolico è:

$$S = \frac{1}{2}\left(ax_A^2 + ax_B^2\right)(x_A - x_B) - \left(\frac{1}{3}ax_A^3 - \frac{1}{3}ax_B^3\right) = \frac{1}{2}a\left(x_A^2 + x_B^2\right)(x_A - x_B) - \frac{1}{3}a\left(x_A^3 - x_B^3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a(x_A - x_B)\left(x_A^2 + x_B^2\right) - \frac{1}{3}a(x_A - x_B)\left(x_A^2 + x_A x_B + x_B^2\right) = \frac{a}{6}(x_A - x_B)(x_A - x_B)^2 = \frac{a}{6}(x_A - x_B)^3.$$

Si capisce che se l'equazione della parabola è $y=ax^2$ con a<0, l'area S del segmento parabolico è:

$$S=-\frac{a}{6}(x_A-x_B)^3\,.$$

Le due formule trovate si possono riassumere nella formula seguente:

$$S=\frac{|a|}{6}(x_A-x_B)^3\,.$$

Essa continua a sussistere anche se la parabola ha un'equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$. Basta tener presente che una qualunque traslazione che porti il suo vertice nell'origine del sistema di riferimento ha equazioni del tipo: $(X=x+p,\ Y=y+q)$ e si ha pertanto $X_A-X_B=x_A-x_B$.

9. Dall'unità 43 – Equazioni polinomiali

- PROBLEMA n. 72.

Internamente ai lati AB e BC del quadrato ABCD si prendano rispettivamente i punti E ed F in modo che i triangoli AED, BFE e CDF abbiano aree nell'ordine: 48 m^2, 4 m^2 e 60 m^2. Si sa inoltre che i punti E ed F dividono i lati AB e BC in parti le cui misure, espresse in m, sono numeri interi. Calcolare l'area e il perimetro del triangolo DEF.

RISOLUZIONE (Guida). Si indicano con x, y, z nell'ordine il lato del quadrato, il segmento AE ed il segmento BF. Si ottiene il sistema formato dalle seguenti equazioni:

$$\frac{1}{2}x(x-z)=60,\quad \frac{1}{2}z(x-y)=4,\quad \frac{1}{2}xy=48.$$

Per risolverlo si può procedere in due modi.

Il primo è il modo ordinario di esprimere y e z in funzione di x. Il sistema si trasforma nel seguente:

$$y=\frac{96}{x},\quad z=\frac{x^2-120}{x},\quad x^4-224\,x^2+11520=0.$$

Una volta risolta, l'equazione in x fornisce l'unico valore accettabile: x=12 (m). Di conseguenza: y=8 (m) e z=2 (m). La prosecuzione è banale.

Il secondo procedimento, più sofisticato, sfrutta il fatto che x, y, z sono numeri interi (positivi). Dalla seconda delle equazioni originarie si ha allora: $z(x-y)=8$. Il che implica uno dei seguenti fatti:

$$z=1,\ x-y=8;\quad z=2,\ x-y=4,\quad z=4,\ x-y=2,\quad z=8,\ x-y=1.$$

Si controlla che solo il secondo porta a valori accettabili di x ed y; esattamente: x=12 ed y=8. Come sopra.

- ESERCIZIO n. 74.

Si consideri la seguente equazione nell'incognita x: $x^3+ax+b=0$. Si sa che una sua radice è -2.

1) È possibile calcolare la somma delle altre due radici (nel campo complesso) o i dati sono insufficienti per questo calcolo?

2) Per quali valori di b le tre radici dell'equazione assegnata sono reali?

RISOLUZIONE. Se una radice è -2, utilizzando lo schema di Ruffini e tenendo presente che deve essere $-8-2a+b=0$, il primo membro dell'equazione può essere scritto in questo modo: $(x+2)(x^2-2x+a+4)$.

Ragion per cui le altre due radici dell'equazione assegnata sono le radici della seguente equazione di 2° grado in x: $x^2-2x+a+4=0$.

In virtù di una delle note formule di Viète (1), indicate con x_1 ed x_2 le due radici, risulta: $x_1+x_2=2$.

[1] Ad onor del vero, se si conoscessero le formule di Viète per le equazioni di 3° grado, si saprebbe che deve essere $x_1+x_2+x_3=0$ e perciò, essendo $x_3=-2$, deve essere $x_1+x_2=2$. In mancanza di queste formule si può procedere come detto prima.

Riguardo alla seconda questione, affinché le radici dell'equazione assegnata siano tutte e tre reali deve risultare non negativo il discriminante dell'equazione di 2° grado, vale a dire che deve essere: $a \leq -3$.
Di conseguenza, essendo $a=\frac{8+b}{2}$, deve risultare: $b \leq -14$.

- ESERCIZIO n. 76.

Il polinomio $x^3-6x^2+11x-6$ si fattorizza nel modo seguente:
[A] $(x+1)(x+2)(x+3)$. [B] $(x+1)(x-2)(x-3)$.
[C] $(x-1)(x-2)(x+3)$. [D] $(x-1)(x-2)(x-3)$.
Una sola alternativa è corretta: individuarla in non più di 15 secondi e fornire poi una spiegazione esauriente della scelta operata (non è ammesso l'uso di alcuno strumento di calcolo automatico).

RISOLUZIONE. Si potrebbe pensare di trovare uno zero del polinomio e poi, utilizzando la regola di Ruffini, trovare gli altri due e quindi fattorizzare. Processo lungo e dispendioso, al quale si deve ricorrere inevitabilmente (salvo rare eccezioni) se il quesito richiedesse di fattorizzare il polinomio nel campo reale senza fornire alternative.
Oppure si potrebbe pensare di sviluppare i prodotti indicati dalle alternative fino a trovare uno sviluppo identico al polinomio assegnato. Anche questo procedimento è lungo, ma in mancanza d'altro bisogna accontentarsi.
Nel caso nostro, tuttavia, la tecnica di risoluzione del quesito è immediata, anche se forse 15 secondi sono pochini. Si tratta comunque di riflettere sul termine noto del polinomio, vale a dire –6. Ebbene, il prodotto dei termini noti dei tre binomi in cui esso si fattorizza deve essere proprio –6. Questo significa che, dei termini noti di questi fattori, quelli negativi devono essere in numero dispari (1 oppure 3). Di conseguenza le alternative [A], [B] e [C] sono da scartare. Rimane l'unica alternativa [D], che è quella corretta. Cosa che può essere verificata, se si vuole.
Anche l'esercizio n. 77 si risolve allo stesso modo. In esso è [C] l'alternativa corretta.

- PROBLEMA n. 83.

È assegnata la seguente equazione di 3° grado in x:

$$x^3-(k+1)x^2+(1-k)x+2k-1=0.$$

Dopo aver verificato che una sua soluzione è il numero intero 1 per ogni valore di k, determinare per quali valori di k essa ammette altre due soluzioni intere.

RISOLUZIONE. Si tratta di un problema al alto coefficiente di difficoltà. Non la prima parte, quella della verifica, che lasciamo al lettore. Dopo tale verifica, utilizzando lo schema di Ruffini, l'equazione può esser messa nella seguente forma:

$$(x-1)(x^2-kx-2k+1)=0.$$

Bisogna perciò stabilire per quali valori di k l'equazione di 2° grado:

$$x^2-kx-2k+1=0$$

ammette due soluzioni intere. Si potrebbe pensare di ricorrere alla formula risolvente dell'equazione di 2° grado: strada impervia col rischio di non raggiungere la meta. Meglio seguire un'altra strada.
Ora, chiamate u, v le soluzioni dell'equazione, in base alle formule di Viète risulta:

$$u+v=k,\ \ u\,v=1-2k.$$

Di conseguenza:

$$u\,v=1-2(u+v)$$

ed a seguire:

$$u\,v+2\,u+2\,v=1,\quad u\,v+2\,u+2\,v+4=1+4,\quad (u+2)(v+2)=5.$$

Sono possibili due soli casi:

$$u+2=1,\ \ v+2=5; \qquad u+2=-1,\ \ v+2=-5.$$
Dal primo si ricava $u=-1,\ v=3$ e perciò $k=2$. Dal secondo: $u=-3,\ v=-7$ e perciò $k=-10$.

- PROBLEMA n. 85.

La differenza tra la radice quadrata di un numero naturale e la sua radice cubica è 4. Determinare il numero.

RISOLUZIONE. Indicato con N il numero, deve essere soddisfatta la seguente condizione:
$$\sqrt{N}-\sqrt[3]{N}=4\,.$$
Si potrebbe procedere in questo modo: si isola il radicale cubico e si eleva al cubo; quindi, nell'equazione trovata, si isola il radicale quadratico e si eleva al quadrato. A conti fatti si ottiene la seguente equazione:
$$N^3-73\,N^2+640\,N-4096=0\,.$$
In seguito ad alcuni tentativi, si trova una sua soluzione intera: N=64. Le altre due soluzioni sono numeri complessi e quindi da scartare.

Il procedimento è evidentemente molto lungo e noioso. Si può migliorare ponendo preliminarmente $\sqrt[3]{N}=A$ per cui $N=A^3$. L'equazione diventa allora:
$$A\sqrt{A}-A=4\,.$$
Di nuovo, si potrebbe procedere isolando il radicale ed elevando al quadrato. A conti fatti si ottiene la seguente equazione:
$$A^3-A^2-8\,A-16=0\,.$$
In seguito ad alcuni tentativi, si trova la soluzione intera A=4 e perciò N=64. Anche adesso le altre due soluzioni sono numeri complessi e quindi da scartare.

Pure questo procedimento, benché più economico del precedente, è ancora piuttosto lungo e noioso. C'è una strada più rapida. Bisogna riflettere sull'equazione $A\sqrt{A}–A=4$, che può mettersi nella seguente forma: $A\left(\sqrt{A}–1\right)=4$, e constatare che il numero A deve essere un quadrato perfetto (diverso da 1) e deve essere un divisore di 4. Ora l'unico numero naturale che ha queste caratteristiche è proprio 4, perciò A=4 e, come sopra, N=64.

- ESERCIZIO n. 91

$P(x)$ è un polinomio di 3° grado tale che $P(x)=1/x$ quando ad x si assegnano i valori 1, 2, 3, 4. Calcolare P(5).

RISOLUZIONE. Si possono seguire due procedimenti: uno di routine, semplice sul piano concettuale, ma piuttosto dispendioso a causa della risoluzione di un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite; l'altro più sofisticato ma anche più economico. La differenza, relativa all'economicità della risoluzione, sarebbe più evidente se, invece di 4 condizioni, fosse assegnato un numero maggiore di condizioni.

Con il primo procedimento, considerato il polinomio:
$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,,$$
s'impongono le condizioni poste dal problema, si risolve il sistema lineare di 4 equazioni nelle 4 incognite a, b, c, d, si trovano tali valori e, una volta ottenuto il polinomio, si trova il valore P(5), che è 0. Lasciamo a chi legge di sviluppare questo procedimento.

Con il secondo procedimento, indicato ancora con P(x) il polinomio, si osserva che, per $x=1,\ x=2,\ x=3,\ x=4$ risulta:
$$P(x)=\frac{1}{x}\,, \qquad \text{da cui } (x\neq 0) \text{ segue}: \quad x\cdot P(x)-1=0\,.$$
Ora, siccome P(x) è un polinomio di 3° grado, x·P(x) è un polinomio di 4° grado con termine noto uguale a 0 ed anche $x{\cdot}P(x)-1$ è un polinomio di 4° grado e precisamente un polinomio che si annulla per $x=1,\ x=2,$

x=3, x=4. Deve essere perciò:

$$x\cdot P(x)-1=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \quad \text{ossia:} \quad x\cdot P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1\,,$$

dove a è un parametro reale non nullo.

Ricordato che il termine noto del polinomio $x\cdot P(x)$ è 0, anche il termine noto del polinomio al secondo membro dell'ultima relazione è 0. E siccome il termine noto di un generico polinomio si ottiene assegnando il valore 0 all'indeterminata, deve risultare:

$$a(-1)(-2)(-3)(-4)+1=0, \quad \text{da cui segue:} \quad a=-\frac{1}{24}.$$

Pertanto: $P(x)=\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1\right\}$

e infine: $P(5)=\frac{1}{5}\left\{-\frac{1}{24}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1+1\right\}=0\,.$

10. Dall'unità 45 – Coniche e luoghi geometrici.

- PROBLEMA n. 52:

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le circonferenze C_1 e C_2 di equazioni rispettivamente:

$$x^2+y^2-2x=0 \;\text{ e }\; x^2+y^2-2y=0.$$

1. A) Dopo aver verificato che le due circonferenze passano entrambe per O, scrivere l'equazione della retta s passante per O ed avente coefficiente angolare t.
   B) Indicati con P e Q gli ulteriori punti in cui la retta s interseca rispettivamente C_1 e C_2, trovare in funzione di t le coordinate del punto medio M del segmento PQ.
2. A) Determinare il luogo geometrico di M al variare della retta s nel fascio di centro O e verificare che si tratta della circonferenza di diametro OC, essendo C l'ulteriore punto in cui si intersecano le due circonferenze assegnate.

3) Dimostrare con considerazioni di geometria sintetica che:
   A) il triangolo CPQ è isoscele indipendentemente dalla posizione di s;
   B) il luogo geometrico del punto M al variare di s nel fascio di centro O è la circonferenza di diametro OC.

RISOLUZIONE (parziale). Ci occupiamo solamente del punto 3. Ed incominciamo con la parte A.

A) Tralasciamo i casi in cui la retta s coincide con la retta OC o è tangente ad una delle due circonferenze. Nel primo di tali casi infatti il triangolo CPQ degenera nel segmento OC. Nel secondo è semplice dimostrare che il triangolo CPQ è isoscele.

Negli altri casi si possono presentare due situazioni: o il punto O è interno al segmento PQ (Fig. 11a) o è esterno ad esso (Fig. 11b).

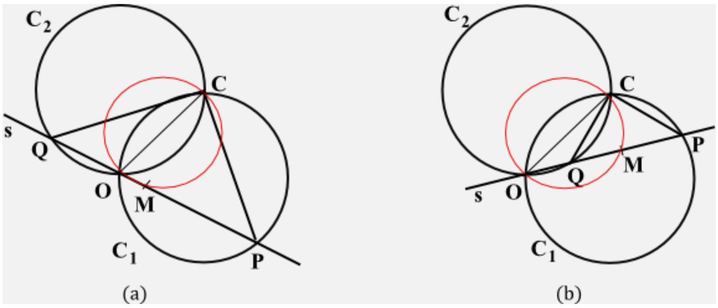

FIG. 11

Nel primo caso gli angoli $C\widehat{P}Q$ e $C\widehat{Q}P$ sono uguali perché sono angoli alla circonferenza che insistono su una medesima corda di due circonferenze uguali. Quindi il triangolo CPQ è isoscele sulla base PQ.
Occupiamoci del secondo caso (come rappresentato in figura 11b, dove il punto Q è compreso fra O e P. Ma poco cambia se fosse il punto P ad essere compreso fra O e Q) . L'angolo $C\widehat{P}Q$ è un angolo alla circonferenza che insiste sul minore degli archi OC della circonferenza C_1, che è uguale al minore degli archi OC della circonferenza C_2; mentre l'angolo $C\widehat{Q}P$ è il supplementare dell'angolo $C\widehat{Q}O$, che è un angolo alla circonferenza che insiste sul maggiore degli archi OC della circonferenza C_2. D'altro canto, la somma del minore e del maggiore degli archi OC della circonferenza C_2 è proprio tale circonferenza. Ne discende che la somma degli angoli $C\widehat{P}Q$ e $C\widehat{Q}O$ è 180°. Come dire che tali angoli sono supplementari. Ragion per cui gli angoli $C\widehat{P}Q$ e $C\widehat{Q}P$ sono supplementari dello stesso angolo $C\widehat{Q}O$ e perciò sono uguali. In conclusione, il triangolo CPQ è isoscele sulla base PQ.
B) La dimostrazione della seconda parte è una diretta conseguenza del fatto che il triangolo CPQ è isoscele sulla base PQ. Per questo motivo, infatti, il punto medio M del segmento PQ è anche il piede dell'altezza condotta da P, per cui il triangolo CMP (e quindi anche il triangolo CMO) è rettangolo in M e perciò tale punto è situato in ogni caso su una delle semicirconferenze di diametro OC.

11. Dall'unità 48 – Solidi geometrici. Proprietà

- PROBLEMA n. 10 (presentato come "laboratorio di matematica").

Dopo aver calcolato la lunghezza della diagonale di un cubo il cui spigolo è lungo $\sqrt{3}$, condurre un piano perpendicolare ad una diagonale del cubo ed esprimere, in funzione della distanza x di tale piano da uno degli estremi della diagonale considerata, il perimetro P(x) e l'area A(x) della sezione di tale piano col cubo, facendo vedere che si ha:

$$P(x)=\begin{cases} 3x\sqrt{6} & \text{per } 0\le x\le 1 \\ 3\sqrt{6} & \text{per } 1<x<2 \\ 3\sqrt{6}(3-x) & \text{per } 2\le x\le 3 \end{cases} \qquad A(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x^2\sqrt{3} & \text{per } 0\le x\le 1 \\ -3\sqrt{3}x^2+9\sqrt{3}x-\frac{9}{2}\sqrt{3} & \text{per } 1<x<2 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}(3-x)^2 & \text{per } 2\le x\le 3 \end{cases}$$

Disegnare i grafici delle due funzioni.

RISOLUZIONE. Si tratta di un problema con altissimo coefficiente di difficoltà, che affrontiamo da un punto di vista più generale di quello proposto dalla traccia.
Consideriamo il cubo ABCDEFGH (Fig. 12) e una sua diagonale, per esempio AG.
Conduciamo il piano α perpendicolare ad AG in un suo punto X e prendiamo in esame gli unici casi interessanti, che sono quelli in cui X appartiene alla diagonale]AG[. I casi in cui X coincide con gli estremi della diagonale sono del tutto banali dal momento che l'intersezione del piano con il cubo si riduce ad un punto.
Andiamo subito alle conclusioni che si possono trarre.
La loro dimostrazione, piuttosto complessa, è riportata a seguire.

Indichiamo con K la proiezione ortogonale di B su AG e con L la proiezione ortogonale di H su AG.
Se X appartiene al segmento]AK] oppure al segmento [LG[, in altri termini se $0<AX\le AK$ oppure $AL\le AX<AG$, la sezione di α col cubo è un triangolo equilatero.
Se X appartiene al segmento]KL[, questa sezione è un esagono avente la forma riportata nella figura 13. Questo esagono ha alcune interessanti proprietà:

- i suoi angoli sono uguali e ciascuno di essi è ampio 120°;
- i suoi lati sono due a due paralleli e, alternativamente, tre a tre uguali;
- il suo perimetro non varia al variare di X sul segmento]KL[ed è esattamente $3s\sqrt{2}$, essendo s lo spigolo del cubo.

L'esagono diventa un esagono regolare nel caso particolare in cui il piano sezione passa per il centro del cubo. In questo caso l'esagono ha per vertici i punti medi di due spigoli di ogni faccia del cubo.

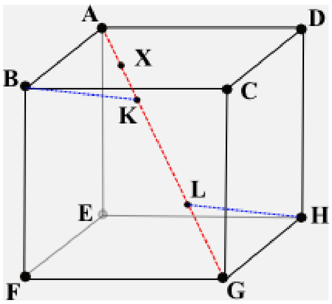

FIG. 12

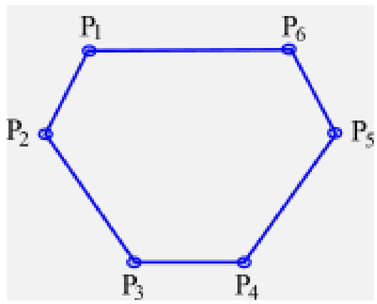

FIG. 13

Eccoci dunque alla dimostrazione di queste conclusioni, con alcune integrazioni.
Con riferimento alla figura 14, indicata con K la proiezione ortogonale di B su AG, dimostriamo che se X=K allora il piano α coincide col piano β' dei punti B, D, E. Per questo osserviamo anzitutto che le proiezioni ortogonali di D ed E su AG coincidono con K: basta constatare che i triangoli AGB, AGD, AGE sono triangoli rettangoli congruenti di ipotenusa comune AG e che i cateti AB, AD, AE sono, ciascuno nel rispettivo triangolo, i cateti minori, per cui AK<KG.
Dunque le rette KB, KD, KE sono perpendicolari ad AG in K. Esse sono contenute perciò nel piano perpendicolare ad AG in K. Cosicché il piano α coincide, in questo caso, col piano β' dei punti B, D, E.
Analogamente, indicata con L la proiezione ortogonale di H su AG, si dimostra che se X=L allora il piano α coincide col piano β" dei punti F, H, C; risulta inoltre AL>LG e AK=LG.
Adesso è semplice concludere che la sezione di α col cubo è il triangolo equilatero BDE quando X=K ed il triangolo equilatero FHC quando X=L.
Altrettanto semplice è dimostrare che, se X è interno al segmento AK o al segmento LG, la sezione di α col cubo è ancora un triangolo equilatero.

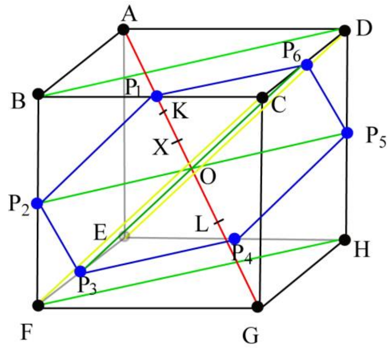

FIG. 14

Esaminiamo adesso il caso in cui X è interno al segmento KL, osservando anzitutto che il piano α non interseca gli spigoli AB, AD, AE, GH, GC, ma interseca i sei spigoli rimanenti CD, BC, BF, EF, EH, HD.

Per cui la sezione di α col cubo è un esagono, precisamente l'esagono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$.
In questo poligono i lati P_1P_2 , P_3P_4 , P_5P_6 sono congruenti fra loro, così come lo sono i lati P_2P_3 , P_4P_5 , P_6P_1.
Per dimostrarlo osserviamo anzitutto che ogni piano α è parallelo ai piani β' e β''. Cosicché le rette P_1P_2 e CF sono parallele perché intersezioni dei piani paralleli α e β'' col piano della faccia BCGF del cubo. Se ne desume facilmente che $BP_1 \cong BP_2$.
Analogamente si stabilisce che $CP_1 \cong CP_6$.
Di conseguenza $DP_6 \cong BP_1$ poiché si tratta di differenze di segmenti congruenti.
D'altronde anche $DP_6 \cong DP_5$. Dunque i due triangoli BP_1P_2 e DP_6P_5 sono congruenti. Perciò: $P_1P_2 \cong P_5P_6$.
Analogamente si ragiona negli altri casi.
Si può poi facilmente spiegare che:

$$P_1P_2 \parallel P_4P_5 \parallel P_3P_6, \quad P_2P_3 \parallel P_5P_6 \parallel P_1P_4, \quad P_4P_5 \parallel P_6P_1 \parallel P_2P_5.$$

Infine si può costatare che se KX<XL risulta $BP_1<P_1C$ e se KX>XL risulta $BP_1>P_1C$.
Pertanto, per ragioni di continuità, quando KX=XL, cioè quando X coincide col punto medio O della diagonale AG (vale a dire col centro del cubo), risulta $BP_1=P_1C$. Ne consegue che i vertici dell'esagono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ sono i punti medi degli spigoli, rispettivamente, BC, BF, EF, EH, DH, CD. Per cui i lati dell'esagono sono congruenti fra loro.
D'altra parte le diagonali P_1P_4 , P_2P_5 , P_3P_6 passano tutte per O. Infatti, per esempio con riferimento a P_1P_4 (ma il discorso per le altre due diagonali è analogo), basta osservare che essa congiunge i punti medi di due lati opposti del rettangolo BCHE e perciò passa per il centro di questo rettangolo, ossia per il punto medio della sua diagonale BH, che è poi anche la diagonale del cubo, il cui punto medio è proprio O.
Tutto questo, ricordando che $P_1P_2 \parallel P_3P_6$ e $P_2P_3 \parallel P_1P_4$, ci consente di concludere che il quadrilatero $OP_1P_2P_3$ è un parallelogramma. E siccome $P_1P_2 \cong P_2P_3$, esso è un rombo. Dunque $OP_1 \cong OP_2$.
In modo analogo si dimostra che sono congruenti fra loro tutti i segmenti OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5, OP_6. L'esagono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ si può inscrivere dunque in un cerchio di centro O. E siccome i suoi lati sono congruenti esso è chiaramente regolare.
Ritornando all'esagono generico, ottenuto come sezione del cubo col piano α quando X è interno al segmento KL, si può osservare che esso ha una configurazione particolare (Fig. 13). I suoi angoli interni sono congruenti fra loro e ciascuno è perciò ampio 120°.
È interessante studiare l'andamento del perimetro della sezione del piano α col cubo al variare del punto X da A a G lungo la diagonale AG. Per comodità supponiamo che lo spigolo del cubo sia lungo s, per cui $\overline{AG}=s\sqrt{3}$.
Calcoliamo anzitutto il perimetro del triangolo BDE e la lunghezza di AK. Per questo ridisegniamo per comodità il tetraedro di vertice A e base BDE (Fig. 15), le cui facce laterali sono tre triangoli rettangoli uguali. Risulta chiaramente: $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{BE}=s\sqrt{2}$. Per cui il perimetro del triangolo BDE risulta essere: $P(BDE)=3s\sqrt{2}$.

Inoltre si ha: $\overline{BM}=\frac{\overline{BD}}{2}\sqrt{3}=\frac{s}{2}\sqrt{6}$ e $\overline{BK}=\frac{2}{3}\overline{BM}=\frac{s}{3}\sqrt{6}$. Dunque: $\overline{AK}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BK}^2}=\frac{s}{3}\sqrt{3}$.

Posto ora $\overline{AX}=x$ e indicato con P(x) il perimetro del poligono sezione di α col cubo, mentre X varia da A a K:

$$\frac{P(x)}{P(BDE)}=\frac{\overline{AX}}{\overline{AK}}$$

per cui, a conti fatti:

$$\text{per } 0 \le x \le \frac{s}{3}\sqrt{3} \text{ si ha } P(x)=3x\sqrt{6}.$$

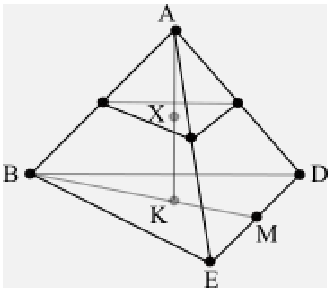

FIG. 15

Ricordando adesso che AG≅LG, posto $\overline{XG}$=x', per evidenti ragioni di simmetria, mentre X varia da L a G, il perimetro del poligono sezione è $P(x')=3x'\sqrt{6}$. D'altra parte risulta $x'=s\sqrt{3}-x$ e ancora: $\overline{AL}=\frac{2}{3}s\sqrt{3}$. Pertanto, ritornando ad indicare con P(x) il perimetro della sezione, per X che varia da L a G, ossia:

$$\text{per } \frac{2}{3}s\sqrt{3} \le x \le s\sqrt{3} \text{ si ha: } P(x)=3\sqrt{6}\left(s\sqrt{3}-x\right).$$

Rimane da vedere cosa succede per X che varia da K ad L, cioè per $\frac{s}{3}\sqrt{3}<x<\frac{2}{3}s\sqrt{3}$.

Abbiamo già fatto notare come la sezione abbia la forma di figura 7, in cui i lati sono tre a tre congruenti. Si tratta allora di calcolare le misure di P_1P_2 e P_1P_6. Posto $\overline{BP_1}=x$, risulta $\overline{P_1P_2}=x\sqrt{2}$. Inoltre, essendo $\overline{P_1C}=s-x$, risulta $\overline{P_1P_6}=(s-x)\sqrt{2}$.

Ne consegue che:

$$\text{per } \frac{s}{3}\sqrt{3}<x<\frac{2}{3}s\sqrt{3} \text{ si ha } P(x)=3x\sqrt{2}+3(s-x)\sqrt{2}=3s\sqrt{2}$$

cioè il perimetro **è invariante al variare del poligono sezione**. In sintesi:

$$P(x)=\begin{cases} 3\,x\,\sqrt{6} \text{ per } 0\le x\le \frac{s}{3}\sqrt{3} \\ 3\,s\,\sqrt{2} \text{ per } \frac{s}{3}\sqrt{3}<x<\frac{2}{3}s\,\sqrt{3} \\ 3\sqrt{6}\left(s\,\sqrt{3}-x\right) \text{ per } \frac{2}{3}s\,\sqrt{3}\le x\le s\,\sqrt{3} \end{cases}$$

Un ragionamento simile può essere fatto per determinare l'andamento dell'area A(x) della sezione per $0\le x\le s\sqrt{3}$, ossia per X che varia da A a G. Si trova:

$$A(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x^2\sqrt{3} \text{ per } 0\le x\le \frac{s}{3}\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3}x^2+9sx-\frac{3}{2}s^2\sqrt{3} \text{ per } \frac{s}{3}\sqrt{3}<x<\frac{2}{3}s\,\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(s\,\sqrt{3}-x\right)^2 \text{ per } \frac{2}{3}s\,\sqrt{3}\le x\le s\,\sqrt{3} \end{cases}$$

In particolare, il perimetro e l'area dell'esagono regolare, ottenuto quando il piano α passa per il centro del cubo, sono rispettivamente:

$$3\,s\,\sqrt{2}\,,\quad \frac{3}{4}s^2\sqrt{3}\,.$$

Per $s=\sqrt{3}$ si hanno i risultati richiesti dalla traccia. Cosa che lo stesso lettore può verificare. A lui lasciamo pure il disegno dei grafici delle due funzioni P(x) e A(x) in questo caso particolare.

Bisogna dire che la risoluzione precedente, almeno per qualche aspetto, torna utile per la risoluzione del problema n. 11, assegnato a "*Matematica senza Frontiere*" 2008, esso pure proposto come laboratorio di matematica.
A proposito di questo esercizio, si suggerisce la lettura del racconto fantastico ***Flatlandia***, scritto nel XIX secolo dall'inglese Edwin Abbott Abbott (1838-1926) e pubblicato in Italia per i tipi Adelphi (1966).

- PROBLEMA n. 12.

Dimostrare che ogni numero primo maggiore di 2 può scriversi in un solo modo come differenza dei quadrati di due numeri naturali.
Successivamente, utilizzando tale proprietà, determinare i numeri interi c, d sapendo che sono le misure, espresse in centimetri, rispettivamente dell'altezza e della diagonale di un parallelepipedo rettangolo, di cui le dimensioni della base sono:

1) a = 1 cm, b = 2 cm; 2) a = 2 cm, b = 3 cm; 3) a = 2 cm, b = 5 cm,

dopo aver controllato che a^2+b^2 (espresso in centimetri quadrati) è un numero primo.

RISOLUZIONE. Ogni numero primo maggiore di 2 è certamente un numero dispari e perciò può essere messo nella forma 2h+1, dove h è un numero naturale non nullo. D'altro canto, è evidente che si ha:

$$2h+1=(h+1)^2-h^2.$$

Ragion per cui è già dimostrato che ogni numero primo maggiore di 2 si può scrivere come differenza di due quadrati, anzi dei quadrati di due naturali consecutivi. Si tratta di stabilire che questa "scomposizione" è unica.
Indichiamo, per comodità, con p il numero in questione. Sappiano intanto che esistono due naturali x ed y tali che $p=x^2-y^2$, cioè $p=(x+y)(x-y)$.
Ora, siccome p è primo, i suoi divisori sono 1 e p ed essi soltanto, per cui non può essere che:

$$x + y = p \quad e \quad x - y = 1,$$

da cui segue:

$$x=\frac{p+1}{2}\ , \quad y=\frac{p-1}{2}\ .$$

e quindi, siccome p=2h+1, risulta:

$$x = h+1, \quad y = h.$$

Dunque $(h+1)^2-h^2$ è l'unico modo di scrivere p come differenza di due quadrati.
Osserviamo adesso che, se a, b, c sono le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo di diagonale d, risulta: $d^2=a^2+b^2+c^2$, ossia: $a^2+b^2=d^2-c^2$. Si tratta allora di controllare che a^2+b^2 è un numero primo, scriverlo nella forma 2h+1 e concludere che i due numeri c, d sono rispettivamente c=h, d=h+1.
Esaminiamo i tre casi proposti:
per a=1 e b=2 si ha: $1^2+2^2=5=2\times2+1$; perciò: c=2, d=3; in effetti: $3^2=1^2+2^2+2^2$;
per a=2 e b=3 si ha: $2^2+3^2=13=2\times6+1$; perciò: c=6, d=7; in effetti: $7^2=2^2+3^2+6^2$;
per a=2 e b=5 si ha: $2^2+5^2=29=2\times14+1$; perciò: c=14, d=15; in effetti: $15^2=2^2+5^2+14^2$.

12. Dall'unità 49 – Misure dei solidi

- PROBLEMA n. 69.

Nel prisma ABCA'B'C' le basi ABC ed A'B'C' sono due triangoli equilateri di lato s, gli spigoli laterali sono inclinati di 60° rispetto ai piani delle basi e gli spigoli laterali AA' e BB' sono perpendicolari allo spigolo di base AB. Sapendo che l'area del quadrilatero ABB'A' è $3s^2/2$, calcolare il volume del prisma.

RISOLUZIONE (guida). Comunque sia disposto il prisma, indicato con H il piede della perpendicolare condotta dal vertice A al piano della base A'B'C', nel triangolo rettangolo AA'H l'angolo di vertice A' è l'angolo di cui lo spigolo AA' è inclinato rispetto al piano A'B'C', dunque $A\hat{A}'H=60°$. Da qui in poi tutto procede facilmente. Infatti, dopo aver trovato che $\overline{AA'}=\frac{3}{2}s$, risulta $\overline{AH}=\frac{3}{4}s\sqrt{2}$ e quindi $V=\frac{9}{16}s^2$.

- PROBLEMA n. 95.

Calcolare il volume di una piramide triangolare regolare, sapendo che il piano parallelo alla base, condotto ad una distanza $a/\sqrt{3}$ da essa, interseca la piramide secondo un triangolo di area $4a^2/\sqrt{3}$; mentre il piano, contenente uno spigolo laterale e condotto perpendicolarmente alla base, interseca la piramide secondo un triangolo di area $3a^2\sqrt{3}/2$.

RISOLUZIONE. È preferibile impostare il problema ponendo uguale ad x la distanza del vertice della piramide dal piano sezione (o, in alternativa, l'altezza della piramide). In questo caso si perviene ad una banale equazione di 2° grado: $6x^2-5a\sqrt{3}x+2a^2=0$, la quale fornisce due radici:

$$x'=\frac{2}{3}a\sqrt{3},\quad x''=\frac{a}{6}\sqrt{3},$$

entrambe accettabili come soluzioni del problema. La prosecuzione è semplice.

Volendo, si può impostare il problema ponendo uguale ad x lo spigolo di base della piramide, ma in questo caso il procedimento si complica un po'. Infatti si perviene alla seguente equazione di 4° grado:

$$x^2\left(x-6a\sqrt{3}\right)^2=36\cdot 16\,a^4,$$

la quale si spezza nelle due seguenti equazioni di 2° grado:

$$x\left(x-6a\sqrt{3}\right)=24a^2,\qquad x\left(x-6a\sqrt{3}\right)=-24a^2.$$

La prima di esse fornisce due radici:

$$x_1'=a\left(3\sqrt{3}+\sqrt{51}\right),\quad x_1''=a\left(3\sqrt{3}-\sqrt{51}\right),$$

nessuna delle quali è accettabile come soluzione del problema.

La seconda fornisce le radici:

$$x_2'=2a\sqrt{3},\quad x_2''=4a\sqrt{3},$$

entrambe accettabili. Anche adesso la prosecuzione è semplice.

- PROBLEMA n. 101.

Considerata una semicirconferenza K di diametro AB, centro O e raggio r, sia t la tangente ad essa in A. Detto C il punto di t tale che AC=2 r, condurre per esso l'ulteriore tangente s a K e sia D il punto in cui s seca la perpendicolare ad AB in O. Detti, inoltre, M il punto di contatto di s con K ed H il piede della perpendicolare condotta da C ad OD, dopo aver dimostrato che il quadrilatero OMHC è un trapezio isoscele, calcolare il volume di una piramide che ha per base questo trapezio ed altezza lunga 2r.

RISOLUZIONE (guida). Per dimostrare che il quadrilatero OMHC è un trapezio isoscele si possono seguire più percorsi. Uno è il seguente:

a) dopo aver constatato che CH=OM e CM=OH si giustifica che i triangoli rettangoli OHC e OMC sono congruenti, per cui: $H\hat{C}O=M\hat{O}C$;
b) si constata che i triangoli MHC ed HMO sono congruenti, per cui: $M\widehat{H}C=H\widehat{M}O$;
c) ne consegue che $M\widehat{O}C+H\widehat{M}O$ misura quanto un angolo piatto, dunque OC ed MH sono parallele.

- PROBLEMA n. 106.

Un trapezio isoscele è circoscritto ad un cerchio. Determinare i lati del trapezio e il raggio del cerchio sapendo che il trapezio ha area $80\ a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e che è uguale a 21/8 il rapporto fra il volume del tronco di cono e quello della sfera che si ottengono facendo ruotare rispettivamente il trapezio e il cerchio di mezzo giro intorno al diametro del cerchio perpendicolare alle basi del trapezio.

RISOLUZIONE (traccia). Una volta poste uguali a 2x e 2y le lunghezze delle basi del trapezio, si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{xy}=40\ a^2 \\ x^2+y^2=\dfrac{21}{4}\,xy \end{cases}$$

Per la sua risoluzione occorre qualche artificio. In particolare, dalla prima equazione si ottiene:

$$(x^2 + y^2 + 2\ x\ y)\ x\ y = 1600\ a^4,$$

e da questa, in virtù della seconda equazione, segue:

$$\left(\frac{21}{4}\,xy+2xy\right)xy=1600\ a^4,$$

da cui, a conti fatti:

$$x\ y = 16\ a^2.$$

Sostituito il valore di xy nella prima equazione del sistema, si ottiene:

$$x + y = 10\ a.$$

La prosecuzione è banale.

- PROBLEMA n. 123.

La base maggiore di un trapezio è uguale ai 3/2 della minore. La retta r che congiunge i punti medi dei lati obliqui divide il trapezio in due poligoni. Si considerino i solidi generati da tali poligoni in una rotazione completa intorno alla retta r.

a) Dimostrare che la retta r è parallela alle basi del trapezio e che la corda che il trapezio intercetta su di essa è uguale alla semisomma delle basi del trapezio stesso.
b) Calcolare il rapporto tra il volume del solido maggiore e quello del minore.

RISOLUZIONE. Pur senza proporre questioni non di routine, si tratta di un problema con un discreto coefficiente di difficoltà per le numerose insidie che presenta.

Incominciamo ad indicare con ABCD il trapezio (Fig. 16) e con M ed N rispettivamente i punti medi dei lati obliqui AB e CD. Diciamo poi H e K le proiezioni ortogonali di M ed N su AB e con R ed S le proiezioni ortogonali di D e C su MN.

a) Per dimostrare che il segmento MN è parallelo alle basi del trapezio ed è uguale alla loro semisomma, ci serviamo del calcolo vettoriale (è un procedimento ma non l'unico: se infatti si conduce per D la perpendicolare ad AB, …). Si ha:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\ \text{ e }\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN};$$

da qui, sommando membro a membro, segue:

$$2\ \overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right);$$

d'altro canto, essendo M il punto medio di AD ed N quello di BC, risulta: $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MD}$ e $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{CN}$, per cui $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}$ e $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}$ sono uguali al vettore nullo. Di conseguenza si ha:

$$2\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\ \text{ ossia: }\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right).$$

Ciò prova che la corda MN è parallela alle basi del trapezio ed è uguale alla loro semisomma.

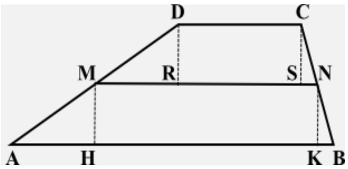

FIG. 16

b) Indichiamo adesso con V_1 il volume del solido generato dal trapezio ABNM in una rotazione completa intorno alla retta MN e con V_2 il volume del solido generato nella stessa rotazione dal trapezio MNCD. Constatiamo anzitutto che il primo solido è costituito dal cilindro generato da AB incavato da due coni, uno generato da AM e l'altro generato da BN, mentre il secondo è costituito dal cilindro generato da DC sormontato da due coni, uno generato da MD e l'altro generato da CN. Costatato inoltre che i triangoli AHM e MRD sono uguali e parimenti lo sono i triangoli KBN e SNC, si trova agevolmente che:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{3\,\overline{AB}-\left(\overline{AH}+\overline{KB}\right)}{3\,\overline{DC}+\left(\overline{AH}+\overline{KB}\right)}=\frac{2\,\overline{AB}+\overline{MN}}{2\,\overline{DC}+\overline{MN}}=\frac{2\,\overline{AB}+\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}}{2\,\overline{DC}+\dfrac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}}=\frac{5\,\overline{AB}+\overline{DC}}{\overline{AB}+5\,\overline{DC}}\ .$$

Da qui, dividendo numeratore e denominatore per $\overline{DC}$ e ricordando che: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}=\frac{3}{2}$, a conti fatti si trova:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{17}{13}.$$

13. Dall'unità 53 – Funzioni periodiche

- ESERCIZIO (proposto come "laboratorio di matematica" in chiusura del paragrafo n. 53.5.2)

… risolvere le seguenti questioni, senza l'uso di alcuno strumento di calcolo automatico. […].

a) Semplificare le seguenti espressioni:

$$\operatorname{asin}\frac{1}{2}+\operatorname{acos}\frac{1}{2}\ ;\quad \operatorname{atan}2-\operatorname{atan}\frac{1}{3}\ .$$

b) Dimostrare che si ha:

$$\operatorname{asin}\frac{3}{5}+\operatorname{acos}\frac{4}{5}=\operatorname{asin}\frac{24}{25}\ ;\quad \operatorname{atan}a+\operatorname{atan}b=\operatorname{atan}\frac{a+b}{1-ab}\ .$$

c) Calcolare il valore di x per cui si ha:

$$\operatorname{asin}x=2\operatorname{asin}\frac{3}{5}\ ;\quad \operatorname{atan}x=2\operatorname{atan}2\ .$$

RISOLUZIONE. Occupiamoci della prima espressione del punto a). È evidente che:

$$\operatorname{asin}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\ \text{ e }\ \operatorname{acos}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\ ,\ \text{ per cui: }\ \operatorname{asin}\frac{1}{2}+\operatorname{acos}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\ .$$

Semplice e immediato. Sennonché questo procedimento funziona in questa particolare situazione favorevole. Se al posto di 1/2 figura un valore generico, mettiamo x, esso non funziona più. Dobbiamo trovare un procedimento che si possa generalizzare. È esattamente ciò che andiamo a fare. Orbene, se $\operatorname{asin}x=\alpha$ allora $\sin\alpha=x$; così pure, se $\operatorname{acos}x=\beta$ allora $\cos\beta=x$. Dunque α e β sono due angoli tali che il seno del primo è uguale al coseno del secondo e perciò sono complementari. Pertanto $\alpha+\beta=\pi/2$, vale a dire:

$$\operatorname{asin}x+\operatorname{acos}x=\frac{\pi}{2}\ .$$

Riguardo all'espressione $\operatorname{atan}2-\operatorname{atan}\frac{1}{3}$: se $\operatorname{atan}2=\alpha$ allora $\tan\alpha=2$ e se $\operatorname{atan}\frac{1}{3}=\beta$ allora $\tan\beta=\frac{1}{3}$, con α e β compresi entrambi fra 0 e $\pi/2$. Dobbiamo calcolare $\alpha-\beta$. Ora si ha:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\cdot\dfrac{1}{3}}=1.$$

Per cui $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$. Vale a dire: $\operatorname{atan}2-\operatorname{atan}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

Relativamente alla prima dimostrazione del punto b), posto: $\text{asin}\frac{3}{5}=\alpha$ e $\text{acos}\frac{4}{5}=\beta$, per cui $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ e $\cos\beta=\frac{4}{5}$, si ottiene subito che $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ e $\sin\beta=\frac{3}{5}$. Di modo che:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}.$$

Di conseguenza:

$$\alpha+\beta=\text{asin}\frac{24}{25}, \text{ vale a dire } \text{asin}\frac{3}{5}+\text{acos}\frac{4}{5}=\text{asin}\frac{24}{25}.$$

Analogamente si procede per la seconda dimostrazione del punto b).
Ed analogo procedimento bisogna seguire per risolvere le due equazioni del punto c).

14. Dall'unità 57 – Formula di Bayes

- PROBLEMA n. 6 in paragrafo 57.1.3.

Giuseppe propone all'amico Antonio, che è un bravo matematico, il seguente problema: «In queste quattro buste ci sono delle figurine di calciatori, ma non ci sono due buste con un ugual numero di figurine. Nella busta con il minor numero di figurine c'è quella di Gattuso, che però non è da sola. Inoltre, il numero totale delle figurine è un numero dispari, mentre il prodotto dei numeri di figurine contenute nelle varie buste è 1260. Se indovini qual è il totale delle figurine te le regalo».
Quale probabilità ha Antonio di aggiudicarsi le figurine?

RISOLUZIONE. Si tratta di stabilire quante quaterne di numeri interi maggiori di 1 e diversi fra loro si possono formare in modo che il loro prodotto sia 1260 e la loro somma sia un numero dispari. Anzitutto constatiamo che da un lato $1260=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$ e dall'altro che la somma di 4 numeri può essere un numero dispari solo se i suoi addendi dispari sono in numero di 1 o 3. Ora, nel nostro caso, non è possibile che ci sia un solo addendo dispari dal momento che è impossibile la presenza di 3 addendi pari (essi possono essere 2 al più, ottenuti moltiplicando per 2 uno dei numeri dispari ricavati moltiplicando opportunamente i numeri $3^2, 5, 7$), quindi gli addendi dispari devono essere esattamente 3. I casi possibili sono allora i seguenti:

$$4+9+5+7 = 25, \quad 4+3+15+7 = 29, \quad 4+3+5+21 =33.$$

A questo punto, Antonio può solo indovinare, non ha altri elementi per escludere qualcuno dei numeri suddetti. Ha quindi una possibilità su 3 di aggiudicarsi le figurine che Giuseppe ha messo in palio.

- PROBLEMA n. 10.

In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

RISOLUZIONE. Scommettere alla pari significa attribuire probabilità 1/2 all'evento "la pallina rimasta nell'urna è bianca". Andiamo a vedere se è così.
Ricorriamo alla formula di Bayes e per questo visualizziamo la situazione con un grafo (Fig. 17), indicando con X l'urna con le palline bianche, con Y quella contenente palline di colore diverso e con Z l'urna con le palline nere.
Osserviamo anzitutto che la probabilità di estrarre pallina bianca, dopo aver scelto a caso una delle tre urne, è:

$$p(\text{bianca})=p(X)p(B)+p(Y)p(B)+p(Z)p(B)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+0\right)=\frac{1}{2}.$$

Pertanto, la probabilità che la pallina rimasta nell'urna estratta a caso sia bianca, sapendo che è stata estratta una pallina bianca, è, per il teorema di Bayes:

$$p(X|B)=\frac{p(B|X)p(X)}{p(\text{bianca})}=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

La probabilità è addirittura maggiore di 1/2 e quindi conviene scommettere alla pari.

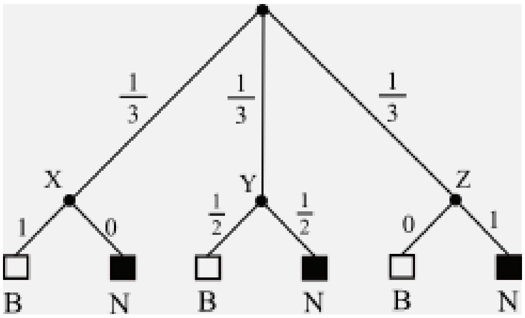

FIG. 17

In realtà, il ricorso alla formula di Bayes, pur corretto, è esagerato. Il problema si può risolvere, infatti, con considerazioni elementari.
Bisogna solo capire che, una volta estratta una pallina bianca da un'urna scelta a caso, la pallina rimasta nell'urna è bianca solo se proviene dall'urna X, ma può esserlo in due modi: pallina B1 o pallina B2, dal momento che nell'urna vi sono due palline bianche. Ora, una volta scelta a caso un'urna e ancora a caso una delle due palline in essa contenute, se si constata che è bianca, i casi possibili sono i seguenti:

a) la pallina proviene dall'urna X: quella che rimane è B1 (se è stata estratta B2) o è B2 (se è stata estratta B1);
b) la pallina proviene dall'urna Y: quella che rimane è N.

Solo nel caso in cui la pallina proviene dall'urna X il suo colore è ancora bianco: due possibilità favorevoli.
Pertanto la probabilità che, estratta pallina bianca, quella rimasta nell'urna sia pure bianca è: p=2/3. Come sopra, ma senza scomodare il teorema di Bayes.

15. Dall'unità 59 – Successioni e progressioni

- ESERCIZIO n. 5 (proposto come "laboratorio di matematica").

Si sa che a_0 ed a_1 sono numeri non nulli. Si sa inoltre che, per n>1, è:

$$a_n=\frac{2n}{a_{n-2}}.$$

Considerato il prodotto $P=a_0\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3$, delle seguenti alternative una sola è corretta. Individuala e fornisci un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

[A] P = 24. [B] P = 48.
[C] P = 96. [D] I dati non sono sufficienti per calcolare P.

RISOLUZIONE. Un modo di risolvere questo esercizio è di utilizzare in maniera diretta la formula assegnata, in base alla quale si ha:

$$a_2=\frac{4}{a_0}\ ,\quad a_3=\frac{6}{a_1}\ .$$

Pertanto:

$$P=a_0 \cdot a_1 \cdot \frac{4}{a_0} \cdot \frac{6}{a_1}=24.$$

L'alternativa corretta è perciò la [A].
Un altro modo è di utilizzare la formula in maniera indiretta, osservando, in particolare, che è: $a_{n-2} \cdot a_n=2n$.
Cosicché: $a_0 \cdot a_2=4$, $a_1 \cdot a_3=6$.
Di nuovo:

$$P=(a_0 \cdot a_2)\cdot(a_1 \cdot a_3)=4\times 6=24.$$

Sia la prima sia la seconda modalità si possono generalizzare, ma è evidente che la prima è un po' più lunga della seconda e la seconda non si può generalizzare sempre. Tanto per dire, il secondo procedimento non potrebbe essere seguito se la richiesta fosse stata di calcolare il prodotto $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. Ma questo procedimento si sarebbe potuto seguire pure in questo caso se la formula assegnata fosse stata la seguente:

$$a_n=\frac{2n}{a_{n-1}}\ \text{, con } n>0.$$

- PROBLEMA n. 40.

Sono assegnati tre numeri naturali consecutivi a, b, c. Indicato con n un altro numero naturale, si sa che i tre numeri a, b+4, c+n sono in progressione geometrica. Determina i numeri a, b, c.

RISOLUZIONE. Poiché i numeri a, b, c sono consecutivi, deve essere $b=a+1$ e $c=a+2$. Consideriamo adesso i numeri a, $b+4=a+5$ e $c+n=a+2+n$. Se tali numeri devono essere in progressione geometrica, deve risultare:

$$(a+5)^2=a(a+2+n)\text{, ossia: } a(n-8)=25\text{. Pertanto: } n=8+\frac{25}{a}.$$

Sono accettabili soltanto i valori di a per i quali n è un numero naturale. Affinché ciò accada anche 25/a deve essere un numero naturale; il che significa che a può essere uguale soltanto ad 1, 5 o 25. Il problema presenta pertanto tre soluzioni:

$$(a=1,\ b=2,\ c=3);\ \ (a=5,\ b=6,\ c=7);\ \ (a=25,\ b=26,\ c=27).$$

- PROBLEMA n. 45.

Si consideri la seguente equazione nell'incognita x:

$$4x^3-6x^2-13x+k=0,$$

dove k è un parametro reale. Si sa che le sue soluzioni sono numeri reali in progressione aritmetica. Determinare tali soluzioni ed il valore di k.

RISOLUZIONE. Si indicano con a–d, a, a+d tre numeri in progressione aritmetica di ragione d. Essi sono le soluzioni di un'equazione di 3° grado in x se e solo se risulta:

$$\big(x-(a-d)\big)(x-a)\big(x-(a+d)\big)=0,$$

vale a dire, dopo alcune semplici elaborazioni algebriche:

$$x^3-3ax^2+\left(3a^2-d^2\right)x+\left(ad^2-a^3\right)=0.$$

Ora, l'equazione assegnata può essere scritta nel modo seguente:

$$x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{4}x+\frac{k}{4}=0.$$

Affinché la precedente equazione si identifichi con quest'ultima deve risultare:

$$3a=\frac{3}{2},\ \ 3a^2-d^2=-\frac{13}{4},\ \ ad^2-a^3=\frac{k}{4}.$$

Una volta risolto il sistema delle precedenti equazioni nelle incognite a, d, k, si trova:

$$a=\frac{1}{2},\ \ d=\pm 2,\ \ k=\frac{15}{8}.$$

Ne consegue che le radici dell'equazione assegnata sono:

$$-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{2}.$$

- PROBLEMA n. 46.

I tre numeri a, b+2, c+p sono in progressione geometrica. Sapendo che a, b, c sono numeri naturali consecutivi e che p è un numero primo, determinare i numeri a, b, c, p.

RISOLUZIONE. Conviene indicare i numeri a, b, c rispettivamente con n–1, n, n+1. Cosicché i tre numeri a, b+2, c+p diventano rispettivamente: n–1, n+2, n+1+p. Siccome questi tre numeri sono in progressione geometrica, deve essere soddisfatta la seguente condizione:

$$(n+2)^2=(n-1)(n+1+p)$$

da cui segue abbastanza agevolmente:

$$p=4+\frac{9}{a-1}\ .$$

Considerato che p è un numero intero, a–1 deve essere un divisore di 9. Tre possibilità: a–1=1 oppure a–1=3 oppure a–1=9. Nel primo caso (a=2) è p=13; nel secondo (a=4) è p=7, nel terzo (a=10) è p=5. In conclusione si hanno tre soluzioni: (1,2,3,13); (3,4,5,7); (9,10,11,5).

16. Dall'unità 60 – Successioni ricorsive.

Nel paragrafo 60.1.2 abbiamo fornito, senza dimostrarla, la formula di Binet, la quale esprime in forma analitica il termine a_n della successione di Fibonacci. Precisamente:

$$\mathbf{a_n=\frac{\varphi^n-\psi^n}{\sqrt{5}}}\,,$$

dove φ e ψ sono le radici positiva e negativa dell'equazione $x^2-x-1=0$, vale a dire:

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\qquad \psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Detto per inciso, φ è il numero aureo, mentre ψ è il suo antireciproco.
Qui ci proponiamo di dimostrare la formula di Binet.

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI BINET.
Incominciamo ad osservare che, se x è una radice dell'equazione $x^2-x-1=0$, deve essere:

$$x^2=x+1.$$

Di conseguenza:
- $x^3=x^2\cdot x=(x+1)x=x^2+x=(x+1)+x=2x+1$;
- $x^4=x^3\cdot x=(2x+1)x=2x^2+x=2(x+1)+x=3x+2$;
- $x^5=x^4\cdot x=(3x+2)x=3x^2+2x=3(x+1)+2x=5x+3$;
- $x^6=x^5\cdot x=(5x+3)x=5x^2+3x=5(x+1)+3x=8x+5$.

Sembra che, per il generico esponente n, sia:

$$x^n=a_nx+a_{n-1}\,,$$

dove a_n e a_{n-1} sono termini della successione i Fibonacci.
Proviamolo per induzione. Avendo di fatto stabilito che la base dell'induzione è vera, basta provare che è vero il passo induttivo. Quindi, ammesso che la relazione precedente sia vera quando ad n si assegna il valore k, bisogna dimostrare che essa è vera quando ad n si assegna k+1. Insomma, ammesso che sia $x^k=a_kx+a_{k-1}$ bisogna dimostrare che è $x^{k+1}=a_{k+1}x+a_k$. Di fatto si ha:

$$x^{k+1}=x^k\cdot x=(a_kx+a_{k-1})\cdot x=a_kx^2+a_{k-1}x=a_k(x+1)+a_{k-1}x=(a_k+a_{k-1})x+a_k=a_{k+1}x+a_k.$$

Dunque la relazione precedente è vera per ogni n.
Ora, considerato che x può essere uguale a φ oppure uguale a ψ, risulta:

$$\varphi^n = a_n\varphi + a_{n-1} \quad \text{e} \quad \psi^n = a_n\psi + a_{n-1}\,.$$

Da qui, sottraendo membro a membro, la seconda uguaglianza dalla prima, si ottiene:

$$\varphi^n - \psi^n = a_n(\varphi - \psi)$$

e pertanto, risolvendo rispetto ad a_n e calcolando che $\varphi-\psi=\sqrt{5}$, segue la formula di Binet.

17. Dall'unità 63 – Lo spazio cartesiano.

- PROBLEMA n. 30.

È dato il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ y+2z=2 \end{cases}$$

a) Qual è la sua soluzione? Fornirne un'interpretazione geometrica.
b) Scrivere, in aggiunta alle due assegnate, una terza equazione lineare nelle medesime incognite in modo che il sistema delle tre equazioni abbia la stessa soluzione del sistema assegnato. Fornire un'interpretazione geometrica.
c) Scrivere, in aggiunta alle due assegnate, una terza equazione lineare nelle medesime incognite in modo che il nuovo sistema delle tre equazioni sia impossibile. Fornire un'interpretazione geometrica.
d) Scrivere, in aggiunta alle due assegnate, una terza equazione lineare nelle medesime incognite in modo che il nuovo sistema delle tre equazioni abbia come soluzione una terna ordinata (x,y,z) e determinare questa terna. Fornire un'interpretazione geometrica.

RISOLUZIONE.
a) La soluzione del sistema è costituita dalle infinite terne ordinate di numeri reali:

$$\left(1-2y,\ \ y,\ \ 1-\frac{y}{2}\right),\quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

I punti aventi tali terne come coordinate, nello spazio riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), si trovano sulla retta r intersezione dei piani aventi le equazioni assegnate: $x+2y=1$ (piano parallelo all'asse z) e $y+2z=0$ (piano parallelo all'asse x).
b) Un'equazione, come quella richiesta dalla traccia, è l'equazione di un piano contenente r e distinto dai due piani assegnati. Per ottenerla basta sommare membro a membro le due equazioni del sistema dato. Si ottiene l'equazione:

$$x + 3y + 2z = 0.$$

Per verificare che effettivamente contiene la retta r basta far vedere che tale equazione è soddisfatta dalle coordinate del generico punto di r. Di fatto:

$$(1-2y) + 3y + 2\left(1-\frac{y}{2}\right) = 3.$$

c) Si tratta di scrivere l'equazione di un piano che non passi per alcuno dei punti della retta r. Al riguardo basta prendere un piano parallelo (in senso stretto) ad uno dei piani assegnati, per esempio quello di equazione: $x+2y=0$.
A riprova del fatto che il sistema delle tre equazioni:

$$x + 2y = 1,\ \ y + 2z = 2,\ \ x + 2y = 0$$

è impossibile, è sufficiente constatare che non può essere contemporaneamente $x+2y=1$ e $x+2y=0$.

d) Un'equazione, come quella richiesta dalla traccia, è l'equazione di un piano che non sia parallelo ad alcuno dei due piani assegnati e che non contenga la retta r. È sufficiente prendere il piano xy la cui equazione è z=0. Il sistema delle tre equazioni: (x+2y=1, y+2z=2, z=0) ammette l'unica soluzione $(-3, 2, 0)$. Sono le coordinate dell'unico punto comune ai tre piani.

18. Dall'unità 67 – Proprietà delle funzioni derivabili

- ESERCIZIO n. 18.

Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \operatorname{atan} x - \operatorname{atan}\frac{x-1}{x+1}\,.$$

Un idoneo software matematico mostra che si tratta di una funzione "costante a tratti". Dimostrare analiticamente questo fatto, utilizzando le proprietà delle derivate.

RISOLUZIONE. La funzione è definita, continua e derivabile in ogni x reale, purché x≠–1. Calcoliamone i limiti, destro e sinistro, in questo punto. Si ha:

$$\lim_{x\to-1^+}\left(\operatorname{atan} x - \operatorname{atan}\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\,,\quad \lim_{x\to-1^-}\left(\operatorname{atan} x - \operatorname{atan}\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4}\,.$$

Questo chiarisce subito che la funzione non è costante nel suo dominio.
Calcoliamone adesso la derivata. Si ha:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot D_x\,\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2(x+1)^2}{2(x^2+1)(x+1)^2}\;.$$

per cui, se x≠–1, vale a dire nel dominio della funzione, si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2} = 0\,.$$

Questo potrebbe far pensare erroneamente che f(x) sia costante. E, in effetti, in virtù del teorema di Lagrange, lo sarebbe realmente se non presentasse quella discontinuità per x=–1. Ma, proprio a causa di quella discontinuità, e sempre in virtù del teorema di Lagrange, possiamo affermare che f(x) è costante nell'intervallo]–∞.–1[ed è costante nell'intervallo]–1,+∞[, ma non che le due costanti siano uguali. Anzi, visto e considerato che f(x)→–3π/4 per $x\to-1^-$, mentre f(x)→π/4 quando $x\to-1^+$, dobbiamo concludere che si ha:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3\pi}{4} & \text{se } x\in]-\infty,-1[\\[2mm] \dfrac{\pi}{4} & \text{se } x\in]-1,+\infty[\end{cases}$$

Si tratta, perciò, di una <u>funzione costante a tratti</u>.
Chiaramente non è l'unica funzione di questo genere. Per esempio, sono dello stesso tipo le seguenti funzioni:

$$f(x)=\operatorname{atan} x+\operatorname{atan}\frac{x+1}{x-1}\,,\quad f(x)=\operatorname{atan} x+\operatorname{atan}\frac{\sqrt{3}-x}{x\sqrt{3}+1}\,,\quad f(x)=\operatorname{atan} x+\operatorname{atan}\frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}\,.$$

le quali si possono scrivere rispettivamente in questo modo più semplice:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4} & \text{se } x\in]-\infty,1[\\[2mm] \dfrac{3\pi}{4} & \text{se } x\in]1,+\infty[\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3} & \text{se } x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right[\\[2mm] -\dfrac{2\pi}{3} & \text{se } x\in\left]-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6} & \text{se } x\in\left]-\sqrt{3},+\infty\right[\\[2mm] -\dfrac{2\pi}{3} & \text{se } x\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\end{cases}$$

- ESERCIZIO n. 20.

Utilizzando il teorema di Lagrange, dimostrare che, per ogni intervallo reale $[\alpha,\beta]$ si ha:

$$|\sin\beta-\sin\alpha|\leq|\beta-\alpha| \quad \text{e} \quad |\cos\beta-\cos\alpha|\leq|\beta-\alpha|.$$

RISOLUZIONE. La funzione $\sin x$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e, di conseguenza, lo è in ogni intervallo reale, in particolare nell'intervallo $[\alpha,\beta]$. Allora, in virtù del teorema di Lagrange, esiste un punto $\theta\in]\alpha,\beta[$ tale che:

$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\theta\,.$$

Ora, $\cos\theta$ è un numero reale certamente compreso fra i valori –1 ed 1, per cui si ha:

$$-1\leq\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}\leq 1\,,$$

il che è come dire:

$$\left|\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}\right|\leq 1\,,$$

da cui segue: $|\sin\beta-\sin\alpha|\leq|\beta-\alpha|$.

Con lo stesso procedimento si dimostra pure la disuguaglianza: $|\cos\beta-\cos\alpha|\leq|\beta-\alpha|$.

Nota bene. Dalla disuguaglianza $|\sin\beta-\sin\alpha|\leq|\beta-\alpha|$ discende come caso particolare che $|\sin\alpha|\leq|\alpha|$. Il che indurrebbe a concludere che anche quest'ultima disuguaglianza sia una conseguenza del teorema di Lagrange. Le cose, in realtà, sono un po' diverse. In effetti, per spiegare la disuguaglianza $|\sin\beta-\sin\alpha|\leq|\beta-\alpha|$, ci si rifà alla formula $D_x\,\sin x=\cos x$, ma per dimostrare questa formula bisogna sapere che $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ e per la dimostrazione di questo limite si utilizza la disuguaglianza $|\sin x|\leq|x|$, con $|x|<\pi/2$. Cosicché, per dimostrare che $|\sin\alpha|\leq|\alpha|$ bisognerebbe sapere che $|\sin\alpha|\leq|\alpha|$: non funziona.
Possiamo dire allora che le cose stanno nei termini seguenti: senza coinvolgere il teorema di Lagrange si dimostra la disuguaglianza $|\sin\alpha|\leq|\alpha|$ per $|\alpha|<\pi/2$; col ricorso al teorema di Lagrange questa disuguaglianza si generalizza dimostrando che $|\sin\beta-\sin\alpha|\leq|\beta-\alpha|$.

19. Dall'unità 68 – Studio di una funzione

- ESERCIZIO n. 38.

È data la seguente funzione:

$$f(x)=x^{1/x}.$$

a) Studiarla e disegnarne un andamento approssimato in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver determinato, oltre al suo campo di esistenza e al suo campo di derivabilità, il suo punto di massimo e il suo asintoto destro, compreso il punto in cui questo asintoto interseca il grafico della funzione, e inoltre la tangente con cui il grafico esce dall'origine O.

b) Uno strumento di calcolo automatico consente di stabilire quale dei seguenti numeri è il maggiore:

$$1)\ 1{,}2^{1{,}3}\ \text{e}\ 1{,}3^{1{,}2};\quad 2)\ e^{\pi}\ \text{e}\ \pi^{e};\quad 3)\ 100^{120}\ \text{e}\ 120^{100}.$$

Provare a spiegare questo fatto, utilizzando il grafico della funzione assegnata e senza coinvolgere strumenti di calcolo automatico.

RISOLUZIONE.

a) Riguardo al primo punto, lasciamo a chi legge il compito di risolverlo. Noi ci limitiamo a segnalare che il punto di massimo è quello di ascissa *e*, che l'asintoto richiesto ha equazione $y=1$ e interseca il grafico della funzione nel punto di ascissa 1 e infine che il grafico esce dal punto O con tangente $y=0$.

b) Indicati con a, b ($0<a<b$) due qualsiasi numeri reali, dall'esame del grafico risulta che:

- se $0<a<b\le e$ allora $f(a)<f(b)$ ossia $a^{1/a}<b^{1/b}$, da cui segue $a^b<b^a$. In particolare, siccome $0<1{,}2<1{,}3<e$, allora $1{,}2^{1{,}3}<1{,}3^{1{,}2}$;
- se $e\le a<b$ allora $f(a)>f(b)$ ossia $a^{1/a}>b^{1/b}$, da cui segue $a^b>b^a$. In particolare, siccome $e<\pi$ e $100<120$, allora $e^{\pi}>\pi^{e}$ e $100^{120}>120^{100}$.

- COMPLEMENTI
- Se si chiede di rappresentare graficamente la funzione

$$y = ax + b\,,$$

con a, b valori assegnati, la procedura è semplice e conosciuta: trattandosi di una retta, basta trovare due suoi punti e disegnare la retta che passa per essi.
Se si chiede di rappresentare la funzione

$$y = ax^2 + bx + c\,,$$

con a, b, c valori assegnati ($a\neq0$), anche adesso la procedura è semplice e conosciuta: trattandosi di una parabola con l'asse parallelo all'asse y, basta trovare il suo vertice, punto fondamentale, e qualche altro punto (come, per esempio, il punto in cui la parabola interseca l'asse y e gli eventuali punti intersezione con l'asse x) e disegnare la curva, ancorché con una qualche approssimazione.
Se si chiede di rappresentare la funzione

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,,$$

con a, b, c, d valori assegnati ($a\neq0$), non è raro constatare che è trattata come una generica funzione e perciò si va alla ricerca degli intervalli in cui è positiva o negativa, degli intervalli in cui cresce o decresce, del comportamento all'infinito, degli intervalli in cui volge la concavità verso l'alto o verso il basso, eccetera. Ora, tutto questo è bello ed istruttivo, ma è un inutile spreco di tempo. Ciò perché, come per retta e parabola, si possono fare considerazioni generali che, una volta memorizzate, possono essere utilizzate all'occorrenza. È di questo che vogliamo qui occuparci.
- Ogni funzione del tipo

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,,$$

dove a, b, c, d sono valori assegnati purché $a\neq0$, è rappresentata da una curva, detta ***parabola cubica***.

La funzione è definita, continua e derivabile per ogni $x\in\mathbb{R}$.
Presenta uno ed un solo flesso, che è centro di simmetria per la curva.
Presenta un massimo e un minimo oppure non presenta massimo né minimo.

Queste proprietà possono essere dimostrate facilmente e ne lasciamo il compito a chi legge.
Quello che invece ci preme evidenziare è che sono possibili solamente quattro situazioni distinte, compatibili con le suddette proprietà, quelle rappresentate nella figura sottostante (Fig. 18), dove sono sottintesi gli assi di riferimento, supposti comunque uno orizzontale, l'asse x, e l'altro verticale.

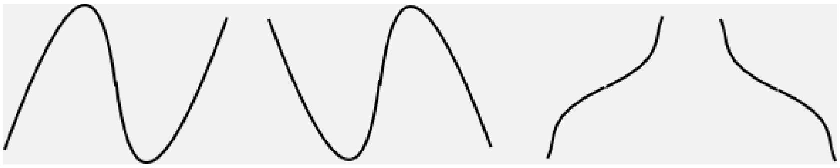

FIG. 18

La procedura, pertanto, atta a rappresentare una parabola cubica di equazione assegnata è presto detta:
- si trova il punto di flesso (che, lo ribadiamo, è centro di simmetria) e la tangente inflessionale (che ovviamente può anche essere parallela all'asse x);

- si trovano gli eventuali punti estremanti (valori di x, se esistono, che annullano la derivata prima della funzione);
- si trova qualche altro punto, come per esempio il punto in cui la curva interseca l'asse y e, se possibile, i punti – uno o tre (questi non necessariamente distinti) – in cui interseca l'asse x.

A questo punto si può procedere al disegno della curva, che naturalmente è fatto con una qualche approssimazione.

20. Dall'unità 69 – Estremi assoluti di una funzione

- ESERCIZIO n. 16.

In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) è assegnata la curva K di equazione:

$$y = x^2\left(1-\frac{x}{8}\right).$$

1. A) Dopo aver controllato che passa per O, trovare l'ulteriore punto A che essa ha in comune con l'asse x e disegnarne l'andamento.
2. A) Calcolare quanti punti, aventi entrambe le coordinate intere, si trovano all'interno della regione piana (escluso cioè il contorno) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
   B) Fra i triangoli rettangoli aventi il vertice dell'angolo retto sull'asse x, un secondo vertice in O e il terzo vertice sull'arco OA di K, determinare quello di area massima.
3. A) Calcolare la probabilità che, scegliendo a caso uno dei punti di cui al quesito 2A), esso si trovi all'interno del triangolo suddetto o sul suo contorno.

RISOLUZIONE.

1A) A'(8,0). Il disegno è lasciato al lettore.

2A) I punti richiesti, di coordinate (a,b), con a, b interi relativi, sono tali che: $0<a<8$, $0<b<y(a)$.
Cosicché:
per $a=1$, $y(a)=7/8$: 0 punti ; per $a=2$, $y(a)=3$: 2 punti ; per $a=3$, $y(a)=45/8$: 5 punti;
per $a=4$, $y(a)=8$: 7 punti ; per $a=5$, $y(a)=75/8$: 9 punti ; per $a=6$, $y(a)=9$: 8 punti ;
per $a=7$, $y(a)=49/8$: 6 punti .
In totale i punti richiesti sono 37.

2B) Indicato con P il vertice del triangolo che si trova sull'arco OA di K e ricordato che un altro vertice è il punto O, il terzo vertice Q del triangolo, situato sull'asse x, è compreso fra i punti O ed A.
Posto allora $x_Q=t$, con $0<t<8$, l'area del triangolo OPQ è:

$$A(t) = \frac{1}{2}t^3\left(1-\frac{t}{8}\right) = \frac{1}{16}t^3(8-t).$$

Siccome sia t sia 8–t sono quantità positive per 0<t<8 e siccome inoltre t+(8–t)=8 allora A(t) è massima quando è soddisfatta la condizione: $\frac{t}{3} = 8-t$, ossia quando t=6. Pertanto:

$$\max A(t)=A(6)=\frac{1}{16}\cdot 6^3\cdot(8-6)=27.$$

3A) Il triangolo di area massima, di cui al punto 2B, ha i seguenti vertici:

O(0,0) , Q(6,0) , P(6,9) .

Per calcolare la probabilità richiesta dobbiamo prima di tutto determinare l'insieme S dei punti con coordinate intere che sono situati all'interno del triangolo OQP o sul suo contorno e stabilire quanti di essi appartengono all'insieme T formato dai punti di cui al quesito 3A.

A questo riguardo, osservato che la retta OP ha equazione $y=\frac{3}{2}x$, si tratta di trovare quanti punti di coordinate (α,β), con α, β interi, sono tali che: $0\le\alpha\le 8$, $0\le\beta\le\frac{3}{2}$, escludendo, come detto, i punti che non appartengono all'insieme T. Allora:

- per $\alpha=1$, $y(\alpha)=\frac{3}{2}>\frac{7}{8}$: all'insieme S appartengono 2 punti ma nessuno di essi appartiene a T;
- per $\alpha=2$, $y(\alpha)=3$: ad S appartengono 4 punti ma solo 2 appartengono a T;
- per $\alpha=3$, $y(\alpha)=\frac{9}{2}<\frac{45}{2}$: ad S appartengono 5 punti ma solo 4 a T;
- per $\alpha=4$, $y(\alpha)= 6 < 8$: ad S appartengono 7 punti ma solo 6 a T;
- per $\alpha=5$, $y(\alpha)=\frac{15}{2}<\frac{75}{8}$: ad S appartengono 8 punti ma solo 7 a T;
- per $\alpha=6$, $y(\alpha)=9$: ad S appartengono 10 punti ma solo 8 a T.

In totale, di punti dell'insieme S che appartengono all'insieme T ve ne sono 27. La probabilità cercata è allora: $p = \frac{27}{37} \approx 72{,}97\%$.

21. Dall'unità 73 – Metodi di integrazione

- PROBLEMA n. 35.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

[1] $$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.

b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.

c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16 e calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato.

[Tratto dall'esame di Stato 2004, indirizzo sperimentale, sessione suppletiva]

RISOLUZIONE (del solo punto b). Constatato che la regione in questione è il triangolo mistilineo AOB, è preferibile disegnare questa porzione della figura in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) (Fig. 19).

Si tratta di tracciare le rette di equazione $x=a/2$, con a intero tale che $0\le\frac{a}{2}\le 6$, ossia $0\le a\le 12$, e controllare quanti sono i valori interi b per i quali, una volta constatato che $y\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a(12-a)}{4+a}$, risulta:

$$0\le b\le\frac{a(12-a)}{4+a}\ ,\quad \text{ossia}: \ 0\le b\le\frac{2a(12-a)}{4+a}\ .$$

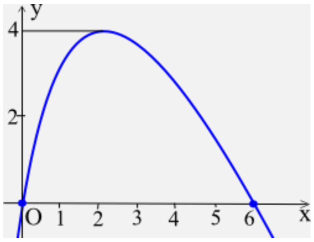

FIG. 19

Si ottengono i risultati sintetizzati nella tabella sottostante.

Complessivamente, dunque, 70 punti con coordinate del tipo stabilito appartengono alla regione piana specificata.

valore a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
valore b	0	$\frac{22}{5}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{54}{7}$	8	$\frac{70}{9}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{70}{11}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{54}{13}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{22}{15}$	0
Numero punti	1	5	7	8	9	8	8	7	6	5	3	2	1

22. Dall'unità 74 – Integrali: non solo aree

- PROBLEMA n. 2 in paragrafo n. 74.3.2.

Nel piano, riferito ad un sistema (Oxy) di coordinate cartesiane, siano assegnate le parabole di equazioni: $y^2=2x$ e $x^2=y$. Indicato con A il punto in cui s'intersecano le due parabole, oltre che in O, si chiami D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O ed A. a) Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su D il segmento di lunghezza massima. b) Si consideri il solido W ottenuto dalla rotazione di D introno all'asse x. Se si taglia W con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di W.

RISOLUZIONE (del solo punto b). La sezione di D con un piano perpendicolare all'asse x, passante per il punto (x,0), con $0\leq x\leq x_A$, è la corona circolare di raggi $R=\sqrt{2x}$ ed $r=x^2$. Il volume di W si può pensare come la somma degli infiniti elementi infinitesimi dV tali che $dV = \pi(R^2–r^2)dx = \pi(2x–x^4)dx$. Pertanto:

$$V = \pi \int_0^x (2x - x^4)\,dx\,.$$

- PROBLEMA n. 3 in paragrafo 74.4.2.

Si supponga che la velocità di una marea sia una funzione sinusoidale del tempo con periodo 12 ore. Sapendo che è di 5 km/h la velocità massima della marea, calcolare la sua velocità media nelle prime 6 ore.

RISOLUZIONE. In realtà, mediamente, il periodo è di 12 ore e 25 minuti circa.
La velocità V della marea, supposto che sia nulla nell'istante 0, è espressa dalla seguente funzione di t:

$$V = 5\sin\frac{\pi}{6}t.$$

La sua velocità media nelle 6 ore è pertanto:

$$V_m = \frac{1}{6}\int_0^6 5\sin\frac{\pi}{6}t\,dt = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}18\ (\text{km/h}).$$

23. Dall'unità 79 – Distribuzioni di probabilità

- LE PRINCIPALI FORMULE UTILIZZATE.

Sono molte, nello svolgimento dell'unità, le formule utilizzate. La loro dimostrazione a volte è laboriosa, a volte richiede strumenti matematici che gli studenti non possiedono. Per questo alcune di esse sono proposte senza dimostrazione. Ci riferiamo, in particolare, alle formule relative alla media e alla deviazione standard di una distribuzione binomiale, di una distribuzione geometrica e delle particolari distribuzioni continue che abbiamo preso in considerazione.
A beneficio di chi volesse saperne di più ci soffermiamo su alcune di tali formule.

Incominciamo ad occuparci delle formule relative alla **distribuzione binomiale**.

Riprendiamo la formula del binomio di Newton:

[1] $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,.$$

Con riferimento alla distribuzione binomiale, sappiamo che si ha:

[2] $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k = (p+q)^n = 1 \,.$$

Dimostriamo adesso un'altra formula preliminare:

[3] $$\sum_{k=r}^{n} \binom{n-r}{k-r} p^{n-k} q^{k-r} = 1$$

dove r è un numero naturale non maggiore di k ($r \le k$).
Posto $n-r=m$ e $k-r=h$ e constatato che, quando k varia da r ad n, h varia da 0 ad $n-r$ ossia da 0 ad m, e constatato inoltre che $n-k=(m+r)-(h+r)=m-h$, si ha per l'appunto:

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n-r}{k-r} p^{n-k} q^{k-r} = \sum_{h=0}^{n} \binom{m}{h} p^{m-h} q^h = 1 \,.$$

Ancora una formula che sarà utilizzata più avanti:

[4] $$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Infatti:

$$k \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!\;(n-k)!} = k \cdot \frac{n\,(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\;\big((n-1)-(h-1)\big)!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Si ha inoltre:

[5] $$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^{n-k} q^k = nq \,.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo anzitutto che $p^{n-k}q^k=p^{n-k}qq^{k-1}$. Sicché, chiamata provvisoriamente S l'espressione al 1° membro della [5] e tenuta presente la [4], risulta:

$$S = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^{n-k} q q^{k-1} = nq \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{n-k} q^{k-1} \,.$$

Da qui, per la [3] dove si pone r=1, segue la [5].
Un'ultima formula prima di dimostrare le due cui abbiamo accennato:

[6] $$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^{n-k} q^k = n^2 q^2 + npq.$$

DIMOSTRAZIONE. Chiamata provvisoriamente S l'espressione al 1° membro della [6] e constatato che è nullo il termine del suo sviluppo corrispondente al valore k=0, si ha:

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^{n-k} q^k = \sum_{k=1}^{n} kk \binom{n}{k} p^{n-k} q^k.$$

Ossia, per la [4]:

$$S = \sum_{k=1}^{n} kn \binom{n-1}{k-1} p^{n-k} q^k = n \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{n-k} q^k = n \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \binom{n-1}{k-1} p^{n-k} q^k =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^{n-k}q^{k} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{n-k}q^{k}\ ;$$

ancora in virtù della [4]:

$$(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2};$$

inoltre, nella precedente espressione di S, il termine dello sviluppo del primo addendo corrispondente a k=1 è nullo; del resto:

$$p^{n-k}q^{k} = p^{n-k}q^{2}q^{k-2}\ \text{ e }\ p^{n-k}q^{k} = p^{n-k}qq^{k-1}\ ;$$

per cui:

$$S = n\sum_{k=2}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^{n-k}q^{k-2}q^{2} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{n-k}q^{k-1}q =$$

$$= n(n-1)q^{2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{n-k}q^{k-2} + nq\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{n-k}q^{k-1}\ .$$

Da qui, per la [3], in cui si pone una volta r=2 ed una volta r=1, risulta:

$$S = n(n-1)q^2 + nq = n^2q^2 - nq^2 + nq = n^2q^2 + nq(1-q) = n^2q^2 + npq.$$

Siamo finalmente in grado di dimostrare le due formule:

$$\mathbf{M(B) = np},\quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{(B)} = \sqrt{\mathbf{npq}}\ ,$$

le quali permettono di calcolare rapidamente la media e la deviazione standard della variabile aleatoria binomiale B(n,p). Cominciamo ad osservare che la distribuzione di probabilità è data dalla seguente formula:

$$p_k = P[B = k] = \binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}.$$

Si ha allora:

$$M(B) = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}.$$

È evidente che il 1° termine dello sviluppo di questa espressione, ottenuto per k=0, è nullo. Per cui, in virtù della [5], dove si pone r=0 e dove sono scambiati i ruoli di p e q,si ha:

$$M(B) = n\,p\ .$$

Inoltre, ponendo per comodità M(B)=μ:

$$\sigma^2(B) = \sum_{k=0}^{n}p_k(x_k-\mu)^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}(k-np)^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}(k^2-2knp+n^2p^2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k} - 2np\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k} + n^2p^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}\ .$$

Da qui, tenendo presenti nell'ordine le formule [6], [5] e [2], nelle quali sono scambiati i ruoli di p e q, segue:

$$\sigma^2(B) = (n^2p^2+npq) - 2np\cdot np + n^2p^2\cdot 1 = npq.$$

Infine:

$$\sigma(B)=\sqrt{npq}\ .$$

Passiamo ora alle formule che danno il valor medio M(G) e la deviazione standard σ(G) della **variabile aleatoria geometrica** G di parametro p, vale a dire:

$$\mathbf{M(G)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}, \qquad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{(G)} = \frac{\sqrt{\mathbf{1-p}}}{\mathbf{p}}.$$

Ricordiamo che questa variabile è tale che: $G(n) = p(1-p)^n$, con n naturale maggiore di 0.

Una breve premessa. Essendo p una probabilità, risulta $0<p<1$, per cui la sua probabilità contraria è $q=1-p$, anch'essa compresa fra 0 ed 1. Ebbene, la dimostrazione di entrambe le formule è basata sul fatto che si ha:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p},$$

trattandosi della somma di infiniti termini in progressione geometrica di ragione minore di 1.

Incominciamo dal valor medio. In base alla definizione di valor medio di una variabile aleatoria risulta:

$$M(G)=\sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p+2pq+3pq^2+4pq^3+\ldots =$$

$$= p(1+q+q^2+q^3+\ldots) + pq(1+q+q^2+q^3+\ldots) + pq^2(1+q+q^2+q^3+\ldots) + pq^3(1+q+q^2+q^3+\ldots) + \ldots =$$

$$= p\cdot\frac{1}{p}\cdot(1+q+q^2+q^3+\ldots) = \frac{1}{p}.$$

Andiamo adesso alla deviazione standard. Conviene calcolare dapprima la varianza e per questo utilizzare la formula seguente:

$$Var(G)=M\left(G^2\right) - [M(G)]^2.$$

Calcoliamo dapprima $M\left(G^2\right)$. Si ha:

$$M(G^2)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2pq^{n-1} = p+4pq+9pq^2+16pq^3+25pq^4+36pq^5+\ldots=$$

$$= p + 4pq(1+q+q^2+q^3+\ldots)+5pq^2(1+q+q^2+q^3+\ldots)+7pq^3(1+q+q^2+q^3+\ldots)+9pq^4(1+q+q^2+q^3+\ldots)+$$

$$+11pq^5(1+q+q^2+q^3+\ldots)+\ldots=$$

$$= p+pq(4+5q+7q^2+9q^3+11q^4)\cdot\frac{1}{p}=$$

$$=p+4q+5q^2(1+q+q^2+q^3+\ldots)+2q^3(1+q+q^2+q^3+\ldots)+2q^4(1+q+q^2+q^3+\ldots)+2q^5(1+q+q^2+q^3+\ldots)+\ldots=$$

$$= p+4q+5q^2\cdot\frac{1}{p}+2q^3\cdot\frac{1}{p^2} = p+4(1-p)+5(1-p)^2\cdot\frac{1}{p}+2(1-p)^3\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{2-p}{p^2}.$$

A questo punto la continuazione è banale:

$$Var(G)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$

E da qui segue immediatamente la formula per la deviazione standard.

Occupiamoci adesso della **distribuzione continua**.

Se X è una variabile aleatoria continua con densità di probabilità p(x), il suo valore medio M(X) e la sua varianza Var(X) sono dati dai seguenti integrali impropri, ammesso che esistano:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx, \quad Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-M(X)\right)^2 p(x) dx.$$

In realtà, per il calcolo di Var(X) è preferibile servirsi della formula seguente:

$$Var(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

di cui forniamo la semplice dimostrazione, nella quale poniamo per comodità $M(X)=\mu$. Si ha allora:

$$Var(X) = M[(X-\mu)^2] = M(X^2-2\mu X+\mu^2) = M(X^2)-2\mu M(X)+\mu^2 =$$

$$= M(X^2)-2\mu^2+\mu^2 = M(X^2)-\mu^2 = M(X^2) -[M(X)]^2.$$

Cosicché, se X è la **variabile continua uniforme**, ragion per cui la sua densità di probabilità è:

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } x\in[a,b] \\ 0 & \text{se } x\notin[a,b] \end{cases}$$

dove a, b sono parametri reali con a<b, si ha:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} x\,p(x)\,dx+\int_{a}^{b} x\,p(x)\,dx+\int_{b}^{+\infty} x\,p(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right).$$

Da cui segue facilmente:

$$\mathbf{M(X)=\frac{a+b}{2}}.$$

Constatato poi che:

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$

risulta:

$$Var(X)=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{b-a}{12}\right)^2.$$

Da qui segue immediatamente:

$$\mathbf{div(X)=\frac{\sqrt{3}}{6}(b-a)}.$$

Se invece X è la **variabile continua esponenziale**, ragion per cui la sua densità di probabilità è:

$$p(x)=\begin{cases} k\,e^{-kx} & \text{se } x\geq 0 \\ 0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

dove k è una costante positiva, risulta:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx=k\int_0^{+\infty} x\,e^{-kx}dx.$$

Siccome, a meno della costante d'integrazione:

$$\int x\,e^{-kx}dx=-\frac{e^{-kx}}{k^2}(kx+1)$$

e quindi:

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-kx}dx=\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{e^{-kx}}{k^2}(kx+1)\right]_0^t=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{e^{-kt}}{k^2}(kt+1)+\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{k^2}$$

si ha:

$$\mathbf{M(X)=\frac{1}{k}}.$$

Dopo aver calcolato che:

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx=k\int_0^{+\infty} x^2e^{-kx}dx=\frac{2}{k^2}$$

si ottiene:

$$Var(X)=\frac{2}{k^2}-\left(\frac{1}{k}\right)^2=\frac{1}{k^2}$$

e perciò:

$$\mathbf{div}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}.$$

- ESERCIZIO n. 2 in chiusura di paragrafo 79.2.2.

Qual è la probabilità che sia uguale a 2 la 3ª cifra decimale del logaritmo naturale di un numero reale positivo, scelto a caso?

RISOLUZIONE. Sembrerebbe di dover fare chissà quali acrobazie per giungere alla soluzione. In realtà non è così. Basta infatti supporre, cosa del tutto sensata anche se non c'è certezza, che sia uniforme la distribuzione delle terze cifre decimali dei logaritmi naturali dei numeri positivi. Il che è come dire che è uguale ad 1/10 la probabilità di ognuna delle dieci cifre e, quindi, anche della cifra 2.

24. Dall'unità 83 – Nozioni di ricerca operativa

- PROBLEMA n. 28.

La realizzazione di un determinato progetto richiede il completamento di 6 attività che per comodità denominiamo A, B, C, D, E, F, tra di loro interdipendenti. Le attività A, B e D richiedono ciascuna 5 giorni lavorativi, ma A e B possono essere avviate solo dopo che C è stata completata almeno per metà e D solo dopo che A è stata completata almeno per 1/5. L'attività C richiede 4 giorni ma può partire solo dopo che E è stata completata. Le attività E ed F richiedono ciascuna 6 giorni, ma E può essere avviata solo dopo che F è stata completata almeno per 1/3. Costruire il grafo reticolare e determinare il percorso critico e la durata complessiva per la realizzazione del progetto.

RISOLUZIONE.

Le attività A, C e F sono scomposte ciascuna in due parti: A' della durata di 1 giorno e A" della durata di 4 giorni, C' e C" entrambe della durata di 2 giorni, F' della durata di 2 giorni ed F" della durata di 4 giorni. Un possibile grafo è quello riportato nella figura sottostante (Fig. 20). Vi è pure evidenziato in rosso il percorso critico: 0-1-3-4-7-8. Dal quale si desume che il tempo richiesto è di 16 giorni.

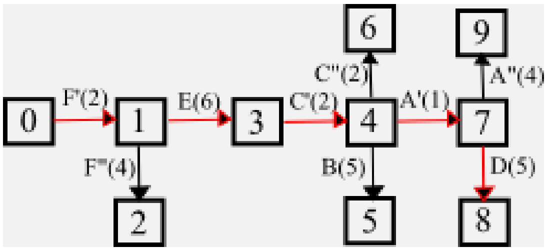

FIG. 20

25. Dall'unità 88 – Forme e figure di ragionamento

- PROBLEMA n. 7.

Giorgio acquista alcuni prodotti al supermercato, per una spesa totale di € 50. Paga con tre banconote del valore complessivo di € 50. Tra le banconote non ce n'è una da € 20. Qual è il valore delle singole banconote?

RISOLUZIONE. L'espressione « tra le banconote non ce n'è <u>una</u> da € 20» è ambigua. Se il suo significato è che «tra le banconote non ce n'è <u>alcuna</u> da € 20», i dati sono incompatibili e il problema ovviamente non ha soluzione. Se però la si intende nel senso che «<u>almeno una</u> delle banconote non è da € 20» (potendolo però essere le altre) oppure nel senso che «di banconote da € 20 non ce n'è <u>una soltanto</u>», la soluzione è banale e le tre banconote hanno i seguenti valori: € 20, € 20, € 10.

- PROBLEMA n. 8.

Il sig. Logicus giunge nel pianeta VerFal. Le sole categorie di persone che lo abitano sono i Furfanti ed i Cavalieri. I Furfanti fanno solo affermazioni false, i Cavalieri solo affermazioni vere. Logicus s'imbatte in tre persone – Aldo, Giovanni e Giacomo – e decide di porre qualche domanda a Giovanni, nella speranza di riuscire ad individuare un cavaliere fra i tre.
Logicus: «*Aldo e Giacomo sono entrambi cavalieri?*»
Giovanni: «*Sì, lo sono.*»
Logicus: «*Dunque confermi che Aldo è un cavaliere?*»
Giovanni: «*No, non lo è.*»
A questo punto Logicus, che non per niente si chiama così, ha capito tutto.
Hai capito anche tu? Ti mettiamo alla prova. Una ed una soltanto delle seguenti alternative è corretta. Individuala e fornisci una spiegazione esauriente della risposta.

[A] Aldo e Giacomo sono entrambi furfanti.
[B] Aldo e Giacomo sono entrambi cavalieri.
[C] Aldo è un furfante ma Giacomo è un cavaliere.
[D] Aldo è un cavaliere ma Giacomo è un furfante.

RISOLUZIONE. Giovanni, facendo due affermazioni contraddittorie, è certamente un furfante. Quindi le sue affermazioni sono false. Il che implica che è vero che Aldo è un cavaliere ed è falso che Aldo e Giacomo sono cavalieri entrambi, per cui Giacomo è un furfante. [D] è l'alternativa corretta.

- PROBLEMA n. 9.

Il sig. Logicus, continuando il suo viaggio nel pianeta VerFal (vedi es. n. 8), incontra Piero, Giulio, Vito e Antonio, i quali, a conoscenza del fatto che Logicus ha il vizio di porre domande, senza essere interpellati lo bombardano ugualmente di parole.
Piero: «*Giulio e Antonio sono furfanti.*»
Giulio: «*Vito è un cavaliere.*»
Vito: «*Antonio è un furfante.*»
Antonio: «*Piero è un cavaliere.*»
Quale delle seguenti alternative è corretta?

[A] Giulio e Vito sono entrambi furfanti.
[B] Giulio e Vito sono entrambi cavalieri.
[C] Giulio è un furfante ma Vito è un cavaliere.
[D] Giulio è un cavaliere ma Vito è un furfante.

RISOLUZIONE. Assumiamo un punto di partenza: per esempio che Piero sia un cavaliere. Le sue affermazioni sono pertanto vere e perciò Giulio è un furfante e Antonio è un furfante. Da qui, tenendo presente ciò che dice Giulio, segue che Vito è un furfante e, sulla base di ciò che dice Vito, Antonio è un cavaliere. Contro la precedente conclusione che Antonio sia un furfante. Si cade dunque in un assurdo e perciò l'ipotesi assunta non è vera. Quindi Piero è un furfante. In questo caso, è falso che Giulio e Antonio siano furfanti e perciò almeno uno dei due è un cavaliere. Ammettiamo che sia Giulio il cavaliere. Segue che anche Vito è un cavaliere e, in base alla sua affermazione, Antonio è un furfante e, in base all'affermazione di Antonio, è confermato che Piero è un furfante. In sintesi: Piero è furfante, Giulio è cavaliere, Vito è cavaliere, Antonio è furfante. [B] è l'alternativa corretta.