ATTENZIONE!!!
Tutto il materiale proposto può essere scaricato gratuitamente senza alcun impegno da parte di coloro che vogliono usufruirne.

Matematica (Gratuita)
Per Scuole Superiori

INTEGRAZIONE 3
(UNITÀ 1-88)

UN TEST DI USCITA
(per tutte le scuole)

E

DIECI SCHEDE DI PREPARAZIONE ALL'ESAME
(per i Licei Scientifici)

1. INTRODUZIONE.

In chiusura dello svolgimento del programma di matematica, come articolato nel prodotto

Matematica (gratuita) per le scuole superiori,

gli studenti di tutte le scuole – se lo ritengono opportuno – possono sottoporsi ad un TEST D'USCITA, che sarà presentato di qui a poco.
Nello stesso tempo gli studenti dei Licei Scientifici possono approfondire la loro preparazione risolvendo i quesiti predisposti in 10 schede. Quesiti che, sebbene non ricalchino esattamente le prove d'esame, tuttavia alla risoluzione di quelle prove sono mirati.

Sono necessarie però alcune puntualizzazioni da parte nostra.

Molti dei quesiti proposti nel test sono stati già assegnati in verifiche precedenti, particolarmente nelle prime quattro classi.
In realtà, il test è stato costruito tenendo presenti, oltre ad alcuni obiettivi che sono presenti nello sviluppo delle singole unità nell'arco dei cinque anni di studio, questi altri due documenti elaborati dall'UMI (Unione Matematica Italiana): il *Syllabus di Matematica* e *La matematica per le altre discipline*. Si tratta di due documenti pubblicati nel Notiziario dell'UMI, il primo (avente come sottotitolo *Conoscenze e capacità per l'accesso all'Università*) nell'agosto 1999, il secondo (il cui sottotitolo è *Prerequisiti e sviluppi universitari*) nel gennaio 2006.
Il Syllabus, a suo tempo, «*è stato compilato ... per gli studenti che, dopo aver superato la maturità, intendono iscriversi ad un corso universitario che richieda una buona preparazione matematica (Matematica, Fisica, Ingegneria, Scienza dell'Informazione, Scienze Statistiche, Astronomia, ...)».* Esso, tuttavia, può *«essere utile anche a coloro che intendono iscriversi ad uno dei numerosi corsi universitari in cui la matematica, pur non essendo oggetto di studio, o pur essendolo in modo marginale, viene impiegata come linguaggio o come strumento.*»
L'utilità della nostra disciplina «*in corsi di laurea in cui la matematica svolge un ruolo strumentale e non costituisce una disciplina caratterizzante*» è ulteriormente precisata e meglio specificata nel secondo documento.
Ebbene, proprio sulla base di questi due documenti (ai quali comunque rimandiamo per una lettura più approfondita), ma tenendo anche presenti alcuni obiettivi del corso di studi, abbiamo costruito il seguente test, che – almeno lo speriamo – può fornire allo studente indicazioni preziose ai fini delle scelte future, compresa la scelta degli studi universitari.
Il test si compone di due sezioni. Ai fini della valutazione dei quesiti della prima sezione (si tratta di quesiti a scelta multipla con 4 alternative, di cui una sola corretta) valgono le solite regole, vale a dire:

3 punti alla risposta corretta, 0 punti a quella mancante, -1 punti alla risposta errata.

Invece, per i quesiti della seconda sezione (quesiti aperti) il punteggio da assegnare a ciascun quesito è compreso fra 0 e un punteggio massimo variabile da quesito a quesito ma esplicitato di volta in volta. E, si capisce, quanto più grande è questo punteggio tanto più alto è il coefficiente di difficoltà del quesito (almeno secondo il nostro giudizio). Questa valutazione, ovviamente non oggettiva, è lasciata allo studente medesimo oppure, cosa preferibile, a quella del suo insegnante.

Aggiungiamo adesso alcune indicazioni utili ai fini dell'orientamento. Si tratta naturalmente del nostro punto di vista, che può essere condiviso o no.
Detto che delle due sezioni che compongono il test, la prima comprende 46 quesiti (punteggio massimo conseguibile: 138 punti) e la seconda 24 (punteggio massimo conseguibile: 120 punti), noi proponiamo

quanto segue.

- Uno studente che consegua un punteggio non inferiore al 75% del punteggio massimo conseguibile in entrambe le sezioni (almeno punti 104 e 90) può affrontare con una certa tranquillità studi universitari in indirizzi che richiedano conoscenze, abilità e competenze matematiche di base di buon livello (Matematica, Fisica, Statistica, Informatica, Ingegneria, Astronomia).
- Se tale punteggio non è inferiore al 60% in almeno una delle due sezioni (almeno punti 83 o 72), lo studente può orientarsi verso studi in cui la matematica è presente nel curricolo ma in modo non caratterizzante e più che altro come disciplina strumentale (Architettura, Chimica, Geologia, Biologia, Agraria, Economia).
- Se, infine, il punteggio conseguito è al di sotto del 60% (meno di 83 e meno di 72) in entrambe le sezioni, sarebbe proprio auspicabile che lo studente rinunciasse al proseguimento degli studi in corsi di laurea che, in qualche misura, richiedano competenze matematiche o che, perlomeno, provvedesse a colmare le sue lacune in via preventiva.

Avvertiamo che il test è elaborato nel presupposto che sia consentito, e non sempre, soltanto l'uso di una calcolatrice che sia però non programmabile né grafica.
Per quanto concerne il tempo da impiegare per la risoluzione del test, a noi sembra che possano andar bene 90 minuti per la prima sezione e 150 minuti per la seconda. Le due sezioni possono essere affrontate in un'unica fase o in due momenti diversi, ma è preferibile la seconda opzione.
Riteniamo infine che il test sia una buona esercitazione per la partecipazione alle prove d'esame di ammissione a quei corsi universitari, che per l'appunto prevedono un test d'ingresso.

Il test può tornare utile anche come esercitazione per la preparazione alla prova scritta di matematica nei Licei Scientifici. Ma per questo è certamente più efficace lo svolgimento dei quesiti che sono proposti in 10 schede. Ognuna di queste schede comprende tre quesiti da risolvere obbligatoriamente giacché testano conoscenze e abilità fondamentali nella preparazione dello studente. Comprende poi altri sei quesiti, tra i quali lo studente deve sceglierne e risolverne tre. Si tratta di quesiti a carattere teorico e applicativo, che possono presentare richieste afferenti alla Fisica.
Per lo più questi quesiti sono stati proposti nella sezione "verifiche" delle varie unità, tutte le unità, dalla prima all'ultima, che compongono il prodotto base.
Anche per la risoluzione di questi quesiti si suppone che sia consentito l'uso di una calcolatrice che non sia programmabile né grafica. Eventuali disposizioni diverse possono indurre il docente a modificare qualcuno dei quesiti proposti.

Ricordiamo ancora una volta che eventuali comunicazioni possono essere inviate al seguente indirizzo: mategratis16@gmail.com

2. IL TEST DI USCITA

- **SEZIONE 1**
  Gruppo di quesiti a risposta chiusa, del tipo scelta multipla con 4 alternative, di cui una sola corretta (da n. 1 a n. 46).
  Si chiede di contrassegnare l'unica alternativa corretta.
  Ad ogni quesito sarà attribuito un punteggio nel modo seguente:
  - risposta corretta: **3** punti
  - risposta sbagliata: **-1** punti
  - risposta non data: **0** punti.

1. Scelta arbitrariamente una lunghezza non nulla, non esiste alcun triangolo i cui lati hanno lunghezze multiple della lunghezza scelta, secondo i numeri:
[A] 4-5-6; [B] 3-4-5; [C] 2-3-4; [D] 1-2-3.

2. Considerati due qualsiasi numeri naturali a, b, si sa che il numero 6 è un divisore del loro prodotto ab. Ne consegue che 6 è un divisore:
[A] di a ma non di b; [B] di b ma non di a; [C] di a o di b; [D] di a e di b.

3. I numeri reali x ed y sono tali che: 2,3<x<2,5 e 1,5<y<1,6. Risulta:
[A] 0,7 < x–y < 1,0; [B] 0,7 < x–y < 0,9;
[C] 0,8 < x–y < 0,9; [D] 0,8 < x–y < 1,0.

4. Risulta che:
[A] $\sqrt{x^2+4} = x+2$ per ogni x reale;
[B] $\sqrt{x^2+4x+4} = x+2$ per ogni x reale;
[C] $\sqrt{x^2-4x-4} = x-2$ per ogni x reale;
[D] le precedenti uguaglianze sono tutte e tre false.

5. La regione D del piano è determinata dal seguente sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} 2y - x \leq 4 \\ 2 \leq x \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
Qual è il massimo valore di x+y in D ?
[A] 4; [B] 5; [C] 8; [D] 12.

6. Si consideri il numero 99!+1.
[A] È divisibile per 33. [B] È divisibile per 50.
[C] È divisibile per 99. [D] Le tre proposizioni precedenti sono tutte false.

7. Se a, b sono due numeri reali positivi qualsiasi, con a>b, allora:
[A] ab>b; [B] ab<b;
[C] ab=b; [D] non si può concludere nulla circa la verità delle tre relazioni precedenti.

8. La fattura dell'idraulico, comprensiva del 22% di IVA (imposta sul valore aggiunto), è di € 326,96. L'IVA, espressa in euro, è, salvo approssimazioni minime:
[A] 71,15; [B] 58,96; [C] 31,20; [D] 62,40.

9. Qual è una forma semplificata della seguente frazione algebrica: $\frac{4xy+2y^2}{4xy}$?
[A] $\frac{y}{2}$; [B] $2y^2$; [C] $\frac{2x+y}{2x}$; [D] $\frac{2+y^2}{2}$.

10. Siano Q(x) ed R(x) rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione del polinomio A(x) per il polinomio B(x). Quale delle seguenti uguaglianze è quella corretta?

[A] $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + R(x)$. [B] $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{Q(x)+R(x)}{B(x)}$.

[C] $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{Q(x)}{B(x)} + R(x)$. [D] $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$.

11. Considerati n dati statistici di media aritmetica μ e deviazione standard σ, ammesso che tutti gli n dati aumentino di una stessa quantità:

[A] μ e σ cambiano entrambi di valore; [B] μ cambia di valore ma non σ;

[C] σ cambia di valore ma non μ; [D] μ e σ non cambiano di valore.

12. Una coppia di genitori ha tre figli. Qual è la probabilità che non più di due siano maschi?

[A] 4/8. [B] 5/8. [C] 6/8. [D] 7/8.

13. Si lanciano due dadi (facce numerate da 1 a 6 con le stesse probabilità di uscire). Punto sull'uscita del doppio "6". Qual è il numero minimo di lanci che devo effettuare per avere più probabilità di vincere che di perdere?

[A] 23. [B] 24. [C] 25. [D] 26.

14. La soluzione in ℝ dell'equazione $\log_3 \log_2 x = 1$ è:

[A] 4 ; [B] 8 ; [C] 9 ; [D] 27 .

15. In quella edizione della Champions League, chi puntava 1 euro sulla vittoria del Milan ne avrebbe guadagnati 1,50 al netto della puntata in caso di vincita. Questo significa che al Milan era attribuita una probabilità di vittoria:

[A] del 40%; [B] del 50%; [C] uguale a 2/3; [D] uguale ad 1/3.

16. In un piano sono fissati, in maniera arbitraria, due punti distinti. I quadrati aventi tali punti come vertici sono in numero di:

[A] 1; [B] 2; [C] 3; [D] 4.

17. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, sono assegnati i punti: A(−1,2), C(2,3), D(3,2). Il punto B, quarto vertice del parallelogramma ABCD, ha coordinate:

[A] (0,1); [B] (6,3); [C] (−2,3); [D] (0,3).

18. Posto che α, β siano due angoli qualsiasi compresi fra 0° e 90° esclusi, risulta che:

[A] $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$; [B] $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$;

[C] $\sin(\alpha+\beta) > \sin\alpha + \sin\beta$; [D] non è possibile il confronto, giacché α e β non sono noti.

19. In un quadrato di lato lungo L si recidono quattro triangoli rettangoli, in modo da ottenere un ottagono regolare. Quant'è lungo il lato dell'ottagono?

[A] $\frac{L}{2}\sqrt{2}$. [B] $L\left(2-\sqrt{2}\right)$.

[C] $L\left(\sqrt{2}-1\right)$. [D] Non si può calcolare per insufficienza di dati .

20. Due rette corrispondenti, r ed r', sono strettamente parallele. Quante traslazioni determinano?

[A] Una soltanto. [B] Due soltanto.

[C] Più di due. [D] La risposta non si può dare poiché i dati sono insufficienti.

21. Si consideri la figura sottostante, dove ABC ed AED sono due triangoli equilateri congruenti. Quante sono le isometrie che trasformano ABC in AED?

[A] Una. [B] Tre. [C] Quattro. [D] Sei.

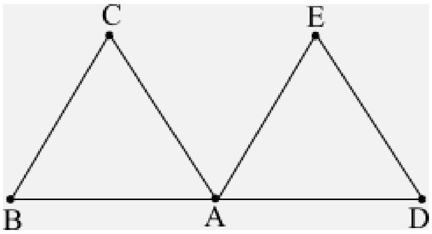

FIG. 1

22. In un piano sono assegnati due punti distinti A e B. Esiste almeno una circonferenza di raggio assegnato r, passante per essi, se e solo se:

[A] $0 \le dist(A,B) \le r$; [B] $r \le dist(A,B) \le 2r$;

[C] $0 < dist(A,B) \le 2r$; [D] $dist(A,B) \ge 2r$.

23. Un rettangolo è simile a ciascuno dei due rettangoli in cui esso è diviso dal segmento avente per estremi i punti medi dei suoi lati maggiori.

[A] Il lato maggiore e quello minore del rettangolo possono essere assunti rispettivamente come diagonale e lato di uno stesso quadrato.

[B] Il lato maggiore del rettangolo è il doppio di quello minore.

[C] Il lato minore del rettangolo è sezione aurea del maggiore.

[D] I dati sono insufficienti per poter determinare una qualsiasi relazione fra il lato maggiore e quello minore del rettangolo.

24. Nello spazio ordinario:

[A] due rette parallele ad un piano sono parallele tra loro;

[B] due piani paralleli ad una retta sono paralleli tra loro;

[C] due rette perpendicolari ad una retta sono parallele tra loro;

[D] le tre affermazioni precedenti sono tutte false.

25. Nello spazio ordinario, di una retta si sa che è parallela ad un piano e perpendicolare ad un altro piano.

[A] Si può concludere che i due piani sono paralleli.

[B] Si può concludere che i due piani sono perpendicolari.

[C] Si può concludere che i due piani non sono paralleli né perpendicolari.

[D] Non si può concludere alcunché circa la reciproca posizione dei due piani.

26. Quando una piramide si dice retta?

[A] Quando la sua altezza è perpendicolare ad uno spigolo di base.

[B] Quando la sua altezza è perpendicolare alla base.

[C] Quando nella sua base è possibile inscrivere un cerchio.

[D] Quando sono soddisfatte condizioni diverse dalle precedenti.

27. Lo spigolo di un tetraedro regolare misura $2\sqrt{2}$ cm. Qual è il valore del suo volume, espresso in centimetri cubi?

[A] $\frac{8}{3}$. [B] $\frac{8}{3}\sqrt{2}$. [C] $\frac{8}{3}\sqrt{3}$. [D] Un valore diverso.

28. In una piramide quadrangolare regolare è inscritto un prisma retto in modo che una sua base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base. Si conosce il volume della piramide. I dati sono:

[A] sufficienti a calcolare sia il volume del prisma sia la sua area totale.

[B] sufficienti a calcolare il volume del prisma ma non la sua area totale.

[C] sufficienti a calcolare l'area totale del prisma ma non il suo volume.
[D] insufficienti a calcolare sia il volume del prisma sia la sua area totale.

29. Se si fanno compiere ad un rombo due rotazioni di mezzo giro, ognuna intorno a ciascuna delle due diagonali, il rapporto k' tra le aree delle superfici dei due solidi generati ed il rapporto k" tra i loro volumi sono tali che:
[A] k' > k" ; [B] k' = k" ;
[C] k" > k' ; [D] nessuna delle tre relazioni precedenti si può determinare.

30. La scrittura E(x) indica la parte intera del numero x. Quanti sono i numeri interi z, tali che:
$$E\left(\frac{z}{2}\right)+E\left(\frac{z}{3}\right)+E\left(\frac{z}{5}\right)=\frac{z}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{5} \text{ ed inoltre } 0<z<10^4 \text{ ?}$$
[A] 111. [B] 222. [C] 333. [D] 444.

31. Una lumaca scalava una parete di 15 m: in un'ora saliva di 2 m ma nell'ora successiva, mentre si riposava, scivolava all'indietro di 1 m. Dopo quante ore la lumaca ha scalato i 15 m della parete?
[A] 27. [B] 28. [C] 29. [D] 30.

32. Si consideri la seguente disequazione in x:
$$k\,x < 1\,,$$
dove k è un parametro reale negativo.
[A] La disequazione è soddisfatta per ogni x reale.
[B] La disequazione è soddisfatta dagli x reali per cui si ha $x>1/k$.
[C] La disequazione è soddisfatta dagli x reali per cui si ha $x<-1/k$.
[D] Le proposizioni precedenti affermano tutte e tre il falso.

33. Si consideri la seguente equazione in x:
$$3\,x^2 - k(2k+1)\,x + 2 = 0,$$
dove k è un parametro reale. Si sa che una sua radice è $1/3$. Quanto vale l'altra radice?
[A] 1/2. [B] 2. [C] 2/3. [D] Un valore diverso.

34. Per quali x reali ha valore positivo o nullo la seguente frazione algebrica: $\frac{2-x}{x-1}$?
[A] $1\le x\le 2$; [B] $1<x<2$; [C] $1<x\le 2$; [D] $1\le x<2$.

35. Quante parabole di equazione $y=ax^2+bx+c$, assegnate in un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), passano per i punti di coordinate: $(1,-1)$, $(2,-1)$, $(-1,-1)$?
[A] Nessuna. [B] Una ed una soltanto.
[C] Due e due soltanto. [D] Infinite.

36. In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'equazione:
$$x^2 + y^2 + ax - (2a+3)y - 2(a+2) = 0\,,$$
dove a è un parametro reale. Per quali valori di a essa rappresenta una circonferenza?
[A] Per il solo valore a=0. [B] Per i soli valori positivi di a.
[C] Per i soli valori negativi di a. [D] Per ogni valore di a.

37. Si consideri la seguente espressione:
$$\sin 2x + \cos^2 x - \frac{1}{2}\,.$$
Sapendo che $0<x<\pi/2$ e $\tan x = 3/4$, quant'è il suo valore esatto?
[A] 41/50. [B] 3/2. [C] 11/10. [D] Non si può calcolare.

38. Quante soluzioni reali ha l'equazione: $\cos^2 5x + 2\sin 4x = 4$, con $0<x<2\pi$?
[A] 0. [B] 4. [C] 5. [D] Impossibile da calcolare.

39. Mostro tre carte: una presenta un “Asso” su entrambe le facce, un’altra presenta un “Re” su entrambe le facce, una terza ha “Asso” su una faccia e “Re” sull’altra. Dopo averle mescolate per bene, ne estraggo una a caso e, nascondendo la faccia coperta, faccio vedere che sulla faccia scoperta c’è un “Asso”. La probabilità che sulla faccia coperta ci sia un “Asso”:
[A] è maggiore di quella che ci sia un “Re”;
[B] è minore di quella che ci sia un “Re”;
[C] è uguale a quella che ci sia un “Re”;
[D] non si può confrontare con quella che ci sia un “Re”.

40. Del numero naturale N si sa che è un quadrato perfetto e la cifra delle decine è dispari. Qual è la cifra delle unità?
[A] 4; [B] 5; [C] 6; [D] 9.

41. Considerata la successione di termine generale $a_n = 1+2+...+n$, il rapporto: $R=\frac{a_{100}}{100^2}$ è tale che:
[A] $0\leq R<1/2$; [B] $1/2\leq R<1$; [C] $1\leq R<3/2$; [D] $R\geq 3/2$.

42. Quale delle seguenti funzioni è definita per ogni x reale?
[A] $y=\frac{1}{x^2}$; [B] $y=\ln(x^2-2x+2)$; [C] $y=\sqrt{x^2+x}$; [D] $y=\frac{1}{e^x-1}$.

43. Non disponi di alcuno strumento di calcolo automatico e devi fattorizzare il trinomio:
$$x^2-144\,x-123.679\,.$$
Quale delle seguenti è la fattorizzazione corretta?
[A] $(x+287)\,(x+431)$. [B] $(x+287)\,(x-431)$.
[C] $(x-287)\,(x+431)$. [D] $(x-287)\,(x-431)$.

44. Non disponi di alcuno strumento di calcolo automatico e devi fattorizzare il polinomio:
$$x^3-3\,x^2-10\,x+24.$$
Quale delle seguenti è la fattorizzazione corretta?
[A] $(x+2)\,(x+3)\,(x+4)$. [B] $(x+2)\,(x+3)\,(x-4)$.
[C] $(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$. [D] $(x-2)\,(x+3)\,(x-4)$.

45. Non disponi di alcuno strumento di calcolo automatico, ma ti è stato comunicato che $\log_5 3 = 0{,}6826$ e ti viene richiesto di calcolare $\log_5(1/75)$. Qual è il valore cercato?
[A] 1,3174. [B] –2,6826. [C] –1,6826. [D] Non si può calcolare.

46. Il pianeta “VerFal” è abitato solamente da Furfanti e Cavalieri: i Cavalieri dicono sempre e soltanto il vero, i Furfanti dicono sempre e soltanto il falso. Da chi, in tale pianeta, può essere pronunciata l’affermazione «Sono un Furfante»?
[A] Da chiunque. [B] Da nessuno.
[C] Solo da un Cavaliere. [D] Solo da un Furfante.

- **SEZIONE 2**

Gruppo di quesiti a risposta aperta (da n. 47 a n. 70).

Ad ogni quesito sarà attribuito un punteggio che può andare da 0 al valore massimo indicato in calce al quesito medesimo.

47. Spiegare in maniera esauriente se i numeri 1.000.001 e 1.000.000 sono o no primi tra loro.
[3 punti]

48. Una miscela contiene il 40% di proteine, un'altra ne contiene il 13%. Utilizzando le due miscele se ne vuole ottenere una terza contenente il 25% di proteine. In quale rapporto devono mescolarsi le due miscele originarie?
[5 punti]

49. Si consideri il polinomio $4x^4+9$. È possibile fattorizzarlo nell'insieme dei numeri reali? Vale a dire: è possibile trovare dei polinomi in x, di grado inferiore a 4, con coefficienti reali, il cui prodotto sia il polinomio dato? Argomentare in modo esauriente la risposta.
[7 punti]

50. Dimostrare che il numero $\sqrt{3}$ non è razionale.
[4 punti]

51. È dato un trapezio qualsiasi. Dimostrare che la corda che congiunge i punti medi dei lati obliqui è parallela alle basi ed è uguale alla loro semisomma.
[4 punti]

52. Eseguire la divisione di x^4 per x^2+1 ed esprimere con un'identità il risultato ottenuto.
[3 punti]

53. Si consideri la seguente equazione: $k(3-x)=2x-A$, dove k, x, A sono parametri reali. Di ciascuna delle seguenti proposizioni dire se è vera in ogni caso o se a volte può risultare falsa, fornendo esaurienti spiegazioni delle risposte:
[A] Se $A=2x$ allora $k=0$.
[B] Se $x=3$ allora $A=6$ qualunque sia k.
[C] Se $A=6$ e $x\neq 3$ allora $k=-2$.
[4 punti]

54. Le città A e B si trovano sulla stessa sponda di un fiume. Una barca scende da A a B in 3 ore e risale da B ad A in 4 ore. La velocità della corrente è di 1 km/h. In ipotetica assenza di corrente la velocità della barca, sia all'andata che al ritorno, sarebbe la stessa. Quanto distano le due città?
[4 punti]

55. Quella piazza ha un'estensione di circa 3 ettari, poco meno di piazza S. Giovanni in Roma. È credibile che alla manifestazione che si svolgeva in essa fossero presenti 500 mila persone? Argomentare in modo convincente la risposta.
[7 punti]

56. Siano α e β le radici dell'equazione $3x^2+5x+1=0$; siano invece α^2 e β^2 le radici dell'equazione $x^2+ax+b=0$. Calcolare il valore di $a+b$.
[4 punti]

57. Un carrello scorre su un binario, partendo dalla posizione A e muovendosi verso la posizione B, alla velocità di 0,4 m/s. Un secondo carrello scorre su un binario perpendicolare al primo, partendo da B, alla velocità di 0,3 m/s. Sapendo che la distanza AB è 10 m, qual è la distanza minima dei due carrelli? Quanto cammino ha percorso ciascuno di essi nell'istante in cui si trovano a tale distanza minima?
[6 punti]

58. Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Sapendo che la lunghezza di quei lati è uguale ad a, determinare la lunghezza dei lati più corti.
[5 punti]

59. Considerato un triangolo ABC, acutangolo, si chiami D la proiezione di A sulla retta BC ed E quella di B sulla retta AC. Indicato con F il punto in cui si secano le rette AD e BE, dimostrare che sia il quadrilatero CEFD sia il quadrilatero ABDE sono inscrivibili in un cerchio.
[5 punti]

60. Come noto, la forza F con cui si attirano due corpi di masse M ed m, poste ad una distanza d, è data dalla seguente formula:

$$F=G\frac{Mm}{d^2}$$

dove G è una costante. Ammesso che i due corpi raddoppino entrambi le loro masse, mentre la loro distanza si dimezza, quanto vale la nuova forza di attrazione rispetto ad F?
[3 punti]

61. In occasione dell'incontro di calcio Portogallo – Repubblica Ceca, il bookmaker per 1 euro puntato pagava, al netto della puntata, € 0,90 la vittoria del Portogallo, € 2,15 il pari ed € 3,00 la vittoria della Repubblica Ceca. Il gioco può ritenersi equo?
[5 punti]

62. Un automobilista va dalla città A alla città B tenendo una media di 60 km/h.
a) Supposto che faccia il viaggio di ritorno alla media di 90 km/h, qual è la sua velocità media sull'intero percorso di andata e ritorno?
b) Quale velocità media dovrebbe tenere sul percorso di ritorno da B ad A affinché la sua velocità media sull'intero percorso sia di 120 km/h?
[8 punti]

63. Chiamato P un qualsiasi punto non esterno ad un tetraedro regolare, quanto vale la probabilità che la somma delle sue distanze dalle facce del tetraedro sia uguale all'altezza del tetraedro medesimo?
[8 punti]

64. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali, si consideri l'insieme H formato dai punti che hanno entrambe le coordinate razionali. Esiste almeno una retta che passa per l'origine e non seca ulteriormente H? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
[6 punti]

65. Si prendono casualmente due punti sulla superficie terrestre, supposta sferica. È più probabile che si trovino sullo stesso emisfero (boreale o australe) o su due emisferi diversi?
[4 punti]

66. Quella volta si sarebbe disputato il famoso derby ed i tifosi furono ammessi ad entrare allo stadio fin dalle ore 17. Si verificò, però, un fatto singolare: dopo l'ingresso del primo gruppo di tifosi, avvenuto per l'appunto alle ore 17, ogni 20 minuti il loro numero raddoppiava e, alle ore 20, un'ora prima dell'inizio della partita, lo stadio era completamente esaurito. A che ora esso era pieno esattamente a metà?
[5 punti]

67. Ammesso che E(x) indichi la parte intera del numero x, disegnare il grafico della funzione di variabile reale: $f(x)=x+E(x)$, con $0<x<3$.
[4 punti]

68. Si consideri la funzione $f(x)=x^3-2x^2+4$. Quanti sono i suoi zeri razionali?
[4 punti]

69. Disegnare il grafico della funzione di variabile reale:

$$y=a\sin\frac{x}{2}+a\cos\frac{x}{2}\ .$$

[5 punti]

70. Calcolare il numero reale x che soddisfa alla seguente relazione:

$$\operatorname{atan}\frac{1}{2}-\operatorname{atan}\frac{2}{3}=\operatorname{atan}x\ .$$

[7 punti]

3. RISPOSTE AI QUESITI DEL TEST

- Le **risposte corrette ai quesiti a scelta multipla** sono sintetizzate nella tabella sottostante.

Quesito	Risposta		Quesito	Risposta		Quesito	Risposta		Quesito	Risposta
1	D		2	C		3	A		4	D
5	C		6	D		7	D		8	B
9	C		10	D		11	B		12	D
13	C		14	B		15	A		16	C
17	C		18	B		19	C		20	C
21	D		22	C		23	A		24	D
25	B		26	D		27	A		28	B
29	B		30	C		31	A		32	B
33	B		34	C		35	A		36	D
37	C		38	A		39	A		40	C
41	B		42	B		43	B		44	D
45	B		46	B						

- In questa sezione è invece fornito il **commento ad alcuni dei quesiti a scelta multipla**.

a) n. 3
Si ha: $2{,}3<x<2{,}5$ e $-1{,}6<-x<-1{,}5$. Da qui, sommando membro a membro, segue: $0{,}7<x-y<1{,}0$. [A] è l'alternativa corretta.

b) n. 4
La A e la C sono certamente false. Il dubbio potrebbe esserci sulla B, ma pure questa è falsa in quanto si ha: $\sqrt{x^2+4x+4}=|x+2|$. Pertanto l'alternativa corretta è la [D].

c) n. 6
Il numero $99!+1$, ovvero il numero $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot99+1$, diviso per ciascuno dei numeri $33,\ 50,\ 99$, dà sempre resto 1 e pertanto non è divisibile per alcuno di tali numeri. Ne consegue che l'alternativa corretta è [D].

d) n. 18
Siccome $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ e siccome $0<\cos\alpha<1$ e $0<\cos\beta<1$ risulta $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$. L'alternativa corretta è [B].

e) es. 20
In realtà, le traslazioni che mutano una retta in una retta parallela in senso stretto sono infinite: l'alternativa corretta è la [C].

f) es. 21
L'alternativa corretta è [D]. Le isometrie che trasformano il triangolo ABC nel triangolo ADE sono infatti 6, a meno di inversioni nell'ordine di esecuzione, e precisamente le seguenti:
- traslazione t di vettore $\overrightarrow{BA}$;
- traslazione t seguita da rotazione di 120° intorno al centro del triangolo;
- traslazione t seguita da rotazione di 240° intorno al centro del triangolo;
- traslazione t seguita da simmetria intorno ad altezza per A;
- traslazione t seguita da simmetria intorno ad altezza per B;
- traslazione t seguita da simmetria intorno ad altezza per C.

g) es. 23

Se si indicano con a, b le lunghezze dei lati del rettangolo (con a>b), si trova che deve essere soddisfatta la seguente relazione: $a^2=2b^2$, che è la medesima relazione che lega la diagonale e il lato di un quadrato. L'alternativa corretta è [A].

h) n. 30

Il numero N dei numeri cercati è dato dal quoziente fra $10^4=10.000$ e il minimo comune multiplo di $2,\ 3,\ 5$, che è 30. Dunque $N = 10.000 \text{ div } 30 = 333$. [C] è l'alternativa corretta.

i) n. 33

La risoluzione del quesito è immediata se si fa ricorso ad una delle formule di Viète. In particolare, sapendo che il prodotto delle radici dell'equazione è $2/3$ e che una di esse è $1/3$, è immediato stabilire che l'altra radice è 2. [B] è l'alternativa corretta.

j) n. 38

$\cos 5x$ varia fra –1 ed 1, per cui $\cos^2 5x$ varia fra 0 ed 1. Analogamente $\sin 4x$ varia fra -1 ed 1, per cui $2\sin 4x$ varia fra -2 e 2. Di conseguenza la somma delle due funzioni non potrà mai essere uguale a 4. L'equazione non ammette soluzioni reali: l'alternativa corretta è la [A].

k) n. 40

Questo quesito, in cui ci sono delle alternative precise e bisogna solo individuare quella corretta, è abbastanza elementare. Basta fare qualche tentativo prendendo dei quadrati di numeri naturali in cui l'ultima cifra è $4,\ 5,\ 6$ o 9. Ad esempio: $8^2=64,\ 5^2=25,\ 6^2=36,\ 7^2=49$. Solo nel numero 36 la cifra delle decine è dispari. La conclusione è immediata: [C] è l'alternativa corretta.

Le cose si complicherebbero non poco se il quesito fosse a risposta aperta e bisognasse fornire una dimostrazione generale. Provi il lettore a trovarla. Gli forniamo qualche dritta. Conviene assumere $N=(10b+a)^2$, dove a è un naturale compreso fra 0 e 9 inclusi, mentre b è un naturale qualsiasi. Osservato che $N=10(10b^2+2ab)+a^2$, si desume che il numero k delle decine di N è uguale a $2(5b^2+ab)+d$, dove d è il numero delle decine di a^2. A questo punto bisogna ricordare che k è dispari e che a^2 è il quadrato di un numero compreso fra 0 e 9 inclusi e trarre le conclusioni.

l) n. 43

Si potrebbero calcolare gli zeri del trinomio assegnato e controllare a quale alternativa conducono, ma ci vuole troppo tempo ed il calcolo è piuttosto complicato. Anche la verifica diretta delle varie alternative richiede tempo e comporta calcoli noiosi. Meglio ricorrere alle formule di Viète. Esse ci dicono che il prodotto dei due zeri è negativo e pertanto essi hanno segni discordi; d'altro canto la loro somma è positiva, per cui lo zero positivo ha il valore assoluto maggiore. Ne consegue che l'alternativa [B], che conduce agli zeri -287 e $+431$, è quella corretta.

m) n. 44

Si potrebbe pensare di trovare uno zero del polinomio e poi, utilizzando la regola di Ruffini, trovare gli altri due e quindi fattorizzare. Processo lungo e dispendioso, al quale si deve ricorrere inevitabilmente (salvo rare eccezioni) se il quesito chiedesse di fattorizzare il polinomio senza fornire alternative. Ma, nel caso nostro, le alternative ci sono e la tecnica di risoluzione del quesito non è quella descritta sopra, ma una assolutamente immediata. Si tratta di riflettere sul termine noto del polinomio, vale a dire +24. Ebbene, il prodotto dei termini noti dei tre binomi in cui esso si fattorizza deve essere proprio +24. Questo significa che, dei termini noti di questi fattori, quelli negativi devono essere in numero pari (0 oppure 2). Di conseguenza le alternative [B] e [C] sono da scartare. Rimangono in piedi [A] e [D]. Ora, però, nel caso [A] tutti i termini noti sono positivi, per cui il polinomio prodotto, una volta sviluppato, non può che avere termini noti positivi. Non è il caso del polinomio assegnato. L'alternativa corretta è la [D].

n) n. 45

Si ha: $\log_5(1/75) = -\log_5(3\times5^2) = -(\log_5 3 + 2) = -2{,}6826$. [B] è l'alternativa corretta.

o) n. 46

Se un Cavaliere pronunciasse l'affermazione "Sono un Furfante", direbbe una bugia, ma un Cavaliere non mente mai. Se la pronunciasse un Furfante direbbe la verità, ma un Furfante mente sempre. In conclusione, la frase non può essere pronunciata da nessuno degli abitanti del pianeta "VerFal". [B] è l'alternativa corretta.

- Questa sezione è infine dedicata alla **risoluzione dei quesiti aperti**.

a) n. 47

Il numero 1.000.000 ammette come divisori primi solo i numeri 2 e 5, che non sono divisori di 1.000.001. I due numeri sono, pertanto, primi fra loro.
In realtà **due qualsiasi numeri naturali consecutivi, a ed a+1, sono primi fra loro**. Basta constatare, infatti, che se il numero a ha come fattore primo p (ovviamente $p\neq1$) il numero $a+1$, diviso per p, dà resto 1 e perciò non è divisibile per p. E questo vale per ogni eventuale fattore primo di a. Ragion per cui a ed $a+1$ non possono avere fattori primi comuni. Sono pertanto primi fra loro.

b) n. 48

Se x indica la quantità della prima miscela ed y quella della seconda, deve risultare soddisfatta la seguente relazione: $0{,}40\,x + 0{,}13\,y = 0{,}25\,(x+y)$. Da qui segue: $5x=4y$ ossia $x/4=y/5$. Questo significa che bisogna prendere 4 misure della prima miscela e 5 della seconda.

c) n. 49

È possibile. Si ha infatti:

$$4x^4+9 = (2x^2+3)^2 - 12x^2 = (2x^2+3+x\sqrt{12})(2x^2+3-x\sqrt{12}) = (2x^2+2x\sqrt{3}+3)(2x^2-2x\sqrt{3}+3).$$

La fattorizzazione, al contrario, non è possibile nell'insieme dei numeri razionali. Questo a riprova del fatto che, quando si chiede la fattorizzazione di un polinomio, bisogna precisare sempre l'ambito in cui effettuarla o almeno sottintenderlo.

d) n. 50

È necessaria una dimostrazione per assurdo. Ammesso allora che $\sqrt{3}$ sia un numero razionale, devono esistere due numeri naturali a, b (che possiamo supporre primi fra loro) tali che $a/b=\sqrt{3}$, vale a dire: $a^2=3b^2$. Ora, il primo membro di quest'uguaglianza, scomposto in fattori primi, o non contiene il numero 3 o lo contiene un numero pari di volte, mentre il secondo membro contiene il fattore 3 certamente un numero dispari di volte. L'uguaglianza non è, dunque, possibile e di conseguenza il numero $\sqrt{3}$ non è razionale.

e) n. 51

Sia ABCD un generico trapezio (Fig. 2) e siano M ed N i punti medi dei lati obliqui AD e BC nell'ordine. Per la dimostrazione richiesta si potrebbero seguire più procedimenti. Ne vogliamo riportare uno basato sul calcolo vettoriale.

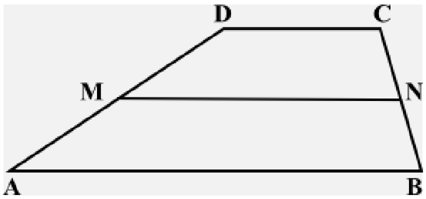

FIG. 2

Si ha: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ ed $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$; da qui, sommando membro a membro, segue: $2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right)$; d'altro canto, essendo M il punto medio di AD ed N quello di BC, risulta: $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MD}$ e $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{CN}$, per cui $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}$ e $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}$ sono uguali al vettore nullo. Di conseguenza si ha: $2\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ ossia :

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right).$$

Il che prova che la corda MN è parallela alle basi del trapezio ed è uguale alla loro semisomma.

f) n. 52

Il quoziente ed il resto della divisione di x^4 per x^2+1 sono rispettivamente x^2-1 e 1. L'identità richiesta è pertanto la seguente:

$$\frac{x^4}{x^2+1}=(x^2-1)+\frac{1}{x^2+1}\ .$$

In realtà, si può giungere all'identità in modo più rapido, senza eseguire alcuna divisione. Si ha infatti:

$$\frac{x^4}{x^2+1}=\frac{x^4-1+1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{x^2+1}=(x^2-1)+\frac{1}{x^2+1}\ .$$

g) n. 53

Esaminiamo le varie situazioni riferite all'equazione $k(3-x)=2x-A$.

[A] Se $A=2x$, l'equazione diventa: $k(3-x)=0$. Ragion per cui, solamente se $x\neq3$ allora $k=0$, ma se $x=3$, k può assumere qualunque valore reale.

[B] Se $x=3$, l'equazione diventa: $0\cdot k=6-A$. Ragion per cui, $A=6$ qualunque sia k.

[C] Se $A=6$ e $x\neq3$, l'equazione diventa: $k(3-x)=2(x-3)$. Ragion per cui, essendo $x\neq3$, può essere solamente $k=-2$.

h) n. 54

Bisogna tenere presente che la velocità della barca in discesa è favorita dalla corrente, mentre in salita è ostacolata. Indicata allora con d la distanza delle due città e con V la velocità della barca in assenza di corrente, deve risultare: $d=(V+1)\times3$ e $d=(V-1)\times4$. Da qui, risolvendo il sistema nelle incognite d, V, si trova: V = 7 km/h, d = 24 km.

i) n. 55

3 ettari equivalgono a 30.000 m^2. Ammesso che in ogni metro quadrato siano pigiate da 4 a 5 persone, il numero totale di persone presenti nella piazza sarebbe compreso fra 120.000 e 150.000, ma non potrebbe giammai raggiungere le 500.000 unità.

j) n. 56

Si può pensare di trovare dapprima le radici α e β dell'equazione $3x^2+5x+1=0$ e poi, una volta calcolati i valori α^2 e β^2, determinare i coefficienti a, b dell'equazione $x^2+ax+b=0$ imponendo che essa abbia come radici α^2 e β^2. In teoria si può fare, ma è un procedimento troppo lungo e comporta calcoli complicati che inevitabilmente finiranno per condurre all'errore. Meglio seguire una strada più semplice anche se concettualmente più sofisticata, ricorrendo alle formule di Viète.

Si ha intanto: $\alpha+\beta=-5/3$ e $\alpha\beta=1/3$. Pertanto:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{19}{9}\ \text{ e }\ \alpha^2\beta^2=\frac{1}{9}.$$

D'altro canto: $\alpha^2+\beta^2=-a$ e $\alpha^2\beta^2=b$. Di conseguenza: $a=-19/9$ e $b=1/9$. Infine: $a+b=-2$.

k) n. 57

La situazione può essere schematizzata come in figura 3.

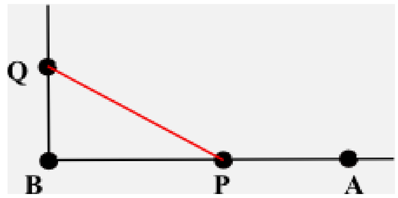

FIG. 3

Diciamo t l'istante in cui il carrello che parte da A si trova in P e quello che parte da B si trova in Q. Risulta evidentemente:

$$\overline{AP}=0{,}4\ t,\ \ \overline{BP}=10-0{,}4\ t,\ \ \overline{BQ}=0{,}3\ t\,.$$

Di conseguenza, in virtù del teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo PBQ:

$$\overline{PQ}^2=(0{,}3\ t)^2+(10-0{,}4\ t)^2=\frac{1}{4}t^2-8t+100\,.$$

La distanza dist(P,Q) dei due carrelli è minima quando lo è la quantità qui trovata. Il che accade per $t=16$ (secondi). In corrispondenza di questo valore di t si ha:

$$\min(PQ)=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot16^2-8\cdot16+100}=6\ \text{(metri)};\ \ AP=0{,}4\cdot16=6{,}4\ \text{(metri)};\ \ BP=0{,}3\cdot16=4{,}8\ \text{(metri)}.$$

l) n. 58

Indicati con M ed N i punti medi rispettivamente di AB e DC, dalla similitudine dei rettangoli ABDC e ADNM segue:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AM}}\ \text{ e da qui: }\overline{AD}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AM}=\frac{a^2}{2}\ \text{ e perciò: }\overline{AD}=\overline{BC}=\frac{a}{\sqrt{2}}\,.$$

m) n. 59

Per quanto riguarda il quadrilatero CEFD, è sufficiente constatare che i suoi angoli opposti, $C\widehat{E}F$ e $F\widehat{D}C$, sono retti e quindi supplementari e questa è condizione necessaria e sufficiente per concludere che il quadrilatero è inscrivibile in un cerchio. Per quanto concerne il quadrilatero ABDE, bisogna osservare che i triangoli ABE e ABD sono entrambi rettangoli ed hanno la medesima ipotenusa AB, per cui i punti A, B, D, E sono situati sulla circonferenza di diametro AB, addirittura su una semicirconferenza.

n) n. 60

Indicata con F' la nuova forza di attrazione, risulta:

$$F'=G\frac{2M\cdot2m}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}=16\cdot G\frac{Mm}{d^2}=16\ F.$$

o) n. 61

Se il gioco fosse equo dovrebbe risultare:

$$p\,(\text{vitt. Portogallo})+p\,(\text{pareggio})+p\,(\text{vitt. Rep.Ceca})=1.$$

Sennonché, in base alle valutazioni del bookmaker si ha:

- $p(\text{vittoria Portogallo})=\frac{1}{1+0{,}9}\approx0{,}526$; - $p(\text{pareggio})=\frac{1}{1+2{,}15}\approx0{,}317$;
- $p(\text{vittoria Repubblica Ceca})=\frac{1}{1+3}=0{,}25$.

Di conseguenza, la somma delle tre probabilità è circa 1,09. Il gioco non è equo, ma è sbilanciato a favore del bookmaker.

p) n. 62

Se si indica con s il percorso di andata (uguale a quello di ritorno) e con t' e t" rispettivamente i tempi per compierlo all'andata e al ritorno, le rispettive velocità medie v'_m e v''_m sono tali che: $v'_m=\frac{s}{t'}$ e $v''_m=\frac{s}{t''}$ La velocità media v_m su tutto il percorso è, d'altro canto:

$$v_m=\frac{2s}{t'+t''}=\frac{2}{\frac{t'}{s}+\frac{t''}{s}}=\frac{2}{\frac{1}{v'_m}+\frac{1}{v''_m}}=\frac{2v'_m v''_m}{v'_m+v''_m}\ .$$

Pertanto, con riferimento alle due domande a) e b):

$$\text{a)}\ \ v_m=\frac{2\times 60\times 90}{60+90}=72\ (\text{km/h});\qquad \text{b)}\ \ 120=\frac{2\times 60\ v''_m}{60+v''_m}\ ,\ \text{cioè:}\ \ 120\times 60+120\ v''_m=2\times 60\ \ v''_m\ .$$

Ora, quest'ultima equazione è impossibile e perciò nessuna velocità, al ritorno, può essere tale da raddoppiare la velocità media su tutto il percorso.

q) n. 63

Indicati con S ed h l'area di una faccia e l'altezza del tetraedro e chiamate d_1, d_2, d_3, d_4 le distanze del punto P dalle quattro facce del tetraedro, risulta:

$$\frac{1}{3}S\ d_1+\frac{1}{3}S\ d_2+\frac{1}{3}S\ d_3=\frac{1}{3}S\ h$$

da cui segue: $d_1+d_2+d_3+d_4=h$. Ne consegue che la probabilità cercata è 1.

r) n. 64

La risposta è "sì". Basta considerare, infatti, che ogni retta $y=ax$, con a numero irrazionale (per esempio: $a=\sqrt{2}$) è tale che almeno una delle coordinate di ogni suo punto (eccetto per il punto di ascissa 0) non è un numero razionale.

s) n. 65

Se si sceglie casualmente un qualsiasi punto sulla superficie terrestre, non c'è alcuna ragione per ritenere che sia più probabile che si trovi sull'emisfero boreale piuttosto che sull'emisfero australe, per cui la probabilità che si trovi sul primo emisfero è $1/2$, esattamente come quella che si trovi sul secondo. Di conseguenza, la probabilità che due punti, scelti a caso, si trovino entrambi sull'emisfero boreale è $1/4$, come quella che si trovino entrambi sull'emisfero australe. Dunque la probabilità che i due punti si trovino sullo stesso emisfero è $1/2$, come quella che si trovino uno su un emisfero ed uno sull'altro.

t) n. 66

Se si ragiona su ciò che accade all'inizio non se ne viene fuori, ma se si parte dalla fine le cose sono assai semplici. Ora, alle ore 20 lo stadio è completamente pieno, quindi era pieno esattamente a metà 20 minuti prima, cioè alle ore 19 e 40 minuti.

u) n. 67

Basta riflettere un attimo ed il grafico è subito disegnato (Fig. 4)

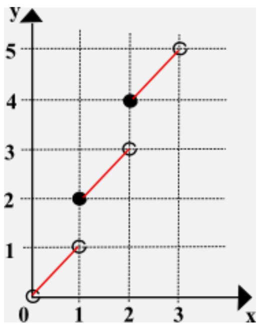

FIG. 4

v) n. 68

Se la funzione ammette zeri razionali, questi devono trovarsi fra i divisori, presi col doppio segno, del termine noto; vale a dire fra i numeri $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$. Si può verificare facilmente che nessuno di essi è uno zero dell'equazione, la quale pertanto non ammette zeri razionali.

w) n. 69

Innanzi tutto si constata che la funzione è definita per $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$, vale a dire per $-2 \le x \le 2$. Si osserva poi che:

$$\text{posto } \operatorname{asin}\frac{x}{2}=u \text{ e } \operatorname{acos}\frac{x}{2}=v, \quad \text{si ha: } \frac{x}{2}=\sin u \text{ e } \frac{x}{2}=\cos v .$$

Di conseguenza: $\sin u=\cos v$ e perciò $u+v=\pi/2$. La funzione (di x) assegnata è pertanto: $y=\pi/2$, con $-2 \le x \le 2$. La prosecuzione è banale.

x) n. 70

Posto: $\operatorname{atan}\frac{1}{2}=a$ e $\operatorname{atan}\frac{2}{3}=b$, si ha rispettivamente: $\tan a=\frac{1}{2}$ e $\tan b=\frac{2}{3}$.

D'altronde: $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=-\dfrac{1}{8}$.

Pertanto: $a-b=\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{8}\right)$.

Di conseguenza: $\operatorname{atan}\frac{1}{2}-\operatorname{atan}\frac{2}{3}=\operatorname{atan}\left(-\frac{1}{8}\right)$.

Infine: $x=-\frac{1}{8}$.

4. Schede di preparazione alla prova scritta di matematica nei Licei scientifici.

Scheda N°1.

Quesiti obbligatori:

1. È data la seguente equazione nell'incognita x:

$$x^2 - kx + 2k - 1 = 0\,,$$

dove k è un parametro reale. Siano x' ed x" le sue radici nel campo complesso.

a) Dimostrare che, indipendentemente da k, risulta:

$$(x' - 2)(x'' - 2) = 3\,.$$

b) Determinare se esistono valori di k per i quali le radici x' ed x" sono numeri interi.

c) Studiare la realtà ed il segno delle radici x' ed x" al variare di k in $\mathbb{R}$, ricorrendo al seguente procedimento: si esprime k in funzione di x e, dopo aver posto k=y, si traccia il grafico della funzione y=f(x) ottenuta e se ne studiano le intersezioni con le rette y=k al variare di k.

2. È dato un tetraedro regolare di altezza h.

a) Considerato un qualsiasi punto P interno ad esso o appartenente al suo contorno, dimostrare che la somma delle distanze di P dalle facce del tetraedro è uguale ad h.

b) Preso per tre volte, in modo casuale, un punto interno al tetraedro, calcolare la probabilità che almeno una volta esso appartenga alla sfera inscritta nel tetraedro.

3. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), è assegnata la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$$

a) Scrivere una terza equazione lineare nelle medesime incognite x, y, z in modo che il sistema formato da questa nuova equazione e dalle due equazioni assegnate abbia come soluzione una terna determinata $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ e trovare questa terna. Fornire un'interpretazione geometrica della situazione.

b) Dopo aver verificato che il punto P(0,0,1) non appartiene alla retta r, trovare l'equazione del piano α individuato da P e da r.

c) Dopo aver verificato che il piano α è parallelo all'asse z, trovare le sue intersezioni con gli assi x ed y.

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il triangolo OAB in cui A ha coordinate (4,0) e B ha coordinate (3,3). Dopo aver dimostrato, con considerazioni di geometria sintetica, che il triangolo LMN, avente per vertici i punti medi del triangolo OAB, è simile a questo triangolo, trovare le equazioni di una similitudine che trasformi il triangolo LMN nel triangolo OAB.

2. Considerata la successione di termine generale $a_n=n(n+1)(n+2)$, con n>0, dimostrare, utilizzando il principio d'induzione, che la somma S_n dei suoi primi n termini è tale che:

$$S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\,.$$

3. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Fornire una rappresentazione grafica del solido e calcolarne il volume.

4. Si prendano in esame i seguenti polinomi nell'indeterminata x:

$$x^4+5x^2+9\,,\quad x^4+1\,,\quad x^2+4\,.$$

Uno di essi non è fattorizzabile nel campo reale; uno è fattorizzabile in tale campo ma non in quello razionale; uno infine è fattorizzabile nel campo razionale.
Quando la fattorizzazione è possibile, eseguirla ovviamente nel campo numerico di pertinenza.

5. Dallo studio della Fisica si apprende che un circuito elettrico con una resistenza R ed un'induttanza L, soggetto ad una forza elettromotrice V costante, è attraversato da una corrente costante i. Alla chiusura del circuito, tuttavia, la corrente i è variabile rispetto al tempo t: trovare la relativa legge i=i(t), con t≥0, sapendo che le grandezze coinvolte sono legate dalla seguente relazione:

$$\mathrm{V}-\mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}=\mathrm{Ri}\,.$$

6. Sia la funzione:

$$f(x)=\frac{k}{1+x^2}\,,$$

dove k è un parametro reale.

a) Dimostrare che esiste uno ed un solo valore di k per il quale f(x) rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria X.
b) Calcolare la probabilità che X assuma un qualsiasi valore compreso fra 0 ed 1.

SCHEDA N°2.

Quesiti obbligatori:

1. È data la seguente funzione:

$$f(x)=\begin{cases} x(4-x) \;\; \text{per} \;\; x\leq 3 \\ 3 \;\; \text{per} \;\; 3<x\leq 5 \\ (4-x)(x-8) \;\; \text{per} \;\; x>5 \end{cases}$$

a) Studiarla sotto l'aspetto della continuità, derivabilità e integrabilità.
b) Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia R il sottografico della funzione relativo all'intervallo $[0{,}3]$. Calcolare il volume del solido generato da R quando ruota di un giro completo intorno all'asse y.

2. In una piccola azienda lavorano 12 operari, uno dei quali si chiama Leonardo, e 6 operarie, una delle quali si chiama Valeria. Deve essere formata una delegazione composta da 2 operai ed un'operaia.

a) Quante sono le possibili delegazioni?
b) Qual è la probabilità che, formando la delegazione con sorteggio casuale, questa comprenda l'operaio Leonardo e l'operaia Valeria? Quale che non comprenda né l'operario Leonardo né l'operaia Valeria?

3. Nel triangolo ABC gli angoli in A e in B misurano rispettivamente 60° e 45°. Prendere, internamente al lato AB, il punto D in modo che risulti $D\widehat{C}B=C\widehat{A}B$.

a) Dimostrare che il triangolo CDB è simile al triangolo ABC.
b) Una volta riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), trovare le equazioni di una similitudine che trasformi il triangolo ABC nel triangolo CDB.

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. È data la seguente funzione:

$$f(x)=x\,\sqrt[3]{2-|x|}\,.$$

Dopo averne determinato il dominio, calcolare $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

2. Risolvere in ℝ la seguente equazione in x:

$$\operatorname{atan}(2x) = \operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}\frac{1}{3}.$$

3. Un percorso stradale è suddiviso in n tratti di lunghezze L_i (i=1,2,…,n) e pendenze rispettive p_i diverse tra loro. Dimostrare che la pendenza media sull'intero percorso è uguale alla media aritmetica ponderata delle pendenze degli n tratti qualora si prendano come pesi le loro rispettive lunghezze.

4. Trovare le equazioni delle curve del piano cartesiano (Oxy), le quali in ogni loro punto (x,y) hanno pendenza x/y. Che curve sono?

5. Dimostrare, o per induzione o, a scelta, con un procedimento diretto, che il numero $3^{2n}\cdot 4^n-1$ è divisibile per 5 e per 7, qualunque sia il numero naturale n.

6. Un'automobile, partendo da ferma, procede di moto uniformemente accelerato fino a raggiungere la velocità di 90 km/h in 8 secondi. Continua a muoversi per altri 35 secondi di moto uniforme e quindi decelera uniformemente fino a fermarsi in 5 secondi. Trovare la funzione a=a(t) dell'accelerazione dell'automobile, misurando t in secondi ed a in metri al secondo per secondo e disegnare l'andamento di tale funzione.

SCHEDA N°3.

Quesiti obbligatori:

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole p' e p" di equazioni rispettivamente:

$$y = 2x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x.$$

a) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da esse.
b) Trovare le equazioni di una similitudine che trasformi la parabola p' nella parabola p".

2. I dirigenti di un'azienda decidono di sottoporre a controlli l'operato dei 605 impiegati al fine di individuare tutti coloro i quali meritano una gratifica. Nella tabella sottostante è riportata la distribuzione del numero N dei dipendenti che, in un anno, hanno subito k controlli.

K = numero controlli	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N = numero impiegati	3	23	54	83	108	110	90	58	42	20	9	5

Trovare la distribuzione di Poisson che meglio approssima questa distribuzione.

3. Ad una parete è affisso un quadro alto 1 m con la base inferiore collocata a 1,5 m di distanza dal pavimento. Calcolare a quale distanza dalla parete si deve mettere una persona affinché veda il quadro sotto il massimo angolo visuale, nell'ipotesi che, stando seduta, i suoi occhi si vengano a trovare ad 1 m dal pavimento.

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. Risolvere in ℝ la seguente equazione in x:

$$2\cos^2(2x) - \sin(3x) = 4\,.$$

2. Nel grafico sottostante (Fig. 5) è rappresentata la derivata $f'(x)$ della funzione f(x). Dopo aver spiegato perché la funzione f(x) è continua su tutto l'asse reale, determinarla sapendo che assume il valore 1 per x=0.

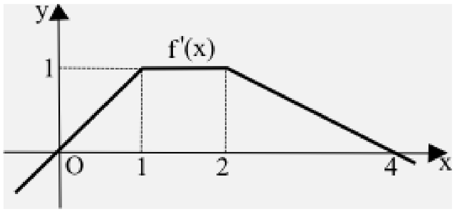

FIG. 5

3. Un punto materiale si muove di moto rettilineo con accelerazione a(t), espressa in funzione del tempo t, dalla seguente legge:

$$a(t)=\frac{1}{2}\big(s(t)+v(t)\big)\,,$$

dove s(t) e v(t) sono rispettivamente la posizione occupata dal punto materiale e la sua velocità nel generico istante t.

a) Verificare che la seguente funzione:

$$s(t)=2\,e^{-\frac{1}{2}t}$$

esprime una possibile legge oraria.

b) Ammesso che effettivamente la precedente funzione sia la legge del moto in questione e supposto che t sia misurato in secondi ed s in metri, quale posizione occupa il punto materiale sulla retta del moto nell'istante $t=0$? Con quale velocità? Con quale accelerazione?

4. Nel campionato italiano di calcio 2010/2011 l'Udinese realizzò solo 1 punto nelle prime 5 partite ma alla fine del campionato (38 partite complessive) si classificò quarta realizzando una media di circa 1,737 punti a partita. Quale fu la media punto nelle prime 5 partite? Quale quella nelle 33 partite successive?
N.B.: Qualora servisse, si ricorda che la squadra che vince una partita prende tre punti, se pareggia prende un punto e se perde prende zero punti.

5. Siano α e β le radici, nel campo complesso, dell'equazione $x^2+ax+b=0$, dove a, b sono numeri reali assegnati. Siano invece α^2 e β^2 le radici, nel campo complesso, dell'equazione $x^2+px+q=0$. Calcolare $p+q$ in funzione di a, b.

6. Una volta riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dimostrare che esistono due curve che passano per il punto (0,1) e in ogni loro punto (x,y) hanno pendenza xy. Trovare le loro equazioni.

SCHEDA N°4.

Quesiti obbligatori:

1. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati i seguenti punti: $A(2,0,0)$, $B(\sqrt{3},1,0)$, $C(2,0,3)$. Calcolare le distanze:

a) del punto B dal piano AOC;
b) del punto A dal piano BOC.

2. Si dispone di 4 monete, di cui 3 "oneste" (TESTA su una faccia, CROCE sull'altra e moneta perfettamente bilanciata) e 1 truccata (TESTA su entrambe le facce). Si sceglie a caso una moneta e, dopo averla lanciata per 4 volte, si ottiene 4 volte TESTA. Trovare qual è la probabilità che la moneta scelta sia quella truccata.

3. Sia la parabola di vertice V e distanza focale $\frac{3}{4}$L, essendo L una lunghezza assegnata. La sua corda AB, perpendicolare all'asse della parabola, individua un segmento parabolico di area 12 L^2.
a) Calcolare le lunghezze della corda AB e della distanza VH di V da essa.
b) Il segmento parabolico sia la base di un solido Σ, ogni sezione del quale, ottenuta con un piano perpendicolare all'asse della parabola, sia un triangolo equilatero. Calcolare il volume di Σ.

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. Le statistiche mostrano che una famiglia ha mediamente 1,5 figli. Calcolare la probabilità che una famiglia, scelta a caso, abbia: a) non più di un figlio; b) almeno due figli; c) esattamente due figli.

2. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si considerino le due funzioni reali di variabile reale a(x) e b(x). Esse sono entrambe continue nell'intervallo $[-\alpha, +\alpha]$. Inoltre, la funzione $a(x)$ è simmetrica rispetto all'asse y, mentre la $b(x)$ è simmetrica rispetto all'origine O. Considerato l'integrale $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} a(x)b(x)dx$, quale delle seguenti alternative è l'unica corretta?

[A] I=0. [B] I>0. [C] I<0. [D] Nessuna delle precedenti relazioni è certa.

Fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. È assegnata la seguente equazione:

$$x^2+4y^2-4xy-2=0\,.$$

Qual è il suo grafico in un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy)?

[A] Un'ellisse. [B] Un'iperbole. [C] Una coppia di rette. [D] Un punto.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Stabilire se sono commensurabili o incommensurabili il raggio della sfera inscritta e quello della sfera circoscritta ad un ottaedro regolare.

5. Considerate le tre funzioni:

$$\frac{1}{x+1},\quad \ln\frac{x+1}{x}\ ,\quad \frac{1}{x}\ ,$$

con x>0, si può dimostrare analiticamente ciò che i loro grafici fanno intuire e cioè che risulta:

$$\frac{1}{x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}.$$

A tal fine si può prendere in considerazione la funzione $\ln x$ e ricorrere al teorema di Lagrange. Come si può procedere? Si tenga presente che "ln" indica il logaritmo naturale.

6. Una formica si trova nel punto medio A dello spigolo di una parete di un edificio a forma di tetraedro regolare (Fig. 6) e vuole recarsi nel punto medio B dello spigolo che si trova su una parete diversa. Quant'è lungo il cammino più breve che deve fare la formica, sapendo che lo spigolo del tetraedro misura 4 m?

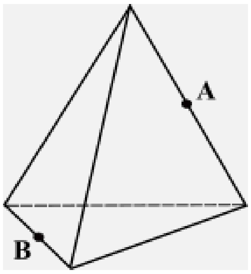

FIG. 6

SCHEDA N°5.

Quesiti obbligatori:

1. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), è assegnato il triangolo ABC i cui vertici hanno le seguenti coordinate: $A(a, 0,0), B(0,2b, 0), C(0,0,3c)$, dove a, b, c sono parametri reali positivi. Determinare il luogo del suo baricentro, sapendo che la somma delle distanze dei vertici del triangolo dall'origine del sistema di riferimento è uguale ad 1.
2. Nella figura sottostante (Fig. 7) sono rappresentate la derivata prima $f'(x)$ e la derivata seconda $f''(x)$ della funzione reale di variabile reale $f(x)$. L'asse x è asintoto completo per entrambe le derivate.
   a) Dire qual è il dominio della funzione f(x) e se essa è continua nel suo dominio o se presenta qualche punto di discontinuità.
   b) Spiegare in modo esauriente se la funzione f(x) ammette massimo e/o minimo e se presenta dei flessi ed eventualmente per quali valori di x.
   c) Spiegare in modo esauriente in quali intervalli la funzione f(x) è crescente ed in quali è decrescente ed inoltre in quali intervalli volge la concavità verso l'alto ed in quali verso il basso.
   d) Gli elementi ottenuti sono sufficienti per tracciare il grafico della funzione f(x)? Fornire una risposta esauriente.

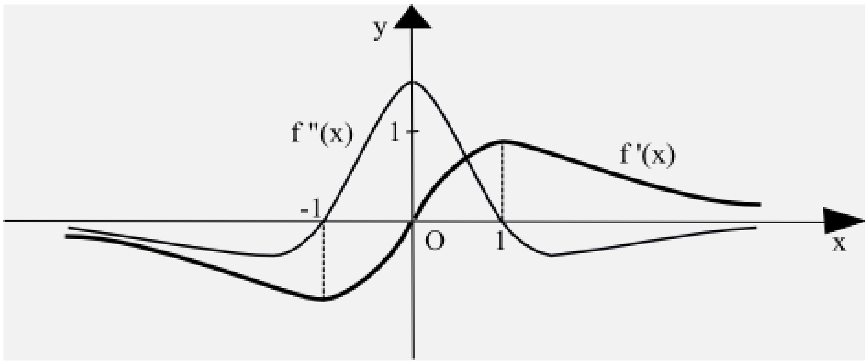

FIG. 7

3. Una sostanza radioattiva emette in modo irregolare particelle che possono essere conteggiate da un contatore Geiger. Il numero di tali particelle, conteggiato ad intervalli regolari di 20 secondi, è riportato nella tabella sottostante.

Numero particelle	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Numero intervalli	1	11	28	42	48	44	32	20	18	10	3	1

Trovare la distribuzione di Poisson che meglio approssima questa distribuzione.

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola di equazione $y=ax^2$, dove a è un parametro reale non nullo. Indicati con A, di ascissa x_A, e con B, di ascissa x_B, due punti generici della parabola, è noto che l'area S della regione finita di piano compresa fra la parabola e la retta AB è data dalla seguente formula:

$$S = \frac{|a|}{6}(x_A - x_B)^2 .$$

Dimostrare che la formula sussiste quando la parabola ha equazione $y=ax^2+bx+c$, essendo b, c altri parametri reali.

2. Un punto materiale si muove su una retta, sulla quale è stato fissato un riferimento cartesiano, con velocità v espressa dal grafico sottostante (Fig. 8). Supponendo che t sia misurato in secondi e v in metri al secondo e supponendo che nell'istante $t=0$ il punto materiale si trovi nel punto di ascissa 0, in quale posizione si trova tale punto materiale nell'istante $t=4$ s ?

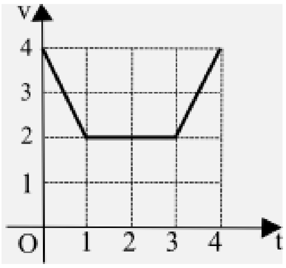

FIG. 8

3. Determinare il termine generale a_n di tre successioni distinte, le quali presentano ai primi 4 posti gli stessi numeri $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=8$.
4. Calcolare il seguente integrale, fornendo un'esauriente spiegazione del procedimento seguito:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{\cos x}\,dx .$$

5. In un gruppo di N persone se ne sceglie una a caso. Calcolare il minimo valore di N per il quale sia almeno del 50% la probabilità che vi sia nel gruppo un'altra persona che festeggi lo stesso compleanno della persona scelta. (N.B.: si ammette che nel gruppo nessuno sia nato il 29 febbraio).
6. Trovare le equazioni delle curve del piano cartesiano (Oxy), le quali in ogni loro punto (x,y) hanno pendenza $-y/x$. Che curve sono?

SCHEDA N°6.

Quesiti obbligatori:

1. Si lanciano tre dadi, ciascuno con le facce numerate da 1 a 6. Determinare:
   a) quanti sono i possibili eventi;
   b) in quanti di essi la somma dei tre numeri usciti è 9;
   c) in quanti tale somma è 10.
2. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la parabola di equazione $y=x^2-4x+2$ e la retta di equazione $x=2y$. La regione finita di piano delimitata dalle due curve genera, in una rotazione completa intorno all'asse y, un solido Σ. Questo solido è intersecato dal piano perpendicolare all'asse y nel punto (0,t) secondo una superficie di area S. Determinare la funzione $S=S(t)$ al variare di t da $-\infty$ a $+\infty$. Qual è il massimo valore di S?
3. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x - k ,$$

dove k è un parametro reale.

a) Ricorrendo, se occorre, all'interpretazione geometrica, spiegare perché l'equazione $f(x)=0$ ammette almeno una radice reale per ogni k.
b) Trovare per quali valori di k l'equazione $f(x)=0$ ammette tre radici reali.
c) Dimostrare che quando l'equazione $f(x)=0$ ammette tre radici reali allora tra due di esse cade almeno una radice dell'equazione $f'(x)=0$.

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati il punto $P(0,0,1)$ e la retta r di equazioni $x=2z+1$, $y=z+2$. Dopo aver verificato che il punto P non appartiene alla retta r, trovare l'equazione del piano individuato dal punto e dalla retta.
2. Una miscela contiene il 45% di proteine, un'altra ne contiene il 21%. Utilizzando le due miscele se ne vuole ottenere una terza contenente il 30% di proteine. In quale rapporto, fra la prima miscela e la seconda, devono mescolarsi le due miscele originarie?
$$[A]\ \frac{3}{5}.\quad [B]\ \frac{7}{15}.\quad [C]\ \frac{10}{11}.\quad [D]\ \text{Dati insufficienti.}$$
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
3. È assegnata la funzione $y=20-x-x^2$, con $x>0$ e $y>0$. Una volta costruite le funzioni:
$$f(x)=y'\cdot\frac{x}{y}\quad \text{e}\quad g(x)=xy,$$
si dimostri che la funzione g(x) è massima per il valore di x per il quale $f(x)=-1$.
4. Un'automobile effettua un determinato percorso sull'autostrada del Sole. Precisamente percorre un primo tratto alla velocità media v_1, un secondo tratto alla velocità media v_2, un terzo ed ultimo tratto alla velocità media v_3. Tenendo presente che i tre tratti sono di uguale lunghezza, dimostrare che la velocità media dell'automobile sull'intero percorso è uguale alla media armonica delle tre velocità medie.
5. Risolvere nell'insieme dei numeri reali la seguente disequazione in x:
$$2\sin(3x)-\sin^2(2x)<3\,.$$
6. La derivata della funzione:
$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\ln(2t)}$$
dove $x>0$ e "ln" indica il logaritmo naturale, è la funzione:
$$f'(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(2x)\ln(4x)}\,.$$
Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

SCHEDA N°7.

Quesiti obbligatori:

1. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sono assegnati il punto $V(1,1,3)$ e la curva chiusa C situata nel piano xy (Fig. 9). Proiettando dal punto V la curva C, si ottiene un solido: si dica Σ la parte di questo solido compresa fra il piano xy e il piano ad esso parallelo condotto per il punto V. Sia inoltre S la sezione ottenuta intersecando Σ con un piano α parallelo al piano xy. La sezione S ha un'area A(z), dipendente dalla distanza z del piano α dal piano xy, tale che:

$$A(z)=\frac{9-z^2}{1+z^2}.$$

a) Qual è l'area della regione piana racchiusa dalla curva C?
b) Calcolare il volume del solido Σ.
c) Proiettando la sezione S ortogonalmente sul piano xy, si ottiene un solido Σ'. A quale distanza dal piano xy bisogna condurre il piano α perché questo solido Σ' abbia volume massimo?

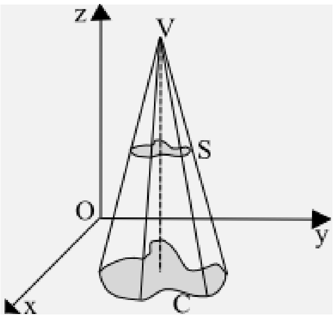

FIG. 9

2. Un filo metallico di lunghezza L è utilizzato per delimitare un'aiuola a forma di settore circolare.
a) Qual è l'ampiezza, misurata in gradi sessagesimali ed approssimata per eccesso ad un secondo, dell'angolo al centro del settore di area massima?
b) Quanto misura il raggio del settore se la sua area massima è $100\ m^2$?

3. Un'azienda produce pezzi di ricambio, utilizzando tre macchinari diversi: M1, M2, M3. Precisamente, in una giornata lavorativa: M1 produce 1230 pezzi di cui 50 difettosi, M2 ne produce 860 di cui 30 difettosi, M3 ne produce 945 di cui 38 difettosi. Si sceglie a caso uno dei pezzi prodotti in una data giornata lavorativa e si constata che è difettoso. Qual è la probabilità che sia stato prodotto dal macchinario che ha la maggiore probabilità di produrre pezzi difettosi?

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2,1) e B(4,2). Determinare il punto P dell'asse x per il quale risulti minimo il cammino per andare da A a B passando per P.

2. Dimostrare che la corda che congiunge i punti medi dei lati obliqui di un trapezio è parallela alle basi del trapezio ed è lunga quanto la semisomma di tali basi.

3. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x)=\frac{4x-3\cos x}{3x+4\sin x}.$$

Per $x\to\pm\infty$ è una forma indeterminata: di che tipo? Esiste il suo limite per $x\to\pm\infty$? Si può applicare il teorema di de L'Hôpital?

4. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $(Oxyz)$, sono assegnate le rette di equazioni:

$$\frac{x-2}{k}=\frac{y-1}{2k-1}=z+1,$$

dove k è un parametro reale. Trovare fra esse la retta perpendicolare alla retta r sapendo che r ha equazioni:

$$\frac{x}{-2}=\frac{2y}{3}=\frac{z}{4}.$$

5. Stabilire quali delle seguenti funzioni sono periodiche e quali non lo sono:

$$\text{a) } 2^{\sin x} + \sin x\,; \quad \text{b) } \sin(2^x + x)\,; \quad \text{c) } \frac{2}{\cos x}; \quad \text{d) } \cos\frac{2}{x}.$$

6. Un'urna contiene palline rosse e palline nere, ma le nere sono 2 in più delle rosse. Sono estratte casualmente 2 palline, senza reinserimento. Ci sono più probabilità che abbiano lo stesso colore o colore diverso?

SCHEDA N°8.

Quesiti obbligatori:

1. Lo spazio sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz). Quattro vertici di un ottaedro regolare sono i punti $O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,2,0)$ e il punto C simmetrico di O rispetto alla retta AB. Trovare le coordinate degli altri due vertici D ed E dell'ottaedro. Trovare quindi le equazioni dei piani diagonali OCD e ABD e verificare che ad essi appartiene anche il punto E.

2. È dato un segmento parabolico, la cui base AB è perpendicolare all'asse della parabola ed è lunga 2r, dove r è una lunghezza assegnata. La distanza del vertice della parabola dalla retta AB è r. Nel piano perpendicolare al piano della parabola e contenente la retta AB è condotta, ad una distanza r da AB, la retta s parallela ad AB. Indicato con H un generico punto del segmento AB, si conduca per H il piano perpendicolare ad AB e si chiamino P e Q i punti in cui esso interseca rispettivamente la retta s e la parabola.

a) Mentre il punto H varia descrivendo il segmento AB, il triangolo HPQ descrive un solido. Calcolarne il volume.

b) Determinare l'area del segmento parabolico nel caso in cui il volume trovato sia $144\ \text{cm}^3$.

3. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 2},$$

dove "ln" indica il logaritmo naturale.

a) È vero o è falso che la sua più generale primitiva è la funzione:

$$F(x) = \log_2(ax)\,,$$

dove a è una costante positiva? Spiegare in modo esauriente la risposta.

b) Fra le curve di equazione y=F(x), assegnate in un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy), indicare con C' quella che passa per il punto (2,2) e con C" la sua simmetrica rispetto alla retta di equazione y=x. Trovare quindi i punti comuni alle due curve C' e C".

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. Si consideri la variabile aleatoria geometrica G di parametro p:

$$G(n) = p(1-p)^n$$

dove n è un numero naturale non nullo.

a) Dimostrare che essa esprime la probabilità che un determinato evento di probabilità p si verifichi per la prima volta alla prova (n+1)-esima dopo n insuccessi.

b) Dimostrare che il suo valor medio è 1/p.

2. Nella figura sottostante (Fig.10) è rappresentato il grafico della funzione f(x), composto dal segmento di retta OA, dall'arco di parabola ABC, avente l'asse parallelo all'asse y, dal segmento di retta CD e, infine, dall'arco d'iperbole equilatera DE, i cui asintoti sono gli assi di riferimento. Posto $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, calcolare F(1), F(3), F(7).

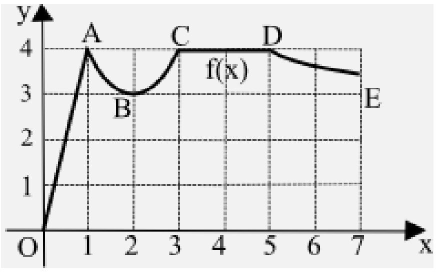

FIG. 10

3. Com'è noto, il teorema di de L'Hôpital esprime una condizione sufficiente per concludere che, sotto particolari condizioni, qualora la funzione $f(x)/g(x)$ sia una forma indeterminata del tipo $0/0$ per x tendente ad un dato valore u, si ha:

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrare che la condizione non è necessaria.

4. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate la curva di equazione $y=x^2$ e la sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y=x$. Le due curve racchiudono una regione finita di piano, la quale, ruotando di un giro completo intorno all'asse y, genera un solido. Calcolarne il volume.

5. Due corpi, A e B, si muovono con velocità costanti su due rette perpendicolari. Sono partiti dallo stesso punto O ma B è partito 10 minuti prima di A. Sapendo che la velocità di A supera di 12 km/h quella di B e che, dopo 45 minuti dalla partenza di B, i due corpi distano 45 km, determinare le loro velocità.

6. Si supponga che un corpo, a temperatura T_0, venga posto in un ambiente a temperatura T_1, con $T_0>T_1$. Si ammetta che il tasso di diminuzione della temperatura T del corpo rispetto al tempo t sia regolato dalla legge di Newton:

$$\frac{dT}{dt} = k|T_1 - T|$$

dove T è funzione di t e k è una costante. Si trovi la legge che esprime l'andamento di T in funzione di t, naturalmente finché non si è raggiunto l'equilibrio termico.

SCHEDA N°9.

Quesiti obbligatori:

1. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la regione R sotto il grafico della funzione $y=2/x$, relativa all'intervallo $[1,4]$. Un solido Σ è tale che un generico piano perpendicolare all'asse x lo interseca secondo un rettangolo avente un lato coincidente con la sezione di Σ con R e un altro lato di lunghezza doppia. Calcolare:

a) il volume di Σ;
b) il volume del solido ottenuto facendo ruotare R di un giro completo intorno all'asse x;
c) il volume del solido ottenuto facendo ruotare R di un giro completo intorno all'asse y.

2. La regione R di piano ombreggiata nella figura sottostante (Fig. 11) è definita da un sistema di disequazioni nelle indeterminate x, y: trovare questo sistema. Trovare successivamente il valore massimo e il valore minimo assunti dalla funzione $f(x,y)=20x+10y+25$ nella regione R.

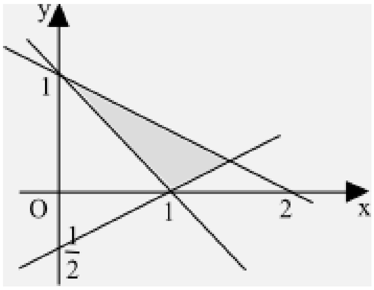

FIG. 11

3. In un gruppo di persone i fumatori sono nel rapporto 1/4 con i non fumatori. Tra i fumatori sono nella misura del 75% coloro che accusano problemi alle vie respiratorie mentre questa percentuale scende al 15% fra i non fumatori.

a) Scelta a caso una delle persone del gruppo, qual è la probabilità che abbia problemi alle vie respiratorie?

b) Scelta a caso una delle persone del gruppo e constatato che ha problemi alle vie respiratorie, qual è la probabilità che sia un fumatore?

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. La funzione f(x)−f(2x) è derivabile per x=1 e per x=2. Si può affermare che la funzione f(x)−f(4x) è derivabile: a) per x=1? b) per x=2?

2. In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca? Argomenta in modo esauriente la risposta.

3. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), è assegnato il triangolo di vertici $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$. Dimostrare che il baricentro G del triangolo ha le seguenti coordinate:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\ , y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\ , z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

4. Semplificare la seguente espressione:

$$\frac{\log_{1/4} 2 + \log_3 9^{1/3} + \log_4 2^{1/3}}{\log_2 8^{1/4} - \log_{1/2} 8 - \log_3\left(3\sqrt{3}\right)}\ ,$$

mostrando che il suo valore è $4/27$.

5. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Ox,y), è assegnata la regione finita R, delimitata dalla curva di equazione y=2+|2–x| e dalla retta di equazione y=4. Calcolare il volume del solido generato da R quando ruota di un giro completo intorno all'asse y.

6. Paolo ha percorso i 720 km che separano casa sua dal luogo della villeggiatura ad una certa velocità media V. In seguito ad alcuni calcoli ha constatato che, se avesse viaggiato ad una velocità media superiore di 10 km/h rispetto a quella tenuta, avrebbe risparmiato esattamente 1 h di tempo. Calcolare la velocità tenuta da Paolo ed il tempo impiegato a compiere il percorso.

<u>SCHEDA N°10.</u>

Quesiti obbligatori:

1. Un serbatoio di forma cilindrica è disposto in modo che le sue generatrici siano orizzontali (Fig. 12). Il raggio di base e l'altezza misurano rispettivamente 1 m e 3 m. Nel serbatoio è contenuto del gasolio ed un'asta graduata che pesca verticalmente in esso indica che la distanza della superficie libera del liquido dalla generatrice superiore, parallela alla base di appoggio, è x metri.

a) Esprimere in funzione di x la quantità di gasolio contenuta nel serbatoio.

b) In particolare, quanti litri di gasolio sono contenuti nel serbatoio se $x=0{,}5$ m?

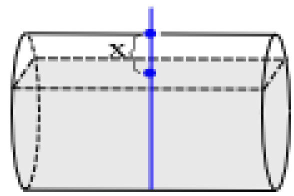

FIG. 12

2. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), si consideri la seguente equazione: $x^2+y^2+z^2-(k-1)x+2y+k=0$, dove k è un parametro reale.

a) Calcolare per quali valori di k rappresenta una sfera.

b) Tra le sfere che hanno l'equazione data determinare quella che ha il raggio uguale a $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Tra le sfere che hanno l'equazione assegnata, ne esiste una passante per il punto $(1,1,1)$?

3. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), ogni curva di equazione:

$$y=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2},$$

dove a, b, c, d sono numeri reali assegnati, con $a\neq 0$, è nota come ***tridente di Newton***.

a) Determinare fra tali curve quelle che hanno come asintoto obliquo la retta di equazione $y=2x$ e intersecano tale retta nel punto di ascissa $2/3$.

b) Dopo aver dimostrato che tutte le curve trovate hanno uno ed un solo punto di flesso, determinare la curva che presenta questo flesso nel punto di ordinata 2 e tracciarne l'andamento.

Tra i seguenti quesiti ne devono essere scelti e risolti tre:

1. Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x)=\operatorname{atan} x-\operatorname{atan}\frac{x-1}{x+1}\ .$$

Un idoneo software matematico mostra che si tratta di una funzione "costante a tratti". Dimostrare analiticamente questo fatto, utilizzando le proprietà delle derivate.

2. Si consideri la curva di equazione:

$$y=\ln\frac{2x+1}{x},$$

dove "ln" indica il logaritmo naturale.

Dopo averne determinato il dominio, trovare l'equazione della sua simmetrica rispetto alla retta $y=x$.

3. Si supponga che la velocità di una marea sia una funzione sinusoidale del tempo con periodo 12 ore. Sapendo che è di 5 km/h la velocità massima della marea, calcolare la sua velocità media nelle prime 6 ore.

4. Una popolazione è formata dalle seguenti unità: 1, 2, 3, 4. Si estraggono da essa tutti i possibili campioni di dimensione 3. Indicate con μ la media aritmetica della popolazione e con $\mu_{\overline{X}}$ la media aritmetica delle medie campionarie, dimostrare che è: $\mu_{\overline{X}}=\mu$.

5. Si considerino le due funzioni n^2 e $2n+1$ della variabile naturale n. Si può facilmente controllare che per $0\leq n\leq 2$ risulta: $n^2<2n+1$. Invece per $n\geq 3$ si ha: $n^2>2n+1$. Dimostrare questo fatto per induzione.

6. Si definisce "prodotto scalare" di due vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (si indica con la scrittura $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$) il numero reale ottenuto sommando i prodotti delle componenti omologhe dei due vettori; vale a dire:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Indicato con φ l'angolo dei due vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, dimostrare che si ha:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = u_1u_2 \cos\varphi\,,$$

dove u_1, u_2 sono i moduli dei due vettori.

[N.B.: quest'ultima relazione è assunta in Fisica come definizione di prodotto scalare.]