Prerequisiti:
- Saper operare con le quattro operazioni fondamentali nell'insieme dei numeri naturali.
- Conoscere la definizione di numero primo e numero composto. Conoscere e calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo di due o più numeri.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:
- *operare in* $\mathbb{N}$
- *rappresentare i numeri naturali sulla retta dei numeri*
- *spiegare perché non si può dividere per 0*
- *scrivere un numero naturale in forma polinomiale*
- *passare da un numero scritto in base 10 ad un numero scritto in base 2 e viceversa*
- *motivare l'ampliamento da* $\mathbb{N}$ *a* $\mathbb{Z}$
- *operare in* $\mathbb{Z}$
- *rappresentare i numeri interi sulla retta dei numeri*
- *usare linguaggi simbolici, in particolare utilizzare lettere per rappresentare numeri*
- *interpretare un'espressione letterale con il linguaggio naturale e viceversa*
- *elaborare semplici espressioni numeriche con valori in* $\mathbb{Z}$*, utilizzando con consapevolezza le convenzioni relative all'ordine delle operazioni*
- *calcolare il valore di semplici espressioni letterali quando alle variabili si sostituiscono valori interi*
- *verificare una congettura in casi particolari o produrre un controesempio per confutarla*
- *risolvere semplici problemi tratti da vari ambiti*

Numeri naturali e numeri interi

Unità 1

1.1 NUMERI NATURALI

1.1.1 Contare gli oggetti, addizionare i numeri e sottrarli, moltiplicarli e dividerli, sono operazioni che conosci da tempo. Ci limitiamo perciò a qualche richiamo.

I **numeri naturali**, ossia i primi numeri che hai imparato a conoscere, scritti nel cosiddetto ***ordine naturale***, sono questi:

zero, uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, undici, … .

Li ammettiamo come dati. Il loro insieme è indicato col simbolo **N** o anche con $\mathbb{N}$.

Forse ti stai chiedendo perché ci siamo serviti di lettere per scrivere i numeri e non dei simboli che sei abituato ad usare, vale a dire:

$$\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8},\ \mathbf{9},\ \mathbf{10},\ \mathbf{11},\ \ldots.$$

Lo abbiamo fatto di proposito poiché vorremmo che fosse chiaro fin da subito che una cosa sono i *numeri*, cosa diversa sono i modi per rappresentarli, cioè i *numerali*, che possono essere molteplici. Il modo da noi scelto è il ***sistema di numerazione decimale posizionale***. Ragion per cui, se, come faremo da qui in avanti, ci serviremo dei numerali anziché dei numeri, è perché ciò è più comodo ed economico, ma ricorda sempre che in realtà è ai numeri che ci riferiamo, salvo avviso contrario.

Spesso è utile considerare l'insieme che si ottiene da $\mathbb{N}$ sopprimendo il numero 0: lo indichiamo con $\mathbb{N}_0$ o anche con $\mathbf{N_0}$ (si legge in ogni caso «enne con zero» o «enne zero»).

Se pensiamo ai numeri naturali ordinati come sopra [1], constatiamo che ogni numero ammette un solo ***successivo*** e che ogni numero, escluso *zero*, è il successivo di un solo numero. Il successivo di un numero si ottiene aggiungendo ad esso una unità; per esempio il successivo di 13 è 14 e, di fatto, 14 si ottiene aumentando 13 di una unità.

I numeri naturali si possono rappresentare su una retta (Fig. 1), sulla quale sono scelti in maniera arbitraria due punti distinti **O** e **U**, denominati rispettivamente **origine** e **punto unità**.

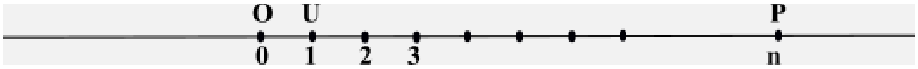


FIG. 1

Al numero **0** si fa corrispondere il punto **O**, mentre al numero **1** si fa corrispondere il punto **U**. A tutti gli altri numeri si fanno corrispondere ordinatamente quei punti della retta che seguono U, nell'ordine che va da O ad U, ed hanno, da quello che lo precede, una distanza uguale alla distanza di O da U. Perciò, se il punto P corrisponde al numero 2, ciò significa che il segmento OP è lungo 2 volte OU; se corrisponde al numero 3, ciò significa che il segmento OP è lungo 3 volte OU; e così via, se il punto P corrisponde al numero naturale n, ciò significa che il segmento OP risulta uguale ad n volte OU.

Il numero, al quale è associato in questo modo un punto della retta**,** si chiama **ascissa** del punto. Per indicare che P ha ascissa n, si scrive P(n) (si legge «P di ascissa n»). Nella figura 1 si ha, per esempio: U(1), O(0). La retta su descritta si denomina in vari modi: **retta numerica** o **retta dei numeri** o **asse dei numeri** o **retta graduata.**

Evidentemente, ad ogni numero naturale è associato uno ed un sol punto sulla retta numerica; ma non

---

[1] L'ordine naturale non è l'unico ordine possibile, ma è quello più utile. Per esempio, un ordine curioso, ma del tutto inutile, è il seguente (per i numeri da 0 a 9): 5-2-9-8-4-6-7-3-1-0. Hai indovinato con quale ordine sono stati scritti questi numeri? Se non l'hai indovinato non fa niente, te lo diciamo noi. Si tratta di scriverli secondo l'ordine alfabetico, ovviamente in base alla lingua italiana.

è vero l'inverso, vale a dire non è vero che ad ogni punto della retta numerica corrisponde un numero naturale. Il che è del tutto evidente.

Prova a rappresentare su una medesima retta numerica i punti aventi le seguenti ascisse: 3, 7, 15, 42.

1.1.2 Sai certamente addizionare e moltiplicare i numeri naturali. Per esempio:

$$7 + 5 = 12 \quad \text{e} \quad 7 \times 5 = 35$$

Sapresti darne anche una spiegazione? Se non ce la fai, prova con noi.

Prima di procedere, un chiarimento riguardo al segno "=".
Poiché si ha:

$$8 = 5 + 3, \quad 8 = 6 + 2, \quad 8 = 4 \times 2,$$

ha senso dire che $5{+}3$, $6{+}2$, $4{\times}2$ sono ***uguali***, intendendo con ciò affermare che sono modi diversi di rappresentare lo stesso numero.
In generale, quando scriviamo l'uguaglianza "x=y", che si legge "x è uguale ad y", affermiamo che è consentito sostituire x al posto di y e, viceversa, y al posto di x. In altri termini, è possibile leggere l'uguaglianza da sinistra a destra: "x=y", ma anche da destra a sinistra: "y=x".
Se il numero a non è uguale al numero b si dice che "a è ***diverso*** da b" e si scrive:

$$\mathbf{a \neq b}\,.$$

Torniamo ad occuparci dell'addizione,
L'operazione di addizione $7{+}5$ si può interpretare così: si parte da 7 e si contano in ordine crescente 5 numeri, procedendo nell'ordine naturale: la somma (che è 12) è il numero a cui si arriva.
Essa ha anche un'interpretazione geometrica (Fig. 2): si parte dal punto di ascissa 7 e si trova il punto che si ottiene spostandolo sulla retta, nel verso delle ascisse crescenti, di un segmento uguale a 5 volte OU: l'ascissa del punto ottenuto è $7{+}5$ (=12).

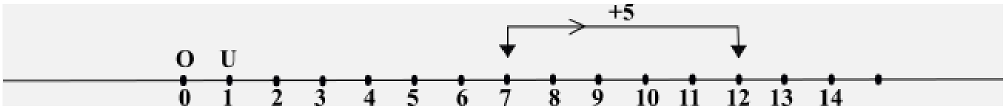


FIG. 2

Il prodotto $7{\times}5$ si può concepire come somma di 7 addendi uguali a 5, cioè: $5{+}5{+}5{+}5{+}5{+}5{+}5$.
Considerazioni analoghe, per entrambe le operazioni, si possono fare in ogni altra situazione.
Ti ricordiamo che i termini di una addizione si chiamano ***addendi*** e il risultato ***somma*** (o ***totale***), mentre i termini di una moltiplicazione si chiamano ***fattori*** e il risultato ***prodotto***.
Così, per esempio, nella scrittura $5{+}4{=}9$, gli addendi sono i numeri 5 e 4, mentre 9 è la somma; invece nella scrittura $2{\times}4{=}8$, i numeri 2 e 4 sono i fattori e 8 è il prodotto.

- È possibile ricercare tutti i numeri naturali che godono di una proprietà prestabilita. Ma l'operazione non è sempre facile.
  Per esempio, alcuni numeri che risultano essere il prodotto di due naturali consecutivi sono i seguenti:

  $0\ ({=}0{\times}1),\ 2\ ({=}1{\times}2),\ 6\ ({=}2{\times}3),\ 12\ ({=}3{\times}4),\ 20\ ({=}4{\times}5),\ 30\ ({=}5{\times}6),\ 42\ ({=}6{\times}7)$, eccetera.

  ESERCIZIO. Il numero 15 è un numero di due cifre, ottenuto come prodotto di due numeri dispari consecutivi, 3 e 5. Trova tutti i numeri di due cifre, ottenuti come prodotti di due numeri dispari consecutivi.

- Esistono molti modi di esprimere uno stesso numero servendosi delle operazioni di addizione e moltiplicazione e ognuno di essi può riassumere una proprietà di quel particolare numero.
  Per esempio, il numero 18 si può ottenere nei modi descritti nella seguente tabella (Tab. 1):

TAB. 1 - Alcuni modi di descrivere il numero 18	
In simboli	A parole
$5+6+7$	è la somma di tre numeri consecutivi
$(3+3) \times 3$	è il risultato di un'espressione che contiene solo il numero 3 esattamente 3 volte
3×6	è il prodotto di un numero e del suo doppio
$(1+1) \times (8+1)$	è il prodotto dei numeri ottenuti aumentando di 1 ciascuna delle sue cifre

Per verificare se ti è chiaro quanto detto qui, prova a risolvere i seguenti esercizi:

1. Completa la seguente tabella (Tab. 2), che riguarda alcuni modi di scrivere il numero 37:

TAB. 2 – Alcuni modi di scrivere il numero 37	
a parole	in simboli
è la somma di due numeri consecutivi	
è il prodotto di due numeri aumentato di 2	
è la somma di tre numeri consecutivi aumentata di 1	

2. Completa la seguente tabella (Tab. 3), che riguarda alcuni modi di scrivere il numero 42:

TAB. 3 – Alcuni modi di scrivere il numero 42	
in simboli	a parole
6×7	
$13+14+15$	
$5+7+11+19$	

1.1.3 Le precedenti proprietà riguardano, evidentemente, numeri specifici: possono essere interessanti a livello di curiosità e a volte lo sono, ma la loro utilità pratica è pressoché nulla.
Sono invece notevolmente più importanti le proprietà che valgono per tutti o almeno per molti numeri naturali. Per poterle esprimere occorre, però, riferirsi a numeri naturali generici. Essi, lo capisci da te, non possono essere indicati da numerali particolari. E, di fatto, i matematici hanno pensato un bel momento di rappresentare un generico numero con una lettera, come queste:

$$a, b, c, \ldots, m, n, \ldots, x, y, \ldots .$$

Le lettere vengono dette **variabili** in $\mathbb{N}$, perché ad esse si possono attribuire valori che possono variare a piacere nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.
È utile, prima di procedere, introdurre alcuni simboli (in parte li conosci già dai tuoi studi precedenti), che si utilizzano per formulare le proprietà in modo più sintetico. Sono descritti nella seguente tabella:

TAB. 4 - Alcuni simboli comunemente usati

Simbolo	Denominazione	Come si legge
$\in$	Simbolo di appartenenza	"appartiene" o "appartenente" a seconda delle situazioni
$\notin$	Simbolo di non appartenenza	"non appartiene" o "non appartenente"
$\forall$	Quantificatore universale	"per ogni", "qualunque sia" o un modo equivalente

Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione, che valgono per tutti i numeri naturali, si enunciano simbolicamente come segue, sottintendendo che $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$.

ADDIZIONE	MOLTIPLICAZIONE
PROPRIETÀ COMMUTATIVA $\forall a, \forall b : a+b=b+a$	PROPRIETÀ COMMUTATIVA $\forall a, \forall b : a \times b=b \times a$
PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\forall a, \forall b, \forall c : (a+b)+c=a+(b+c)$	PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $\forall a, \forall b, \forall c : (a \times b) \times c=a \times (b \times c)$
Il numero 0 è ELEMENTO NEUTRO $\forall a : a+0=0+a=a$	Il numero 1 è ELEMENTO NEUTRO $\forall a : a \times 1=1 \times a=a$
PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE RISPETTO ALL'ADDIZIONE $\forall a, \forall b, \forall c : (a+b) \times c=a \times c+b \times c$	
LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO $a \times b=0$ se e solo se almeno uno dei due numeri a, b è 0.	
Il numero 0 è ELEMENTO ASSORBENTE PER LA MOLTIPLICAZIONE $\forall a : a \times 0=0 \times a=0$	

Prova ad esprimere a parole le precedenti proprietà. Se necessario, chiedi aiuto al tuo professore. Noi, comunque, ti vogliamo aiutare enunciando la prima di esse, vale a dire la *proprietà commutativa dell'addizione*: «Qualunque sia il numero naturale a e qualunque sia il numero naturale b, la somma di a e b è uguale alla somma di b ed a».

ALCUNE PRECISAZIONI IMPORTANTI

La prima. Spesso, al posto, per esempio, di 7×5 si scrive $7 \cdot 5$, e addirittura al posto di $a \times b$ si scrive ab.
La seconda precisazione riguarda la proprietà associativa (per esempio dell'addizione, ma lo stesso vale per la moltiplicazione), ed è fondamentale per poterne cogliere il vero significato. Se si devono sommare tre numeri a, b, c, assegnati in quest'ordine, si ottiene lo stesso risultato sia sommando i primi due $a+b$ ed aggiungendo il terzo al totale ottenuto, sia aggiungendo al primo la somma $b+c$ degli altri due, cosicché risulta priva di ambiguità la scrittura:

$$a+b+c\,.$$

In altre parole, scambiando l'ordine di esecuzione delle due operazioni indicate in a+b+c, il risultato non cambia.
Se, poi, si tiene conto anche della proprietà commutativa, allora ciascuna delle seguenti scritture:

$$a+b+c,\ a+c+b,\ b+a+c,\ b+c+a,\ c+a+b,\ c+b+a$$

rappresenta lo stesso numero.
Lo stesso vale, lo ripetiamo, per il prodotto abc.

1.1.4 Quando il numero a non è uguale al numero b, vale a dire quando "a è diverso da b" ($a \neq b$), si distinguono due situazioni. Precisamente:

- si dice che il numero naturale a è ***minore*** del numero naturale b se e solo se esiste un numero naturale c, diverso da 0, tale che $a+c=b$;
- si dice che il numero naturale a è ***maggiore*** del numero naturale b se e solo se esiste un numero naturale c, diverso da 0, tale che $a=b+c$.

Considerati due numeri a e b, per indicare che “a è minore di b” o che “a è maggiore di b” si scrive rispettivamente: $\mathbf{a<b}$, $\mathbf{a>b}$.

Ogni volta che un numero a è minore di un numero b, accade che b è maggiore di a, e viceversa. In altre parole: **$a<b$ se e solo se $b>a$.**

Per esempio:

- $3<5$ dal momento che esiste 2 tale che $3+2=5$; evidentemente: $5>3$.
- $7>4$ dal momento che esiste 3 tale che $7=3+4$; evidentemente: $4<7$.

Per entrambe le relazioni “è minore” ed “è maggiore”, definite nell’insieme dei numeri naturali, vale la seguente proprietà:

PROPRIETÀ TRANSITIVA di “$<$” e di “$>$”:
$\forall a, \forall b, \forall c$: se $a<b$ e $b<c$ allora $a<c$; se $a>b$ e $b>c$ allora $a>c$

In virtù di questa proprietà, invece di scrivere, per esempio, $2<3$ e $3<6$, scriviamo in maniera più concisa, ma con lo stesso significato, $2<3<6$.

Ugualmente $15>8>2$ è un modo diverso di scrivere $15>8$ e $8>2$.

Invece **non ha alcun senso** scrivere, per esempio: $2<7>5$ oppure $8>4<6$.

Ogni volta che non risulta $a>b$, allora dovrà essere $a<b$ oppure $a=b$; in questo caso si usa anche scrivere $\mathbf{a\le b}$ e si legge “a è minore o uguale a b”. Analogamente con la scrittura $\mathbf{a\ge b}$ intendiamo che $a>b$ oppure $a=b$ e leggiamo "a è maggiore o uguale a b".

Prova a determinare, se esistono, dei numeri naturali che, sostituiti alla x, rendono vere contemporaneamente le seguenti disuguaglianze:

1. $x<7$, $4\le x<9$.	2. $x\le 6$, $4<x<8$.	3. $x<6$, $1<x\le 4$.
4. $x\le 5$, $3<x<7$, $5<x\le 9$.	5. $x\le 7$, $1\le x\le 4$, $2<x<6$.	6. $x<5$, $3\le x<6$, $5\le x<8$.

Le relazioni “$=$” e “$>$” godono nell’insieme $\mathbb{N}$ di alcune proprietà che ci torneranno utili in seguito:

- $\forall a, \forall b, \forall m$: se $a=b$ allora $a+m=b+m$; $\forall a, \forall b, \forall m$: se $a=b$ allora $am=bm$,
- $\forall a, \forall b, \forall m$: se $a>b$ allora $a+m>b+m$; $\forall a, \forall b, \forall m\neq 0$: se $a>b$ allora $am>bm$,.

Le prime due sono conosciute come **PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ**, rispetto all’addizione (la prima) e rispetto alla moltiplicazione (la seconda).

Le ultime due sono conosciute come **PROPRIETÀ DI MONOTONIA**, rispetto all’addizione (la prima) e rispetto alla moltiplicazione (la seconda).

Prova ad enunciarle a parole.

1.1.5 Chiediamo adesso la tua preziosa e fondamentale collaborazione.

- Ti sottoponiamo un problema semplicissimo.

Considera le seguenti scritture:

$$10 = 4 + \square\,, \quad 9 + \square = 17\,, \quad 6 + \square = 6\,, \quad 7 + \square = 5\,, \quad 8 = 10 + \square\,.$$

Nel “segnaposto” $\square$ metti il numero naturale che rende soddisfatta l’uguaglianza.

Esiste sempre un tale numero?

Se hai ragionato bene, hai potuto constatare che non sempre è possibile trovare un numero che, sommato ad un secondo, dia come risultato un dato numero. In effetti, un tale numero esiste nei primi tre

casi (nel primo è 6, nel secondo è 8, nel terzo è 0), ma non esiste negli ultimi due.
Dati due numeri naturali a, b, l'esistenza di un terzo numero c, che sommato al secondo dia come risultato il primo, cioè tale che $b+c=a$, è assicurata se e solo se $a \geq b$.
Questo numero c, quando esiste, si chiama ***differenza*** (o ***resto***) tra a e b; si scrive:

$$\mathbf{c = a - b} \, .$$

L'operazione con la quale si calcola la differenza tra due numeri si chiama **sottrazione**.
Per esempio:

$$10-4=6, \quad 6-6=0, \quad 8-10 \text{ non esiste.}$$

Anche della sottrazione si può dare un'interpretazione geometrica: basta invertire il procedimento descritto a suo tempo per l'addizione. Se, dunque, si vuole eseguire l'operazione $12-5$, con riferimento alla retta numerica (Fig. 3), si parte dal punto di ascissa 12 e si trova il punto che si ottiene spostandolo sulla retta, nel verso delle ascisse decrescenti, di un segmento uguale a 5 volte OU: l'ascissa del punto ottenuto è $12-5$ $(=7)$.

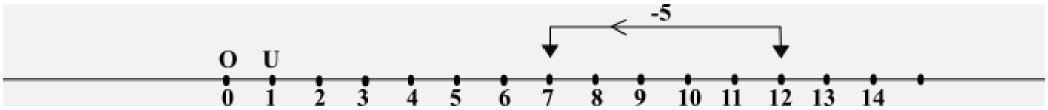


FIG. 3

Si capisce che, se si dovesse eseguire l'operazione $12-13$, si finirebbe per superare l'origine O della retta dei numeri, trovandosi alla sua sinistra, dove non ci sono numeri naturali. Insomma l'operazione è possibile solo se il numero che si sottrae (detto ***sottraendo***) non supera quello da cui si sottrae (detto ***minuendo***).

Ti proponiamo un esercizio:
Il numero 30 si può esprimere utilizzando solamente 3 cifre uguali a 5, infatti: $30=5\times5+5$. Trova almeno un altro modo di esprimerlo utilizzando solamente altre 3 cifre uguali.

- Ancora un problema per te.

Considera le seguenti scritture:

$$12=4\cdot\square, \quad 5\cdot\square=14, \quad 7\cdot\square=7, \quad 3\cdot\square=21, \quad 18=4\cdot\square.$$

Nel "segnaposto" $\square$ metti il numero naturale che rende soddisfatta l'uguaglianza.
Esiste sempre un tale numero?

Come prima, anche adesso hai potuto constatare che non sempre esiste il numero che risolve il problema. In realtà, un tale numero esiste nel primo caso (è 3), nel terzo (è 1) e nel quarto (è 7); ma non esiste nel secondo e nel quinto caso.
Dati due numeri naturali a, b, se esiste un terzo numero c, tale che $bc=a$, si dice che a è ***divisibile*** per b ed il numero c si chiama ***quoziente esatto*** (o ***quoto***) di a per b; si scrive:

$$\mathbf{c = a : b} \, .$$

L'operazione con la quale si calcola il quoto fra due numeri si chiama ***divisione***. Il numero a si chiama ***dividendo***, il numero b ***divisore***.
Se il numero a è *divisibile* per il numero b si dice pure che a è ***multiplo*** di b e che b è ***sottomultiplo*** di a (ma anche che b è un ***divisore*** di a e che b è un ***fattore*** di a).
Per esempio:

$$12:4=3, \quad 7:7=1, \quad 18:4 \text{ non esiste.}$$

1.1.6 Considerati i numeri 16 e 6, evidentemente non esiste alcun numero naturale n tale che 6 moltiplicato per n sia uguale a 16. Vale a dire, non esiste n tale che $6 \cdot n = 16$. Il numero 16, dunque, non è divisibile per 6.

Se, ora, pensiamo ai successivi multipli di 6:

$$6\times 0,\ \ 6\times 1,\ \ 6\times 2,\ \ 6\times 3,\ \ 6\times 4,\ \ \ldots$$

ovvero, rispettivamente:

$$0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \ldots$$

possiamo constatare che 16 è compreso tra 12 e 18, cioè: $6\times 2 < 16 < 6\times 3$.

Il massimo numero naturale n tale che $6\cdot n<16$, si chiama ***quoziente (non esatto)*** di 16 per 6: nel nostro caso evidentemente $n=2$.

Siccome, poi, $6\times 2=12$ ed occorre aggiungervi 4 per ottenere 16, il numero $4=16-6\times 2$ si dice ***resto*** della divisione di 16 per 6. Evidentemente $4<6$.

ALCUNE PRECISAZIONI IMPORTANTI

Occorre considerare, nella divisione $a:b$, il caso particolare $b=0$, distinguendo i due casi $a\neq 0$ e $a=0$.

Sia $a\neq 0$, per esempio $a=7$. Vogliamo ricercare un numero n, tale che $0\cdot n=7$.

È evidente che n non esiste, perché per ogni n è $0\cdot n=0$. Non esiste neppure il massimo numero naturale n tale che $0\cdot n<7$, giacché per ogni n risulta $0\cdot n<7$.

Sia ora $a=0$. Vogliamo ricercare un numero n, tale che $0\cdot n=0$.

Questa volta n può essere un numero naturale qualsiasi e quindi neppure in questo caso possiamo attribuire ad n un ben preciso ed unico valore.

La conclusione è che **LA DIVISIONE PER 0 NON HA SENSO**.

Dunque **la scrittura a:0 è priva di significato**, qualunque sia a.

D’altro canto, ammettiamo solo per un attimo che la divisione per 0 abbia significato. Allora, dall’uguaglianza $1\times 0=2\times 0$, dividendo per 0, si otterrebbe $1=2$. Il che è evidentemente assurdo.

In generale, dati $a\in\mathbb{N}$ e $b\in\mathbb{N}_0$, se a non è divisibile per b, il massimo numero $q\in\mathbb{N}$ tale che $bq<a$ si chiama **quoziente** di a per b**;** il numero $r=a-bq$ si dice **resto** della divisione di a per b. Risulta sempre $r<b$. L’operazione, in base alla quale, dati $a\in\mathbb{N}$ e $b\in\mathbb{N}_0$, si trovano q ed r, si chiama *divisione con resto* (o anche *divisione euclidea*).

Nel caso particolare in cui a sia divisibile per b (cioè $a=bq$) si può dire che la divisione di a per b dà q come **quoziente** e 0 come resto. Si ha, infatti: $r=a-bq=0$.

Facciamo notare che, se q è il massimo numero naturale per cui $bq\leq a$, significa che $b(q+1)>a$. Pertanto, se q è il quoziente di a per b, risulta: $bq\leq a<b(q+1)$.

La divisione di a per b (con $b\neq 0$) determina dunque in modo univoco due numeri, il quoziente q ed il resto r, con $0\leq r<b$, in modo che risulti:

$$\mathbf{a=bq+r} \text{ e inoltre } \mathbf{bq\leq a<b(q+1)}.$$

Nei linguaggi di programmazione sono solitamente usate due vere e proprie operazioni per determinare il quoziente e il resto della divisione di a per b. I loro simboli sono nell’ordine: **div**, **mod .**

Precisamente, qualunque siano $a\in\mathbb{N}$ e $b\in\mathbb{N}_0$:

- **a div b** indica il quoziente della divisione di a per b;

- **a mod b** indica il resto della divisione di a per b.

Così, per esempio:

$15 \text{ div } 3 = 5,\ \ 29 \text{ div } 6 = 4,\ \ 4 \text{ div } 7 = 0,\ \ 0 \text{ div } 4 = 0;$

$26 \bmod 2 = 0,\ \ 38 \bmod 5 = 3,\ \ 4 \bmod 7 = 4,\ \ 0 \bmod 4 = 0.$

Esprimi con una formula il fatto che: a) dividendo 251 per 7 si ottiene 35 come quoziente e 6 come resto; b) dividendo 1001 per 37 si ottiene 27 come quoziente e 2 come resto.

1.1.7 Probabilmente conosci fin dalla scuola primaria i criteri che permettono di stabilire se un numero è divisibile per 2, per 5, per 3 (o per 9) senza eseguire la divisione. Li enunciamo qui appresso, non prima di aver premesso che un numero che termina per 0 o 2 o 4 o 6 o 8, si dice ***numero pari***, altrimenti si dice ***numero dispari***. Specifichiamo, inoltre, che è sottinteso che **i numeri presi in considerazione sono supposti scritti nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale** [2].

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 2:
Un numero è divisibile per 2 se e solo se è pari (vale a dire se termina con una delle seguenti cifre: 0, 2, 4, 6, 8).

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 5:
Un numero è divisibile per 5 se e solo che termina per 0 o per 5.

CRITERIO DI DIVISIBILITÀ PER 3 (E PER 9):
Un numero è divisibile per 3 (o per 9) se e solo se lo è la somma delle sue cifre.

Per esempio, con riferimento a quest'ultimo criterio:

- il numero 7482 è divisibile per 3 ma non per 9;
- il numero 117 è divisibile sia per 3 che per 9;
- il numero 4933 non è divisibile per 3 né, tanto meno, per 9.

La spiegazione, se riferita ad un caso specifico, è abbastanza elementare, ma si capisce che può essere adattata ad un qualsiasi numero. Prendiamo, allora, il numero 7482 e osserviamo che, utilizzando le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione, possiamo trasformarlo via via nel modo seguente:

$$7482 = 7\times1000 + 4\times100 + 8\times10 + 2 = 7\times(999+1) + 4\times(99+1) + 8\times(9+1) + 2 =$$
$$= (7\times999 + 7)+(4\times99 + 4)+(8\times9 + 8)+2 = (7\times999 + 4\times99 + 8\times9) + (7+4+8+2) =$$
$$= 9\times(7\times111 + 4\times11 + 8) + (7+4+8+2).$$

Siccome l'addendo $9\times(7\times111+4\times11+8)$ è divisibile per 9 (e, quindi, anche per 3), il numero 7482 sarà esso pure divisibile per 9 (o per 3) se e soltanto se anche l'altro addendo $7+4+8+2$ – che è per l'appunto la somma delle cifre del numero – è divisibile per 9 (o per 3).

ESERCIZIO. Sia N il numero ottenuto moltiplicando i primi 15 numeri naturali a partire da 1, vale a dire:

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 14 \times 15 .$$

Senza calcolare l'effettivo valore di N, spiegare in modo esauriente per quali dei seguenti numeri esso è divisibile e per quali non lo è:

$$a = 35,\quad b = 36,\quad c = 37,\quad d = 38.$$

1.1.8 Conosci già le potenze e sai che, per esempio:

- 2^4 è un modo diverso di scrivere $2\cdot2\cdot2\cdot2$; - 5^3 è un modo diverso di scrivere $5\cdot5\cdot5$;

---

[2] Cfr.: paragrafo n. 1.2

- 3^1 è un modo diverso di scrivere 3; - 7^0 è un modo diverso di scrivere 1.

In generale, dati due numeri naturali a, b, la scrittura:

$$\mathbf{a^b},$$

che si legge «a *elevato* b» e si chiama ***potenza*** di *base* a e di *esponente* b, rappresenta il numero:

- $\underbrace{\mathbf{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{\text{b fattori}}$ **se b>1;**
- **a se b=1;**
- **1 se b=0, ma a≠0.**

L'operazione, con la quale si calcola la potenza di base a ed esponente b, si chiama **elevamento a potenza** ed è talvolta indicata col simbolo **"^"**. Perciò:

$$\mathbf{a \wedge b = a^b}.$$

Come certamente ricorderai, le potenze di base a ed esponenti 2 e 3 si chiamano, rispettivamente, ***quadrato*** di a e ***cubo*** di a.

Al fine di verificare se ti è chiaro il concetto di "elevamento a potenza", considera le seguenti scritture:

$$3^2=\square,\ \ 2^4=\square,\ \ \square^2=25,\ \ \square^3=12,\ \ 2^{\square}=8,\ \ 3^{\square}=9.$$

Nel "segnaposto" □ metti il numero naturale che rende soddisfatta l'uguaglianza.
Esiste sempre un tale numero?

1.1.9 È facile controllare che si ha:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^5\,,\quad 3^6 : 3^2 = 3^4\,,\quad (2^2)^3 = 2^6\,,\quad (2\cdot3)^3 = 2^3 \cdot 3^3\,,\quad (10:5)^3 = 10^3 : 5^3\,.$$

Per esempio, per la prima e la quarta uguaglianza, tenendo presenti la definizione di potenza e le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione in ℕ, otteniamo:

$$2^3 \cdot 2^2 = (2\cdot2\cdot2) \cdot (2\cdot2) = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^5;\quad (2\cdot3)^3 = (2\cdot3) \cdot(2\cdot3) \cdot (2\cdot3) = (2\cdot2\cdot2) \cdot (3\cdot3\cdot3) = 2^3\cdot3^3.$$

Le precedenti uguaglianze sono casi particolari delle seguenti proprietà, dove a, b, m, n sono numeri naturali qualsiasi, purché le operazioni indicate abbiano senso in ℕ.

♦ **PROPRIETÀ DELLE POTENZE** (in formule):

$$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m\cdot n}}$$

$$\mathbf{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a : b)^n = a^n : b^n}$$

Prova ad esprimerle a parole e controlla se hai fatto bene con quanto scritto qui di seguito.

PROPRIETÀ DELLE POTENZE (a parole):

- Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è uguale ad una potenza, che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.
- Il quoziente di due potenze aventi la stessa base è uguale ad una potenza, che ha per base la stessa base e per esponente la differenza tra gli esponenti.
- La potenza di una potenza è uguale ad una potenza, che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.
- Per elevare a potenza un prodotto, si elevano a potenza i singoli fattori.
- Per elevare a potenza un quoziente, si elevano a potenza il dividendo ed il divisore.

Nella pratica, di solito le proprietà delle potenze servono per calcolare prodotti o quozienti di potenze di uguale base, per elevare a potenza prodotti, quozienti o potenze: in questo caso le uguaglianze si utilizzano leggendole come sono scritte, da sinistra a destra.

Ma, come sappiamo, le stesse uguaglianze possono essere lette anche da destra a sinistra e vi sono casi

in cui ciò risulta utile o addirittura necessario.
Dimostriamo, per esempio, che il numero $2^{12}\times3^{8}$ si può esprimere sotto forma di un'unica potenza. Si ha:

$$2^{12}\times3^{8}=2^{3\times4}\times3^{2\times4}=\left(2^{3}\times3^{2}\right)^{4}=(8\times9)^{4}=72^{4}.$$

Come abbiamo detto, si pone per definizione: $a^1=a$ e, se $a\neq0$, $a^0=1$.
Queste definizioni (che non rientrano nell'idea originaria di *potenza concepita come prodotto di tanti fattori uguali alla base quanti ne indica l'esponente*) possono essere spiegate con l'esigenza di conservare la validità della proprietà riguardante il quoziente di due potenze di uguale base, anche quando la differenza tra gli esponenti è 1 oppure 0.
Consideriamo, per esempio, la base 2:

- Il quoziente $2^4:2^3$ vale evidentemente 2 poiché è uguale a 16:8. Ora se, oltre a $2^4:2^3=2$, vogliamo scrivere $2^4:2^3=2^{4-3}=2^1$, lo possiamo fare solo se attribuiamo a 2^1 il valore 2.
- Il quoziente $2^5:2^5$ vale 1, come ogni quoziente tra numeri uguali. Se, oltre a $2^5:2^5=1$, vogliamo scrivere $2^5:2^5=2^{5-5}=2^0$, dovremo attribuire a 2^0 il valore 1.

Non è possibile, invece, dare un significato univoco a 0^0.
Per spiegarlo, ammettiamo per un momento che 0^0 rappresenti un numero. Allora, per una proprietà delle potenze di uguale base, deve essere, per esempio: $0^2\cdot0^0=0^{2+0}$. Ora $0^2=0\cdot0=0$ e $0^{2+0}=0^2=0$; per cui si avrebbe: $0\cdot0^0=0$. Uguaglianza del tipo $0\cdot n=0$, nella quale ad n può essere attribuito qualsiasi valore. Solo che adesso, al posto di n c'è 0^0. Come dire che a 0^0 si può attribuire qualsiasi valore e, proprio per questo, alla scrittura 0^0 non si attribuisce alcun significato.
Ciò non di meno, accade che per ragioni tecniche, connesse con l'elaborazione di un programma di calcolo automatico, si attribuisca a 0^0 il valore 1. Questo, però, non vuol dire che è sempre $0^0=1$.

1.1.10 Vogliamo concludere questo discorso riepilogativo sui numeri naturali, sottolineando alcuni fatti importanti, peraltro emersi dallo studio fin qui condotto:

- la somma e il prodotto di due numeri naturali qualsiasi sono ancora numeri naturali;
- la differenza $a-b$ è un numero naturale se e solo se $a\geq b$;
- il quoziente $a:b$ è un numero naturale se e solo se a è divisibile per b;
- la potenza a^b è un numero naturale, se e solo se a, b non sono entrambi nulli.

In altre parole:

- operando in $\mathbb{N}$ con l'addizione e con la moltiplicazione non si esce da $\mathbb{N}$, nel senso che il risultato di quelle due operazione è ancora un elemento di $\mathbb{N}$; così pure si rimane in $\mathbb{N}_0$ operando in quest'insieme con l'elevamento a potenza;
- invece, operando in $\mathbb{N}$ con la sottrazione o con la divisione non sempre si rimane in $\mathbb{N}$.

Tutto questo si esprime dicendo che:

- l'insieme $\mathbb{N}$ è **chiuso** rispetto sia all'addizione sia alla moltiplicazione;
- l'insieme $\mathbb{N}_0$ è **chiuso** rispetto all'elevamento a potenza;
- l'insieme $\mathbb{N}$ *non è chiuso* rispetto alla sottrazione né alla divisione.

Si dice pure, con lo stesso significato, che:

- l'addizione e la moltiplicazione sono **operazioni totalmente definite in** $\mathbb{N}$;
- l'elevamento a potenza è un'**operazione totalmente definita in** $\mathbb{N}_0$;

- la sottrazione e la divisione sono **operazioni parzialmente definite in** $\mathbb{N}$.

1.2 CENNI SUI SISTEMI DI NUMERAZIONE

1.2.1 Si chiama **sistema di numerazione** il complesso di regole e segni che servono per scrivere e leggere i numeri.
Siamo abituati ad usare il sistema di numerazione **decimale**, chiamato così perché utilizza dieci simboli fondamentali (detti **cifre**) per indicare i primi dieci numeri, da zero a nove:

$$\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8},\ \mathbf{9}.$$

Le cifre hanno un loro valore intrinseco, perché indicano un diverso e ben preciso numero di unità.
I numeri maggiori di nove vengono rappresentati da un allineamento di due o più cifre. Quando la cifra a sinistra è 0, quasi sempre si omette. Così, per esempio, di norma si scrive 5 invece di 05. Le cifre, oltre al loro valore intrinseco, acquistano un valore che dipende dalla posizione.
Per esempio, con le stesse cifre 2, 7, 4, si possono formare numeri diversi:

$$274 = 2 \text{ centinaia} + 7 \text{ decine} + 4 \text{ unità};\quad 427 = 4 \text{ centinaia} + 2 \text{ decine} + 7 \text{ unità};\quad \text{eccetera.}$$

Per questo, il nostro usuale sistema di numerazione si chiama sistema di numerazione decimale **posizionale**.
Il numero ***dieci*** si chiama *base* del sistema di numerazione: ha un ruolo speciale poiché, dopo 9 unità, si procede per raggruppamenti di dieci:

- dieci unità formano una **decina**;
- dieci decine formano un **centinaio**;
- dieci centinaia formano un **migliaio**;
- eccetera.

Si ha poi: 1 decina = 10; 1 centinaio = 100 = 10^2; 1 migliaio = 1000 = 10^3; eccetera.
Il numero 274 si può allora scrivere in questo modo, chiamato ***forma polinomiale*** del numero:

$$274 = 2\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 4.$$

Facciamo notare che, a partire dalla cifra delle unità:

- 4 è il resto della divisione di 274 per 10 e di fatto:
  274 : 10 dà quoziente 27 e resto 4;
- 7 è il resto della divisione del quoziente trovato 27 per 10 e di fatto:
  27 : 10 dà quoziente 2 e resto 7;
- 2 è il resto della divisione del nuovo quoziente 2 per 10 e di fatto:
  2 : 10 dà quoziente 0 e resto 2.

Analogamente le forme polinomiali dei numeri 3138 e 53059 sono rispettivamente:

$$3138 = 3\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 8;\quad 53059 = 5\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 9.$$

In generale, la forma polinomiale di un non precisato numero, per esempio, di 4 cifre, è la seguente:

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

dove a, b, c, d sono cifre generiche, con $a \neq 0$.

1.2.2 Si possono costruire infiniti sistemi di numerazione posizionali, giacché la base può essere un qualsiasi numero naturale maggiore di 1.
Un sistema di numerazione molto importante è il **sistema binario**, cioè in base ***due***: nei calcolatori la

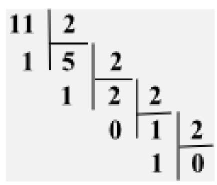
codifica delle informazioni e la loro elaborazione si effettua utilizzando proprio il sistema binario.
Le cifre diverse sono solo due: $\mathbf{0}, \mathbf{1}$. Per i numeri maggiori di uno si procede con raggruppamenti di due, formando *coppie*, *coppie di coppie*, eccetera. I numeri maggiori di 1 sono rappresentati da un allineamento di cifre 0 ed 1; la forma polinomiale utilizza le potenze della base 2 e risulta un'espressione contenente simboli ed operazioni propri del sistema decimale.
Si ha per esempio:

$$101011_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1\,.$$

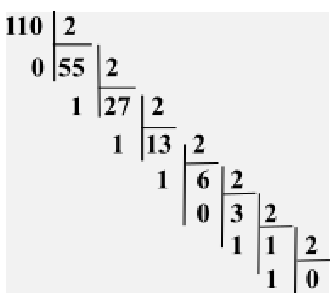
L'indice 2 in basso a destra del numero 101011 (che si legge «uno zero uno zero uno uno») serve per ricordare la base. Per trovare la rappresentazione decimale di 101011_2, basta eseguire le operazioni indicate nella sua rappresentazione polinomiale:

$$101011_2 = 1 \cdot 32 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 2 + 1 = 43\,.$$

Per effettuare la trasformazione di un numero dal sistema decimale al sistema binario, basta eseguire le successive divisioni per 2 del numero e dei quozienti via via ottenuti, fino ad ottenere quoziente 0. Le cifre binarie del numero sono costituite dai resti delle divisioni, presi in ordine inverso, dall'ultimo al primo.
Per esempio, per ottenere le cifre binarie del numero 11, basta eseguire le successive divisioni per 2, fino ad ottenere il quoziente 0, secondo lo schema sottostante.



Le cifre binarie del numero 11 sono costituite dai resti delle divisioni, in ordine inverso, dall'ultimo al primo: $11 = 1011_2$.
Un altro esempio, da cui si evince che $110 = 1101110_2$ è quello appresso sintetizzato.



1.2.3 Un altro sistema di numerazione usato nei calcolatori è il sistema a ***base 16*** o sistema ***esadecimale***. Per rappresentare i numeri in base 16 occorrono 16 cifre o simboli diversi, che sono:

$$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}.$$

Le lettere A, B, C, D, E, F corrispondono ai numeri del sistema decimale 10, 11, 12, 13, 14, 15.
Ecco alcuni esempi di trasformazione di numeri dal sistema esadecimale al sistema decimale:

$16_{16} = 1 \cdot 16 + 6 = 22;$

$B3F_{16} = 11 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 15 = 2816 + 48 + 15 = 2879;$

$3E8_{16} = 3 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 8 = 768 + 224 + 8 = 1000.$

Esercizi di verifica:	
1. Trasforma in base 10 i seguenti numeri scritti in base 2: $11010,\ 10111,\ 111011,\ 100111,\ 1011001.$	3. Trasforma nella base 16 i seguenti numeri scritti in base 10: $13,\ 48,\ 73,\ 84,\ 90.$
2. Trasforma in base 2 i seguenti numeri scritti in base 10: $14,\ 15,\ 20,\ 52,\ 64,\ 71.$	4. Trasforma nella base 10 i seguenti numeri scritti in base 16: 1D, A1, B0, E5, CEE, AFA.

La seguente tabella (Tab. 5) riassume i numerali, scritti in ordine crescente, dei numeri da "zero" a "tredici", nei sistemi di numerazione decimale, binario, esadecimale:

TAB. 5 – Numerali in sistemi di numerazione diversi

numero / numerale	zero	uno	due	tre	quattro	cinque	sei	sette	otto	nove	dieci	undici	dodici	tredici
decimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
binario	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101
esadecimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D

1.2.4 Una considerazione importante. Nel paragrafo 1.1.7 ci siamo occupati di alcuni criteri di divisibilità, puntualizzando che ***il numero deve essere scritto nel sistema di numerazione decimale***. Quella precisazione non è superflua. Se, infatti, il numero fosse scritto in un altro sistema di numerazione, quei criteri potrebbero non valere più.
Per esempio, il criterio di divisibilità per 3 non vale se il numero è scritto nel sistema binario.
Consideriamo, al riguardo, il numero 111_2, scritto nel sistema binario: la somma delle sue cifre è "tre" e tuttavia il numero, uguale a "sette", non è divisibile per "tre". Al contrario, il numero 110_2, vale a dire il numero "sei" in binario, è divisibile per "tre", pur non essendolo la somma delle sue cifre.

1.3 NUMERI INTERI RELATIVI

1.3.1 Come hai avuto modo di constatare, l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali non è chiuso rispetto alla sottrazione. Vale a dire: dati due qualsiasi numeri naturali $a,\ b$, non sempre $a-b$ è un numero naturale. Questa circostanza, unita ad altre di carattere pratico – come la necessità di disporre di *numeri con segno* per distinguere situazioni opposte, come "temperature sopra e sotto lo zero", "crediti e debiti", "livelli al di sopra e al di sotto del livello del mare", "latitudini al di sopra e al di sotto dell'Equatore", eccetera – suggerì ai matematici l'idea di ampliare l'insieme $\mathbb{N}$, introducendo un nuovo tipo di numeri, i *numeri interi relativi*, che contenessero un sottoinsieme che si comportasse in tutto e per tutto come i numeri naturali e nello stesso tempo consentisse di operare sempre con la sottrazione. Cerchiamo di darti un'idea di come ciò sia avvenuto.

1.3.2 Sai già come si rappresentano i numeri naturali sulla retta numerica. Consideriamo allora una retta r e su di essa un qualsiasi punto O. In realtà, su ciascuna delle due semirette in cui O divide la retta è possibile una rappresentazione dell'insieme $\mathbb{N}$ (Fig. 4).

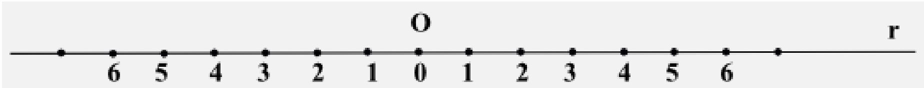


FIG. 4

Volendo però distinguere i numeri che stanno "a destra" di O da quelli che stanno "a sinistra", conveniamo di far precedere i primi dal segno "+" ed i secondi dal segno "−" (Fig. 5). Ovviamente avremmo potuto scegliere la convenzione opposta. Al numero 0, cui corrisponde il punto O, non si attribuisce alcun segno, in quanto ammettiamo per convenzione che sia **+0 = −0 = 0**.

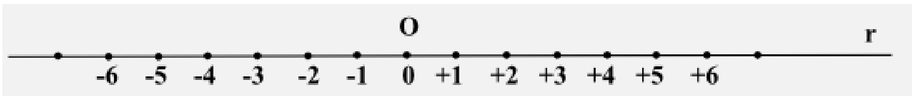


FIG. 5

I nuovi enti che così si ottengono, costituiti, con l'eccezione di 0, da un segno ("+" o "−") e da un numero naturale, si chiamano **numeri interi relativi** (o semplicemente **numeri interi**). Il loro insieme si indica col simbolo $\mathbb{Z}$ o anche con **Z.** Quest'insieme, privato dello 0, si indica con $\mathbb{Z}_0$ o anche con $\mathbf{Z_0}$**.** Fissato un qualsiasi numero intero, ad esso corrisponde un punto sulla retta dei numeri; ma di nuovo, non è vero l'inverso, nel senso che esistono punti sulla retta dei numeri ai quali non corrisponde alcun numero intero. Ed anche questo, come nel caso dei numeri naturali, è del tutto evidente.

1.3.3 I numeri interi relativi, ottenuti scrivendo un numero naturale non nullo preceduto dal segno "+" si dicono ***positivi***; il loro insieme si indica a volte col simbolo $\mathbb{Z}_0^+$ o anche con $\mathbf{Z_0^+}$
Quelli ottenuti scrivendo un numero naturale preceduto dal segno "−" si dicono ***negativi***; il loro insieme si indica col simbolo $\mathbb{Z}_0^-$ o anche con $\mathbf{Z_0^-}$
Lo 0, come detto, non è considerato né positivo né negativo.
Se all'insieme $\mathbb{Z}_0^+$ si aggiunge l'elemento 0, si ottiene l'insieme dei numeri interi ***non negativi***: si indica di solito con $\mathbb{Z}^+$ o anche con $\mathbf{Z^+}$
Analogamente, se all'insieme $\mathbb{Z}_0^-$ si aggiunge lo 0, si ottiene l'insieme dei numeri interi ***non positivi***: si indica con $\mathbb{Z}^-$ o anche con $\mathbf{Z^-}$.
Per il modo in cui sono stati costruiti i numeri relativi, ciascuno dei due insiemi $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$ potrebbe essere identificato con l'insieme $\mathbb{N}$. È, però, consolidata l'abitudine di identificare $\mathbb{Z}^+$ con $\mathbb{N}$. Per cui, qualunque sia il numero naturale n, si pone:

$$\mathbf{+n = n}\ .$$

Così, per esempio:

$$+1 = 1\ , \quad +2 = 2, \quad +3 = 3, \quad \text{eccetera.}$$

Per questo l'insieme $\mathbb{N}$ è considerato una parte dell'insieme $\mathbb{Z}$. Questo fatto si scrive così:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

E si legge: « $\mathbb{N}$ *è incluso in* $\mathbb{Z}$ ».

1.3.4 Un numero intero relativo è dunque costituito da un segno, "+" o "−", e da un numero naturale. Quest'ultimo si dice ***valore assoluto*** del numero relativo al quale si riferisce.
Se z è un qualsiasi numero intero relativo, il suo valore assoluto si indica col simbolo: $|\mathbf{z}|$.
Per esempio: $|-33|=33$, $|+33|=33$.
Due numeri interi relativi si dicono:

- ***uguali*** se hanno lo stesso segno ed uguale valore assoluto,
- ***opposti*** se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi,
- ***concordi*** se hanno lo stesso segno,
- ***discordi*** se hanno segni diversi.

Sono opposti, per esempio, i numeri $+2$ e -2, ma anche $+3$ e -3. Tali numeri, ovviamente, sono anche discordi. Sono pure discordi, ma non opposti, i numeri $+5$ e -2. Sono invece concordi -2 e -4, e così pure sono concordi $+9$ e $+6$.

1.3.5 Anche i numeri interi, come i numeri naturali, si possono pensare come un insieme ordinato. A questo proposito è sufficiente fissare un opportuno orientamento sulla **retta dei numeri** che li rappresenta. Naturalmente l'orientamento "giusto" è quello che conserva l'ordine già esistente nell'insieme dei naturali. Per questo basta assumere come verso progressivo, cioè come verso in cui cresce il valore dei numeri, quello che va dai numeri negativi ai positivi, evidenziato con una retta "frecciata", come in figura 6.

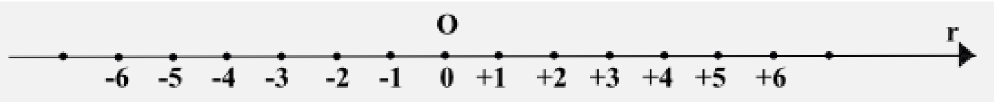


FIG. 6

In tal modo, si hanno queste conseguenze:

- **Ogni numero positivo è maggiore di ciascun numero negativo**.
  Per esempio: $+1>-4,\ \ +2>-7$.
- **Lo 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo**.
  Per esempio: $0<+3,\ 0>-1$.
- **Di due numeri positivi è maggiore quello che ha maggior valore assoluto**.
  Per esempio: $+2>+1, +10>+3$.
- **Di due numeri negativi è maggiore quello che ha minor valore assoluto**.
  Per esempio: $-1>-3,\ -3>-7$.

Un esercizio per te. Disponi in ordine crescente i seguenti numeri e rappresentali sulla retta numerica:
a) $-2,\ -3,\ 0,\ +1,\ +2,\ -4,\ +3$; b) $+2,\ -4,\ -7,\ +5,\ -1,\ -2,\ +6$.

1.3.6 L'insieme dei numeri interi relativi è ***chiuso*** rispetto sia all'**addizione** sia alla **moltiplicazione**.
Vale a dire: la somma e il prodotto di due numeri interi relativi sono numeri interi relativi.
Ossia, detto ancora in termini diversi: operando con l'addizione e la moltiplicazione nell'insieme degli interi relativi, non si esce da tale insieme.
Ai fini del calcolo della somma e del prodotto di due numeri relativi, valgono alcune regole, che è indispensabile memorizzare.

- RIGUARDO ALLA SOMMA:

Quali che siano i numeri interi a, b risulta:

$$(+a)+(+b)=+(a+b),\quad (-a)+(-b)=-(a+b),\quad (+a)+(-b)=\begin{cases} 0 \text{ se } a=b \\ +(a-b) \text{ se } a>b \\ -(b-a) \text{ se } b>a \end{cases}$$

Ossia, detto a parole:

- **La somma di due numeri concordi è un numero concorde con essi e avente per valore assoluto la somma dei valori assoluti**.
- **La somma di due numeri discordi è zero se i due numeri sono opposti; altrimenti è un numero concorde con quello che ha maggior valore assoluto ed ha come valore assoluto la differenza dei valori assoluti dei due numeri.**

Esempi:

$$(-7)+(-2)=-(7+2)=-9; \quad (+12)+(-7)=+(12-7)=+5=5; \quad (-11)+(+3)=-(11-3)=-8.$$

- RIGUARDO AL PRODOTTO:

Quali che siano i numeri interi a, b risulta:

$$(+a)(+b)=+(ab), \quad (-a)(-b)=+(ab), \quad (+a)(-b)=-(ab), \quad (-a)(+b)=-(ab)\,.$$

Inoltre, qualunque sia l'intero a:

$$0\cdot a=0.$$

Vale a dire:
Il prodotto di due numeri concordi è positivo, quello di due numeri discordi è negativo. In ogni caso il valore assoluto del prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.
Inoltre il prodotto di 0 per un qualunque intero è 0.

Esempi:

$$(+5)(-2)=-(5\cdot 2)=-10; \quad (-3)(+4)=-(3\cdot 4)=-12; \quad (-4)(-5)=+(4\cdot 5)=+20.$$

Esegui le seguenti operazioni:

(–2) + (+4);	(–7) + (+2);	(–12) + (–7);	(+17) + (–9);
(–6) (+3);	(–6) (–7);	(+3) (+8);	(–4) (+9).

Ti proponiamo, ancora per esercizio, di verificare che, comunque si scelgano i numeri interi a, b, si ha:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|.$$

Quando vale il segno "="?

1.3.7 Vogliamo soffermarci, adesso, su alcune considerazioni riguardanti le regole della somma e del prodotto dei numeri relativi.
Siamo sicuri che non hanno destato alcuna sorpresa le regole della somma. Del resto, se assimiliamo i numeri positivi a dei crediti e quelli negativi a dei debiti, sembra del tutto lecito quanto qui di seguito si afferma:

- se ho un credito di € 100 ed un altro credito di € 30, ho in effetti un credito complessivo di € 130:
$$(+100)+(+30)=+130\;;$$
- se ho un debito di € 50 ed un altro debito di € 40, ho in realtà un debito complessivo di € 90:
$$(-50)+(-40)=-90\;;$$
- se ho un credito di € 80 ed un debito di € 50, ho in pratica un credito di € 30:
$$(+80)+(-50)=+30\;;$$
- se ho un credito di € 20 ed un debito di € 60, ho di fatto un debito di € 40:
$$(+20)+(-60)=-40.$$

Se non creano perplessità quelle della somma, forse ne destano le regole del prodotto. Sembra, infatti, almeno sorprendente che "+" per "–" possa dare "–" e forse ancora più sorprendente che "–" per "–" possa dare "+".
In realtà, le regole si spiegano ammettendo che **l'insieme dei numeri relativi conservi le proprietà formali delle operazioni, valide nell'insieme dei naturali**.

In questo modo, accettato che, per esempio, si abbia:

$$(+3)(+2) = +(3\cdot2),$$

si può spiegare perché deve essere:

$$(+3)(-2) = -(3\cdot2) \quad \text{e} \quad (-3)(-2) = +(3\cdot2)\,.$$

Infatti, siccome (+3)+(−3) = 0, moltiplicando entrambi i membri per +2, si ha:

$$[(+3)+(-3)](+2) = 0\,;$$

se vogliamo che continui a valere la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, deve essere:

$$(+3)(+2) + (-3)(+2) = 0\,,$$

cioè:

$$+(3\cdot2) + (-3)(+2) = 0\,.$$

Come dire che i numeri +(3·2) e (−3)(+2) sono opposti. Vale a dire, per l'appunto:

$$(+3)(-2) = -(3\cdot2).$$

Partendo sempre dall'uguaglianza (+3)+(−3) = 0, ma moltiplicando entrambi i membri per −2, si ha invece:

$$[(+3)+(-3)](-2) = 0\,.$$

Se deve continuare a valere la proprietà distributiva di "·" rispetto a "+", deve essere:

$$(+3)(-2) + (-3)(-2) = 0\,,$$

ovvero:

$$-(3\cdot2) + (-3)(-2) = 0\,,$$

o anche:

$$(-3)(-2) = +(3\cdot2)\,.$$

1.3.8 Come accennato poco sopra, per l'addizione e la moltiplicazione in $\mathbb{Z}$ valgono le proprietà formali delle analoghe operazioni in $\mathbb{N}$.

Precisamente, **quali che siano i numeri relativi considerati**, valgono le seguenti **proprietà**:

- COMMUTATIVA:

$$a+b=b+a\,,\quad ab=ba\,.$$

- ASSOCIATIVA:

$$(a+b)+c=a+(b+c)\,,\quad (ab)c=a(bc)\,.$$

- ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO:

0 per l'addizione $(a+0=a)$ ed 1 per la moltiplicazione $(a\times1=a)$**;**

- LA MOLTIPLICAZIONE È DISTRIBUTIVA RISPETTO ALL'ADDIZIONE:

$$(a+b)c=ac+bc\,.$$

- Riguardo alla PROPRIETÀ DI MONOTONIA **cambia qualcosa** nel passaggio da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.
  Essa, infatti, continua a valere per l'addizione:

$$\text{se } a>b \text{ allora } a+m>b+m\,.$$

  Subisce, invece, una correzione per la moltiplicazione. Si ha precisamente che:

$$\text{se } a>b \text{ allora } \begin{cases} am>bm \text{ se } m>0 \\ am<bm \text{ se } m<0 \end{cases}$$

In effetti, a verifica di quanto affermato:

$$7>3 \ \text{ ma } \ 7\times(-2) < 3\times(-2), \text{ mentre } 7+2 > 3+2 \ \text{ e } \ 7\times2 > 3\times2.$$

Ma un'altra proprietà cambia quando si passa dall'insieme $\mathbb{N}$ all'insieme $\mathbb{Z}$: mentre in $\mathbb{N}$ c'è un numero **minimo**, che è 0, vale a dire un numero che non supera alcuno degli altri numeri dell'insieme, nell'insieme ℤ un minimo non c'è. Vale a dire che, qualunque numero si prenda in ℤ, ce n'è sempre almeno uno più piccolo di esso. Provare per credere.

1.3.9 A differenza dell'insieme ℕ, che non lo è, **l'insieme ℤ è *chiuso* rispetto alla sottrazione**. Si ha, infatti, quali che siano i numeri relativi a, b:

$$\mathbf{a-b=a+(-b)}\,.$$

Esempi:

$$(+7)-(-2)=(+7)+(+2)=+9\,;\quad (-5)-(+9)=(-5)+(-9)=-14\,;$$
$$(+3)-(+8)=(+3)+(-8)=-5\,;\quad (-7)-(-3)=(-7)+(+3)=-4\,.$$

Esegui le seguenti operazioni:

$$(+4)-(+5);\quad (-2)-(-5);\quad (-3)-(+7);\quad (+2)-(-9).$$

Nota Bene. Come hai potuto constatare, il segno "–" è usato con un duplice significato: a volte come "operatore" su un numero per indicarne l'opposto, a volte come "segno di sottrazione".
Molte calcolatrici, ma non tutte, possiedono due tasti distinti, addirittura con simboli diversi, per indicare le due funzioni sopraddette. È necessario prestarvi attenzione.

1.3.10 Come nell'insieme dei naturali anche in quello degli interi la **divisione** è parzialmente definita. Però adesso c'è una novità, perlomeno quando la divisione fra due interi ha un resto non nullo. Precisamente, mentre nella divisione dei naturali a, b, i naturali q ed r ($r<b$) sono tali che $a=bq+r$ e q è il massimo numero tale che $bq<a$, quando i numeri a, b sono interi, è ancora $a=bq+r$, dove però il quoziente q è il numero tale che $|q|$ è il massimo numero per cui si ha $|b|\cdot|q|<|a|$ e il resto r è tale che $|r|<|b|$.
Per capire meglio questo fatto, consideriamo i seguenti esempi, nei quali $|a|=13$, $|b|=3$:

- $13 = 3\times4 + 1$; per cui, nella divisione di 13 per 3, $q=4$ ed $r=1$, esattamente come in ℕ;
- $13 = (-3)\times(-4) + 1$; per cui, nella divisione di 13 per -3, $q=-4$ ed $r=1$;
- $-13 = 3\times(-4) + (-1)$; per cui, nella divisione di -13 per 3, $q=-4$ ed $r=-1$;
- $-13 = (-3)\times4 + (-1)$; per cui, nella divisione di -13 per -3, $q=4$ ed $r=-1$.

Ti proponiamo, per esercizio, di trovare il quoziente q ed il resto r della divisione dell'intero a per l'intero b, e di esprimere il fatto con la formula $a=bq+r$, sapendo che:

1) $a = 25$, $b = 7$; 2) $a = -37$, $b = 5$; 3) $a = 59$, $b = -11$; 4) $a = -83$, $b = -9$.

1.3.11 In ℤ si definisce l'operazione di **elevamento a potenza** con esponente in ℕ esattamente come in ℕ e con le medesime proprietà formali. Per cui non riteniamo opportuno ripetere cose già dette. Salvo far osservare quanto segue:

La potenza a^n, dove a è un qualsiasi numero relativo non nullo, è sempre positiva eccetto quando $a<0$ ed n è dispari, nel qual caso essa è negativa.

Esempi:

$$(+2)^2 = 4;\quad (-2)^2 = 4;\quad (+2)^3 = 8;\quad (-2)^3 = -8.$$

Esegui le seguenti operazioni:

$$(+3)^2\,;\quad (-3)^2\,;\quad (+4)^3\,;\quad (-3)^3\,.$$

1.4 ESPRESSIONI NUMERICHE E LETTERALI CON VALORI IN $\mathbb{Z}$

1.4.1 Come abbiamo già detto, un numero può essere scritto in più modi. Vediamo adesso come, partendo dal numero 3 ed utilizzando quest'idea, si possa giungere, attraverso varie fasi o passaggi, ad un'espressione numerica di valore 3.

$3 = 18-15 =$

$= 6\cdot 3 - (4^2-1^2) =$ $\quad$ $(18=6\cdot 3 \,;\, 15=4^2-1^2)$

$= (1+2+3)\cdot(6:2) - [4^2 - (13-2)^2]$ $\quad$ $(6=1+2+3;\ 3=6:2;\ 1=13-12)$

Si potrebbe anche continuare, ottenendo un'espressione più "complicata".

Le precedenti uguaglianze si possono scrivere anche in ordine inverso, dall'ultima alla prima. Si ha così un esempio di *calcolo* o *semplificazione* di un'espressione numerica fino ad ottenere il numero che ne rappresenta il valore. In questo modo:

$$(1+2+3)\cdot(6:2) - [4^2 - (13-12)^2] = 6\cdot 3 - (4^2 - 1^2) = 18 - 15 = 3.$$

1.4.2 In genere, la semplificazione di un'espressione numerica richiede il rispetto di alcune regole e convenzioni. Ce ne vogliamo occupare diffusamente.

A) ESPRESSIONI SENZA PARENTESI.

1) **Espressioni che contengono solo addizioni o solo moltiplicazioni**.

Le proprietà commutativa ed associativa permettono di eseguire le operazioni in un ordine qualsiasi. Inoltre, per indicare una somma di numeri relativi, per esempio questa: $(+5)+(-3)+(-6)$, è sufficiente scrivere uno di seguito all'altro i numeri con i loro segni.

Così, nell'esempio considerato, basta scrivere: $+5-3-6$; o addirittura, identificando +5 con 5, si può scrivere: $5-3-6$.

2) **Espressioni contenenti una sola tra le operazioni sottrazione e divisione**.

Queste operazioni non sono commutative né associative.

Per esempio è facile controllare che

$$(15-6)-4 \neq 15-(6-4).$$

Allora, per evitare ambiguità, se vogliamo scrivere l'espressione $15-6-4$ senza parentesi, accettiamo la convenzione che il suo significato sia il seguente:

$$15-6-4 = (15-6)-4 = 5.$$

Se invece volessimo rappresentare il numero 13, dovremmo necessariamente usare le parentesi:

$$15-(6-4) = 13.$$

Si conviene dunque che, in assenza di parentesi, successive sottrazioni e divisioni si eseguano nell'ordine in cui sono scritte (da sinistra a destra).

3) **Espressioni che contengono solamente addizioni e sottrazioni, oppure soltanto moltiplicazioni e divisioni**.

Le operazioni si eseguono nell'ordine in cui sono scritte.

4) **Espressioni con tutte e quattro le operazioni aritmetiche**.

Assumiamo la convenzione che le operazioni "$\times$" e ":" abbiano la precedenza su "+" e "–".

Cosicché, dovendo calcolare $3+4\times 2$, si calcola dapprima il prodotto, ottenendo $3+8$, e poi la somma, ossia 11.

Una precisazione su questa convenzione. È la convenzione che seguiamo noi, assieme a tutti gli autori di testi di matematica, ma potrebbe essere sostituita legittimamente da un'altra convenzione: basta mettersi d'accordo. In realtà vi sono calcolatrici che, nel calcolo dell'espressione considerata, dapprima calcolano l'operazione che viene per prima (nel caso specifico la somma) e poi calcolano l'operazione che viene per seconda (in questo caso il prodotto), ottenendo così il risultato 14. Con queste calcolatrici, se si vuole che l'espressione rappresenti il numero 11, bisogna scriverla in questo modo: 3+(4×2) oppure 4×2+3.

5) **Espressioni con tutte le operazioni e con le potenze**.
Le potenze hanno la precedenza su tutte le altre operazioni.

Riassumiamo tutto quanto esposto fin qui sulle operazioni da eseguire per SEMPLIFICARE UNA ESPRESSIONE (ovvero per CALCOLARNE il valore):
Prima si eseguono le potenze, poi, nell'ordine in cui si incontrano, si eseguono le moltiplicazioni e le divisioni, infine, nell'ordine in cui si incontrano, si eseguono le addizioni e le sottrazioni.

Conviene utilizzare, quando è possibile, le proprietà delle potenze:
- si possono eseguire prodotti o quozienti di potenze della stessa base, senza eseguire prima il calcolo di ciascuna potenza;
- per moltiplicare o dividere potenze con lo stesso esponente si possono moltiplicare o dividere le basi ed elevare il risultato all'esponente comune.

B) ESPRESSIONI CON PARENTESI.

Ogni espressione racchiusa tra una coppia di parentesi rappresenta il suo valore, per cui può essere sostituita dal numero che si ottiene eseguendo le operazioni nell'ordine già precisato. Perciò:

La semplificazione di un'espressione contenente parentesi si effettua gradualmente, cominciando ad eseguire le operazioni racchiuse dalle parentesi più interne e seguendo, entro ogni coppia di parentesi, le convenzioni già descritte.

Per non appesantire la scrittura di un'espressione, si cerca di limitare l'uso delle parentesi al minimo indispensabile. Per riconoscere se una coppia di parentesi è davvero necessaria, si immagina di sopprimerla: se il valore dell'espressione cambia, cioè se, rispettando le convenzioni, l'ordine di esecuzione delle operazioni risulta alterato sostanzialmente, allora le parentesi sono necessarie, altrimenti sono superflue.

ESERCIZIO. Nelle seguenti espressioni numeriche può esservi una sovrabbondanza di parentesi. Quando questo accade, riscrivi l'espressione dopo aver eliminato le parentesi superflue, in base alle convenzioni fatte:

1. $(5-3)-7$;
2. $(15-7)-3$;
3. $4-(2+5)$
4. $4-(5-2)$;
5. $(7-6)+(3+4)$;
6. $(7+2)-(5+1)$;
7. $(7-3)+(5-4)$;
8. $(4-3)+(2+3)$;
9. $(9:3)-(6:3)$;
10. $(12:4)\cdot(5-2)$;
11. $(16:2):(8:2)$;
12. $15:(6:2)+(4:2)$;
13. $(3^4):(3^2)+(2)\cdot(3^2)$;
14. $(5+3)^2:2^4+(3\cdot 2^2)$;
15. $(5-2^2)^2\cdot(3+2)^2$.

Spesso nelle espressioni si usano parentesi di vario tipo: *tonde* ( ), *quadre* [ ], *graffe* { } e quelle più interne di solito sono le tonde ed, a seguire, le quadre e le graffe. Ciò rende per noi più facile il riconoscimento sia delle singole coppie di parentesi, sia di quelle interne ad altre, ma questo non è obbligato-

rio: si potrebbero scrivere, per esempio, le parentesi graffe o quadre dentro le tonde.
Addirittura, poi, nella scrittura di espressioni aritmetiche in un programma per calcolatore si usano soltanto parentesi tonde.

Ed ecco due esempi di semplificazione di espressioni numeriche e, a seguire, alcuni esercizi nei quali potrai verificare la tua abilità di calcolo:

♠ Esempio 1:

$5 - 4 \cdot 9 : 3 + 7 - 2^2 = 5 - 12 + 7 - 4 = -4.$

♠ Esempio 2:

$$[(23 - 2^3 \cdot 3)^5 + 2^4 : (9 - 5)]^2 : 3 - 24 : 2^3 = [(23 - 8 \cdot 3)^5 + 16 : 4]^2 : 3 - 24 : 8 =$$
$$= [(23 - 24)^5 + 4]^2 : 3 - 3 = [(-1)^5 + 4]^2 : 3 - 3 = 3^2 : 3 - 3 = 3 - 3 = 0.$$

ESERCIZIO. Semplifica le seguenti espressioni numeriche:

1) $(1 + 2 + 3 - 4) \cdot (5 + 6 + 7 - 8 - 9)$	2) $1 + 2{\cdot}3 - 4 - (5 + 6 + 7 - 8 - 9)$
3) $123 - 45 - 67 - 89$	4) $27 - 35{:}5 - (18 - 6{:}2)$
5) $128 - 2[87 - (15 + 4{\cdot}7){\cdot}2]$	6) $\{17 - 16 : [11 - 12 : (13 - 3^2)]\} : 5 - 3$
7) $18 - 45 : \{(36 - 5{\cdot}4) - [18 - (5{\cdot}2 + 1)]\}$	8) $(3^2 + 4^2) : 5^2 - 15 : (7 - 6{:}3)$
9) $(2^2)^3 : 2^3 - 2^3 : (3^2 - 5)$	10) $15{:}5 - 4 : \{[(3^2)^2 - 3^3] : 3^2 - 4\}$
11) $(2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2) : (3^4 - 3^3 - 3^2 - 3)$	12) $2^4 : 2 \cdot 2^3 : (2^2 \cdot 2^3)$
13) $(3 \cdot 5)^2 : (3 \cdot 5) - 3 \cdot 5$	14) $(2^8 : 8^2 \cdot 4^3 : 16)^2 - 2^7 : 2^3 \cdot 4^2$

1.4.3 Consideriamo le seguenti espressioni numeriche:

$$3 + 4^2, \quad 2 + 3^2, \quad 5 + 2^3,$$

i cui valori sono nell'ordine:

$$19, \quad 11, \quad 13.$$

Si riconosce subito in esse una medesima struttura: la somma di un numero e di una potenza. Ed è evidente che possono essere pensate molte altre espressioni numeriche aventi quella stessa struttura.
Ci chiediamo, allora, se sia possibile scrivere un'espressione generale, tale che tutte le precedenti siano casi numerici particolari. Per esprimerla non potremo certamente usare dei numeri, ma (come abbiamo già fatto per le proprietà delle operazioni) possiamo usare delle lettere, che rappresentano numeri sconosciuti e sono chiamate ***variabili***, alle quali si possono assegnare tutti i valori numerici che si vuole.
L'espressione è allora la seguente:

$$a + b^c,$$

dove a, b, c sono numeri interi qualsiasi con $c \geq 0$ e b, c non contemporaneamente nulli. Si chiama **espressione letterale**. Chiaramente, quando ad a, b, c si assegnano valori particolari, l'espressione letterale diventa un'espressione numerica, il cui valore può essere calcolato.
In particolare, le tre espressioni numeriche precedenti si ottengono, nell'ordine, per i seguenti valori delle variabili: $a{=}3, b{=}4, c{=}2$; $a{=}2, b{=}3, c{=}2$; $a{=}5, b{=}2, c{=}3$.

Un'altra situazione. Dato un quadrato di lato 5, è evidente che la sua area è $5{\times}5$, cioè 5^2. Si tratta di un calcolo certamente corretto, ma vale solo per un quadrato di lato 5 e non vale più se il lato del quadrato è 2 o 7 o 58. Ci chiediamo di nuovo quale possa essere un'espressione che fornisca l'area di un qualsiasi quadrato il cui lato è un numero sconosciuto a. Ebbene quest'area è $a{\times}a$, cioè a^2. Quando alla variabile a si attribuisce un determinato valore numerico, per esempio a=5, quest'espressione fornisce il valore dell'area del quadrato di lato 5.

Avremo modo di riprendere e approfondire questo discorso nell'Unità 5, ma per il momento ci fermiamo qui e ti invitiamo a risolvere il seguente esercizio.

ESERCIZIO. Completare la seguente tabella, con i valori assunti dalle tre espressioni ivi proposte, quando alle lettere A, B, C che in esse compaiono, si assegnano i valori indicati.

A	B	$(A+B)^2 + AB$	$A^2 + 3AB + B^2$	$A(A+3B) + B^2$
−4	3			
6	7			
2	−5			
−3	−1			

1.4.4 La manipolazione e semplificazione di espressioni numeriche ti sono richieste essenzialmente perché tu possa acquisire dimestichezza con questi oggetti matematici e, nello stesso tempo, la necessaria consapevolezza delle proprietà dei numeri. Per questo non ti proponiamo espressioni eccessivamente complesse, neppure nella sezione "verifiche". In ogni caso, quale che sia la complessità delle espressioni che ti troverai ad affrontare, puoi controllare l'esattezza del tuo procedimento utilizzando opportuni strumenti di calcolo automatico, anche simbolico.

Adesso ti invitiamo a risolvere le seguenti questioni, non prima di averti ricordato che un numero naturale si dice **primo** se è maggiore di 1 ed è divisibile soltanto per 1 e per se stesso; mentre due numeri naturali si dicono **primi fra loro** (o **coprìmi**) se non hanno altri divisori comuni oltre all'unità. Inoltre un numero naturale si dice **perfetto** se è uguale alla somma dei suoi divisori propri [(3)].

1) È vero che due numeri primi sono certamente primi fra loro mentre non è vero che due numeri primi fra loro sono certamente numeri primi?
2) Considerata la seguente espressione: $29+2n^2$, verifica che assume come valori dei numeri primi quando ad n si attribuiscono valori interi da 0 a 28 inclusi. Assume come valore ancora un numero primo per $n=29$?
3) Si consideri la seguente proprietà dei numeri naturali:

   Se il numero 2^n-1 è primo allora il numero $(2^n-1)\times 2^{n-1}$ è perfetto.

   Si tratta della formulazione di una proposizione enunciata e dimostrata da **Euclide** (*Elementi*, IX, 36) circa nel 300 a.C.. Controlla cosa accade per i seguenti valori di n:

   $$n=2,\ n=3,\ n=4,\ n=5,\ n=6,\ n=7,$$

   verificando, in particolare, se il numero che si ottiene è o no perfetto.
4) Si consideri la seguente proprietà dei numeri naturali:

   Se e solo se p è un numero primo ed n è coprìmo con p allora il numero $n^{p-1}-1$ è divisibile per p.

   Verificarla per le seguenti coppie di valori:

   a) $p=2, n=3$; b) $p=3, n=4$; c) $p=4, n=3$; d) $p=2, n=4$.

   Per la cronaca, la proprietà fu enunciata dal francese **Pierre de Fermat** (1601-1665), che però non ne fornì la dimostrazione. Dimostrazione che invece fu trovata dal tedesco **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716).
5) Si consideri il numero $(54.328^4-82.345^2)\cdot(45.283^3-85.432^2)$. È vero che la cifra delle sue unità è un numero primo? (Non è consentito usare strumenti di calcolo automatico e la risposta, opportunamente

---

3 Si dicono **divisori propri** di un numero naturale i divisori del numero diversi dal numero stesso.

giustificata, deve essere data in meno di un minuto)

6) La scrittura 2122 rappresenta un numero scritto in una base b. Fornire la sua rappresentazione polinomiale. Trovare quindi tutte le basi b, comprese fra 3 e 7 inclusi, nelle quali la scrittura considerata rappresenta un numero primo.

7) Nelle seguenti espressioni il segno "$*$" rappresenta una delle 4 operazioni fondamentali dell'aritmetica, non necessariamente sempre la stessa, mentre la lettera "x" rappresenta un numero naturale, non necessariamente sempre lo stesso. Caso per caso, individuare almeno un'operazione ed almeno un numero che rendano vera l'uguaglianza.

a) $(3 * x) \cdot 3 = 27$; b) $(28 * x) + 5 = 28$; c) $(15 * x) : 2 = 11$;
d) $(14 * x) - 3 = 4$; e) $(x * 3) - 5 = 0$; f) $(3 \cdot 2) * x = 24$.

[R. a) 2 operazioni e 2 numeri; …. ; e) 3 operazioni e 3 numeri; …]

VERIFICHE [4]

1. Considera il numero rappresentato da questa scrittura: $(4+7)\cdot 5$.
Dire quali delle seguenti rappresentazioni sono modi diversi di scrivere lo stesso numero.

$$4\cdot 5+7\cdot 5,\ \ 4+7\cdot 5,\ \ [4+(3+4)]\cdot(3+2),\ \ 11\cdot(2\cdot 2+1),\ \ 4\cdot 7\cdot 5.$$

2. Dopo aver verificato che le scritture

$$1+(0\cdot 0)\ \text{ e }\ (1+0)\cdot(1+0)$$

rappresentano lo stesso numero, così come queste altre:

$$(3\cdot 7)+0\ \text{ e }\ (3+0)\cdot(7+0),$$

si può concludere che vale la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione?

3. Se il numero naturale a è minore del numero naturale b, si può concludere che il successivo di a è minore di b? Si può concludere che il successivo di a è minore del successivo di b?

4. Se a, b sono numeri naturali, l'espressione «a non è minore di b» ha lo stesso significato dell'espressione «a è maggiore di b»?

5. Dopo aver confrontato i valori di ciascuna delle seguenti coppie di numeri:

$$3^2\ \text{ e }\ 2^3,\qquad (2^3)^2\ \text{ e }\ 2^{(3^2)},$$

si può concludere qualcosa di definitivo riguardo alle proprietà commutativa e associativa dell'elevamento a potenza in $\mathbb{N}_0$? Fornire almeno un altro esempio in cui risulta $a^b=b^a$ ed almeno un altro esempio in cui risulta $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$.

6. Considera l'insieme N_P dei numeri naturali pari: $N_P = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \dots\}$ e l'insieme N_D dei numeri naturali dispari: $N_D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$.
L'insieme N_P è chiuso rispetto all'addizione? E rispetto alla moltiplicazione? E l'insieme N_D?

7. Giulio sta partecipando al gioco della "Tombola" e constata che la somma dei primi tre numeri estratti è 8. Sai dire con certezza quali numeri sono stati estratti? Se non hai certezza di tutti e tre i numeri, sei almeno certo di qualcuno di essi?

8. Se a, b indicano le misure, in centimetri, delle dimensioni di un rettangolo, si sa che l'area del rettangolo, espressa in centimetri quadrati, vale $a\cdot b$.
Determina l'espressione letterale che indica l'incremento che subisce l'area del rettangolo quando cia-

[4] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

scuna dimensione aumenta di 2 cm.

Calcola i valori di quest'espressione in corrispondenza dei seguenti valori attribuiti alle lettere:

1) $a=3, b=4$. 2) $a=4, b=3$. 3) $a=5, b=7$. 4) $a=7, b=5$.

9. Di ognuna delle seguenti affermazioni stabilisci se è vera o falsa:

1. Esiste un numero naturale x tale che $x+3=2$.
2. L'operazione di elevamento a potenza, totalmente definita in $\mathbb{N}_0$, gode della proprietà commutativa.
3. Vale l'uguaglianza: $2^{15:5}=2^{15}:2^5$.
4. Il numero $(2373^2)^2$ è pari.
5. Vale l'uguaglianza: $2^5+2^7=5\cdot 2^5$.
6. Risulta: $10^{10}-10^9=10$.

10. Di ognuna delle seguenti domande individua l'unica alternativa corretta tra quelle proposte:

1. Tutti i numeri naturali che, sostituiti al posto della x, rendono vera la relazione $x+2<4$, sono:
   [A] 0 e 1; [B] 0, 1 e 2; [C] 0, 1, 2 e 3; [D] 0, 1, 2, 3 e 4.
2. Tutti i numeri naturali che, sostituiti al posto della lettera a, rendono vera la relazione $5<a\leq 8$, sono:
   [A] 5 e 6; [B] 6 e 7; [C] 5, 6 e 7; [D] 6, 7 e 8.
3. Considerata l'operazione "^" di elevamento a potenza, totalmente definita in $\mathbb{N}_0$, una sola delle seguenti proposizioni è vera. Quale?
   [A] Quali che siano $a\in\mathbb{N}_0$, $b\in\mathbb{N}_0$, si ha: $a\wedge b=b\wedge a$.
   [B] Quali che siano $a\in\mathbb{N}_0$, $b\in\mathbb{N}_0$, $c\in\mathbb{N}_0$, si ha: $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$.
   [C] Esiste uno ed un solo $u\in\mathbb{N}_0$ tale che, per ogni $a\in\mathbb{N}_0$, si ha: $a\wedge u=a$.
   [D] Esiste uno ed un solo $n\in\mathbb{N}_0$ tale che, per ogni $a\in\mathbb{N}_0$, si ha: $a\wedge n=n$.
4. Una delle seguenti proposizioni è FALSA. Quale?
   [A] La somma di due qualsiasi numeri dispari è pari.
   [B] Ogni numero naturale è divisibile per 1.
   [C] Ogni numero divisibile per 3 è dispari.
   [D] Se la somma di due numeri è dispari, almeno uno di essi è dispari.

11. ESERCIZIO SVOLTO. In una divisione tra numeri naturali, il dividendo è 709 ed il quoziente è 12. Determinare il divisore ed il resto.

RISOLUZIONE. Indicato con d il divisore, deve risultare:

$$12\,d \leq 709 < 13\,d\,.$$

Il quoziente della divisione di 709 per 12 è 59; se deve essere $12d\leq 709$, ne segue che $d\leq 59$. D'altra parte, il quoziente di 709 per 13 è 54; dovendo essere $709<13d$, si deduce che $54<d$. Dunque si ha:

$$54 < d \leq 59.$$

Vi sono, dunque, cinque divisori d che risolvono il quesito: 55, 56, 57, 58, 59.

Se la divisione di 709 per d ha come quoziente 12, allora il resto r della divisione è: $r=709-12d$.

In corrispondenza dei cinque divisori trovati otteniamo i seguenti resti:

$$d=55,\quad r=709-12\cdot 55=49;$$
$$d=56,\quad r=709-12\cdot 56=37;$$
$$d=57,\quad r=709-12\cdot 57=25;$$
$$d=58,\quad r=709-12\cdot 58=13;$$
$$d=59,\quad r=709-12\cdot 59=1.$$

12. Risolvi lo stesso quesito dell'esercizio precedente con i dati indicati nella tabella sottostante.

dividendo	202	731	1764
quoziente	15	14	28

13. ESERCIZIO SVOLTO. In una divisione tra numeri naturali, il dividendo è 47 ed il resto è 12. Determinare il divisore ed il quoziente.

RISOLUZIONE. Indicati con d il divisore e con q il quoziente, deve risultare:

$$47 = d\,q + 12,$$

da cui segue:

$$d\,q = 35.$$

Le coppie di numeri naturali il cui prodotto è 35 sono solo le seguenti:

$$1, 35; \quad 5, 7.$$

Poiché il resto della divisione è 12, il divisore deve essere maggiore di 12; dunque la seconda coppia deve essere scartata, perché il divisore non può essere né 5 né 7 e nella prima coppia 1 non può essere il divisore; perciò il problema ammette la seguente unica soluzione:

$$d = 35, \quad q = 1.$$

14. Risolvi lo stesso quesito dell'esercizio precedente con i dati indicati nella tabella sottostante.

dividendo	76	127	131
resto	16	27	11

15. Verifica che le seguenti uguaglianze sono soddisfatte da almeno 3 coppie di numeri interi a, b scelti da te in maniera arbitraria:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2\,; \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3\,.$$

16. Tra le seguenti proposizioni ve ne sono di vere e di false. Individua le une e le altre fornendo esaurienti spiegazioni delle risposte:

1. Il doppio di un numero relativo è concorde col numero.
2. Il quadrato di un numero relativo è concorde col numero.
3. L'opposto di un numero relativo è negativo.
4. Se il numero relativo a è maggiore del numero relativo b allora $a^2 > b^2$.

17. Verifica che le due espressioni letterali: $(a+b)(a-b)$ e a^2-b^2 assumono lo stesso valore per almeno tre coppie di numeri interi a, b, arbitrariamente scelti.

18. Scrivi l'espressione che traduce in simboli il prodotto della somma di due numeri interi a, b per la loro differenza. Calcola quindi il valore dell'espressione trovata quando $a=-3$ e $b=2$.

19. Scrivi l'espressione che traduce in simboli la differenza fra il quadrato, aumentato di 1, di un numero intero ed il quadrato dello stesso numero aumentato di 1. Calcola quindi il valore dell'espressione trovata quando al numero si assegna il valore -4.

20. Esprimi a parole il contenuto della seguente espressione simbolica, dove a è un numero intero:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2.$$

Dell'espressione medesima calcola il valore per i seguenti valori attribuiti alle lettere:

$$1)\ a=2,\ b=-1; \qquad 2)\ a=-4,\ b=2; \qquad 3)\ a=-5,\ b=-2.$$

21. ® LABORATORIO DI MATEMATICA. L'ultima cifra a destra dello sviluppo della potenza 47^{47}, scritto nel consueto sistema decimale di numerazione, è:

$$[A]\ 1; \qquad [B]\ 3; \qquad [C]\ 7; \qquad [D]\ 9.$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla senza l'uso di strumenti di calcolo automatico e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

22. ® LABORATORIO DI MATEMATICA. Alle ore 9 sono inseriti in una provetta dei germi che hanno la capacità di riprodursi rapidamente. Il loro numero, infatti, raddoppia ogni 5 minuti e, alle ore 10 la provetta è completamente riempita di germi. A che ora la provetta è piena di germi esattamente a metà?

Prova a risolvere discutendone in classe con i tuoi compagni e, se proprio non ce la fate, con l'aiuto del professore.

23. La seguente proprietà dei numeri è attribuita al filosofo e matematico ellenico **Nicomaco** di Gerasa (I sec. d.C.): *«La somma dei cubi dei primi n numeri naturali a partire da 1 è uguale al quadrato della somma dei primi n numeri naturali a partire da 1»*. Scrivi la formula che traduce in simboli la proprietà e fanne una verifica per i seguenti valori di n: $n=2,\ n=3,\ n=4$.

24. Considera tutti i numeri interi da 1 a 10000, scritti nel consueto sistema di numerazione decimale. Quante cifre sono impiegate complessivamente? [**R**. 38.894]

25. PROBLEMA RISOLTO. Scrivi un numero di 3 cifre nell'usuale sistema di numerazione decimale. Scrivi, adesso, il numero di 6 cifre che ottieni ripetendo le 3 che hai scritto (ad esempio, se hai scritto 458 come numero di tre cifre, adesso scriverai 458458 come numero di 6 cifre). Dividi il numero di 6 cifre, così ottenuto, per 13: se hai fatto bene i conti, il resto è 0, qualunque sia il numero di 3 cifre da cui sei partito. Dividi il quoto ottenuto per 11: anche adesso ottieni resto 0. Dividi il nuovo quoto per 7: di nuovo ottieni resto 0 e come quoto, sorpresa delle sorprese, ritrovi il numero di 3 cifre dal quale eri partito. Sai spiegare come ciò possa accadere?

RISOLUZIONE. La spiegazione, una volta conosciuta, è del tutto banale: il numero di 6 cifre, ottenuto ripetendo quelle di un qualsiasi numero di 3 cifre, è uguale al numero che si ottiene moltiplicando il numero di 3 cifre per 1001. Siccome questo numero è uguale a 13×11×7, è evidente che dividendo per esso il numero di 6 cifre, si ritorna al numero originario di 3 cifre.

[La questione è riportata da Martin Gardner in *Enigmi e giochi matematici*, Milano, Biblioteca Universale Rizzoli, 1987 (trad. Mario Carlà), ma lo stesso autore ne attribuisce la paternità a Yakov Perelman (*Numeri per divertimento*, Mosca, 1957)]

26. Questo gioco è come il precedente. Scrivi un numero di 4 cifre nell'usuale sistema di numerazione decimale. Scrivi, adesso, il numero di 8 cifre che ottieni ripetendo le 4 che hai scritto (ad esempio, se hai scritto 4587 come numero di 4 cifre, adesso scriverai 45874587 come numero di 8 cifre). Dividi per 137 il numero di 8 cifre, così ottenuto: se hai fatto bene i conti, il resto è 0, qualunque sia il numero di 4 cifre da cui sei partito. Dividi il quoto ottenuto per 73: di nuovo ottieni resto 0 e come quoto, sorpresa delle sorprese, ritrovi il numero di 4 cifre dal quale eri partito. Se hai saputo spiegare la curiosità del precedente esercizio, saprai spiegare certamente questa. Sei in grado di farlo?

27. PROBLEMA RISOLTO. Paolo e Giovanni giocano con le figurine dei calciatori. Paolo vorrebbe assicurarsi la figurina di Totti, di cui è un tifoso accanito, ma non ci riesce. Giovanni allora gli propone il seguente indovinello: «Metto in queste quattro buste alcune figurine, aumentandone il numero mentre passo dalla prima all'ultima. Nella prima busta ci metto la figurina di Totti. Ti dico solo che questa figurina non è da sola e che il numero che si ottiene moltiplicando i numeri delle figurine contenute in ogni busta è 180. Se indovini i numeri delle figurine contenute nelle quattro buste, te le regalo.»

Riuscirà Paolo, che si vanta di avere buone capacità matematiche, ad aggiudicarsi la figurina di Totti?

[Questione con alto coefficiente di difficoltà]

RISOLUZIONE. Bisogna tener presente anzitutto che i numeri delle figurine contenute nelle 4 buste sono tutte disuguali fra loro e che il numero minore di figurine contenute in una busta è comunque maggiore di 1. Questo implica che 180 deve essere scritto come prodotto di 4 numeri diversi da loro e maggiori di 1.

Incominciamo a fattorizzare 180. Si ha: $180=2^2\times3^2\times5$. Si può constatare che vi è un solo modo di ottenerlo come prodotto di 4 numeri diversi fra loro e tutti maggiori di 1, ed è il seguente: $180=2\times3\times5\times6$.

Ogni altra combinazione di fattori non permette di averne quattro, disuguali tra loro. Si può scrivere infatti:

- $180=4\times9\times5$, ma i fattori sarebbero tre e non quattro;
- $180=4\times3\times3\times5$, ma ci sarebbero due fattori uguali;
- $180=2\times2\times9\times5$, come nel secondo caso;
- $180=2\times9\times10$, come nel primo caso;

ed altre situazioni dello stesso tipo, tutte ugualmente da scartare poiché non soddisfano alle condizioni poste.

In definitiva, nelle 4 buste vi sono contenute nell'ordine: 2, 3, 5, 6 figurine.

28. ® Si sa che $2^{10}=1024$. Quale fra le seguenti potenze di 10 è quella che più si avvicina a 2^{70}?

[A] 10^{24}. [B] 10^{21}. [C] 10^{14}. [D] 10^{7}.

[Tratto da prova INVALSI 2012 per la classe II della scuola secondaria di 2° grado]

29. Dimostrare che la 5ª potenza di un qualsiasi numero naturale ha come cifra delle unità la stessa cifra delle unità del numero considerato.

[**R.** È sufficiente fermare l'attenzione sulla cifra a delle unità del numero considerato e calcolare la sua 5ª potenza a^5, attribuendo ad a tutti i possibili valori da 0 a 9. Può essere utile una calcolatrice]

30. Trovare il più piccolo numero naturale tale che, moltiplicandolo per il suo successivo e aumentando di una unità il prodotto ottenuto, si ottenga il cubo di un numero naturale N. Qual è questo numero N?

[**R.** …; N=7]

31. Un numero di tre cifre, scritto nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, ha 9 come cifra delle unità. Sapendo che esso è il cubo di un numero naturale, trovare i due numeri.

32. Formulare una proposizione che individui tutti e soli i numeri naturali *a* tali che la cifra delle unità del numero a^{53} sia 2.

33. Il numero 39.200 è uguale al prodotto di due numeri naturali, uno dei quali è doppio dell'altro. Trovare tali numeri. [**R.** Si constata che $39.200=2^5\cdot5^2\cdot7^2$, per cui un numero è ...=140, l'altro è...]

34. Trovare due numeri naturali a, b sapendo che $ab=231$ e $5<a<b<50$.

[**R.** Si constata che $231=3\cdot7\cdot11$, per cui … 2 coppie: (a=7, b=33), (a=11, b=21)]

35. Mario vive da solo in una grande villa lasciatagli in eredità dai genitori. Per rompere la monotonia delle giornate ha deciso di invitare alcuni amici a partire dal 1° marzo, quando sono stati invitati contemporaneamente Giulio, Piero e Claudio. Dopo di allora però le visite dei tre amici avvennero con cadenze diverse. Precisamente: Giulio faceva visita ogni 4 giorni, Piero ogni 6 e Claudio ogni 8 giorni.

a) Dopo quel primo giorno quand'è stata la prima volta che i tre amici di Mario si sono ritrovati tutti insieme a casa sua?

b) Mario dedicava i giorni in cui non riceveva visite alla lettura e siccome era un tipo metodico leggeva 4 capitoli al giorno, indipendentemente dal libro che stava leggendo. Quanti capitoli lesse Mario nelle giornate situate tra i due giorni in cui ricevette la visita di tutti e tre gli amici?

[**R.** a) 25 marzo; b) 52 capitoli]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Poiché $2^4=4^2$, si può concludere che vale la proprietà commutativa dell'elevamento a potenza. È così?

2. È vero che $5^5+5^4=5^9$?

3. Esiste una potenza di 10 divisibile per 3?
4. Considerato un qualsiasi numero dispari, esistono due numeri primi la cui somma sia uguale al numero?
5. La squadra del Borgorosso partecipa ad un torneo di calcio a 20 squadre con partite di andata e ritorno. In ogni partita la squadra che vince guadagna 3 punti, quella che pareggia ne guadagna 1 e quella che perde prende 0 punti. Alla fine del torneo il Borgorosso ha totalizzato N punti, avendo vinto una partita in meno di quelle che ha pareggiate. Quale delle seguenti alternative è quella corretta?
   [A] N=43. [B] N=54. [C] N=65. [D] Dati insufficienti.
6. È vero che tutte le proprietà dell'addizione si conservano nel passaggio dall'insieme ℕ dei naturali all'insieme ℤ degli interi?
7. È vero che tutte le proprietà della moltiplicazione si conservano nel passaggio dall'insieme ℕ dei naturali all'insieme ℤ degli interi?
8. È vero che le proprietà di ordinamento si conservano nel passaggio dall'insieme ℕ dei naturali all'insieme ℤ degli interi?
9. È vero che il prodotto di due qualsiasi numeri negativi è maggiore di ciascun fattore?
10. È vero che il prodotto di due qualsiasi numeri interi positivi è maggiore di ciascun fattore?
11. È vero che la somma di due qualsiasi numeri interi non nulli è maggiore di ciascun addendo?
12. Si sa che per ogni coppia di numeri naturali a, b $(b\neq 0)$, se q è il massimo numero naturale tale che $bq<a$, allora esiste uno ed un solo numero naturale r $(r<b)$ tale che $a=bq+r$.
   Come risulta modificata questa proprietà nel passaggio dall'insieme ℕ all'insieme ℤ?
13. Rispetto a quali di queste operazioni l'insieme ℤ risulta chiuso?
   addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione.
14. La potenza avente per base un intero non nullo e per esponente un naturale è negativa in un solo caso su quattro. Quale? Quali sono gli altri tre casi?
15. È vero che, considerati due qualsiasi numeri interi a, b, risulta $|a+b|=|a|+|b|$?
16. Se a^2+b è un numero intero allora a, b sono certamente numeri interi. È vero o è falso?

RISPOSTE.

1. No. Come dice un vecchio adagio, una rondine non fa primavera. La proprietà commutativa vale se risulta $a^b=b^a$ per qualsiasi scelta dei numeri a, b. Siccome, evidentemente: $2^3\neq 3^2$, la proprietà non vale.
2. No. Infatti: $5^5+5^4=5\cdot 5^4+5^4=(5+1)\cdot 5^4=6\cdot 5^4$.
3. No. Infatti, lo sviluppo della potenza di 10 con esponente n non è altro che il numero 1 seguito da n zeri e la somma delle cifre di questo numero è evidentemente 1, che non è divisibile per 3.
4. Sì, ma solamente se uno dei due numeri è 2 e la differenza fra il numero dato e lo stesso 2 è un numero primo. (Un esempio e un contro esempio: 15=2+13 va bene; 23=2+21 non va bene). In ogni altro caso no, non esistono due numeri primi che hanno come somma un numero dispari, dal momento che per ottenere un numero dispari sommandone due altri, uno di questi deve essere pari (e l'altro dispari) e ogni numero pari diverso da 2 non è primo.
5. Se si indica con n il numero delle partite vinte dal Borgorosso, è n+1 quello delle partite pareggiate. Ragion per cui la squadra ha totalizzato i seguenti punti: $N=3n+(n+1)=4n+1$. Si desume che il resto della divisione di N per n è 1. Tra le alternative proposte c'è un solo numero che ha questa caratteristica ed è 65. Infatti: $65=4\times 16+1$. Quindi [C] è l'alternativa corretta.
6. Sì.

7. No. Se, infatti, è vero che $a>b \to am>bm$, comunque si prendano a, b, m in $\mathbb{N}$ purché $m\neq0$, la proprietà risulta vera in $\mathbb{Z}$ solo se $m>0$; se invece $m<0$ allora $a>b \to am<bm$.

8. Non tutte. Intanto perché la proprietà di monotonia della moltiplicazione subisce una correzione nel passaggio da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, poi perché nell'insieme $\mathbb{N}$ c'è un elemento che non supera nessun altro elemento dell'insieme, a differenza dell'insieme $\mathbb{Z}$ dove un tale elemento manca.

9. Sì. Infatti il prodotto è positivo e ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo.

10. No. A meno che non si escluda che uno dei due fattori sia 1.

11. No. Per esempio: $(+7)+(-3)<(+7)$.

12. Quando i numeri a, b sono interi il quoziente q è il numero tale che $|q|$ è il massimo numero per cui si ha $|b|\cdot|q|<|a|$ e il resto r è tale che $|r|<|b|$.

13. Addizione, moltiplicazione, sottrazione.

14. Se la base è negativa e l'esponente è dispari, la potenza è negativa. Negli altri tre casi (base negativa ed esponente pari, base positiva ed esponente pari o dispari) la potenza è positiva.

15. No. Infatti $|(+2)+(-3)|=1$ mentre $|+2|+|-3|=5$. Lo stesso accade ogni volta che i due numeri sono discordi. Se, invece, i due numeri sono concordi, effettivamente: $|a+b|=|a|+|b|$. In generale, qualunque siano i numeri interi a, b, si ha: $|a+b|\leq|a|+|b|$.

16. È falso. Basta un controesempio per provarlo. Infatti: $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=2$.