Prerequisiti:
- Primi elementi di geometria piana.
- Nozioni elementari di calcolo algebrico.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *fornire esempi di coppie ordinate*
- *costruire e rappresentare simbolicamente relazioni fra insiemi*
- *fornire, di una relazione, una rappresentazione matriciale, cartesiana o sagittale*
- *definire, riconoscere ed eventualmente dimostrare le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva di una determinata relazione definita in un dato insieme*
- *riconoscere ed eventualmente spiegare di quali proprietà – tra riflessiva, simmetrica e transitiva – gode una determinata relazione definita in un dato insieme*
- *definire una relazione di equivalenza e riconoscere relazioni di equivalenza*
- *utilizzare l'operazione di passaggio al quoziente per definire nuovi enti matematici*
- *utilizzare il linguaggio degli insiemi e della logica per descrivere situazioni varie*

10.1 **Coppie ordinate. Prodotto cartesiano.**
10.2 **Relazioni.**
10.3 **Relazioni in un insieme. Proprietà notevoli.**
10.4 **Partizione di un insieme. Relazione di equivalenza. Insieme quoziente.**

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Prodotto cartesiano. Relazioni.

Unità 10

10.1 COPPIE ORDINATE. PRODOTTO CARTESIANO

10.1.1 Quando si considera un insieme, in genere non c'è bisogno di tenere conto dell'ordine in cui sono presi i suoi elementi. In altre parole, l'insieme {a,b,c} è la stessa cosa dell'insieme {b,a,c} o dell'insieme {c,b,a} o di un qualsiasi altro insieme che si ottiene da quello scambiando di posto i vari elementi.

In particolare, prendendo un qualunque insieme formato da due elementi – mettiamo a,b – risulta: {a,b}={b,a}. Così, per esempio, è la stessa cosa dire {Luna, Terra} oppure {Terra, Luna}.

Di solito un insieme siffatto è chiamato *coppia* (o *insieme binario*). I suoi elementi si suppongono distinti. Vale a dire che l'insieme {a, a} si scrive più semplicemente {a}.

Ora, però, spesso si deve tenere conto anche dell'ordine in cui sono fissati gli elementi di un dato insieme e segnatamente di una coppia.

Per comprendere meglio quello che vogliamo dire, supponi che con la scrittura:

INTER – JUVENTUS

si indichi una ben nota partita di calcio del nostro campionato.

Certamente questa partita non è la stessa di quest'altra:

JUVENTUS – INTER .

Nella prima è l'Inter che gioca in casa, nella seconda è la Juventus.

Una coppia, in cui si distingue tra primo e secondo elemento, si dice ***coppia ordinata*.**

I suoi elementi si dicono anche *componenti* della coppia.

Se il primo elemento di una coppia ordinata è a ed il secondo è b, la coppia ordinata si indica con la scrittura seguente: **(a, b)**.

La scrittura **(b, a)** indica invece la coppia ordinata di prima componente b e di seconda componente a.

Con la scrittura **(a, a)** si indica la coppia ordinata le cui componenti sono entrambe uguali ad a.

Per cui, se $a \neq b$, risulta $(a,b) \neq (b,a)$.

Invece:

(a, b)=(a', b') se e solo se [a=a' e b=b'].

ESERCIZIO. Immagina di lanciare una moneta TESTA-CROCE. Supponi che esca CROCE. Supponi, poi, che in un secondo lancio esca TESTA. Nel doppio lancio si è avuto dunque l'esito evidenziato dalla seguente coppia ordinata: (CROCE, TESTA). Scrivi tutti i possibili esiti del doppio lancio.

10.1.2 Supponi, adesso, di lanciare per due volte consecutive un dado con le facce numerate da 1 a 6: i possibili esiti sono costituiti evidentemente da tutte le coppie ordinate (a,b), dove a,b sono elementi qualunque dell'insieme I={1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Tutte queste coppie ordinate possono essere considerate come elementi di un insieme, che si chiama *prodotto cartesiano* di I per I.

Anche l'insieme di tutte le frazioni con termini in $\mathbb{N}$ può essere concepito come l'insieme delle coppie ordinate (a,b), con $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}_0$. Quest'insieme si chiama *prodotto cartesiano* di $\mathbb{N}$ per $\mathbb{N}_0$.

In generale:

Presi due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** di A per B l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Si indica con una delle scritture seguenti:

$$\mathbf{A \times B}, \quad \mathbf{A \cdot B}, \quad \mathbf{AB}$$

e si legge in ogni caso: «A cartesiano B». In simboli:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) | \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}.$$

Invece di $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ di solito si scrive: $\mathbf{A}^2$.

ESEMPI:

1) Se A={1,2,3} e B={1,2} risulta: A×B = { (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) } .

2) Se I = {T,C} si ha: I^2 = { (T,T), (T,C), (C,T), (C,C) } .

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Dati gli insiemi A={a,b,c} e B={1,2}, trova A×B e B×A. Spiega perché A×B≠B×A.
2. Dati gli insiemi A={a,b}, B={x,y} e C={1,2}, trova (A×B)×C e A×(B×C).
   Spiega perché (A×B)×C≠A×(B×C).
3. Dato l'insieme A={a,b,c}, trova A^2.

10.1.3 Se almeno uno dei due insiemi di cui si vuole il prodotto cartesiano è l'insieme vuoto, non è possibile costituire alcuna coppia ordinata e pertanto il prodotto cartesiano dei due insiemi è a sua volta l'insieme vuoto. Di modo che, qualunque sia l'insieme A, risulta:

$$\mathbf{A} \times \emptyset = \emptyset \times \mathbf{A} = \emptyset.$$

10.1.4 È utile rappresentare graficamente il prodotto cartesiano di due insiemi A, B. Lo si può fare in diversi modi. Ne descriviamo due.

- Un primo modo consiste nel servirsi di una tabella a righe e colonne (detta anche ***tabella a doppia entrata***), come quella riportata sotto (Tab. 1), dove è rappresentato l'insieme X×Y, essendo X l'insieme {Mario, Aldo, Piero} e Y l'insieme {cravatta rossa, cravatta blu, cravatta verde, cravatta gialla}. Questa rappresentazione si chiama **rappresentazione tabulare** (o **matriciale**).
  Ogni casella rappresenta una coppia ordinata in cui la prima componente indica un elemento di X e la seconda un elemento di Y; componenti che per comodità abbiamo indicato con le iniziali dei nomi cui si riferiscono. L'insieme di tutte le caselle rappresenta X×Y.

c. gialla	(M,g)	(A,g)	(P,g)
c. blu	(M,b)	(A,b)	(P,b)
c. verde	(M,v)	(A,v)	(P,v)
c. rossa	(M,r)	(A,r)	(P,r)
Y/X	Mario	Aldo	Piero

TAB. 1

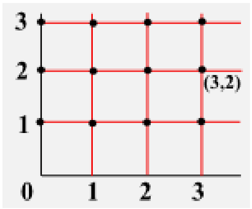

FIG. 1

- Un secondo modo – tipico delle situazioni in cui gli insiemi coinvolti sono particolari insiemi numerici – consiste nel riportare gli elementi dei due insiemi su due semirette graduate, solitamente una orizzontale ed una verticale, aventi la stessa origine, come in figura 1, dove sono considerati gli insiemi X={0,1,2,3} e Y={1,2,3}, e che si spiega da sé. L'insieme dei nodi del reticolo che si viene a formare è la rappresentazione grafica di X×Y.
  Questa rappresentazione si chiama **rappresentazione cartesiana**.

Un esempio. Posto che A indichi un insieme di squadre di calcio (o di basket, o di rugby, eccetera), un interessante sottoinsieme del prodotto cartesiano A^2 è costituito dall'insieme delle partite di un torneo che si

svolga con incontri di andata e ritorno.
Mettiamo, per fissare le idee, che le squadre che formano l'insieme A siano le seguenti:

$$S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8 .$$

Ebbene, l'insieme di tutte le partite del torneo è quello evidenziato dalla tabella 2, dove le caselle contrassegnate col segno "=", essendo rappresentative di coppie del tipo (a,a), non individuano chiaramente nessuna partita. (La rappresentazione è parziale: completala tu). In simboli quest'insieme P è scritto in questo modo: $P = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A, x \neq y\}$. Evidentemente $P \subset A^2$.

S8	S1-S8	S2-S8			S5-S8		S7-S8	=
S7	S1-S7		S3-S7			S6-S7	=	
S6	S1-S6			S4-S6		=		S8-S6
S5	S1-S5	S2-S5			=		S7-S5	
S4	S1-S4			=	S5-S4			S8-S4
S3	S1-S3		=	S4-S3			S7-S3	
S2	S1-S2	=				S6-S2		S8-S2
S1	=		S3-S1					
	S1	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**	**S7**	**S8**

TAB. 2

ESERCIZIO. Si lancia per due volte consecutive un dado con le facce numerate da 1 a 6.
Quante sono le possibili coppie (ordinate) di numeri che si possono presentare?
Fra le coppie possibili quante sono quelle in cui la somma dei due numeri usciti non supera 6?
Visualizza la situazione con una rappresentazione grafica.

10.2 RELAZIONI

10.2.1 Uno dei concetti più importanti nella matematica (ed anche nella vita di tutti i giorni) è quello di **relazione**. Ad onor del vero, l'abbiamo già usato in passato, anche se in modo intuitivo.
Esso è impiegato col significato di associazione, di collegamento tra oggetti di insiemi diversi o dello stesso insieme.
Qui ci limitiamo, di norma, al caso in cui gli insiemi nei quali si prendono gli oggetti collegati siano due, eventualmente coincidenti. In questo caso la relazione si dice ***relazione binaria***. E, per fissare meglio le idee, prendiamo le mosse da una situazione particolare.

- Dati allora, per esempio, gli insiemi $A=\{1, 2, 3\}$ e $B=\{2, 3, 4\}$, diciamo, sempre per esempio, che l'elemento x preso in A è associato (o è in relazione) con l'elemento y preso in B se "x+y è un numero pari". Si capisce subito che:

1 non è in relazione con 2;	1 è in relazione con 3;	1 non è in relazione con 4;
2 è in relazione con 2;	2 non è in relazione con 3;	2 è in relazione con 4;
3 non è in relazione con 2;	3 è in relazione con 3;	3 non è in relazione con 4.

Se indichiamo con $\mathcal{R}$ la relazione considerata, il fatto "x è in relazione con y" si scrive simbolicamente così:

$$x \,\Re\, y,$$

che, nel caso specifico significa: "x+y è un numero pari".
Per contro, il fatto "x non è in relazione con y" si scrive in questo modo:

$$x \,\overline{\mathcal{R}}\, y.$$

In altri termini:

$$x\,\overline{\mathcal{R}}\,y \text{ equivale a dire } \overline{x\,\mathcal{R}\,y}\ ^{(1)}.$$

Nell'esempio in esame, $x\overline{\mathcal{R}}y$ significa sostanzialmente: "non è vero che x+y è un numero pari" ossia, detto con parole diverse, "x+y è un numero non pari".
Allora, sempre con riferimento all'esempio particolare, scrivendo in forma simbolica, si ha:

$$1\,\overline{\mathcal{R}}\,2,\quad 1\,\mathcal{R}\,3,\quad 1\,\overline{\mathcal{R}}\,4,\quad 2\,\mathcal{R}\,2,\quad 2\,\overline{\mathcal{R}}\,3,\quad 2\,\mathcal{R}\,4,\quad 3\,\overline{\mathcal{R}}\,2,\quad 3\,\mathcal{R}\,3,\quad 3\,\overline{\mathcal{R}}\,4.$$

La situazione può essere visualizzata, per esempio con una rappresentazione matriciale, come nella tabella 3, dove le "crocette" apposte in alcune caselle evidenziano le coppie (x,y), con x∈A ed y∈B, tali che $x\,\mathcal{R}\,y$.

4		x	
3	x		x
2		x	
	1	**2**	**3**

TAB. 3

- Un altro esempio. Considerato l'insieme A={1,2,3,4,5}, la relazione $\mathcal{R}$ sia adesso la seguente: "x≤y", con x,y∈A. Si ha evidentemente:

$$1\,\mathcal{R}\,2,\quad 2\,\mathcal{R}\,4,\quad 2\,\overline{\mathcal{R}}\,1,\quad 4\,\mathcal{R}\,2,\quad \text{eccetera.}$$

Anche questa situazione può essere visualizzata, per esempio con una rappresentazione cartesiana, come in figura 2, dove le coppie (x,y) tali che $x\,\mathcal{R}\,y$ sono evidenziate da "pallini".

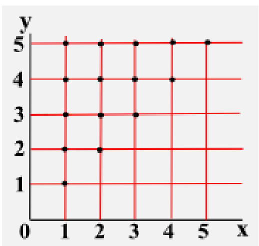

FIG. 2

Sapresti fornire, nello stesso insieme A={1,2,3,4,5}, la rappresentazione cartesiana della relazione "x è un divisore di y"?

10.2.2 A questo punto proviamo a dare una definizione generale di relazione:

Si dice **relazione (binaria)**, definita da un insieme A verso un insieme B, ogni proposizione che associa elementi di A ad elementi di B, tale che, comunque si prendano x∈A ed y∈B, sia possibile stabilire se x è associato ad y o se non lo è.

Se la relazione è indicata simbolicamente con $\mathcal{R}$, per esprimere che un certo a∈A è associato da essa con un certo b∈B, scriviamo:

---

[1] Ricordiamo che il simbolo $\overline{\text{P}}$ rappresenta la negazione della proposizione P e si legge "non P" che è come dire "non è vero che P". Ad altre modalità di indicare la negazione di una relazione generica $\mathcal{R}$ preferiamo la scrittura $\overline{\mathcal{R}}$ poiché si uniforma al modo di indicare la negazione di una proposizione. Anche se poi, per relazioni specifiche, come per esempio $=, \in, \subset$, ci serviamo di scritture più tradizionali come, rispettivamente: $\neq, \notin, \not\subset$, ottenute barrando trasversalmente le relazioni corrispondenti.

$$\mathbf{a}\,\mathcal{R}\,\mathbf{b} \quad (\text{talvolta } \mathcal{R}\colon \mathbf{a} \to \mathbf{b})$$

e leggiamo: «ad a è associato (o corrisponde) b nella relazione $\mathcal{R}$ », oppure: «ad a la $\mathcal{R}$ associa b», o ancora, in particolare se è riferito al secondo modo di scrivere: «la relazione $\mathcal{R}$ che ad a associa b».

Per esprimere invece che «ad a non è associato b nella relazione $\mathcal{R}$ », scriviamo: $a\overline{\mathcal{R}}b$.

Considerata una relazione $\mathcal{R}$, definita da un insieme A verso un insieme B, il sottoinsieme di A, formato dagli x associati dalla $\mathcal{R}$ a qualche y di B, si chiama **dominio** della relazione. A sua volta l'insieme B si definisce **codominio** della relazione. In particolare il sottoinsieme di B, formato dagli y associati dalla $\mathcal{R}$ a qualche x di A, si chiama **immagine** di $\mathcal{R}$.
Per esempio, se $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4\}$ ed R è la relazione "$x+y<5$, definita da A verso B, il dominio di $\mathcal{R}$ è l'insieme $\{1, 2\}$, B è ovviamente il codominio, mentre l'immagine di $\mathcal{R}$ è l'insieme $\{2, 3\}$.

10.2.3 L'insieme

$$\mathbf{G} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x}\in\mathbf{A},\ \mathbf{y}\in\mathbf{B},\ \mathbf{x}\boldsymbol{\mathcal{R}}\mathbf{y}\},$$

cioè l'insieme delle coppie ordinate (x,y), con $x\in A$ ed $y\in B$, tali che ad x è associato y nella relazione $\mathcal{R}$, definita da A verso B, si chiama ***grafico della relazione*** $\mathcal{R}$.
Con riferimento all'esempio precedente, il grafico della relazione è l'insieme:

$$G = \{(1,2), (1,3), (2,2)\}.$$

Talvolta si scrive anche così:

$$\mathbf{G} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{A}\times\mathbf{B} \mid \mathbf{x}\boldsymbol{\mathcal{R}}\mathbf{y}\};$$

o addirittura, se sono impliciti gli insiemi ai quali ci si riferisce e non c'è possibilità di equivoci, in quest'altro modo:

$$\mathbf{G} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x}\boldsymbol{\mathcal{R}}\mathbf{y}\}.$$

Una relazione il cui grafico è l'insieme vuoto si dice ***vuota*** (o ***impossibile***).
Un esempio, ancorché banale, di relazione vuota è la relazione "$x+y<0$" definita dall'insieme dei numeri naturali verso se stesso. Questo, perché la somma di due numeri naturali non è mai negativa.

È evidente che, $\forall x\in A$ e $\forall y\in B$:

$$(x,y)\in G \to x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{e} \quad x\,\mathcal{R}\,y \to (x,y)\in G;$$

ossia:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{G} \leftrightarrow \mathbf{x}\boldsymbol{\mathcal{R}}\mathbf{y}.$$

Questa doppia implicazione ed il fatto che $G\subseteq A\times B$ permettono di:
1) identificare una relazione col suo grafico;
2) considerare una relazione definita da A verso B come un sottoinsieme di $A\times B$.

In altri termini: **Considerati due qualsiasi insiemi A e B, una relazione $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ da A verso B è assegnata non solo tramite una proposizione che esprime il legame tra gli elementi dei due insiemi, ma anche mediante il suo grafico.**

Nota Bene. È interessante notare che, assegnata una proposizione che definisca una relazione $\mathcal{R}$ da un insieme A verso un insieme B, è univocamente determinato il grafico G della relazione. Ma, al contrario, assegnato il grafico di una relazione non è univocamente determinata una proposizione che definisca la relazione. Sia perché di proposizioni ce ne può essere più d'una, ma sia anche perché non è detto che qualcuna ce ne sia.
Qualche esempio a chiarimento di quanto detto.

- Il grafico G = {(1,2), (1,4), (1,8), (2,4), (2,8), (4,8)} della relazione $\mathcal{R}$, definita dall'insieme {1, 2, 4, 8} verso se stesso, può essere generato dalla proposizione: "x è minore di y", così come dalla proposizione: "x è divisore proprio di y".
- Considerati gli insiemi A={1, 2, 3} e B={4, 5, 6}, la relazione $\mathcal{R}$, definita da A verso B, il cui grafico sia l'insieme G = {(1, 4), (1, 6), (2, 4)}, non è caratterizzata da alcuna particolare proposizione. A meno che non si voglia assumere come tale la proposizione banale "x$\mathcal{R}$y se (x,y) appartiene al grafico G".

Tutto questo ci porta a concludere che la definizione di relazione può essere data o come abbiamo fatto all'inizio di questo paragrafo, oppure in quest'altro modo, più sofisticato:

«***Una relazione binaria $\mathcal{R}$ fra due insiemi* A *e* B *è la terna ordinata* $\mathcal{R}$ = (A,B,G), *dove* G⊆A×B. *L'insieme* G *si dice grafico della relazione***»

Detto questo, è comunque un esercizio interessante cercare di risalire dal grafico G di una relazione $\mathcal{R}$ ad una proposizione che caratterizzi la relazione medesima. Proposizione che non sia ovviamente la seguente: "x $\mathcal{R}$y se (x,y) appartiene al grafico G assegnato".

Per esempio, considerati gli insiemi:

$$A = \{a, b\} \quad e \quad B = P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \},$$

una relazione $\mathcal{R}$ da A verso B è quella il cui grafico è:

$$G = \{(a,\{a\}), (a,\{a,b\}),(b,\{b\}), (b,\{a,b\})\}.$$

Essa è rappresentata nella tabella 4. Con un po' di riflessione si riesce anche a formulare una proposizione che definisca la relazione ed è la seguente: «x$\mathcal{R}$Y se x∈Y», con x∈A ed Y∈B.

{a,b}	x	x
{b}		x
{a}	x	
∅		
	a	**b**

TAB. 4

Ti invitiamo a risolvere i seguenti esercizi.

1. Considerati gli insiemi A={x | x∈ℕ, 2≤x≤5} e B={x | x∈ℕ, 0≤x≤6}, trova il grafico della relazione "x>y" definita da A verso B, e danne una rappresentazione matriciale.
2. Considerati gli insiemi A={x|x∈ℕ,0<x≤7} e B={x|x∈ℕ,0≤x<10}, trova il grafico della relazione $\mathcal{R}$: x→y=2x, definita da A verso B, e danne una rappresentazione matriciale.
3. Considerato l'insieme A={x|x∈ℕ,0≤x≤5}, enuncia una proposizione che caratterizzi la relazione, definita da A in A, della quale la figura 3 costituisce una rappresentazione cartesiana.

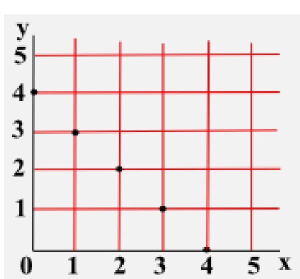

FIG. 3

4					x
3				x	x
2			x	x	x
1		x	x	x	x
0	x	x	x	x	x
	0	1	2	3	4

TAB. 5

4. Considerato l'insieme A={0,1,2,3,4}, enuncia una proposizione che caratterizzi la relazione, definita da

A in A, della quale la tabella 5 costituisce una rappresentazione.

5. Considerato l'insieme $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 0\le x\le 10\}$, trova il grafico della relazione "x+y è un numero primo", definita da A in A, e danne una rappresentazione cartesiana.
6. Considerato l'insieme $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 0\le x\le 10\}$, trova il grafico della relazione "x+y è un divisore di 20", definita da A verso A, e danne una rappresentazione cartesiana.
7. Considerato l'insieme $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, 0\le x\le 7\}$, trova i grafici delle seguenti relazioni, definite da A verso A, e fornisci, di ciascuna, una rappresentazione cartesiana:
   $\mathcal{R}1$: "x y è pari"; $\mathcal{R}2$: "x y è dispari"; $\mathcal{R}3$: "x y è divisore di 60";
   $\mathcal{R}4$: "x+y è pari"; $\mathcal{R}5$: "x+y è dispari"; $\mathcal{R}6$: "x+y è primo"; $\mathcal{R}7$: "x+y<0".
8. LABORATORIO DI MATEMATICA.
   Considera l'insieme $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e le relazioni, definite da A in A, i cui grafici sono i seguenti:
   $G1 = \{(3,1), (4,2), (5,3)\}$;
   $G2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$;
   $G3 = \{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (3,2), (4,2), (5,2), (4,3), (5,3), (5,4)\}$;
   $G4 = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$;
   $G5 = \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4)\}$.
   Prova ad enunciare per ciascun grafico, una proposizione non banale che definisca la relazione.
   Se possibile, discutine in classe con i tuoi compagni, eventualmente con l'aiuto del professore.

10.2.4 In quest'altro esempio consideriamo l'insieme $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e la relazione $\mathcal{R}$, definita da A verso A, dal grafico seguente (Fig. 4): $G = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$. Anche adesso si riesce a formulare una proposizione esplicativa di $\mathcal{R}$ ed è la seguente «$x+y\le 4$», con $x,y\in A$.

In questo caso, oltre alla rappresentazione cartesiana (Fig. 4) ed alla rappresentazione matriciale (che puoi costruire da te), è interessante una terza rappresentazione grafica della relazione. Si tratta di indicare con alcuni "pallini" gli elementi dell'insieme A (Fig. 5) e di collegare con un arco (o una freccia) orientato da a verso b ogni coppia tale che $a\mathcal{R}b$. Ogni elemento a tale che $a\mathcal{R}a$, cioè ogni elemento che è in relazione con se stesso, è collegato con se medesimo da un cappio.

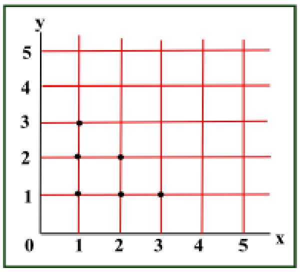

FIG. 4

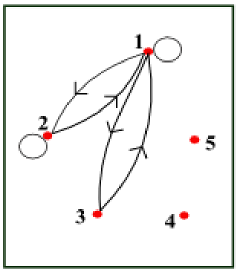

FIG. 5

Si ottiene così un insieme di "archi orientati" che, congiunto ai cappi, costituisce la rappresentazione grafica cercata: si chiama **rappresentazione sagittale** (o **grafo**). Naturalmente può essere costruita la rappresentazione sagittale (grafo) anche di una relazione definita da un insieme A verso un insieme B distinto da A. In questo caso chiaramente non ci saranno cappi ma solo frecce orientate da A verso B.
L'insieme di tali frecce costituisce per l'appunto il grafo della relazione.
A titolo si esempio, in figura 6 è illustrata la rappresentazione sagittale della relazione illustrata nella tabella 4 con una rappresentazione matriciale.

Ti proponiamo un paio di esercizi su questo argomento.

1. Considerato l'insieme $D(12) = \{x|x\in\mathbb{N}, x \text{ è un divisore di } 12\}$, trova il grafico della relazione "è divisore", definita da D(12) in D(12), e danne una rappresentazione matriciale ed una sagittale.
2. Il grafo disegnato in figura 7 rappresenti la relazione «è padre» nell'insieme di persone {a,b,c,d,e,f}. Disegna un grafo che, nello stesso insieme, rappresenti la relazione «è figlio».
   Di ciascuna delle due relazioni fornisci una rappresentazione matriciale.

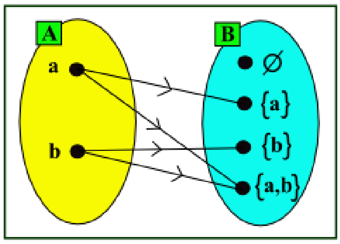

FIG. 6

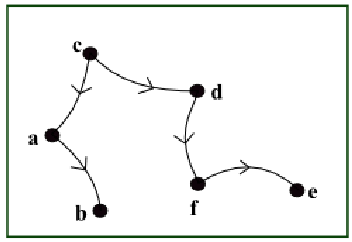

FIG. 7

10.2.5 Se $\mathcal{R}$ è una relazione definita da A verso B, dove A e B sono due insiemi dati, è legittimo considerare la relazione $\mathcal{R}^{-1}$ definita da B verso A, tale che $\mathbf{b\mathcal{R}^{-1}a}$ **se e solo se** $\mathbf{a\mathcal{R}b}$, dove $a\in A$ e $b\in B$. La $\mathcal{R}^{-1}$ si chiama **relazione inversa** di R.

Per esempio:

- Se $\mathcal{R}$ è la relazione "x è minore di y", definita da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ (Fig. 8), la sua inversa è la relazione "y è maggiore di x", definita sempre da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ (Fig. 9); infatti, $\forall a,b\in\mathbb{N}$: $a>b$ se e solo se $b<a$.

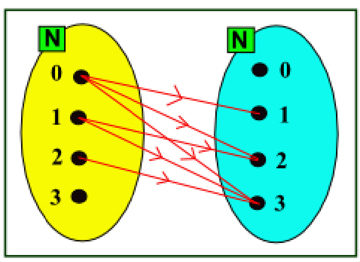

FIG. 8

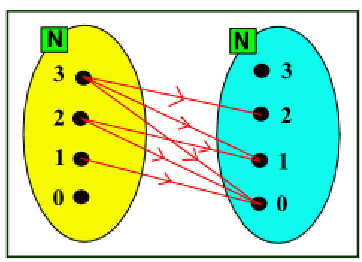

FIG. 9

- Se $\mathcal{R}$ è la relazione che ad $x\in\mathbb{N}$ associa $y\in\mathbb{N}_0$ tale che "x è multiplo di y" (Fig. 10), la sua inversa è la relazione che ad $y\in\mathbb{N}_0$ associa $x\in\mathbb{N}$ tale che "y è divisore di x" (Fig. 11).

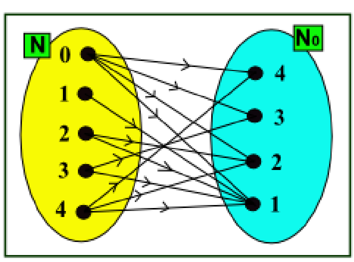

FIG. 10

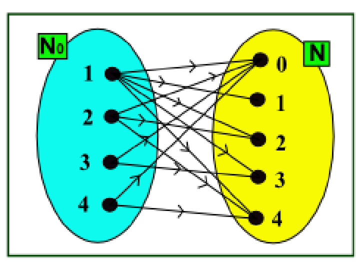

FIG. 11

- Se $\mathcal{R}$ è la relazione che ad $x\in\mathbb{N}$ associa $y\in\mathbb{N}_p$ (numeri naturali pari) tale "x è la metà di y" (Fig. 12), la sua inversa è la relazione che ad $y\in\mathbb{N}_p$ associa $x\in\mathbb{N}$ tale che "y è il doppio di x" (Fig. 13).

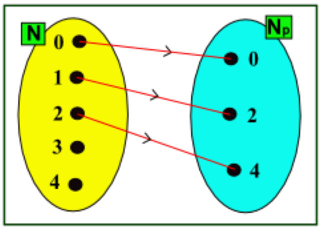

FIG. 12

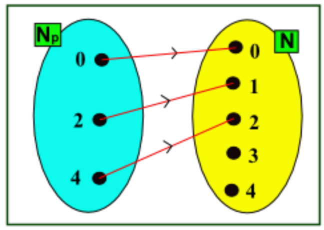

FIG. 13

10.2.6 Considerati due insiemi A e B, se una relazione, definita da A verso B, è tale da associare ad ogni elemento x di A uno ed un solo elemento y di B e, nel medesimo tempo, la sua inversa associa ad ogni elemento y di B uno ed un solo elemento di A (naturalmente quell'elemento x di cui y era l'immagine) allora si dice che la relazione realizza una **corrispondenza biunivoca** (o **corrispondenza uno-a-uno**) tra A e B. La relazione, definita da A in B, si dice in questo caso ***relazione biiettiva***.

Per esempio, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi ℕ ed $\mathbb{N}_p$ la relazione "x è la metà di y", dove $x \in \mathbb{N}$ ed $y \in \mathbb{N}_p$, come mostra chiaramente il seguente grafo (Fig. 14), quantunque parziale.

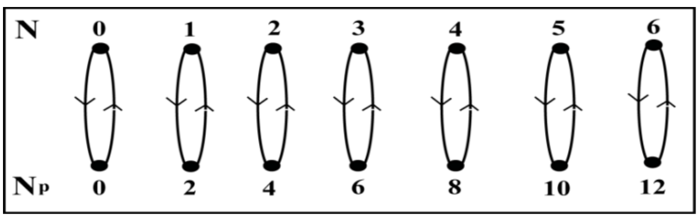

FIG. 14

Occorre precisare che, se esiste una corrispondenza biunivoca tra due dati insiemi, aventi ciascuno almeno due elementi, ce n'è certamente più d'una. Come mostrano i seguenti schemi, i quali evidenziano alcune delle corrispondenze biunivoche tra gli insiemi {a,b,c} e {1,2,3}:

$1 \to a,\ 2 \to b,\ 3 \to c$; $\quad 1 \to b,\ 2 \to c,\ 3 \to a$; $\quad 1 \to c,\ 2 \to a,\ 3 \to b$.

Prova a trovare tutte le corrispondenze biunivoche tra i due insiemi considerati.

10.3 RELAZIONI IN UN INSIEME. PROPRIETÀ NOTEVOLI

10.3.1 Se una relazione è definita da un insieme A verso lo stesso insieme A, si parla di **relazione nell'insieme A**. Il suo grafico è, in questo caso, un sottoinsieme di A^2.

Forniamo due esempi di relazioni definite entrambe nell'insieme ℕ dei numeri naturali.

- Relazione "x y è pari" (Fig. 15, dove, invece di ℕ, si è preso il suo sottoinsieme {1,2,3,4});

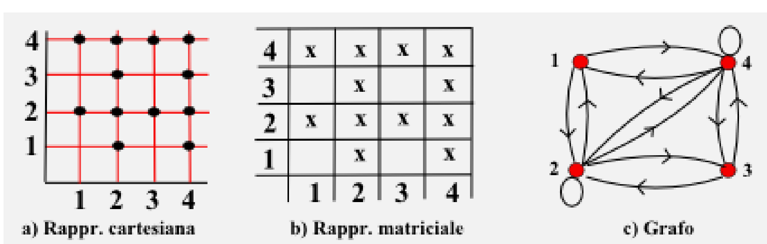

FIG. 15

- Relazione "x y è dispari" (Fig. 16, dove, invece di ℕ, si è preso il suo sottoinsieme {1,2,3,4}).

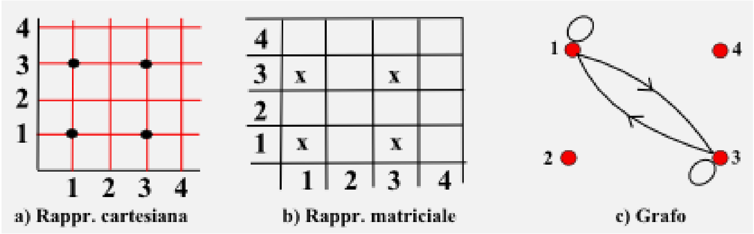

FIG. 16

10.3.2 Le relazioni definite in un insieme **possono** godere di proprietà notevoli, che andiamo a definire.

Una relazione $\mathcal{R}$, definita in un dato insieme A:

- **gode della *proprietà riflessiva*** (o, come anche si dice, ***è riflessiva***) se ad ogni elemento x di A la R associa quello stesso elemento. In simboli:
$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A},\ \mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{x}\,;$$
- **gode della *proprietà simmetrica*** (o ***è simmetrica***) se, ogni volta che ad un elemento x∈A la $\mathcal{R}$ associa un elemento y∈A, accade pure che essa ad y associ x. In simboli:
$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{A},\ \ \mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{y} \ \rightarrow\ \mathbf{y}\mathcal{R}\mathbf{x}\,;$$
- **gode della *proprietà transitiva*** (o ***è transitiva***) se, ogni volta che ad un x∈A la $\mathcal{R}$ associa un y∈A e ad y associa un z∈A, accade pure che ad x essa associ z. In simboli:
$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbf{A},\ \ \mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{y} \ \wedge\ \mathbf{y}\mathcal{R}\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{z}\,.$$

Alcuni esempi.

- La relazione $\mathcal{R}$: «xy è pari», definita nell'insieme ℕ dei numeri naturali (Fig. 15), è simmetrica ma non è riflessiva né transitiva.
  Che sia simmetrica è evidente, come è evidente che non è riflessiva. Forse richiede una breve spiegazione il fatto che non sia transitiva. Ora, non ci sono dubbi che: $1\mathcal{R}2$ e $2\mathcal{R}3$. Se la proprietà fosse transitiva, dovrebbe risultare $1\mathcal{R}3$. Invece evidentemente $1\overline{\mathcal{R}}3$. E ciò è sufficiente per concludere che $\mathcal{R}$ non è transitiva.
- La relazione $\mathcal{R}$: «xy è dispari», definita in ℕ (Fig. 16), è simmetrica e transitiva ma non è riflessiva.
  Che sia simmetrica e non riflessiva è evidente. Non è difficile spiegare che è transitiva. Se, infatti, xy è dispari, ciò significa che sia x sia y sono numeri dispari; analogamente, se yz è dispari, ciò vuol dire che sia y sia z sono numeri dispari. Pertanto, essendo dispari sia x sia z, anche xz è dispari. E questo ragionamento vale qualunque siano i numeri naturali x, y, z. Cosicché:
$$\forall x,y,z \in \mathbb{N},\ x\mathcal{R}y \ \wedge\ y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z.$$
- La relazione $\mathcal{R}$: «x+y è pari», definita in ℕ, è riflessiva, simmetrica e transitiva.
  Ti invitiamo a rappresentarla graficamente, limitandoti però all'insieme {1,2,3,4,5,6}. Ti invitiamo pure a dimostrare che $\mathcal{R}$ è riflessiva e simmetrica.
  Noi proviamo che è transitiva. A questo riguardo osserviamo che, se x+y è pari, allora x, y sono o entrambi pari o entrambi dispari; analogamente, se y+z è pari, allora y, z sono o entrambi pari o entrambi dispari.
  Ora, quando x, y sono entrambi pari, ovviamente anche y, z lo sono; per cui x, z sono entrambi pari e, di conseguenza, x+z è pari. Stesso discorso quando x, y (ed y, z) sono entrambi dispari.
  Siccome il ragionamento vale per ogni scelta di x, y, z, possiamo concludere che:
$$\forall x,y,z \in \mathbb{N},\ x\mathcal{R}y \ \wedge\ y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z.$$

- Cosa si può dire della relazione $\mathcal{R}$: «x+y è dispari», definita in $\mathbb{N}$?
  Fornisci una rappresentazione grafica di essa, limitandoti però all'insieme {1,2,3,4,5,6}.
- La relazione $\mathcal{R}$: «x≠y», definita in $\mathbb{N}$ (Fig. 17), è simmetrica ma non è riflessiva né transitiva.
  Che sia simmetrica e non riflessiva è evidente. Per giustificare che non è transitiva basta osservare che si ha: $2\mathcal{R}3$ e $3\mathcal{R}2$ ma $2\overline{\mathcal{R}}2$.

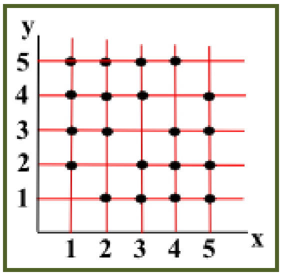

FIG. 17

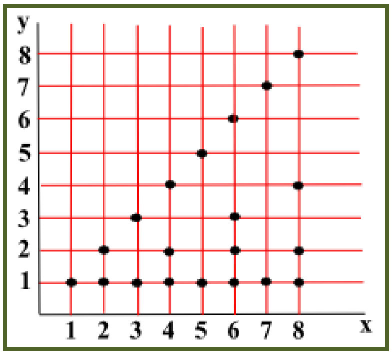

FIG. 18

- La relazione $\mathcal{R}$: «x è multiplo di y», definita in $\mathbb{N}_0$, è riflessiva e transitiva ma non è simmetrica (Fig. 18).
  È immediato stabilire che la relazione è riflessiva e non simmetrica.
  Mostriamo che è transitiva. Se x è multiplo di y, esiste un numero naturale h tale che x=hy; così pure se y è multiplo di z, esiste un numero naturale k tale che y=kz. Per cui: x=h(kz), cioè: x=(hk)z; ossia, siccome chiaramente $hk\in\mathbb{N}$, x è multiplo di z. Poiché il ragionamento vale per qualsiasi scelta di x, y, z in $\mathbb{N}_0$, dobbiamo concludere che:

$$\forall x,y,z\in\mathbb{N}_0,\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z.$$

- La relazione $\mathcal{R}$: «X⊂Y», definita nell'insieme delle parti di un dato insieme A, è transitiva ma non è riflessiva né simmetrica (Tab. 6, dove A={a,b,c}).

{a,b,c}	x	x	x	x	x	x	x	
{b,c}	x		x	x				
{a,c}	x	x		x				
{a,b}	x	x	x					
{c}	x							
{b}	x							
{a}	x							
∅								
	∅	**{a}**	**{b}**	**{c}**	**{a,b}**	**{a,c}**	**{b,c}**	**{a,b,c}**

TAB. 6

- La relazione $\mathcal{R}$: «x è uguale ad y», definita in un insieme di numeri (per esempio, nell'insieme dei numeri reali) è riflessiva, simmetrica e transitiva.
  La spiegazione è immediata: basta ricordare che la scrittura X=Y indica che Y si può mettere al posto di X e, viceversa, X al posto di Y.
- La relazione "x>y", definita in $\mathbb{N}$ (Fig. 19, dove si è preso il sottoinsieme {0,1,2,3,4} di $\mathbb{N}$), è transitiva, ma non è riflessiva né simmetrica.

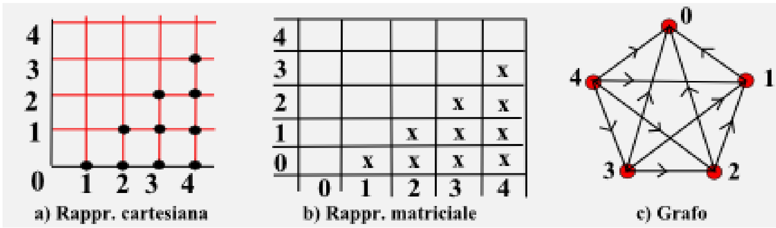

FIG. 19

- Consideriamo adesso la relazione $\mathcal{R}$: «x è parallela ad y», definita nell'insieme I delle rette del piano, intendendo che «la retta x è parallela alla retta y se le due rette non hanno punti comuni». Essa è simmetrica ma non è riflessiva e non è transitiva.
  Che sia simmetrica è evidente; è altrettanto evidente che non è riflessiva. Non è transitiva poiché chiaramente, se la retta a è parallela alla retta b, risulta: a$\mathcal{R}$b e b$\mathcal{R}$a ma a$\overline{\mathcal{R}}$a .
- La relazione $\mathcal{R}$: «x è perpendicolare ad y», definita nell'insieme I delle rette del piano, è simmetrica, ma non è riflessiva né transitiva.
  Da solo puoi fornire una spiegazione di ciò.

10.3.3 Dall'esame delle rappresentazioni cartesiane dei grafici delle relazioni (o da quello delle rappresentazioni matriciali) si possono evidenziare delle circostanze che costituiscono vere e proprie regole per riconoscere se una data relazione è o no riflessiva, è o no simmetrica. Precisamente:

- Se appartengono al grafico della relazione (Fig. 18) tutti i punti del reticolo che si trovano sulla retta che unisce i punti immagini delle coppie del tipo (a,a) (è detta *diagonale principale*), allora la relazione è riflessiva. Se non tutti questi punti appartengono al grafico, la relazione non è riflessiva (Figure 15, 16, 17, 19).
- Se, ogni volta che un certo nodo, corrispondente ad una determinata coppia ordinata (a,b), appartiene al grafico della relazione, vi appartiene pure quello corrispondente alla coppia (b,a), allora la relazione è simmetrica (Figure 15, 16, 17). Se esiste qualche coppia (a,b) che appartiene al grafico, ma contemporaneamente non vi appartiene la coppia (b,a), allora la relazione non è simmetrica (Figure 18, 19).
- Riguardo alla proprietà transitiva bisogna controllare di volta in volta.

10.3.4 Esercizi da risolvere.

1. Stabilisci di quali delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva godono le seguenti relazioni nei rispettivi insiemi:
   a) "è padre di" in un insieme qualunque di persone.
   b) "è più a NORD di" in un insieme di città.
   c) "è cugino di" in un insieme di persone.
   d) "a coincide con b oppure a è perpendicolare a b" nell'insieme delle rette del piano.
   e) "x≤y" nell'insieme dei numeri reali.
   f) "è un divisore proprio di" in $\mathbb{N}_0$ (si ricorda che per *divisore proprio* di a s'intende un divisore di a diverso da a).
   g) "non è un divisore di" in $\mathbb{N}_0$.
   h) "x+y è un numero primo" in ℕ–{0,1}.
   i) ® "xy è un numero primo" in ℕ–{0,1}.

l) "incide" (incide = ha uno ed un sol punto in comune) nell'insieme delle rette del piano.

m) La relazione $\mathcal{R}$, definita nell'insieme delle parti dell'insieme {a,b,c}, tale che $X\mathcal{R}Y$ se $a\in X\cap Y$.

n) La relazione $\mathcal{R}$, definita in $\mathbb{N}$, tale che: "$x\mathcal{R}y$ se x è pari ed y è dispari ovvero, quando x ed y sono entrambi pari o entrambi dispari, se $x<y$".

o) La relazione, definita nell'insieme {a,b,c}, il cui grafico è:

$$\{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}.$$

2. ® Dimostra che:

Se una relazione $\mathcal{R}$, definita in un dato insieme I, è tale che per ogni $x\in I$ esiste almeno un $y\in I$ tale che $x\mathcal{R}y$ e se la $\mathcal{R}$ è simmetrica e transitiva allora è pure riflessiva.

Fornisci, poi, degli esempi di relazioni non riflessive, facendo vedere che per esse viene meno almeno una delle tre ipotesi formulate nell'enunciato suddetto; vale a dire almeno una delle seguenti proposizioni:

1ª) $\forall x\in I, \exists y\in I$ tale che $x\mathcal{R}y$; 2ª) $\mathcal{R}$ è simmetrica; 3ª) $\mathcal{R}$ è transitiva.

10.4 PARTIZIONE DI UN INSIEME. RELAZIONE DI EQUIVALENZA. INSIEME QUOZIENTE

10.4.1 Consideriamo l'insieme S degli studenti che frequentano una stessa scuola, formata, tanto per fissare le idee, da 2 corsi completi di 5 classi ciascuno. Indichiamo con:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$$

i sottoinsiemi di S costituiti ciascuno dagli alunni che frequentano rispettivamente le seguenti classi di quella scuola:

1ªA, 2ªA, 3ªA, 4ªA, 5ªA, 1ªB, 2ªB, 3ªB, 4ªB, 5ªB.

Tali sottoinsiemi (non vuoti) di S hanno una caratteristica importante, visualizzata in figura 20:

- due qualunque di essi sono disgiunti (cioè non hanno elementi comuni);
- la loro unione è l'insieme S.

Una suddivisione effettuata nel modo sopra descritto si chiama più propriamente *partizione* di S.

In generale:

Una **partizione** di un dato insieme X è una suddivisione di X in sottoinsiemi non vuoti, due a due disgiunti, la cui unione sia I.

I sottoinsiemi che determinano la partizione di un insieme si dicono **classi** dell'insieme.

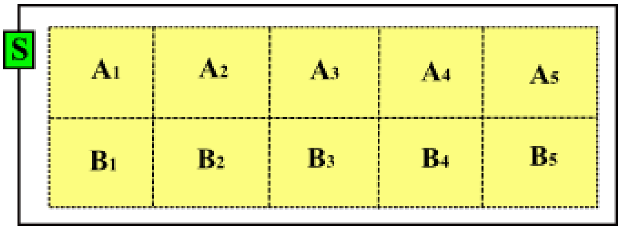

FIG. 20

È evidente che, effettuata una partizione di X, ogni elemento x di X appartiene ad una ed una soltanto delle sue classi. Infatti, se x non appartenesse ad alcuna classe, esse non ricoprirebbero X, come invece deve essere; e se x appartenesse a due classi, queste non sarebbero insiemi disgiunti, come invece deve accadere che sia.

ESEMPI E CONTROESEMPI.

- Considerato l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, l'insieme $\mathbb{N}_p$ dei numeri pari e l'insieme $\mathbb{N}_d$ dei numeri dispari costituiscono una partizione di $\mathbb{N}$. Si ha, infatti (Fig. 21):
$$\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_d = \mathbb{N} \ \text{ ed } \ \mathbb{N}_p \cap \mathbb{N}_d = \varnothing .$$
- Determinano una partizione di $\mathbb{N}$ gli insiemi:
$$A=\{0,1\}, \ B=\{x\in\mathbb{N};\ x \text{ è primo}\}, \ C=\{x\in\mathbb{N};\ x \text{ è composto}\}.$$
Risulta infatti (Fig. 22):
$$A\cup B\cup C=\mathbb{N},\ A\cap B=\varnothing,\ A\cap C=\varnothing,\ B\cap C=\varnothing.$$
- Non costituiscono invece una partizione di $\mathbb{N}$ gli insiemi:
$$H=\{x\in\mathbb{N};\ x\geq 5\}, \ K=\{x\in\mathbb{N}\ ;\ x\leq 5\}.$$
Infatti, se è vero che $H\cup K=\mathbb{N}$ è però vero che $H\cap K=\{5\}\neq\varnothing$ (Fig. 23).
- Né formano una partizione di $\mathbb{N}$ gli insiemi:
$$W=\{x\in\mathbb{N};\ x<5\}, \ V=\{x\in\mathbb{N};\ x>5\}.$$
Infatti, se è vero che $W\cap V=\varnothing$ è però vero che $W\cup V=\mathbb{N}-\{5\}\neq \mathbb{N}$ (Fig. 24).

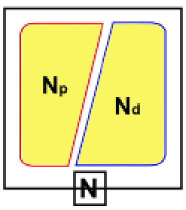

FIG. 21

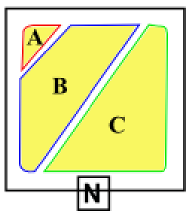

FIG. 22

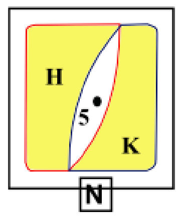

FIG. 23

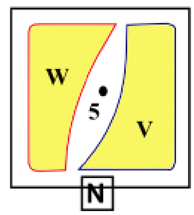

FIG. 24

Prova a risolvere i seguenti esercizi.

1. Considerato l'insieme S degli studenti della tua classe, forma almeno 4 partizioni di S.
2. Considerato l'insieme C delle squadre di calcio che, nell'anno in corso, militano nel campionato italiano di serie A, forma almeno 4 partizioni di C.
3. Considerato l'insieme P dei tuoi professori di quest'anno, forma almeno 4 partizioni di P.
4. Considerato l'insieme $I=\{1,2,3\}$, forma tutte le possibili partizioni di I e rappresentali con altrettanti diagrammi di Eulero-Venn.
5. Considerato l'insieme $I=\{1,2,3,4\}$, forma tutte le possibili partizioni di I e rappresentali con altrettanti diagrammi di Eulero-Venn.
6. Siano dati i seguenti insiemi: $A = \{x\in\mathbb{Q}^+ \mid x^2<2\}$, $B = \{x\in\mathbb{Q}^+ \mid x^2>2\}$.
Formano una partizione dell'insieme $\mathbb{Q}^+$ dei numeri razionali non negativi?
7. Siano dati i seguenti insiemi: $A = \{x\in\mathbb{R}^+ \mid x^2<2\}$, $B = \{x\in\mathbb{R}^+ \mid x^2>2\}$.
Formano una partizione dell'insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali non negativi?

10.4.2 Negli esempi descritti nel precedente paragrafo abbiamo costruito una partizione di un dato insieme assegnando, in pratica, le classi che determinano la partizione.

Ma una partizione può essere fissata pure tramite un'opportuna relazione definita nell'insieme. Questa relazione è la cosiddetta "relazione di equivalenza".

Dapprima diremo che cos'è e poi faremo vedere come, effettivamente, essa operi una partizione dell'insieme in cui è definita.

Definizione:

Una relazione binaria, definita in un dato insieme, si dice **relazione di equivalenza** se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Per esempio, nell'insieme degli abitanti di una Città, la relazione "X abita nella stessa via di Y" è una relazione di equivalenza.
Anche la relazione "x+y è pari" definita in ℕ è una relazione di equivalenza.

In un insieme di uomini, la relazione "X è fratello di Y" è una relazione di equivalenza? Rifletti sull'accezione del termine "fratello".

Considerata una relazione "$\mathcal{E}$" di equivalenza, definita in un insieme S non vuoto, e preso un qualunque elemento $a \in S$, l'insieme degli elementi di S, ciascuno dei quali risulti associato ad a dalla relazione $\mathcal{E}$, si chiama ***classe di equivalenza***. Si indica comunemente con la scrittura:

$$[\mathbf{a}].$$

Dunque, in simboli:

$$[\mathbf{a}] = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S} \mid \mathbf{x}\mathcal{E}\mathbf{a}\}\ .$$

Vale il seguente teorema.
♦ TEOREMA. Considerata una relazione $\mathcal{E}$ di equivalenza, definita in un insieme S non vuoto, le classi di equivalenza di S rispetto ad $\mathcal{E}$ costituiscono una partizione di S.
DIMOSTRAZIONE. Bisogna dimostrare che:
1) le classi di equivalenza sono due a due disgiunte; 2) la loro unione è l'insieme S.
Dimostriamo il punto 1).
Considerata la classe [a] degli elementi di S equivalenti ad un certo $a \in S$, sia b un altro elemento di S non equivalente ad a e sia [b] la classe di equivalenza individuata da b.
Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ allora esiste $w \in [a] \cap [b]$ e quindi $w \in [a]$ e $w \in [b]$; di conseguenza: $w\mathcal{E}a$ e $w\mathcal{E}b$; pertanto $a\mathcal{E}b$. Contro l'ipotesi fatta nella scelta di b, che si abbia appunto $a\overline{\mathcal{E}}b$. Dunque $[a] \cap [b] = \emptyset$.
Data l'arbitrarietà con cui sono stati scelti a, b in S, possiamo concludere che le classi di equivalenza di S rispetto ad $\mathcal{E}$ sono due a due disgiunte.
Per dimostrare il punto 2), ammettiamo che le classi di equivalenza di S rispetto ad $\mathcal{E}$ siano i seguenti insiemi:

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

e poniamo:

$$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup \ldots = T\ .$$

Si tratta di far vedere che I=T.
Intanto ogni $x \in S$ genera una ed una sola classe di equivalenza e pertanto appartiene a questa classe; di conseguenza $x \in T$. D'altra parte, ogni x di T appartiene ad una delle classi di equivalenza e, dal momento che questa è inclusa in S, $x \in I$. Insomma:

$$\forall x \in S, x \in T \quad \text{e} \quad \forall x \in T, x \in S.$$

Come dire per l'appunto che S=T.

10.4.3 Considerato un insieme S e detta $\mathcal{E}$ una relazione di equivalenza definita in S, due elementi di S appartenenti alla stessa classe di equivalenza si dicono ***equivalenti***.
Naturalmente ogni elemento $a \in S$ individua una classe di equivalenza e può essere assunto come "rappresentante" della stessa, ma non si identifica con essa, giacché quella classe può essere rappresentata

da un qualunque altro elemento di S equivalente ad a.
In altri termini, se a, b sono due qualunque elementi equivalenti di S rispetto alla relazione di equivalenza $\mathcal{E}$, allora [a] e [b] costituiscono la stessa classe di equivalenza e, viceversa, se [a] e [b] costituiscono la stessa classe di equivalenza allora a e b sono due elementi equivalenti di I rispetto ad $\mathcal{E}$. In simboli:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{S},\ \ \mathbf{a}\mathcal{E}\mathbf{b} \leftrightarrow [\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]\ .$$

Per comprendere meglio questo fatto, consideriamo l'insieme F delle frazioni $\frac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}_0$.
Consideriamo la relazione $\mathcal{E}$ definita in F in questo modo:

$$\frac{a}{b}\mathcal{E}\frac{c}{d}\ \text{ se e solo se }\ ad=bc\ .$$

Essa è riflessiva, simmetrica e transitiva. Infatti, quali che siano le frazioni scelte in F:

- $\frac{a}{b}\mathcal{E}\frac{a}{b}$ dal momento che $ab=ba$;
- $\frac{a}{b}\mathcal{E}\frac{c}{d} \rightarrow \frac{c}{d}\mathcal{E}\frac{a}{b}$ dal momento che $ad=bc \rightarrow bc=ad$;
- $\frac{a}{b}\mathcal{E}\frac{c}{d}$ et $\frac{c}{d}\mathcal{E}\frac{e}{f} \rightarrow \frac{a}{b}\mathcal{E}\frac{e}{f}$ dal momento che $(ad=bc\ \text{ et }\ cf=de) \rightarrow (ad)(cf)=(bc)(de) \rightarrow$
  $\rightarrow (af)(cd)=(be)(cd)$;
  ora, se $cd\neq 0$, dall'ultima uguaglianza segue $af=be$ e di conseguenza $\frac{a}{b}\mathcal{E}\frac{e}{f}$; se invece $cd=0$, essendo $d\neq 0$, deve essere $c=0$ e perciò, ricordando che $ad=bc$ et $cf=de$, risulta $a=0$ et $e=0$ e dunque ancora $af=be$ e perciò $\frac{a}{b}\mathcal{E}\frac{e}{f}$.

Dunque $\mathcal{E}$ è una relazione di equivalenza e questo fatto permette di ripartire F in classi di equivalenza, ponendo in ognuna di esse le frazioni equivalenti fra loro.
Alcune di queste classi sono i seguenti insiemi:

$$\left[\frac{1}{1}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in F \ \middle|\ \frac{x}{y}\mathcal{E}\frac{1}{1}\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots\right\}; \qquad \left[\frac{2}{1}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in F \ \middle|\ \frac{x}{y}\mathcal{E}\frac{2}{1}\right\} = \left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \dots\right\};$$

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{x}{y} \in F \ \middle|\ \frac{x}{y}\mathcal{E}\frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots\right\}.$$

Cosicché, siccome per esempio $\frac{1}{2}$ appartiene alla classe $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots\right\}$, possiamo prendere proprio $\frac{1}{2}$ per rappresentarla. Senza però che quella classe s'identifichi con $\frac{1}{2}$. Essa infatti può essere **rappresentata** anche da $\frac{2}{4}$, da $\frac{3}{6}$, eccetera, tutti elementi della classe stessa e perciò equivalenti ad $\frac{1}{2}$.
Come sai, ciascuna di queste classi di equivalenza si chiama ***numero razionale***.

10.4.4 In generale, le classi di equivalenza di un dato insieme S rispetto ad una determinata relazione $\mathcal{E}$ (naturalmente di equivalenza) costituiscono dei nuovi enti che si assumono come elementi di un nuovo insieme, che si indica genericamente con la scrittura:

$$\mathbf{S}/\mathcal{E}$$

e si chiama ***insieme quoziente*** di S rispetto ad $\mathcal{E}$.
Nell'esempio precedente l'insieme quoziente di F rispetto alla relazione di equivalenza ivi definita è proprio l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

L'operazione che, partendo dall'introduzione di una relazione di equivalenza $\mathcal{E}$ in un dato insieme S,

permette di giungere alla costruzione dell'insieme quoziente di S rispetto ad $\mathcal{E}$, è chiamata ***passaggio al quoziente***.
S'intende che quest'operazione è tanto più importante quanto più significativo è il nuovo ente che concettualmente è implicito nella costruzione delle classi di equivalenza.
L'esempio descritto sopra, che ha portato al concetto di numero razionale, è certamente uno dei più significativi.

Adesso vogliamo fornire un altro importante esempio, tratto questa volta dalla geometria.
In uno degli esempi mostrati in precedenza, abbiamo visto che la relazione di parallelismo fra rette del piano così definita: "due rette si dicono parallele se non hanno punti in comune", non è riflessiva e non è transitiva; quindi non è una relazione di equivalenza.
Ora, siccome ai matematici fa comodo avere una relazione di parallelismo che sia per l'appunto una relazione di equivalenza, hanno deciso di modificare la succitata definizione di parallelismo, assumendo quest'altra:

«In un piano, due rette si dicono ***parallele*** se coincidono o se non hanno punti comuni».

E, per distinguere questa situazione da quell'altra, hanno pensato di chiamare *parallele in senso stretto* (o *strettamente parallele*) due rette che non hanno punti comuni.
Orbene, la relazione $\mathcal{R}$: «x è parallela ad y», definita nell'insieme Ω delle rette del piano nel nuovo modo, è una relazione di equivalenza, come tu stesso puoi controllare.
Essa opera, pertanto, una partizione di Ω in classi di equivalenza. Ogni classe di equivalenza, cioè ogni insieme di rette parallele, è un nuovo ente geometrico che si chiama ***direzione***.
Naturalmente ogni retta individua una direzione, che però non si identifica con la retta. La retta, in ogni caso, può essere scelta per rappresentare quella direzione; cosa che infatti solitamente si fa.

L'importanza e la fecondità dell'operazione di passaggio al quoziente si rivelano in tutta la loro portata nello svolgimento del programma di matematica, anche se noi, pur avendo qualche occasione di utilizzarla ancora, e segnatamente in un'occasione particolarmente importante, non lo faremo spesso.

Per il momento ti invitiamo, comunque, ad illustrare con qualche esempio, tratto dalle tue conoscenze matematiche pregresse o dall'esperienza di tutti i giorni, quanto sopra esposto. Ti saranno certamente d'aiuto gli esercizi che abbiamo predisposto alla fine di questo paragrafo.

Ti rammentiamo, ad ogni buon conto e in estrema sintesi, le cose dette sopra a questo riguardo:
1. È dato un insieme in forma "grezza".
2. In esso è introdotta una relazione di equivalenza.
3. Tale relazione organizza gli elementi dell'insieme ripartendoli in classi.
4. Ognuna di queste classi può essere rappresentata da un suo qualunque elemento, con il quale però non s'identifica; anzi le diverse classi si possono assumere come elementi di un nuovo insieme, l'insieme quoziente.

La figura 25 sintetizza queste fasi. Lo fa con riferimento al passaggio dall'insieme F delle frazioni all'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, ma lo schema si conserva in ogni altra situazione.

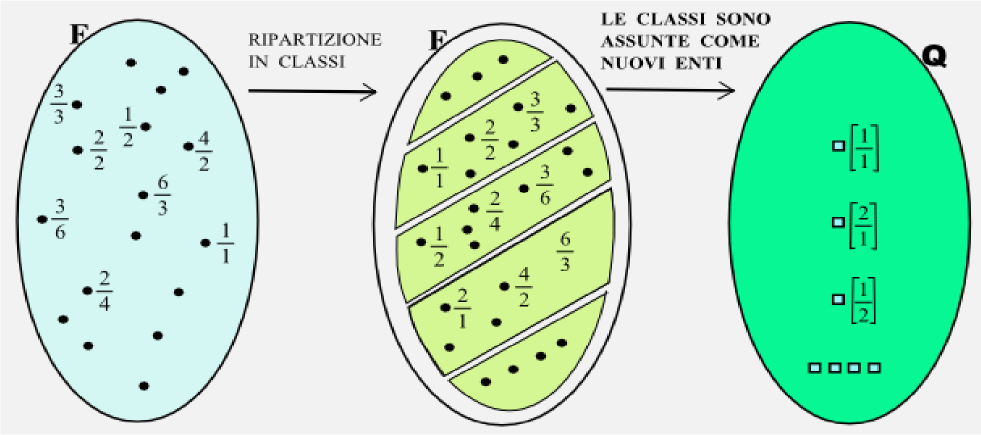

FIG. 25

Ecco, dunque, gli esercizi che ti invitiamo a risolvere:

1. Fornisci almeno tre esempi di insiemi in cui è definita una relazione di equivalenza. In ciascun caso indica le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.
2. Considerato l'insieme $I=\{x\in\mathbb{N} \mid 0<x\leq 6\}$, fornisci la rappresentazione cartesiana dei grafici di quattro relazioni definite in I, delle quali almeno due siano relazioni di equivalenza. Di queste ultime determina le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.
3. Considerato un mazzo di carte da gioco napoletane, introduci nell'insieme di queste carte due relazioni d'equivalenza e, per ciascuna di esse, trova le classi d'equivalenza e l'insieme quoziente.
4. Dopo aver stabilito che la seguente relazione, definita nell'insieme indicato, è una relazione di equivalenza, determina le classi di equivalenza e l'insieme quoziente:
   a) "a diviso per 2 dà lo stesso resto di b diviso per 2" in $\mathbb{N}$.
   b) "a diviso per 3 dà lo stesso resto di b diviso per 3" in $\mathbb{N}$.
   c) "a diviso per n, con $n\in\mathbb{N}_0$, dà lo stesso resto di b diviso per n" in $\mathbb{N}$.
   d) "a è candidato nella stessa lista di b" nell'insieme dei candidati di un dato collegio elettorale in una determinata consultazione elettorale.
   e) "a gioca nella stessa squadra di b" nell'insieme dei calciatori che militano nel campionato italiano di serie A nell'anno in corso.
   f) "a abita allo stesso numero civico di b" nell'insieme delle persone che abitano in una data via di una determinata città.
   g) "a ha lo stesso padre e la stessa madre di b" in un dato insieme di persone.
   h) "Il punto P e il punto Q, presi in un piano in cui è prefissato un punto O, sono allineati con O".

LABORATORIO DI MATEMATICA

1. Per giustificare che ciascuna delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva è indipendente dalle altre due è sufficiente fornire degli esempi di relazioni che godono di due delle tre proprietà suddette ma non della terza.
   Con questo intendimento fornisci almeno un esempio di relazione:
   - riflessiva, simmetrica, non transitiva;
   - riflessiva, transitiva, non simmetrica;
   - simmetrica, transitiva, non riflessiva.

   Discutine in classe con i tuoi compagni e, se del caso, fatti aiutare dal professore.

2. Tre carte di uno stesso mazzo sono disposte una di fianco all'altra, coperte, come nello schema sottostante (Fig. 26).

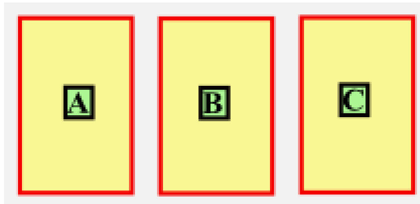

FIG. 26

Dire di quali carte si tratta e qual è la loro disposizione, sapendo che:
- una carta è un "Re" e due sono "Assi";
- alla destra di un Asso vi è una carta di "denari";
- vi sono due carte di "coppe" affiancate.

VERIFICHE [2]

1. Una delle seguenti proposizioni è falsa. Individuala.
A) $\{a,b\}=\{b,a\}$; B) $(a,b)\in\{a,b\}^2$; C) $(a,b)\subset\{a,b\}^2$; D) $(a,b)\notin\{a\}x\{b\}$.

2. Sapendo che $A\times B = \{ (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e) \}$, trova gli insiemi A e B.

3. Sapendo che $A\times B = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \}$, trova: $A\cup B$ e $A\cap B$.

4. È organizzato un torneo di calcio fra 5 squadre, con incontri di andata e ritorno. Quanti incontri si dovranno disputare complessivamente? Quanti ne dovrà disputare ogni squadra? Visualizza la situazione con una rappresentazione grafica.

5. Considerato l'insieme $A=\{x;\ x\in\mathbb{N},\ 0\le x\le 10\}$, trova il grafico della relazione "x+y=7", definita da A in A, e danne una rappresentazione cartesiana.

6. Nella figura sottostante (Fig. 27) è rappresentato il grafo di una relazione definita nell'insieme $\{1,2,3,4\}$. Fornire la rappresentazione cartesiana della medesima relazione.

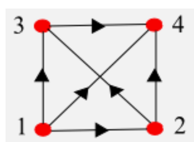

FIG. 27

7. ® Nella figura (Fig. 28) sono rappresentati i grafi di due relazioni definite nel medesimo insieme $\{1,2,3,4,6,12\}$. Fornire di entrambe le relazioni la rappresentazione matriciale ed enunciare per ciascuna di esse una proposizione che la caratterizzi.
Della seconda relazione (Fig. 28b) esiste un grafo più semplice di quello rappresentato qui. Sapresti costruire questo nuovo grafo?

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

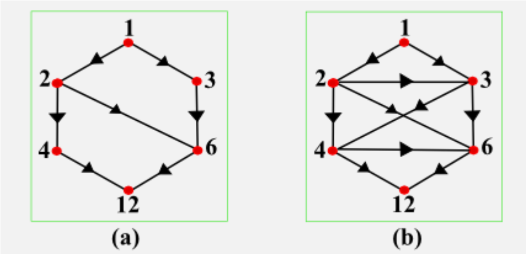

FIG. 28

8. ® Posto che in un dato insieme J sia definita una relazione $\mathcal{R}$ che sia riflessiva, simmetria e transitiva, è lecito affermare che la proprietà riflessiva è una diretta conseguenza delle proprietà simmetrica e transitiva, in base al seguente ragionamento?
« Comunque si scelgano a, b nell'insieme J, in virtù della proprietà simmetrica: $a\mathcal{R}b \rightarrow b\mathcal{R}a$ ed in virtù della proprietà transitiva: $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a \rightarrow a\mathcal{R}a$ ».

9. Si considerino l'insieme I={1, 2, 3, 4, 5, 6} e la relazione "x ed y sono numeri primi fra loro". Fornire la rappresentazione matriciale del suo grafico e dire se la relazione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

10. La definizione di "fratelli" qualche volta genera ambiguità. Per evitare incomprensioni diciamo che «fratelli sono due persone che hanno lo stesso padre e la stessa madre». Per cui ogni persona, in base a questa definizione, si può considerare "fratello" di se stessa.
Fatta questa premessa, considera il grafo disegnato a fianco (Fig. 29). Esso sia una rappresentazione della relazione «è fratello» nell'insieme di persone {a,b,c,d,e}. Fornisci la rappresentazione matriciale della relazione.

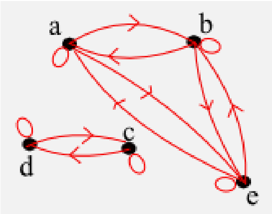

FIG. 29

11. Nell'insieme {a,b,c,d} è definita una relazione di equivalenza. Quali coppie ordinate appartengono senza alcun dubbio al grafico della relazione? Perché?

12. Dimostra che l'inversa di una relazione di equivalenza è essa stessa una relazione di equivalenza.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Se A={a, b} e B={1, 2, 3}, qual è il prodotto cartesiano A×B?

2. Considerato l'insieme A={1,2,3}, l'insieme $J=\{(x,y)\in A^2 \mid x\neq y\}$ può essere scritto elencando tutti i suoi termini. Quali sono questi termini?

3. Delle seguenti implicazioni una sola è vera: quale?

A) Se a, b, c sono numeri naturali qualsiasi, tali che a è multiplo di b ed a è multiplo di c, allora b è multiplo di c oppure c è multiplo di b.

B) Se a, b, c sono numeri naturali qualsiasi, tali che ab è dispari e ac è dispari, allora bc è dispari.

C) Detti a, b, c tre elementi qualsiasi di un insieme A e considerata una relazione $\mathcal{R}$ definita in A, allora: $a\overline{\mathcal{R}}b \wedge b\overline{\mathcal{R}}c \rightarrow a\overline{\mathcal{R}}c$.

D) Detti a, b, c tre qualsiasi numeri reali, allora: $a\neq b \wedge b\neq c \rightarrow a\neq c$.

4. La relazione inversa di “x è maggiore di y”, definita nell’insieme dei numeri reali, è la relazione “y è minore di x”. È vero o falso?

5. Cos’è una corrispondenza biunivoca?

6. La relazione $\mathcal{R}$ così definita nell’insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali: “x$\mathcal{R}$y se e solo se xy è pari” gode della proprietà transitiva. È vero o falso?

7. Delle quattro relazioni rappresentate nella figura sottostante (Fig. 30) due sono relazioni di equivalenza. Quali? Perché le altre due non lo sono?

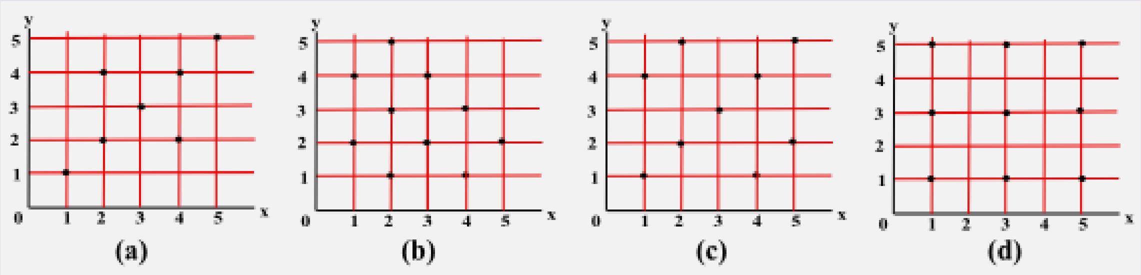

FIG. 30

8. Sei in grado di fornire un esempio di relazione non vuota, che sia simmetrica e transitiva ma non riflessiva?

9. Quali relazioni simmetriche e transitive sono anche riflessive?

10. È possibile che una relazione vuota sia una relazione di equivalenza?

RISPOSTE.

1. A×B = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)}.

2. J = {(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)}.

3. Risposta corretta: B). La A) è falsa: basta prendere a=10, b=5, c=2. La C) è falsa: basta pensare alla relazione $\mathcal{R}$: “x=y” nell'insieme dei naturali; i fatti “5 non è uguale a 7” e “7 non è uguale a 5” non implicano che “5 non è uguale a 5”. La D) è falsa: basta prendere a=c.

4. È vero. Attenzione a non confondere con la proposizione <u>opposta</u> di “x è maggiore di y”, che è invece la proposizione “non è vero che x è maggiore di y”, che è come dire “x non è maggiore di y”, vale a dire “x è minore o uguale ad y”.

5. Una corrispondenza biunivoca è una relazione fra due insiemi, tale che ad ogni elemento del primo insieme associa uno ed un solo elemento del secondo e ad ogni elemento del secondo associa uno ed un solo elemento del primo.

6. È falso. Se, infatti, a è dispari, b è pari e c è dispari, risulta a$\mathcal{R}$b e b$\mathcal{R}$c ma a$\overline{\mathcal{R}}$c.

7. Risposta corretta: (a) e (c). Si tratta infatti di relazioni riflessive, simmetriche e transitive. La (b) è simmetrica ma non è riflessiva né transitiva. La (d) è simmetrica e transitiva ma non è riflessiva.

8. Un esempio è costituito dalla relazione R, definita nell’insieme dei numeri naturali in questo modo: “x$\mathcal{R}$y se e solo se xy è dispari”.

9. Non tutte le relazioni, ma soltanto quelle che, ad ogni elemento dell’insieme in cui la relazione è definita, associano qualche elemento dell’insieme.

10. No. Una relazione d’equivalenza infatti gode certamente della proprietà riflessiva e, per questo, non può essere vuota.