Prerequisiti:
- Primi elementi di geometria piana.
- Nozioni elementari di calcolo algebrico.
- Concetto di relazione.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *riconoscere quando la relazione fra due insiemi è una funzione*
- *rappresentare per punti, in un piano cartesiano, le funzioni* $x \to$ *costante*, $x \to ax$, $x \to ax^2$, $x \to a/x$, $x \to a/x^2$
- *rappresentare per punti una funzione lineare, costante a tratti, lineare a tratti*
- *studiare un fenomeno attraverso la rappresentazione grafica della legge che lo caratterizza*
- *utilizzare il linguaggio delle funzioni per descrivere situazioni varie*
- *utilizzare software idonei per la rappresentazione cartesiana di una funzione*
- *fornire un'esposizione appropriata della evoluzione storica del concetto di funzione*

Funzioni e grafici
Unità 11

11.1 FUNZIONI

11.1.1 Come sai, una relazione definita da un insieme X verso un insieme Y è un criterio che a qualche elemento di X associa qualche elemento di Y (Fig. 1).
Fra le relazioni ve ne sono di quelle che rivestono una grande importanza, non solo in matematica ma anche nelle scienze sperimentali, in quelle economiche, in medicina, eccetera.
Sono le cosiddette "funzioni" e sono caratterizzate dalla seguente definizione:

Una **funzione**, definita da un insieme X verso (o in) un insieme Y, è una relazione che ad ogni elemento di X associa uno ed un solo elemento di Y.

Una funzione definita da un insieme X verso un insieme Y si dice anche **funzione definita su X con valori in Y**.
Al posto di "funzione" sono usati con lo stesso significato, i termini "**corrispondenza univoca**" o "**applicazione**" o "**mappa**".
Il grafico della relazione prende adesso ovviamente il nome di ***grafico della funzione***.
In figura 2 è disegnato il grafo di una funzione definita dall'insieme X={1,2,3,4} verso l'insieme Y={a,b,c,d,e}.

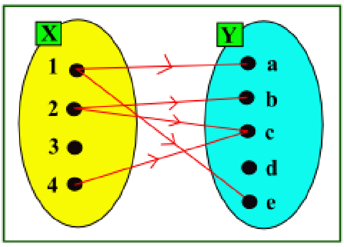


FIG. 1

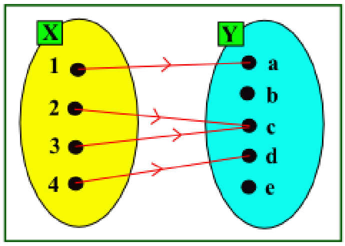


FIG. 2

ESEMPI E CONTROESEMPI.

- La relazione che ad un numero naturale associa la sua metà <u>è una funzione</u> definita da ℕ in ℚ.
- <u>È una funzione</u> di ℕ in ℕ la relazione che ad un numero naturale associa il suo doppio.
- Una situazione in cui una relazione da A verso B <u>non è una funzione</u> di A in B è quella in cui A è un insieme di donne, B un insieme di persone e la relazione è "x∈A è madre di y∈B". A meno che nell'insieme B non vi sia alcuna coppia di fratelli e ogni donna dell'insieme A sia madre di una persona dell'insieme B: nel qual caso la relazione è effettivamente una funzione di A in B.
- Ancora una situazione in cui una relazione da A verso B <u>non è una funzione</u> di A in B è quella in cui A è l'insieme dei professori assegnati ad una determinata classe, B è l'insieme degli studenti di quella classe e la relazione è «x∈A è professore di y∈B».

Alcuni esercizi per te.

1. Dati gli insiemi A={1,2,3,4} e B={1,2,3}, l'insieme {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)} si può considerare il grafico di una funzione di A in B? Visualizza la situazione con un diagramma opportuno.
2. Dati gli insiemi A={1,2,3,4} e B={1,2,3,4,5}, spiega perché l'insieme {(1,1), (2,3), (3,3)} non può essere ritenuto il grafico di una funzione di A in B. Esiste qualche sottoinsieme A' di A tale che l'insieme suddetto possa essere ritenuto il grafico di una funzione di A' in B? Visualizza la situazione con un opportuno diagramma.
3. Dati gli insiemi A={1,2} e B={1,2,3}, spiega perché l'insieme {(1,1), (1,2), (2,3)} non può essere con-

siderato il grafico di una funzione di A in B. Visualizza la situazione con un diagramma opportuno.

4. Dati gli insiemi A={1,2} e B={x,y}, trova tutte le possibili funzioni di A in B e danne una rappresentazione grafica.
5. Nella figura 3 sono disegnate le rappresentazioni cartesiane dei grafici di quattro relazioni definite dall'insieme A={1,2,3,4} verso l'insieme B={1,2,3}. Quali di esse sono funzioni di A in B?

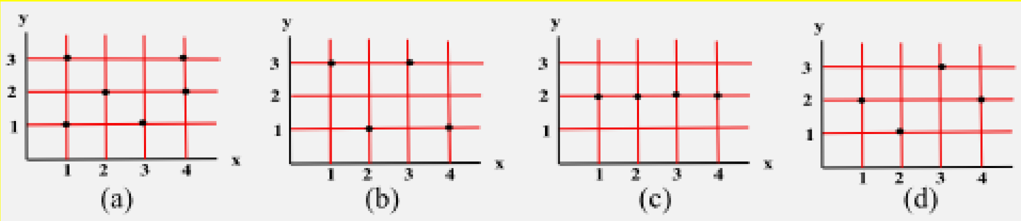


FIG. 3

11.1.2 Consideriamo una funzione f, definita da X verso Y: ammesso che ad $x \in X$ essa associ $y \in Y$, allora la x si dice ***variabile indipendente*** (o ***argomento della funzione***) mentre la y si dice ***variabile dipendente*** (o ***valore della funzione***).

La y si dice pure ***immagine*** di x nella f; la quale x, a sua volta, si chiama ***antimmagine*** (o ***controimmagine***) di y.

Una funzione esprime, in ultima analisi, la legge di dipendenza di una variabile y da una variabile x indipendente. Per questo, si dice pure che **la variabile y è funzione della variabile x**.

L'insieme X, cioè l'insieme di variabilità della x, si chiama ***dominio*** (o ***campo di definizione*** o ***campo di esistenza***) della funzione. Esso, detto in parole povere, è l'insieme in cui si possono prendere i valori da attribuire alla variabile indipendente x.

L'insieme Y, invece, si chiama ***dominio dei valori*** (o ***codominio***) della funzione. A sua volta, l'insieme degli elementi di Y che corrispondono a qualche $x \in X$ si chiama ***immagine*** della funzione.

Il dominio e l'immagine di una funzione f si indicano rispettivamente con le scritture:

$$\mathbf{dom\ f} \qquad \mathbf{im\ f}\,.$$

Evidentemente:

$$\text{dom f} = X \qquad \text{im f} \subseteq Y\,.$$

Per esempio, se f è la relazione che ad $x \in \mathbb{N}$ associa 2x – per cui risultano elementi del grafico della funzione le coppie ordinate $(0,0),\ (1,2),\ (2,4)$, eccetera – f può essere considerata come una funzione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Si ha in questo caso: dom f = $\mathbb{N}$, im f = $\mathbb{N}_P \subset \mathbb{N}$, dove con $\mathbb{N}_P$ abbiamo indicato l'insieme dei naturali pari.

11.1.3 Per esprimere che ad $x \in X$ la funzione f associa $y \in Y$ si scrive:

$$\mathbf{f:\ x \to y}$$

e si legge: «la funzione f che ad x associa y», sottintendendo che $x \in X$ ed $y \in Y$.

Si scrive pure:

$$\mathbf{y = f(x)}$$

e si legge: «y è uguale ad effe di x» [(1)].

---

[1] Il simbolo **f(x)** per indicare una generica funzione di x è dovuto al matematico svizzero Leonhard Euler (1707-1783).

Così, con riferimento alla funzione f : x → 2x, definita da ℕ in ℕ, cioè alla funzione che ad un numero naturale associa il suo doppio, si ha:

$$f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6.$$

Di solito, quando gli insiemi X ed Y sono insiemi di numeri reali, la funzione che si vuole considerare si esprime con la scrittura:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Qui f(x) rappresenta il criterio (spesso, ma non sempre, è una formula matematica) in base al quale, dato x, si può calcolare y. Come nei seguenti esempi:

$$(1)\ \ y = 2x,\ \ \forall\, x \in \mathbb{N}; \qquad (2)\ \ y = x^2 - 1,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}; \qquad (3)\ \ y = \frac{1}{x},\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}_0.$$

A volte, quando sia l'insieme dominio della funzione sia l'insieme immagine sono insiemi di numeri reali, tali insiemi (ed in particolare l'insieme dominio) si sottintendono, scrivendo semplicemente:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

con la tacita intesa che l'insieme dominio sia costituito dai numeri reali che, attribuiti alla x, fanno assumere ad y valori reali.

Così che, per esempio, mentre la funzione (1) sopraddetta deve continuare a scriversi in quel modo perché, se si sottintende il dominio, esso si suppone che sia ℝ e non più ℕ, invece la (2) e la (3) possono essere scritte più semplicemente in questo modo:

$$(2')\ \ y=x^2-1; \qquad (3')\ \ y=\frac{1}{x}\ .$$

È implicito infatti che, relativamente alla (2'), si possono attribuire alla x tutti i valori presi in ℝ, nessuno escluso, e relativamente alla (3') tutti i valori presi in $\mathbb{R}_0$, cioè tutti i valori reali con eccezione del valore 0, per il quale $\frac{1}{x}$ non ha senso.

11.1.4 Una funzione f, definita da X in Y, con X ed Y insiemi di numeri reali, si chiama più propriamente **funzione reale di variabile reale**. Può essere pensata come un insieme di istruzioni che, impartite ad un certo numero x∈X, lo trasformano in un altro numero y∈Y secondo lo schema rappresentato in figura 4.

FIG. 4

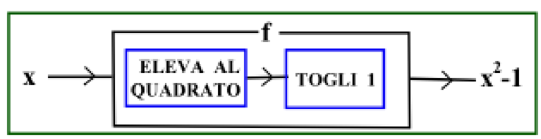


FIG. 5

In particolare, la funzione $y=x^2-1$ esprime il programma di calcolo evidenziato dallo schema di fig 5.

Allo scopo di verificare quanto hai appreso su questa prima parte dello studio delle funzioni, ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Considerato l'insieme A={1,2,3,4}, trova le immagini delle seguenti funzioni di A in ℕ, disegnane una rappresentazione grafica e scrivi i corrispettivi programmi di calcolo:
$$f_1 : x \to 3x-2; \quad f_2 : x \to x^2\,; \quad f_3 : x \to x+2\,.$$
2. Considerato l'insieme A={x∈ℤ : |x|≤3}, trova le immagini delle seguenti funzioni di A in ℤ, disegnane una rappresentazione grafica e scrivi i corrispettivi programmi di calcolo:

$$f_1 : x \to 2x+1; \quad f_2 : x \to x^2-1; \quad f_3 : x \to -x^2+2x-1\ .$$

3. Fornisci il grafico della seguente funzione:

$$f(n)=\begin{cases} 1 & \text{se n è un numero naturale pari minore di 10} \\ 0 & \text{se n è un numero naturale dispari minore di 10} \end{cases}$$

4. Di ciascuna delle seguenti funzioni di A in $\mathbb{Q}$ trova l'immagine, fornisci una rappresentazione grafica e scrivi il programma di calcolo:

$$f_1 : x \to \frac{2}{3}x,\ \text{con } A=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3\right\}; \qquad f_2 : x \to x^2,\ \text{con } A=\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3},\ 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right\};$$

$$f_3 : x \to \frac{1}{x},\ \text{con } A=\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\right\}; \qquad f_2 : x \to x+\frac{1}{x},\ \text{con } A=\left\{\frac{1}{2},\ 1, \frac{3}{2},\ 2, \frac{5}{2},\ 3, \frac{7}{2}\right\}.$$

5. Si consideri la seguente tabella:

x	1	2	3	4	5	6
y	3	5	7	9	11	13

Quale delle seguenti funzioni lega la variabile x alla variabile y?

[A] $y=x+2$. [B] $y=3x$. [C] $y=2x+1$. [D] $y=4x-1$.

6. È data la funzione $f(x)=2x-1$. Trovare l'espressione della funzione $f\,[f(x)]$.

11.1.5 Sai già che di una qualunque relazione tra due insiemi X ed Y è possibile definire la relazione inversa.

Domanda: Se la relazione è una funzione f da X verso Y, la relazione inversa f^{-1} è ancora una funzione, ovviamente da Y verso X?
Prova a rispondere prima di procedere nella lettura.

Un esempio, anche banale, è sufficiente per giustificare una risposta negativa alla domanda.

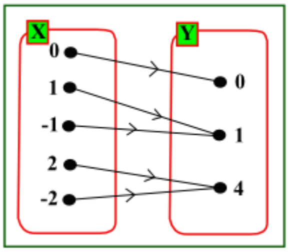


FIG. 6

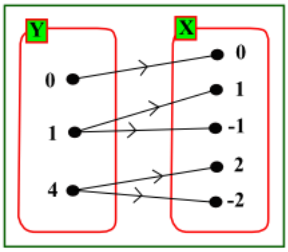


FIG. 7

Dati gli insiemi $X=\{0,\ 1,-1,\ 2,-2\}$ ed $Y=\{0,\ 1,\ 4\}$, consideriamo la funzione $f : x \to x^2$, definita da X verso Y. Constatato che il suo grafico è (Fig. 6):

$$G=\{(0{,}0),\ (1{,}1),\ (-1{,}1),\ (2{,}4),\ (-2{,}4)\},$$

il grafico della relazione f^{-1} è (Fig. 7):

$$G^{-1} = \{(0{,}0),\ (1{,}1),\ (1{,}-1),\ (4{,}2),\ (4{,}-2)\}$$

Ne consegue che la relazione f^{-1} associa, per esempio, ad $1 \in Y$ due elementi di X: 1 e −1.
Basta questo per farci concludere che essa non è una funzione da Y verso X.
La risposta negativa alla domanda deve intendersi però nel senso che <u>non sempre la relazione inversa di una funzione è una funzione</u>. Il che non esclude che lo possa essere in casi particolari.
In effetti, se f è una relazione biiettiva tra due insiemi X ed Y, non solo f è una funzione da X in Y, ma anche la relazione f^{-1} è una funzione da Y in X: basta associare ad $y \in Y$ quell'unico $x \in X$ al quale la f associava, per l'appunto, y (Fig. 8).

In questo caso la f si dice **funzione invertibile** e la funzione f^{-1} si dice **funzione inversa** di f.

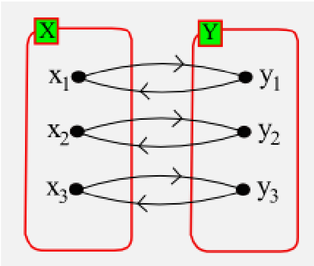


FIG. 8

Alcuni esempi:

- La relazione che ad $x \in X$ associa $y \in Y$, tale che "y è il doppio di x", definita dall'insieme $X=\{1,2,3\}$ verso l'insieme $Y=\{2,4,6\}$ è anzitutto una funzione da X verso Y ed è invertibile. Precisamente la funzione inversa è la funzione che ad $y \in Y$ associa $x \in X$, tale che "x è la metà di y".
- La relazione "P è simmetrico di Q rispetto alla retta r", definita nell'insieme α dei punti di un piano è anzitutto una funzione f di α in α ed è invertibile. Infatti, mentre la funzione f ad ogni punto P di α associa il punto Q simmetrico di P rispetto ad r, la funzione f^{-1} associa P a Q.

Ritorneremo sulle funzioni invertibili più avanti [(2)].

11.2 FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

11.2.1 In questo paragrafo vogliamo soffermarci su alcune particolari funzioni reali di variabile reale: solo qualche cenno, compreso un tentativo di rappresentarle graficamente. Più avanti nel corso degli studi, saranno riprese e studiate in maggiore estensione e profondità.

Prima, però, sono necessarie alcune considerazioni preliminari, indispensabili ai fini della rappresentazione grafica di tali funzioni, ma che torneranno utili anche in seguito.

11.2.2 Incominciamo col riprendere il concetto di retta cartesiana, del quale ci siamo già occupati. Fissiamo su una retta x un **riferimento cartesiano** (O,U). Vale a dire:

- prendiamo su x due punti distinti O ed U: **O** è detto ***origine*** ed **U** è detto ***punto unità***;
- assumiamo la lunghezza del segmento OU come ***unità di misura*** dei segmenti;
- stabiliamo su x come ***verso positivo*** quello che va da O ad U.

La semiretta di origine O passante per U è detta ***semiretta positiva***, quella opposta è detta ***semiretta negativa***. La retta x, su cui è stabilito un riferimento cartesiano, è nota come **retta cartesiana**.

Considerata una retta cartesiana x, è possibile associare ad ogni suo punto P uno ed un solo numero reale x_P e, viceversa, è possibile associare ad ogni numero reale x_P uno ed un solo punto P di x.

Precisamente (Fig. 9):

- Ad ogni punto P della retta x si associa il numero reale x_P tale che la distanza di P da O sia uguale al valore assoluto di x_P, cioè tale che risulti $d(O,P)=|x_P|$, con la condizione che:
  - $x_P = 0$ se P coincide con O;
  - $x_P > 0$ se P appartiene alla semiretta positiva;
  - $x_P < 0$ se P appartiene alla semiretta negativa.

---

[2] Cfr.: Unità 51: Generalità sulle funzioni, N° 51.3.2.

In particolare, considerati il punto U ed il punto V simmetrico di U rispetto ad O, si ha:

$$x_U = 1,\ \ x_V = -1.$$

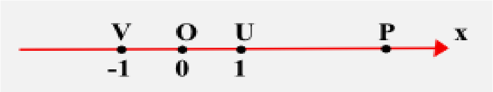


FIG. 9

- Viceversa, ad ogni numero reale x_P si associa il punto P della retta x in modo che la distanza di P da O sia uguale al valore assoluto di x_P, cioè in modo che risulti $d(O,P)=|x_P|$, con la condizione che:
  - se $x_P = 0$ allora P si prende coincidente con O;
  - se $x_P > 0$ allora P si prende sulla semiretta positiva;
  - se $x_P < 0$ allora P si prende sulla semiretta negativa.

In particolare, se $x_P = 1$ allora P coincide con U, se $x_P = -1$ allora P coincide con V.

Dunque ad ogni numero reale x_P corrisponde uno ed un sol punto P di una retta cartesiana e ad ogni punto P di questa retta corrisponde uno ed un sol numero reale x_P.

Ovvero sussiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei punti di una retta cartesiana e l'insieme dei numeri reali. Per questo motivo talvolta **i numeri reali sono chiamati *punti della retta cartesiana* e questa è detta *asse reale***.

Il numero x_P, associato al punto P di una retta cartesiana, si chiama *ascissa* di P. Si scrive in questo modo:

$$P(x_P)$$

e si legge: «il punto P di ascissa x_P». In particolare allora:

$$O(0),\ \ U(1),\ \ V(-1).$$

Ti invitiamo a rappresentare su una retta, sulla quale avrai preventivamente fissato un riferimento cartesiano (O,U), i punti di ascisse:

$$0{,}7 \qquad -\frac{2}{3} \qquad -3{,}2 \qquad \frac{8}{5} \qquad -5{,}6 \qquad \frac{2}{5}.$$

Avremo occasione in futuro di ritornare sulla retta cartesiana.

11.2.3 Consideriamo adesso in un piano α (Fig. 10) due rette perpendicolari x ed y (per comodità scegliamo x orizzontale) e sia O la loro intersezione.

Fissiamo su x il riferimento cartesiano (O,U) e su y il riferimento (O,V) in modo che il verso positivo su x sia da sinistra a destra e su y dal basso in alto. (Questa però è una condizione più di comodo che di necessità). Si dice che il piano α è stato riferito ad un **sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy)** o che esso è un **piano cartesiano ortogonale (Oxy).**

In genere i punti U e V si scelgono alla stessa distanza da O, ma può capitare che sia più conveniente sceglierli a distanze diverse. Bisogna valutare di volta in volta. Ad ogni modo, quando non verrà detto nulla in proposito, si supporrà che i segmenti OU ed OV abbiano la stessa lunghezza o, come anche si dice, che il sistema sia **monometrico** [(3)].

Preso ora un qualsiasi punto P del piano cartesiano (Fig. 10), conduciamo per esso la perpendicolare all'asse x (sia A il punto intersezione) e la perpendicolare all'asse y (sia B il punto intersezione). Detta

---

[3] Questo termine è composto dalle parole greche "monos" = solo e "metron" = misura; appunto "una sola misura".

a l'ascissa di A sulla retta x e b quella di B sulla retta y, al punto P risulta associata la coppia ordinata di numeri reali (a,b).

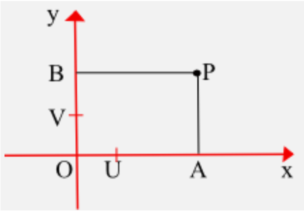


FIG. 10

Viceversa, presa la coppia ordinata di numeri reali (a,b) ed invertendo la costruzione precedente, ad essa risulta associato il punto P.
In definitiva, si stabilisce con le costruzioni suddette una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti del piano cartesiano e l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali.
Se si corrispondono il punto P e la coppia (a,b), si scrive:

P(a,b)

e si legge: «il punto P di coordinate cartesiane a,b».
Più precisamente: il numero a – prima componente della coppia – si continua a chiamare ***ascissa*** di P, mentre il numero b – seconda componente – si chiama ***ordinata***.
Per questo motivo la retta x si dice ***asse delle ascisse*** e la retta y ***asse delle ordinate***.
Evidentemente risulta:

$$\mathrm{O}(0,0),\ \ \mathrm{U}(1,0),\ \ \mathrm{V}(0,1).$$

Con riferimento alla figura 11, dove chiaramente U e V sono i punti unità, ti invitiamo a leggere le coordinate dei punti A, B, C ivi segnati ed a collocare i seguenti punti:

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},-1\right),\quad \mathrm{E}\left(-2,\frac{5}{2}\right),\quad \mathrm{F}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\quad \mathrm{G}\left(-1,-\frac{4}{3}\right).$$

Procedi nella lettura solo dopo che hai fatto i tuoi tentativi.

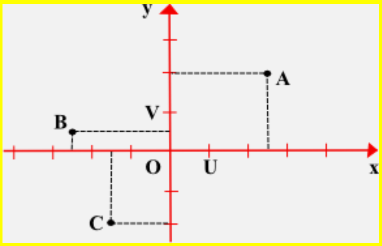


FIG. 11

Per esempio, in merito al punto A, si vede che esso è spostato orizzontalmente verso destra rispetto all'asse y di 2,5 unità di lunghezza; quindi l'ascissa x_A di A è 2,5: $x_A=2{,}5=\frac{5}{2}$. Il punto, nello stesso tempo, è spostato verticalmente verso l'alto rispetto all'asse x di 2 unità; quindi l'ordinata y_A di A è: $y_A=2$. In conclusione le coordinate di A sono $\frac{5}{2}$ e 2: $\mathrm{A}\left(\frac{5}{2},2\right)$.

Per disegnare il punto $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},-1\right)$ basta spostarsi orizzontalmente verso destra, a partire da O, di mezza unità di lunghezza e, da qui, verticalmente verso il basso di 1 unità di lunghezza.

Naturalmente tutto questo discorso ha senso se l'asse x del sistema di riferimento è supposto orizzontale, orientato positivamente verso destra, e l'asse y è verticale, orientato positivamente verso l'alto; come del resto quasi sempre. In caso contrario il discorso va adeguato alle diverse situazioni.

Ti proponiamo i seguenti esercizi, dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

1) Rappresenta i punti di coordinate:
   a) $(3,2),\ (-3,2),\ (-3,-2),\ (3,-2).$ b) $(2,4),\ (4,2),\ (-2,-4),\ (-4,-2).$
   c) $\left(2,\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},2\right),\ \left(-2,\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},-2\right).$ d) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right),\ \left(-\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right),\ \left(-\frac{2}{3},-\frac{3}{2}\right)$
2) Determina le coordinate dei punti A_1, A_2, A_3 simmetrici di A nell'ordine rispetto all'asse x, all'origine, all'asse y, sapendo che:
   a) $A\left(\frac{3}{2},\frac{1}{5}\right).$ b) $A\left(-\frac{1}{2},2\right).$ c) $A\left(-\frac{3}{5},-\frac{2}{3}\right).$ d) $A\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{6}\right).$ e) $A(a,b).$

Anche sul piano cartesiano ritorneremo più avanti. Al momento ciò che abbiamo detto è sufficiente.

11.2.4 Possiamo adesso occuparci della rappresentazione grafica delle funzioni reali.

Il disegno del grafico di una funzione reale di variabile reale $y=f(x)$ in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) – chiamato anche ***diagramma cartesiano*** della funzione – può essere effettuato, per via elementare ed in forma approssimata, seguendo il procedimento appresso descritto.

Si assegna ad x una serie di valori $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots$ convenientemente scelti in $\text{dom}\, f$ e si calcolano i corrispondenti valori di y:

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ y_3 = f(x_3),\ \dots .$$

I punti $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3), \dots$ sono punti del diagramma cartesiano di f. Esso spesso (ma non sempre) è una linea "continua", una linea cioè che non presenta interruzioni; a volte, però, presenta qualche interruzione; altre volte, addirittura, è costituito da un insieme di punti "isolati" (per esempio, se l'insieme dominio è un insieme di numeri interi).

Qualche volta per disegnare un andamento approssimato di questa linea sono sufficienti pochissimi punti (per esempio, se si trattasse di una retta ne basterebbero due). Qualche altra volta, se la linea è "complessa", ne servono un po' di più. Ad ogni modo, non sono mai necessari tutti i punti del grafico della funzione per tracciare un andamento approssimato della stessa. Tutt'al più, pensando per esempio a quello che si può ottenere con un software, si disegnano moltissimi suoi punti che, nell'insieme, danno la sensazione della continuità della linea.

A titolo di esempio, abbiamo disegnato nelle figure 12, 13, 14, 15 l'andamento di alcune funzioni non proprio elementari. I grafici possono essere visualizzati anche sullo schermo di un computer, servendosi di un idoneo software matematico. Le prime tre sono "continue", la quarta presenta un'interruzione per $x = -1$.

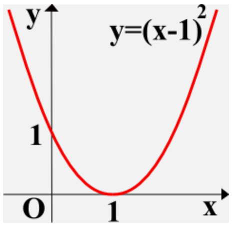


FIG. 12

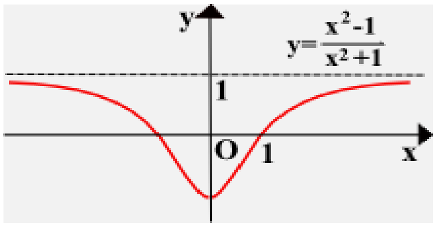


FIG. 13

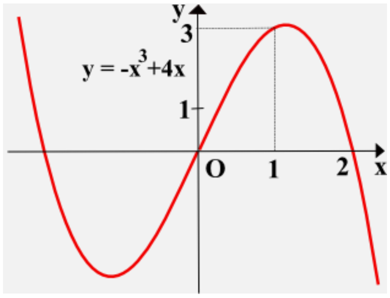


FIG. 14

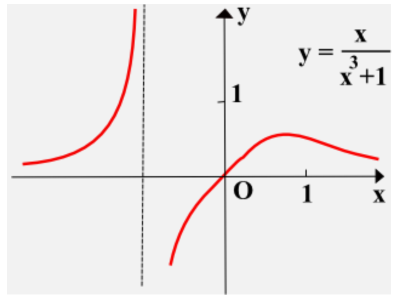


FIG. 15

11.3 FUNZIONI EMPIRICHE

11.3.1 Nei precedenti esempi di funzioni, è sempre stato possibile calcolare il valore della variabile dipendente y corrispondente ad un dato valore della variabile indipendente x, poiché è sempre stata disponibile una formula matematica che ha permesso ciò.

Non soltanto tali funzioni costituiscono, però, oggetto di interesse, specialmente nelle scienze sperimentali. Cosa di cui, d'altro canto, sei a conoscenza fin dal primo ciclo d'istruzione.

Pensa, infatti, alle seguenti situazioni in cui una grandezza dipende da un'altra senza che esista necessariamente una formula matematica che esprima questa dipendenza:

a) La variabile dipendente è la distanza s dal casello autostradale di Roma Nord, di un automobilista che si muove verso Firenze, calcolata rispetto al tempo t che passa dalla partenza dell'automobilista stesso dal suddetto casello.
b) La variabile dipendente è il valore V di un titolo di Borsa calcolato nel giorno x di un dato mese.
c) La variabile dipendente è l'altezza h di una persona, calcolata rispetto alla sua età t.

È evidente che, in tutti e tre i casi descritti (altri esempi si potrebbero fornire: prova a trovarli da te), c'è una grandezza y che dipende da un'altra grandezza x e quindi una funzione y=f(x). Ma, data l'irregolarità della dipendenza di y da x, questa funzione, di solito, non può essere espressa da una formula matematica che sintetizzi la dipendenza medesima.

Queste funzioni, e quelle dello stesso tipo, si chiamano in genere **funzioni empiriche**.

11.3.2 Quando si ha a che fare con una funzione empirica y=f(x), si calcolano i valori di y, corrispondenti a determinati valori di x, attraverso un rilevamento sperimentale; in pratica, osservando direttamente, per mezzo di un qualche strumento di misura, il valore di y corrispondente ad un dato valore di x. Si costruiscono quindi delle ***tabelle di rilevamento***. Di queste, ove lo si ritenga opportuno, si può dare una conveniente rappresentazione grafica.

Per esempio, riguardo alla prima delle tre funzioni empiriche precedenti, se la distanza s è misurata in chilometri (km) di autostrada ed il tempo t in ore (h), supponiamo che si abbia la seguente tabella di rilevamento (Tab. 1):

t (in h)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
s (in km)	0	20	44	44	60	85	105	127	140	165	190

TAB. 1

Essa può essere rappresentata in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) con una successione di punti (Fig. 16)..

I punti della rappresentazione grafica, ipotizzando che tra un rilevamento e l'altro il moto si svolga con "regolarità", possono essere uniti con dei segmenti di retta, ottenendo così una spezzata. Ma è chiaro che questa ipotesi è del tutto arbitraria, dal momento che non è noto cosa sia realmente accaduto fra due rilevamenti successivi.

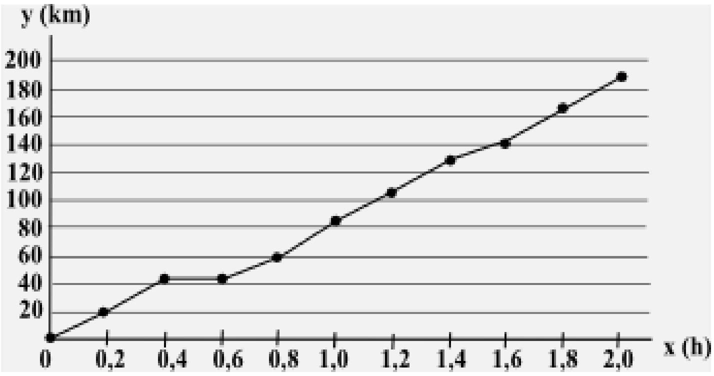


FIG. 16

11.3.3 Qualche volta, invece della rappresentazione cartesiana, si preferisce, come rappresentazione grafica di una funzione, quella che si ottiene con una successione di rettangoli di uguale base, adiacenti l'uno rispetto al successivo, ad uguale distanza (eventualmente nulla), e di altezza variabile a seconda dei valori acquisiti dalla variabile dipendente.

Una tale rappresentazione è chiamata **istogramma**. Alcuni la chiamano **ortogramma** quando i rettangoli sono spaziati l'uno rispetto all'altro, e anche **diagramma a barre**.

Vediamo un esempio. Supponiamo di voler visualizzare l'andamento dei voti riportati agli esami di Stato dai 67 candidati promossi. Consideriamo anzitutto una tabella (Tab. 2) che sintetizzi la distribuzione degli alunni in 6 classi, a seconda dei voti conseguiti.

Classe di voti	A 60	B 61-70	C 71-80	D 81-90	E 91-99	F 100
N° candidati	8	20	14	12	10	3

TAB. 2

A questo punto è facile costruire un istogramma (Fig. 17) che visualizzi la situazione.

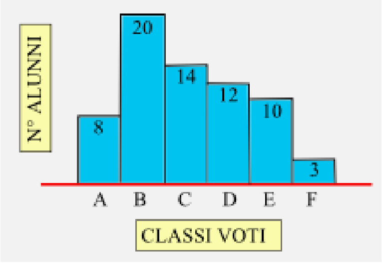


FIG. 17

A volte, invece che "verticalmente" i rettangoli sono disposti "orizzontalmente", ma il discorso è lo stesso. Ci sono, poi, altri modi di rappresentare graficamente le funzioni empiriche – come *areogrammi*, *ideogrammi*, *cartogrammi* o altro – ma non riteniamo opportuno occuparcene, rimandandoti a quanto hai appreso su questo argomento negli anni del 1° ciclo d'istruzione. In ogni caso, qualche esempio di rappresentazioni siffatte sarà fornito più avanti, in un'altra unità.

Ti proponiamo alcuni esercizi attraverso i quali puoi sondare la tua abilità.

1. Quella volta l'indice della Borsa di Milano ha avuto, in un determinato periodo, l'andamento riassunto nella tabella sottostante (il sabato e la domenica la Borsa resta chiusa). Fornisci una rappresentazione grafica della situazione.

Giorno	19	20	23	24	25	26	27	30	1	2	3	4
Indice	21711	21691	21694	21707	21727	21739	21717	21733	21719	21726	21719	21712

Tab. 3

2. Prova a rilevare ogni ora, a partire dalle 8 e fino alle 20, le temperature di un dato ambiente. Fornisci quindi una rappresentazione grafica della situazione.
3. Considera gli studenti che frequentano la tua classe e, dopo aver misurato le loro altezze h, raggruppale in modo che ogni altezza sia compresa entro uno dei seguenti intervalli (le misure sono in cm):
$$h\le160,\ 160<h\le163,\ 163<h\le166,\ 166<h\le169,\ 169<h\le172,$$
$$172<h\le175,\ 175<h\le178,\ 178<h\le181,\ h>181.$$
Disegna un istogramma che esprima quanti alunni hanno un'altezza compresa in uno dei suddetti intervalli.
4. Considera l'ultimo compito di matematica svolto in classe e raggruppa i tuoi compagni e te stesso in modo che il voto V ottenuto sia compreso entro i seguenti limiti:
$$V\le3,\ 3<V\le4,\ 4<V\le5,\ 5<V\le6,\ 6<V\le7,\ 7<V\le8,\ 8<V\le9,\ V>9.$$
Disegna un istogramma che esprima quanti alunni hanno ottenuto un dato voto.
5. Ad un paziente, ricoverato in ospedale per 5 giorni, viene rilevata la temperatura corporea due volte al giorno, ad intervalli uguali di tempo. I dati ottenuti sono quelli riportati nella tabella sottostante. Fornisci una rappresentazione grafica della situazione.

Rilevamento n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura (°C)	38,5	39,0	37,8	38,2	37,5	37,6	36,6	36,8	36,5	36,6

TAB. 4

6. La tabella sottostante (Tab. 5) fornisce la distribuzione approssimata del numero delle varie specie di animali in base alle loro dimensioni.
   a) Rappresentare mediante un istogramma la distribuzione.
   b) Qual è il rapporto fra il numero delle specie più numerose e quello delle specie meno numerose?
   c) Qual è il rapporto fra il numero delle specie di animali più piccoli e quello di animali più grandi?

Dimensioni (in centimetri)	Numero delle specie di animali
0,05 – 0,10	$2,0\times10^4$
0,10 – 0,50	$5,0\times10^5$
0,5 – 1,0	$8,0\times10^6$
1 – 5	$1,1\times10^5$
5 – 10	$0,9\times10^3$
10 – 50	$8,0\times10^3$
50 – 100	$1,0\times10^3$
100 – 500	$4,0\times10^2$
500 – 1.000	$0,9\times10$

TAB. 5

11.4 PARTICOLARI FUNZIONI ELEMENTARI

11.4.1 Tra le funzioni che si possono esprimere mediante formule matematiche, alcune meritano un'attenzione speciale per l'uso frequente che se ne fa non solo in matematica ma anche e soprattutto nelle scienze sperimentali, per lo studio di fenomeni che presentano caratteristiche particolari.
Si tratta della funzione *costante*; di quelle che rappresentano le *proporzionalità diretta*, *quadratica*, *inversa*; delle funzioni *lineare*, *quadratica*, *costante a tratti*, *lineare a tratti*.
Ce ne occuperemo diffusamente in questo paragrafo [4].

11.4.2 Prendiamo in esame il modo in cui varia, durante le lezioni, il numero degli alunni di una data classe, presenti in aula in un determinato giorno dell'anno scolastico, supponendo che la classe al completo sia formata da 25 allievi e che le lezioni si svolgano nell'arco di 5 ore, dalle ore 8 (ora 0) alle ore 13 (ora 5).
Possono in realtà verificarsi diverse situazioni. Per semplicità ne consideriamo due soltanto.
Prima situazione. Tutti gli alunni sono presenti dall'inizio alla fine delle lezioni. Dunque, il numero N degli alunni presenti non varia al variare del tempo t nell'intervallo $[0, 5]$ di svolgimento delle lezioni.
Si dice che N è una ***funzione costante*** al variare di t nell'intervallo considerato. In simboli:

$$N = 25, \text{ per } 0 \le t \le 5.$$

La rappresentazione cartesiana di N in funzione di t nell'intervallo $[0, 5]$ è evidentemente un segmento di retta parallela all'asse delle ascisse (Fig. 18) [5].

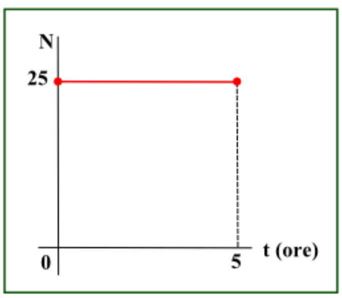


FIG. 18

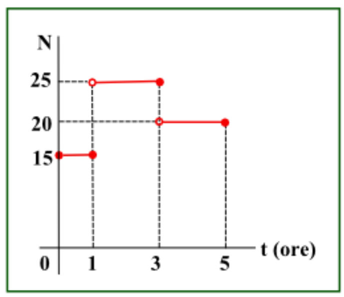


FIG. 19

Seconda situazione. All'inizio delle lezioni sono presenti solo 15 allievi; gli altri 10 entrano all'inizio della seconda ora poiché l'autobus che li trasportava è arrivato in ritardo a causa di un guasto. All'inizio della quarta ora se ne vanno via 5 perché convocati per una manifestazione. Il numero N è dunque uguale a 15 per $0 \le t \le 1$, è uguale a 25 per $1 < t \le 3$ ed è uguale a 20 per $3 < t \le 5$.
Si dice che N è una ***funzione costante a tratti*** al variare di t nell'intervallo considerato. In simboli:

$$N = \begin{cases} 15 \text{ se } 0 \le t \le 1 \\ 25 \text{ se } 1 < t \le 3 \\ 20 \text{ se } 3 < t \le 5 \end{cases}$$

La sua rappresentazione cartesiana è costituita da tre segmenti di rette parallele all'asse delle ascisse (Fig. 19).

4 In realtà, la *funzione quadratica* sarà studiata all'interno dell'unità 25, N° 25.1, a tempo debito.
5 Con riferimento sia alla figura 18 sia alla successiva figura 19 i pallini "pieni" dicono che quel punto è compreso, quelli "vuoti" che è escluso. La stessa convenzione sarà seguita in futuro.

Ti proponiamo un paio di esercizi.

1. Fornisci la rappresentazione cartesiana delle seguenti funzioni costanti o costanti a tratti:

$$1)\ y=3,\ \forall x \in \mathbb{R}; \qquad 2)\ y=-\frac{5}{2},\ \text{con } x\geq 0;$$

$$3)\ y=\begin{cases} 2 & \text{se } x<0 \\ -2 & \text{se } x\geq 0 \end{cases} \qquad 4)\ y=\begin{cases} -1 & \text{se } x\leq -1 \\ 0 & \text{se } -1<x<1 \\ 1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

2. Sia f(x) una generica funzione reale di variabile reale. Si sa che $|f(x)|=2$ per $0\leq x\leq 1$. Si può concludere che $f(x)=2$ nello stesso intervallo? Fornisci una spiegazione esauriente della risposta.

- Una particolare e interessante *funzione costante a tratti* è la ***parte intera di un numero reale***. Se x è il numero, la sua parte intera è indicata in uno dei modi seguenti :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{INT}(\mathbf{x}), \quad [\mathbf{x}],$$

ed anche, nei linguaggi di programmazione, in questo modo :

Floor(x).

Ora, se $x\geq 0$, la parte intera di x è facile da determinare: basta mettere il numero sotto forma di allineamento decimale e prendere per l'appunto la sua parte intera.

Per esempio:

$$E(2{,}27)=2; \quad E\left(\frac{27}{8}\right)=E(3{,}375)=3; \quad E\left(\sqrt{2}\right)=E(1{,}41)=1.$$

Se però $x<0$, il discorso si complica un po'. In questo caso, in realtà, bisogna far sì che la parte decimale del numero sia positiva e, nel numero così modificato, prendere la parte intera.

Ciò si fa, per esempio, nel modo seguente:

$$-3{,}48=-3-0{,}48=(-1+1)-3-0{,}48=(-1-3)+(1-0{,}48)=-4+0{,}52\,.$$

Cosicché la parte intera di −3,48 è −4 e non −3, come si potrebbe concludere in maniera affrettata, senza riflettere. Pertanto, estendendo il ragionamento ad altri casi:

$$E(-2{,}27)=-3; \quad E\left(-\frac{27}{8}\right)=E(-3{,}375)=-4; \quad E\left(-\sqrt{2}\right)=E(-1{,}41)=-2.$$

A volte la parte intera di un numero decimale è chiamata ***caratteristica*** del numero, la parte decimale ***mantissa***.

In figura 20 è rappresentata la funzione E(x), con $-2\leq x<3$.

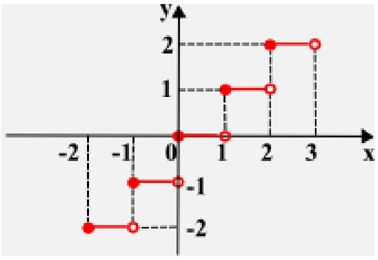


FIG. 20

Ti proponiamo, per esercizio, di indicare la caratteristica e la mantissa dei seguenti numeri:

2,3456 −2,3456 15,0034 −15,0034.

- Possiamo ritenere "costante a tratti" anche la seguente funzione, che può apparire piuttosto strana:

$$y=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in\mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z} \end{cases}$$

Il suo grafico (Fig. 21) è rappresentato in un piano cartesiano ortogonale (Oxy).

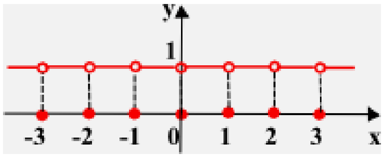


FIG. 21

Esso evidenzia che la funzione è formata dai punti dell'asse x aventi ascisse intere ($x \in \mathbb{Z}$) e dalla retta parallela all'asse x, condotta per il punto (0,1), dalla quale però siano esclusi gli infiniti punti di ascisse intere ($x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$) e nei quali punti perciò la retta presenta dei "buchi", provocati dalla "caduta" dei rispettivi punti sull'asse x.

11.4.3 Se X e Y sono due insiemi numerici in corrispondenza biunivoca, tali che, detto x un qualunque elemento di X e chiamato y il suo corrispondente in Y, risulti:

[1] $$\mathbf{y = k\,x}\,,$$

dove k è un determinato numero reale, gli insiemi X e Y si dicono *direttamente proporzionali*.

Per questo la [1] si chiama funzione della **proporzionalità diretta** e k si chiama *costante di proporzionalità*.

Per esempio, il perimetro P di un quadrato varia, al variare della lunghezza L del suo lato, rispettando la legge della proporzionalità diretta. Infatti si ha:

$$P = 4\,L\,.$$

Qui la costante di proporzionalità vale evidentemente 4.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), il grafico della [1], comunque si scelga k reale, è una ***retta passante per O*** (Fig. 22).

Ti proponiamo di disegnare i diagrammi cartesiani delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$y=x;\quad y=-x;\quad y=2\,x;\quad y=-2\,x;\quad y=\frac{1}{3}x;\quad y=-\frac{1}{3}x.$$

Osserviamo che, in una proporzionalità diretta, se a partire da un dato valore a, assegnato ad x, si attribuiscono a questa variabile valori via via doppio (2a), triplo (3a), ... di a, i corrispondenti valori di y, contati a partire da b (valore corrispondente di a), diventano via via doppio (2b), triplo (3b), ... di b. Come mostra del resto la tabella 6.

x	a	2 a	3 a	...
k x = y	k a = b	k · 2a = 2 b	k · 3a = 3 b	...

TAB. 6

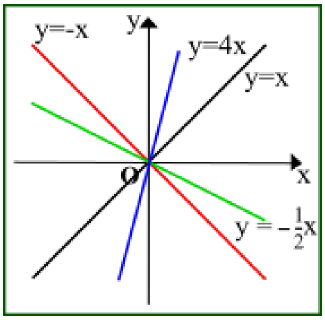


FIG. 22

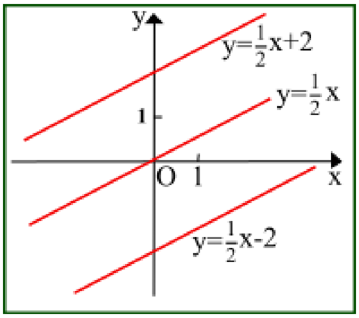


FIG. 23

Una considerazione importante. È facile intuire che, se a kx si aggiunge una costante n, cioè un numero reale che non varia al variare di x, la nuova funzione reale che così si ottiene:

$$\mathbf{y = k\,x + n}\,,$$

ha un grafico cartesiano che si ricava da quello della funzione y=kx facendolo "scorrere" verso l'alto (se n>0) o verso il basso (se n<0) di una lunghezza uguale a |n| (Fig. 23).

Ogni funzione $\mathbf{y = kx+n}$, $\forall\ \mathbf{k, n} \in \mathbb{R}$, il cui grafico è dunque una ***retta***, si chiama ***funzione lineare***.

Si capisce che la *funzione costante* è una particolare *funzione lineare* e la retta che la rappresenta è parallela all'asse x.

Naturalmente, sapendo che il diagramma cartesiano di una funzione lineare è una retta, per disegnarlo è sufficiente trovare due suoi punti distinti e disegnare la retta che passa per essi.

Ti proponiamo di disegnare i diagrammi cartesiani delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$y=x-1;\quad y=-x+1;\quad y=2\,x-1;\quad y=\frac{1}{3}x-2;\quad y=-\frac{1}{3}x+2.$$

11.4.4 Supponiamo che un pentolino, contenente 1 litro di acqua a 25°C, sia posto su un fornello capace di fornirgli calore costante per il tempo necessario. La temperatura T dell'acqua, come si sa, aumenta proporzionalmente alla durata di somministrazione del calore fino a raggiungere (alla pressione atmosferica) la temperatura di 100°C. A questo punto l'acqua bolle e mantenendola sul fornello si ha come unico effetto di trasformarla in vapore, ma la sua temperatura si mantiene a 100°C. Dunque T è funzione lineare di t dall'istante 0, in cui comincia a scaldarsi, all'istante t', in cui bolle, mentre da t' in poi è costante.

Ammesso che sia t" l'istante in cui si interrompe l'osservazione (ancora c'è acqua che bolle), l'andamento di T può essere rappresentato come in figura 24, mentre in simboli si ha:

$$T=\begin{cases} kt+25 & \text{se } 0\le t\le t' \\ 100 & \text{se } t'<t\le t'' \end{cases}$$

dove k è una costante avente il valore tale che T=100 per t=t'.

La funzione è detta ***funzione lineare a tratti***.

S'intende che la *funzione costante a tratti* è una particolare *funzione lineare a tratti*.

Ti proponiamo di fornire la rappresentazione cartesiana delle seguenti funzioni lineari a tratti:

$$y=\begin{cases} 1-x & \text{se } x\le 1 \\ x-1 & \text{se } x>1 \end{cases}\qquad y=\begin{cases} 1-x & \text{se } x\le 2 \\ x-1 & \text{se } x>2 \end{cases}\qquad y=\begin{cases} x-1 & \text{se } x\le 0 \\ 1-x & \text{se } x>0 \end{cases}$$

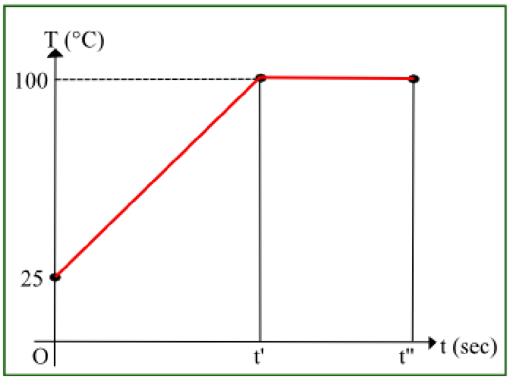


FIG. 24

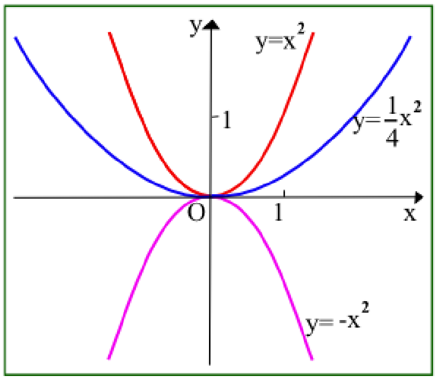


FIG. 25

11.4.5 Siano X e Y due insiemi numerici tali che risultino direttamente proporzionali l'insieme X' dei quadrati degli elementi di X e lo stesso insieme Y. Come dire che, detto x un qualunque elemento di X e chiamato y il suo corrispondente in Y, risulta:

[2] $$\mathbf{y = k\,x^2}\ ,$$

dove $k \in \mathbb{R}_0^+$. La [2] si dice ***funzione della proporzionalità quadratica diretta***.

Per esempio, l'area A di un quadrato varia, al variare della lunghezza L del suo lato, rispettando la legge della proporzionalità quadratica diretta. Infatti si ha:

$$A = L^2\ .$$

Qui la costante k vale chiaramente 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), il grafico della [2], per ogni $k \in \mathbb{R}_0$, è una particolare linea chiamata ***parabola*** (Fig. 25).

Ti proponiamo di disegnare i diagrammi cartesiani delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$y=2\,x^2;\quad y=-2\,x^2;\quad y=\frac{3}{2}x^2;\quad y=-\frac{3}{2}x^2;\quad y=\frac{1}{3}x^2;\quad y=-\frac{1}{3}x^2.$$

Osserviamo che, nella proporzionalità quadratica diretta, se a partire da un certo valore si attribuiscono ad x valori via via doppio, triplo, ..., i corrispondenti valori di y diventano via via 4 volte più grande, 9 volte più grande, ... Come mostra la tabella 7.

x	a	2 a	3 a	...
$\mathbf{k\,x^2 = y}$	$k\,a^2 = b$	$k\cdot(2a)^2 = 4\,b$	$k\cdot(3a)^2 = 9\,b$	...

TAB. 7

11.4.6 Siano X e Y due insiemi numerici tali che risultino direttamente proporzionali l'insieme X' dei reciproci degli elementi di X e lo stesso insieme Y. Come dire che, detto x un qualunque elemento di X e chiamato y il suo corrispondente in Y, risulta:

[3] $$\mathbf{y = \frac{k}{x}}.$$

dove $k \in \mathbb{R}_0^+$. La [3] si dice ***funzione della proporzionalità inversa***.

Per esempio, fra i rettangoli di uguale area A, la misura b della base varia, al variare della misura h dell'altezza, rispettando la legge della proporzionalità inversa. Infatti, essendo $A = b\,h$, risulta:

$$b=\frac{A}{h}\ .$$

Qui la costante k è uguale all'area A dei rettangoli.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), il grafico della [3], per ogni $k \in \mathbb{R}_0$, è una particolare linea chiamata ***iperbole equilatera*** (Fig. 26).

Ti proponiamo di disegnare i diagrammi cartesiani delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$y=\frac{2}{x}\ ;\quad y=-\frac{2}{x}\ ;\quad y=\frac{1}{2x}\ ;\quad y=-\frac{1}{2x}\ .$$

Osserviamo che, nella proporzionalità inversa, se a partire da un certo valore si attribuiscono ad x valori via via doppio, triplo, ... , i corrispondenti valori di y diventano via via la metà, un terzo, ... Ciò è evidenziato meglio dalla tabella 8.

$\mathbf{x}$	a	2 a	3 a	…
$\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}=\mathbf{y}$	$\frac{k}{a}=b$	$\frac{k}{2a}=\frac{b}{2}$	$\frac{k}{3a}=\frac{b}{3}$	…

TAB. 8

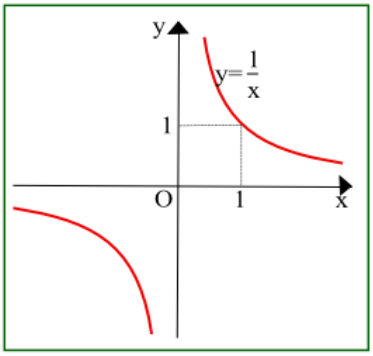


FIG. 26

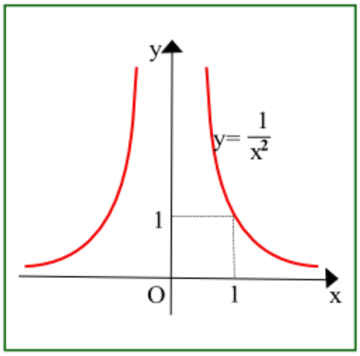


FIG. 27

11.4.7 Siano infine X e Y due insiemi numerici tali che risultino direttamente proporzionali l'insieme X' dei reciproci dei quadrati degli elementi di X e lo stesso Y. Come dire che, detto x un qualunque elemento di X e chiamato y il suo corrispondente in Y, risulta:

[4] $$\mathbf{y}=\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}^2}.$$

dove $k\in\mathbb{R}_0^+$. La [4] si dice ***funzione della proporzionalità quadratica inversa*** [6].

Si tratta di una funzione che s'incontra frequentemente nelle scienze sperimentali e particolarmente in Fisica. Per esempio, la forza F con cui si attirano due masse varia al variare della distanza d delle masse stesse rispettando la legge della proporzionalità quadratica inversa. Infatti si ha:

$$F=\frac{k}{d^2},$$

dove la costante k dipende dalle masse considerate oltre che dal sistema di misura prescelto.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), il grafico della [4], per ogni scelta di k in $\mathbb{R}_0$, è del tipo di quello disegnato in figura 27.

Ti proponiamo di disegnare i diagrammi cartesiani delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$y=\frac{2}{x^2}\ ;\quad y=-\frac{2}{x^2}\ ;\quad y=\frac{1}{2x^2}\ ;\quad y=-\frac{1}{2x^2}\ .$$

Che cosa succede dei valori della y se ad x si attribuiscono valori via via doppio, triplo, ... di un dato valore? Costruisci una tabella che evidenzi il fatto.

11.5 NOTA STORICA

11.5.1 L'idea di funzione era presente, benché non in modo esplicito, presso i diversi popoli che, in varie forme, si sono occupati di matematica: Babilonesi, Egizi, Greci, Indiani, Arabi, Cinesi. Basti pensare, tanto per fare un esempio banale, all'area di un quadrato espressa mediante la lunghezza del suo la-

[6] Ad onor del vero né le "Indicazioni Nazionali" né le "Linee Guida" propongono questa funzione. Data però la sua importanza nelle scienze sperimentali, particolarmente in Fisica, riteniamo opportuno farne ugualmente un cenno.

to. Ma il concetto vero e proprio di funzione nasce nel XVI secolo, sia per esigenze legate alle scienze sperimentali, in particolare alla Fisica, sia soprattutto perché a quell'epoca si disponeva finalmente di un adeguato simbolismo algebrico, che al contrario era mancato in precedenza. Il concetto di funzione, tuttavia, non era ancora espresso in forma esplicita, chiara e inequivocabile. Un primo passo in questa direzione si sarebbe fatto solo nel 1698 ad opera del matematico svizzero **Jakob Bernoulli** (1654-1705), il quale formulò grossomodo la seguente definizione di funzione:

Si dice **funzione** di x una qualunque espressione ottenuta mediante le operazioni di addizione e moltiplicazione a partire da x.

Poco tempo dopo, un altro svizzero, **Leonhard Euler** (in italiano **Eulero**, 1707-1783), avrebbe modificato leggermente quella definizione, fornendone una più generale, più o meno nel modo seguente:

Si dice **funzione** di x una qualunque espressione analitica nella variabile x, cioè un'espressione formata, non solo da somme e prodotti, ma anche da altre operazioni.

Nello stesso tempo, con l'introduzione del piano cartesiano, era resa possibile una "visualizzazione" di quel concetto per mezzo di un diagramma cartesiano.

Sennonché, diagrammi cartesiani erano pure idonei a rappresentare fenomeni che non è possibile esprimere analiticamente per mezzo della variabile indipendente. Cosicché a questi fenomeni non corrisponderebbero delle funzioni secondo la definizione di Eulero. Per esempio, l'andamento della temperatura T di un corpo, misurata a intervalli regolari di tempo t, pur rappresentabile per mezzo di un diagramma cartesiano, non sarebbe una funzione di t, almeno in base alle suddette definizioni di "funzione". Il che era perlomeno strano e comunque inaccettabile.

11.5.2 Bisognava, dunque, trovare una definizione di funzione più soddisfacente di quella di Eulero. Questo, dopo tentativi di studiosi diversi, avvenne finalmente oltre 100 anni dopo, per merito del matematico tedesco **Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859) [(7)]. Egli, nel 1829, propose una definizione più ampia di funzione:

Una variabile y si dice **funzione** di una variabile x quando esiste una legge, di natura qualsiasi, in base alla quale ad ogni valore di x, scelto in un dato intervallo, corrisponde uno ed un sol valore di y.

In realtà con questa definizione anche la temperatura di un corpo può essere considerata funzione del tempo in cui viene misurata.

Più in generale, con questa definizione, le funzioni sono distinte tra quelle in cui la variabile dipendente y può essere rappresentata come espressione analitica della variabile indipendente x e quelle in cui la legge che esprime y in funzione di x è di tipo sperimentale e non esprimibile analiticamente. Le prime sono quelle che si identificano con la definizione di Eulero.

11.5.3 La definizione di Dirichlet è la più ampia possibile, ma solo se si tratta di funzione che mette in relazione insiemi numerici. Essa fu poi generalizzata a quella di funzione fra insiemi di natura qualunque nel 1939 per merito di Bourbaki ed è la moderna definizione di funzione:

---

[7] Una gustosa curiosità sul nome di questo grande matematico. La sua famiglia proveniva da una città del Belgio, chiamata Richlet ed egli, ancorché nato in Germania, era considerato "il giovane di Richlet", per l'appunto Lejeune Dirichlet. Condusse in Francia i suoi studi, ma poi succedette a Gauss sulla cattedra di Gottinga.

Dati due insiemi X ed Y, si dice **funzione** di X in Y ogni relazione che a ciascun elemento di X associa uno ed un solo elemento di Y.

Nicolas Bourbaki è lo pseudonimo con il quale si "firmava" un gruppo di matematici, per lo più francesi, i quali, a partire dall'anno 1935 e praticamente fino al 1983, assunsero l'impegno di sistematizzare tutta la matematica esistente sulla base di una concezione moderna della matematica stessa, tra cui il concetto di "insieme" e quello di "relazione". Fra i bourbakisti più celebri si ricordano: Henri Cartan (1904-2008), Jean Dieudonné (1906-1992), André Weil (1906-1998). La loro influenza sulla matematica mondiale fu notevole all'inizio e raggiunse l'apice fra il 1950 e il 1960, ma poi, per varie ragioni sulle quali non ci soffermiamo, cominciò a scemare ed oggi, di fatto, non se ne parla se non per i passati contributi. Tra i quali la maggior parte dei simboli che oggi usano i matematici.

VERIFICHE

1. Nella figura sottostante (Fig. 28) sono disegnate le rappresentazioni sagittali di quattro relazioni definite dall'insieme A={1,2,3,4} verso se stesso. Disegna anche le rappresentazioni cartesiane delle relazioni e stabilisci quali di esse sono funzioni di A in A.

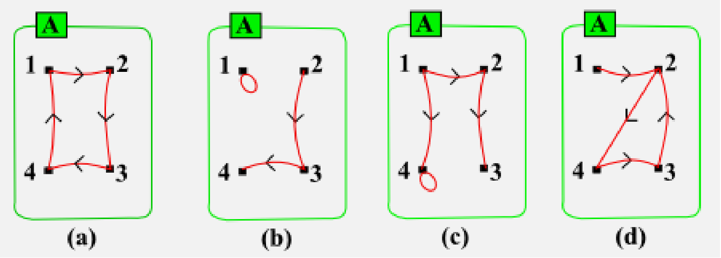


FIG. 28

2. Disegna i diagrammi cartesiani delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$y=\begin{cases}-x \text{ se } x\leq 0\\ x \text{ se } 0<x\leq 2\\ 2 \text{ se } x>2\end{cases}\qquad y=\begin{cases}\frac{1}{2}x \text{ se } x\leq -2\\ -2 \text{ se } -2<x\leq 1\\ \frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \text{ se } x>1\end{cases}\qquad y=\begin{cases}-\frac{2}{3}x+2 \text{ se } x\leq 0\\ \frac{1}{2}x+1 \text{ se } x>0\end{cases}$$

3. Scrivi la legge che fornisce la misura d della diagonale di un quadrato in funzione della misura L del lato. Si tratta di un particolare tipo di funzione. Quale? Rappresenta il suo andamento in un opportuno piano cartesiano.

4. La legge $v=gt$, dove $g\approx 9{,}8\ m/s^2$, fornisce la velocità con cui un corpo cade sulla Terra in caduta libera, misurata dopo un tempo t dall'istante in cui il corpo è stato abbandonato. Essa esprime un particolare tipo di funzione. Quale? Rappresenta il suo andamento in un opportuno piano cartesiano.

5. La legge $I=Cit$ fornisce l'interesse I che viene a maturare dopo che sono trascorsi t anni dal momento in cui un capitale C è stato impiegato, con interesse semplice, al tasso annuo i. Essa, una volta fissati i valori di C ed i, esprime un particolare tipo di funzione. Quale? Posto che sia C = € 2000 ed $i=2{,}5\ \%$, rappresenta la funzione, per $t\geq 0$, in un opportuno piano cartesiano. Calcola quindi quale interesse è maturato dopo 2 anni e dopo quanti anni è maturato un interesse di € 100.

6. Un corpo che si muova con velocità v costante percorre nel tempo t uno spazio s tale che $s=vt$. Posto che la velocità aumenti del 5%, cosa accade al tempo t impiegato per percorrere lo stesso spazio s?
[A] Diminuisce esattamente del 5%. [B] Aumenta esattamente del 5%.
[C] Diminuisce di poco meno del 5%. [D] Aumenta di poco meno del 5%.
Una sola alternativa è corretta. Individuala e fornisci un'esauriente spiegazione della scelta operata.

7. Una delle leggi di mercato dice grossomodo che quando di un certo prodotto aumenta il prezzo, in genere ne diminuisce la domanda. La funzione che fornisce la quantità Q di domanda del prodotto per mezzo del prezzo P – detta *funzione di domanda* – può essere di tipo diverso. Considera la seguente funzione di domanda: $Q=17-2P$, dove Q è espresso in kg e P in Euro/kg. Disegnane una rappresentazione cartesiana e calcola quale prezzo viene fissato per una domanda di 2 kg di quel prodotto.

8. Se un corpo si muove di moto uniforme su una retta – sulla quale è stato fissato un riferimento cartesiano (O,U) – la legge che fornisce la posizione x del corpo in funzione dell'istante t in cui esso occupa quella posizione, è la seguente: $x=vt+x_0$, dove v è la velocità del corpo ed x_0 è la posizione che esso occupa nell'istante 0. Posto che sia $v = 5\ m/s$ ed $x_0 = -2\ m$, rappresenta la legge suddetta in un opportuno piano cartesiano e trova: 1) in quale istante il corpo passa per l'origine O della retta su cui si svolge il moto; 2) quanti metri ha percorso il corpo dall'istante 0 all'istante 4 s.

9. La legge $s = \frac{1}{2} g\, t^2$, dove $g \approx 9{,}8\ m/s^2$, fornisce lo spazio percorso da un corpo, in caduta libera sulla Terra, misurato dopo un tempo t dall'istante in cui esso è stato abbandonato. Essa esprime un particolare tipo di funzione. Quale? Rappresenta il suo andamento in un opportuno piano cartesiano.

10. Il lato di un triangolo equilatero ha una lunghezza nota a. Calcola in funzione di a sia il perimetro del triangolo sia la sua area. Si ottengono due funzioni di tipi particolari. Quali? Rappresentale graficamente, ciascuna su un opportuno piano cartesiano.

11. Disegna il diagramma cartesiano della funzione $y = x\,|x|$.

12. Scrivi la relazione che lega le misure b della base ed h dell'altezza di un triangolo di area $10\ m^2$. La legge che esprime b in funzione di h è quella di un particolare tipo di funzione. Quale? Rappresentala graficamente in un opportuno piano cartesiano. Calcola quindi quanto misura la base del triangolo se l'altezza misura 2 m e quanto misura l'altezza se la base misura 4 m. Gli elementi trovati (cioè le misure della base e dell'altezza di un triangolo) sono sufficienti per determinare il triangolo?

13. Se un gas viene compresso in modo che la sua temperatura si mantenga costante, la pressione p esercitata sul gas ed il volume V da esso occupato sono legati dalla seguente relazione: $pV=k$, dove k è una costante. La relazione può essere scritta in modo da esprimere p per mezzo di V e rappresenta un particolare tipo di funzione. Quale? Ammesso che, sotto la pressione di 1 atmosfera, il gas occupi un volume di 50 litri, rappresenta graficamente la funzione in un opportuno piano cartesiano. Calcola quindi quale volume occupa il gas quand'è soggetto alla pressione di 2 atmosfere e quale pressione bisogna esercitare su di esso affinché occupi un volume di 5 litri.

14. **LABORATORIO DI MATEMATICA.** Si vogliono ottenere informazioni sul numero delle persone che compongono i nuclei familiari degli studenti della scuola che frequenti. Si vuole anche una rappresentazione grafica della situazione. Come pensi che si possa procedere? Discutine con i tuoi compagni e, se occorre, chiedi aiuto al tuo professore.

15. Considerata la funzione $p(n)=7+4n^2$, con $n\in\mathbb{N}$, prendi in esame la seguente funzione reale:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } p(n) \text{ è un numero primo} \\ -1 & \text{se } p(n) \text{ è un numero composto} \end{cases}$$

essendo x una variabile reale tale che $0\le x<11$ ed n la parte intera di x. Disegna il grafico di questa funzione.

16. Considerato un triangolo:

a) Esprimere in funzione di x l'altezza h del triangolo sapendo che la sua area è $2x\ \text{cm}^2$ e il lato associato all'altezza è $x/2$ cm; tracciare il grafico della funzione $h=h(x)$.

b) Dire come varia il lato del triangolo se la sua area raddoppia e l'altezza relativa ad esso si riduce a metà.

c) Tracciare il grafico della relazione che sussiste fra un lato e l'altezza ad esso relativa, se il triangolo cambia mantenendo però la stessa area.

17. Si considerino i grafici sottostanti (Fig. 29).

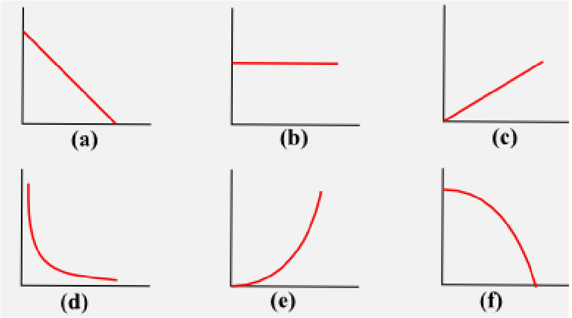


FIG. 29

Fra di essi:

- uno illustra la relazione che sussiste fra un lato e l'altezza ad esso relativa dei triangoli aventi la medesima area;
- uno illustra l'andamento, al variare di x, dell'altezza di un triangolo la cui area è $3x\ \text{cm}^2$ e il lato associato all'altezza è $\frac{x}{2}$ cm;
- uno rappresenta il grafico della funzione $y=2-x$.

Individuare, fra i sei grafici proposti, i tre associati alle situazioni descritte sopra.

18. La superficie ombreggiata in figura (Fig. 30) rappresenta un'area di $59{,}5\ \text{m}^2$ ed è formata da 4 rettangoli aventi basi uguali ed altezze direttamente proporzionali i numeri 2, 4, 5, 6. a) Calcolare le aree dei 4 rettangoli. b) Spiegare perché i dati non sono sufficienti per calcolare la misura del contorno della superficie né i perimetri dei 4 rettangoli.

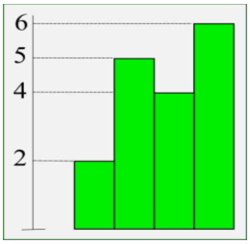


FIG. 30

19. La forza F di attrazione di due masse isolate M ed m, posta ad una distanza d, è data dalla seguente legge (legge di Newton sulla *gravitazione universale*):

$$F = G\frac{Mm}{d^2},$$

dove G è una costante.

a) Se una delle due masse si dimezza e l'altra diventa la terza parte mentre la distanza si dimezza, cosa accade alla forza di attrazione?
b) Quale grafico rappresenta la forza F al variare di d, se le due masse rimangono invariate?

20. Un corpo di massa m si muove di moto uniforme con velocità v sopra una circonferenza di raggio R. Lo scienziato olandese Christiaan Huygens (1629-1695) dimostrò che esso è soggetto ad una forza F diretta verso il centro della circonferenza (e detta per questo *forza centripeta*) tale che:

$$F = \frac{m\,v^2}{R}.$$

a) Se la massa del corpo e il raggio della circonferenza rimangono invariati mentre la velocità si dimezza, cosa accade della forza centripeta?
b) Quale grafico rappresenta la forza F al variare di R, se m e v rimangono invariate?
c) Quale grafico rappresenta F al variare di v, se rimangono invariati m ed R?

21. Se la base di un triangolo raddoppia e l'altezza si riduce di 1/3, quale delle seguenti alternative si verifica?
[A] L'area del triangolo diventa 1/3 di quella originaria.
[B] L'area del triangolo si dimezza.
[C] L'area del triangolo rimane invariata.
[D] Le affermazioni precedenti sono tutte e tre false.
Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

22. Il grafico sottostante (Fig. 31) rappresenta la posizione occupata da una vettura che percorre una strada in funzione del tempo in un intervallo di 60 minuti. La posizione s è misurata in chilometri, il tempo in minuti.

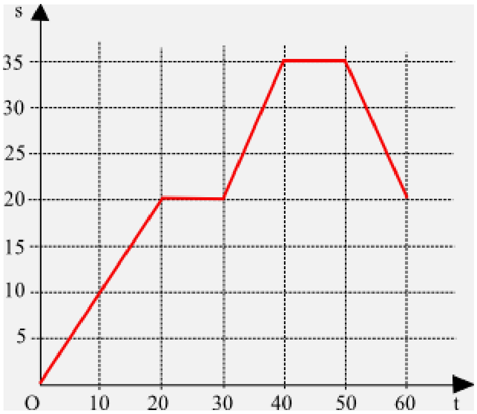


FIG. 31

a) Nei 60 minuti considerati quanto cammino ha percorso la vettura?
b) Esprimere in forma analitica la funzione s=s(t) nei 60 minuti presi in considerazione.
c) In quale intervallo di tempo la vettura si è mossa più velocemente?
d) È corretto affermare che la vettura ha tenuto la stessa velocità negli intervalli di tempo [30, 40] e

$[50, 60]$?

e) Ci sono stati degli intervalli di tempo durante i quali la vettura è stata ferma?

f) Qual è la velocità media, misurata in chilometri orari, tenuta dalla vettura nei 60 minuti?

22. Trovare l'espressione di f [f(x)] sapendo che si ha:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1.$ b) $f(x) = x^2 - x.$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2.$

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\ ;\ \text{b) } x^4 - 2x^3 + x\ ;\ \text{c) } \frac{1}{8}x^4 - x^2\right]$

23. Nella figura sottostante (Fig. 32) sono rappresentati i grafici di due funzioni, entrambe definite nell'intervallo $[-4, 6]$: uno di colore rosso, l'altro di colore blu.

a) Precisare gli intervalli, se esistono, in cui le due funzioni sono discordi, quelli in cui sono entrambe positive e quelli in cui sono entrambe negative.

b) Ci sono dei valori di x in cui le due funzioni acquistato lo stesso valore: stabilire quali sono questi x e se in essi le funzioni sono positive, negative o nulle.

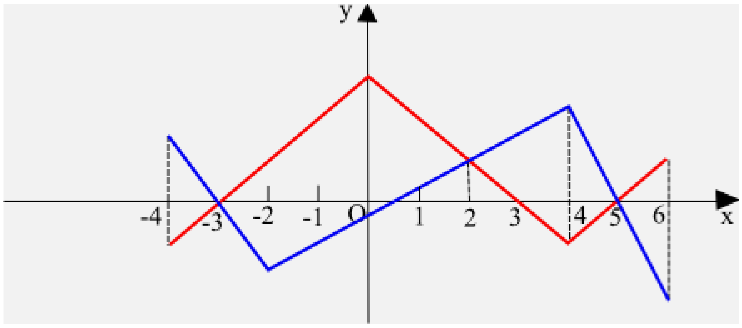


FIG. 32

24. Nella figura sottostante (Fig. 33) i 5 pallini evidenziano altrettanti punti. Dire quale delle seguenti funzioni è quella il cui grafico si adatta meglio a contenere quei punti.

[A] $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{16}x^2 - 1;$ [B] $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1;$ [C] $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x - 1.$

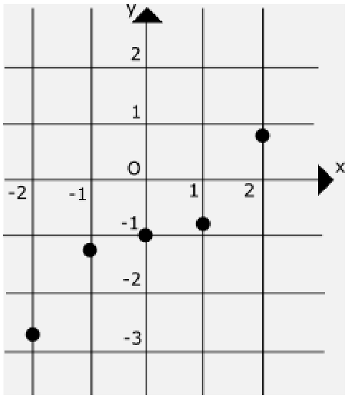


FIG. 33

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Che cos'è una funzione definita da un insieme X verso un insieme Y?
2. Dati gli insiemi A={a, b} e B={1, 2}, quante sono le possibili funzioni di A in B?
3. Nella figura sottostante (Fig. 34) sono rappresentate quattro relazioni definite nell'insieme X={1,2,3,4}. Una sola di esse è una funzione di X in X. Quale? Perché?

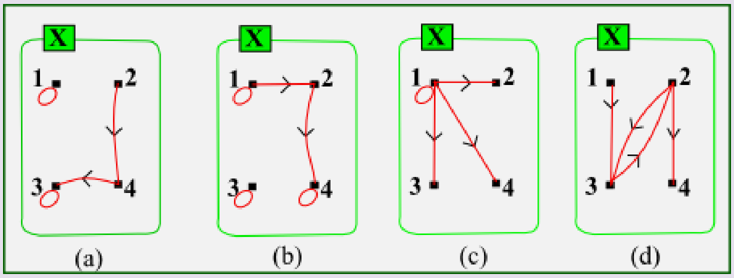


FIG. 34

4. Nella figura sottostante (Fig. 35) sono rappresentate quattro relazioni definite nell'insieme X={1,2,3,4}. Una sola di esse NON è una funzione di X in X. Quale? Perché?

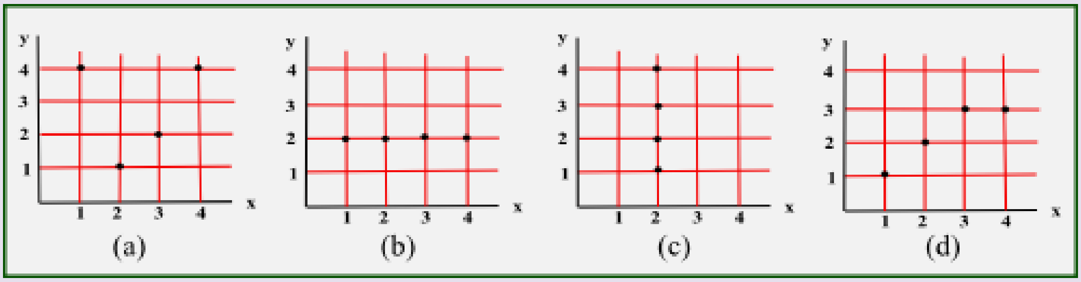


FIG. 35

5. Qual è la funzione in uscita dallo schema di calcolo illustrato nella figura sottostante (Fig. 36)?

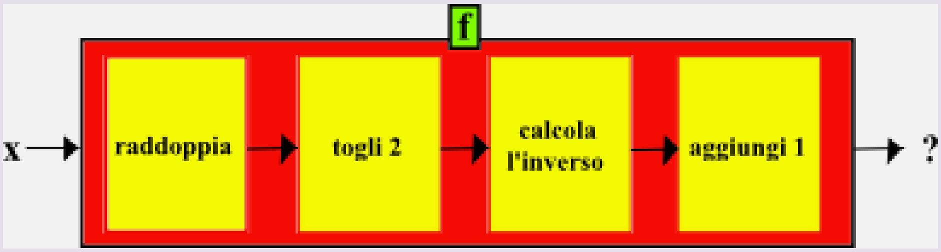


FIG. 36

6. La formula P=4L esprime il perimetro P di un quadrato in funzione della lunghezza L del lato. Se P raddoppia quale delle seguenti alternative si verifica?
   [A] L raddoppia. [B] L quadruplica. [C] L si dimezza. [D] L si riduce ad un quarto.

7. La formula $PV=k$, dove k è una costante, lega la pressione P e il volume V di un gas che subisce una trasformazione isotermica (cioè a temperatura costante). Se P raddoppia quale delle seguenti alternative si verifica?
[A] V raddoppia [B] V quadruplica. [C] V si dimezza. [D] V si riduce ad un quarto.

8. La formula $s=\frac{1}{2}gt^2$, dove g è una costante, lega lo spazio s e il tempo t di caduta libera di un grave sulla Terra. Se t raddoppia quale delle seguenti alternative si verifica?
[A] s raddoppia. [B] s quadruplica. [C] s si dimezza. [D] s si riduce ad un quarto.

9. La formula $F=\frac{k}{d^2}$, dove k è una costante, esprime la forza F di attrazione di due masse in funzione della loro distanza. Se d raddoppia quale delle seguenti alternative si verifica?
[A] F raddoppia. [B] F quadruplica. [C] F si dimezza. [D] F si riduce ad un quarto.

10. È data la funzione $f(x)=2x+1$. Qual è l'espressione della funzione $f[f(x)]$?
[A] 4x+1. [B] 4x+3. [C] 2x+3. [D] 4x+2.

RISPOSTE.

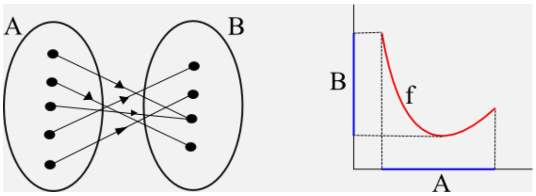
1. È una relazione che ad ogni elemento di X associa uno ed un solo elemento di Y.
2. Sono 4 e precisamente quelle che hanno i seguenti grafici:
$$\{(a,1),(b,1)\},\ \ \{(a,1),(b,2)\},\ \ \{(a,2),(b,1)\},\ \ \{(a,2),(b,2)\}.$$
3. Alternativa corretta: (A). Infatti è l'unica relazione, fra le quattro, che ad ogni elemento di X associa uno ed un solo elemento di X. Precisamente, indicata con f la funzione, risulta: f(1)=1, f(2)=4, f(3)=3, f(4)=3.
4. Alternativa corretta: (C). Infatti è l'unica, fra le quattro, che a qualche elemento di X associa più di un elemento di X o non vi associa alcun elemento. Precisamente, indicata con R la relazione, risulta: 2R1, 2R2, 2R3, 2R4; mentre ogni altro elemento non è associato ad alcun elemento di X.
5. $f(x)=\frac{1}{2x-2}+1$.
6. Alternativa corretta: [A].
7. Alternativa corretta: [C].
8. Alternativa corretta: [B].
9. Alternativa corretta: [D].
10. Si tratta di sostituire 2x+1 al posto di x nell'espressione di f[f(x)]. Si ha pertanto:
$$f[f(x)]=2(2x+1)+1=4x+3\ .$$
[B] è l'alternativa corretta.

COMPLEMENTI: CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI.

L'argomento di cui ci vogliamo qui occupare non è contemplato dalle Indicazioni Nazionali (Licei) né dalle Linee Guida (Tecnici e Professionali). Non escludiamo tuttavia che qualche studente ne possa essere interessato.
Ci sono vari modi di classificare le funzioni. Una classificazione, a ben riflettere, l'abbiamo già vista: quella che distingue tra "funzioni espresse analiticamente" e "funzioni empiriche". Nel prosieguo degli studi avremo occasione di incontrarne altre. Qui vogliamo accennare a quella classificazione che distingue le funzioni tra *suriettive*, *iniettive* e *biiettive*.

Consideriamo una volta per tutte una funzione f definita da un insieme A (il dominio) verso un insieme B (il codominio).

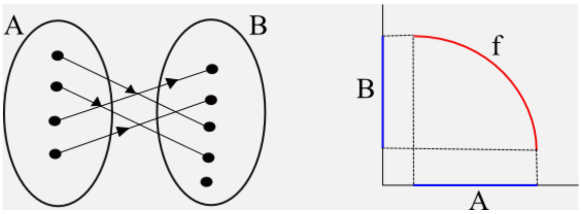
- La funzione si dice **suriettiva** se ogni elemento del suo codominio è immagine di qualche elemento del dominio (Fig. 37).
  In altri termini, se il codominio della funzione coincide con l'immagine della stessa.
  In simboli:
  $$\forall\, y \in B,\ \ \exists\, x \in A : y = f(x).$$



(a) (b)

FIG. 37

  Esempi:
  - La funzione $y=3x+2$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, è suriettiva.
  - La funzione $y=x^2$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, non è suriettiva, mentre lo è se si suppone definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$.
  - La funzione $y=1/x$, definita da $\mathbb{R}_0$ in $\mathbb{R}$, non è suriettiva, mentre lo è se si suppone definita da $\mathbb{R}_0$ in $\mathbb{R}_0$.
  - La funzione y=INT(x), definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, non è suriettiva, mentre lo è se si suppone definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}$.
- La funzione si dice **iniettiva** se ad elementi distinti del dominio, comunque scelti, corrispondono elementi distinti del codominio (Fig. 38).
  In altri termini: due elementi distinti del codominio non possono essere immagini di uno stesso elemento del dominio.



(a) (b)

FIG. 38

  In simboli:
  $$\forall\, a, b \in A : a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)\,.$$
  Oppure, ricorrendo alla proposizione contronominale:
  $$\forall\, a, b \in A : f(a) = f(b) \rightarrow a = b\,.$$
  Esempi:
  - La funzione $y=3x+2$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, è iniettiva.
  - La funzione $y=x^2$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, non è iniettiva; non lo è neppure se si suppone definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$, mentre lo è se si suppone definita da $\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}$.

- La funzione $y=1/x$, definita da $\mathbb{R}_0$ in $\mathbb{R}$, è iniettiva.
- La funzione y=INT(x), definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, non è iniettiva, e non lo è neppure se si suppone definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}$.

- Si capisce che una funzione può essere suriettiva ma non iniettiva (es.: la funzione $y=x^2$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$), e può essere iniettiva ma non suriettiva (es.: la funzione $y=1/x$, definita da $\mathbb{R}_0$ in $\mathbb{R}$).
  Se una funzione è contemporaneamente suriettiva e iniettiva si dice **biiettiva**.
  Per esempio, è una funzione biiettiva la funzione $y=2x+3$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
  Sappiamo (cfr.: unità 10, n. 10.2.6) che una funzione biiettiva, definita da A verso B, realizza una corrispondenza biunivoca tra A e B.
  Lasciamo a chi legge di fornire altri esempi di funzioni biiettive, a partire da quelle prese in considerazione nei precedenti esempi.
- Naturalmente esistono funzioni che non sono suriettive né iniettive, e quindi neppure biiettive.
  Sono tali, per esempio:
  - la funzione $y=x^2$, definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$;
  - la funzione y=INT(x), definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Un banale diagramma di Eulero-Venn (Fig. 39) ben evidenzia quanto detto sopra.

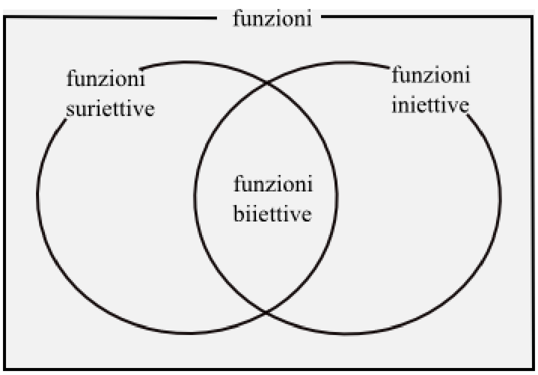


FIG. 39