Prerequisiti:

- Saper operare con i numeri razionali.
- Riconoscere e usare correttamente le diverse rappresentazioni dei numeri (frazioni, numeri decimali, percentuali).
- Conoscere i valori approssimati.
- Possedere le nozioni fondamentali della logica.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità*
- *calcolare la probabilità di un evento, usando il metodo di valutazione che appare più aderente alla situazione*
- *distinguere tra eventi compatibili e incompatibili*
- *risolvere problemi di probabilità*
- *utilizzare il linguaggio degli insiemi e della logica*

Probabilità: un primo approccio

Unità 13

13.1 INTRODUZIONE

13.1.1 Consideriamo il seguente problema:

Tizio deposita in banca € 5000 al tasso annuo del 2%. Quanto gli frutterà la somma depositata alla fine dell'anno?

La risposta è semplice e immediata: il frutto sarà il 2% di € 5000, vale a dire € 100.

Consideriamo quest'altro problema:

Il ciclista Gianni Pedivella ha percorso i 180 km di una gara in 4 ore e 35 minuti. Quale media ha tenuto?

Anche adesso la risposta è facile: la velocità media tenuta dal corridore è:

$$V_m = \frac{180}{4+\frac{35}{60}} \approx 39{,}3\ (\text{km/h})\,.$$

Prendiamo adesso in esame queste altre questioni:

- Nel lancio di una moneta esce TESTA o CROCE?
- La signora Laura è incinta: nascerà un maschio o una femmina?
- Domani si gioca la finale del campionato mondiale di calcio Italia-Francia: chi vincerà?

Qui chiaramente la risposta non può essere data con sicurezza.

Nei primi due problemi la risposta può essere data con certezza (anche se talora con margini di approssimazione) poiché essa dipende da leggi precise e determinate ed i dati assegnati sono sufficienti per poterla ottenere.

Nel secondo gruppo di questioni la risposta dipende da fatti che non si possono prevedere con esattezza. Precisamente da fatti che dipendono dal caso e detti per questo ***eventi casuali*** o ***eventi aleatori*** [(1)].

Per esempio, se si lanciano due monete TESTA-CROCE, sono possibili 4 eventi, specificati dalle seguenti 4 coppie ordinate:

E_1 = (TESTA, TESTA), E_2 = (TESTA, CROCE), E_3 = (CROCE, TESTA), E_4 = (CROCE, CROCE).

Ora, da fatti di questo genere dipendono molte delle scelte che si fanno in economia, in medicina, nelle scienze sperimentali, nella vita quotidiana. Allora, proprio per evitare di prendere decisioni alla cieca, è utile imparare a risolvere problemi le cui soluzioni non sono predeterminate dai dati in nostro possesso, ma delle quali si può dare una valutazione in termini cosiddetti probabilistici.

Prima di procedere, saresti in grado di indicare questioni, anche della vita quotidiana, le cui soluzioni sono determinate dai dati che si conoscono e questioni le cui soluzioni, invece, dipendono da fatti casuali?

13.1.2 Laboratorio di matematica.

Adesso, per entrare in argomento, ti proponiamo alcune questioni che richiedono una risposta.

1. Considera le seguenti situazioni:
   a) Esce il "5" nel lancio di un dado.
   b) Esce TESTA nel lancio di una moneta.
   c) Esce un ASSO nell'estrazione di una carta da un mazzo di carte da "briscola".

   Se dovessi scommettere 1 euro e guadagnare 1 euro in caso di vincita, su quale delle tre situazioni scommetteresti più volentieri? Quale escluderesti?
2. Supponi che in una certa comunità (potrebbe essere la tua scuola) vi siano 352 maschi e 385 femmine.

[1] L'attributo *aleatorio* deriva dal termine latino *aleatorius* che a sua volta deriva da *alea* "dado". Celebre la frase attribuita a Giulio Cesare dopo aver attraversato il Rubicone (49 a.C.): *alea iacta est* (*il dado è tratto*). Nel suo significato attuale alea è sinonimo di rischio, azzardo, sorte, caso.

Viene scelta a caso una persona per rappresentare la comunità.
Sei più disponibile a scommettere che la persona scelta sarà maschio o che sarà femmina?

3. Tutti i tuoi compagni di classe, tranne 3 di essi fra cui tu, sono stati interrogati in matematica. Saresti disposto a scommettere su una tua interrogazione nella prossima lezione di matematica?
4. Nell'urna A ci sono 7 palline bianche e 9 palline nere; nell'urna B ci sono 14 palline bianche e 18 palline nere. Una pallina viene estratta a caso da una delle due urne. Se volessi scommettere che sia nera, preferiresti che la pallina fosse estratta dall'urna A o dall'urna B?
5. Isola da un mazzo di carte da BRISCOLA le dieci carte di DENARI. Dopo averle mescolate per bene, sfilale una di seguito all'altra. Si può scommettere, alle stesse condizioni, sulle due seguenti possibilità:
   a) la successione delle 10 carte è questa:
   asso-due-tre-quattro-cinque-sei-sette-donna-cavallo-re;
   b) la successione delle 10 carte è quest'altra:
   tre-donna-due-asso-cinque-sei-sette-cavallo-re-quattro.

   Su quale delle due possibilità scommetteresti?

Continua a leggere solo dopo aver dato o cercato di dare delle risposte alle precedenti domande.

Riteniamo che le risposte date alle prime due domande siano le seguenti:

1) Scommetterei più volentieri sulla situazione b). Escluderei la c).

2) Sarei più disponibile a scommettere che la persona scelta sia una femmina.

Probabilmente è questa la risposta alla 3ª domanda:

3) Sarei disposto a scommettere su una mia interrogazione.

Ci auguriamo che abbia dato le seguenti risposte alla 4ª e alla 5ª:

4) È indifferente che la pallina sia estratta da A o da B.

5) È indifferente scommettere su a) o su b).

Le precedenti risposte portano ad una prima conclusione:

Non tutti gli eventi casuali hanno lo stesso grado di fiducia.

Non si capirebbe altrimenti perché con riferimento, per esempio, alla 1ª domanda, si preferisce scommettere sulla situazione b) ed escludere del tutto la c).

Un'altra domanda: ritieni possibile misurare il grado di fiducia che si nutre nel verificarsi di un certo evento casuale? Se sì, quale pensi che sia questa misura per ciascuno degli eventi considerati sopra?
Prima di continuare nella lettura, sarebbe utile ed opportuna una discussione in classe su questi interrogativi. Se tu e i tuoi compagni non avete trovato le risposte o se di quelle date non siete sicuri, poco male. Potrete ritornare su quelle domande dopo aver studiato i prossimi paragrafi 13.2, 13.3, 13.4.

La misura del grado di fiducia del verificarsi di un certo evento casuale si chiama ***probabilità*** dell'evento.

ATTENZIONE. Questa definizione non fa altro che attribuire un nome diverso alla "misura del grado di fiducia", ma non ci mette ancora in condizione di determinare tale misura. Per questo è necessaria quella che si chiama una "definizione operativa" della probabilità.

Ora, però, di definizioni siffatte non ce n'è una sola. Diciamo subito che noi ne forniremo tre ma, proprio per evitare di creare confusione con più definizioni dello stesso oggetto, parleremo di "valutazioni" di una probabilità. Ma non anticipiamo i tempi e procediamo con ordine.

13.2 VALUTAZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

13.2.1 Consideriamo l'esperimento *casuale* consistente nel lancio di un dado con le facce numerate da 1 a

6. Quali casi si possono presentare in seguito al lancio?
Evidentemente si può verificare l'uscita di uno dei numeri – $1, 2, 3, 4, 5, 6$ – che contrassegnano le facce del dado. Il loro insieme:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

è detto ***insieme dei casi possibili*** (o ***spazio di prova*** o ***spazio degli eventi***) dell'esperimento.

Qual è lo spazio di prova dell'esperimento casuale consistente:
- nel lanciare per due volte una moneta nel gioco "Testa o Croce"?
- nell'estrarre una pallina da un'urna che contiene 3 palline bianche e 5 palline nere?

Con riferimento a quest'ultimo esperimento, vogliamo sperare che non abbia indicato, come spazio di prova, l'insieme: {pallina bianca, pallina nera}. Poiché, in tal caso, sarebbe da concludere che, considerata un'urna che contiene palline bianche e palline nere, l'esperimento di estrarre da essa una pallina bianca o nera avrebbe la stessa probabilità indipendentemente dal numero delle palline bianche e nere che compongono l'urna. E questo, lo capisci da solo, è perlomeno inaccettabile.
Lo spazio di prova è invece il seguente:

$$S = \{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\},$$

con chiaro significato per i simboli usati, che introducono una diversità tra le varie palline, non solo tra quelle di colore diverso ma anche tra quelle dello stesso colore, nel senso che due palline siffatte sono due "cose diverse" pur avendo, a parte eventualmente il colore, le stesse caratteristiche, come forma, peso, dimensione, eccetera.

Lo spazio di prova di un esperimento casuale può essere un insieme finito o un insieme infinito.
Detto per inciso, un insieme si dice ***finito*** se può stabilirsi una corrispondenza biunivoca tra esso e l'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dove n è un qualsiasi numero naturale. Altrimenti si dice ***infinito***.
Gli esperimenti suddetti hanno tutti, come spazio di prova, un insieme finito: si dicono per questo ***esperimenti finiti***.
Considera invece l'esperimento di prendere a caso un numero nell'insieme dei numeri naturali: il suo spazio di prova è evidentemente un insieme infinito. Si chiama ***esperimento infinito***.
Qui ci occuperemo soltanto di esperimenti finiti. Chi proseguirà gli studi dopo il 1° biennio avrà, però, la possibilità di occuparsi anche di esperimenti infiniti.

- Ritorniamo sull'esperimento del lancio di un dado e consideriamo l'evento E: «esce un numero primo». È evidente che esso si verifica se esce uno dei numeri $2, 3, 5$ che sono tutti e soli i numeri primi [2] compresi fra 1 e 6. L'uscita di ognuno dei numeri $2, 3, 5$ si dice ***caso favorevole*** al verificarsi dell'evento E. Ebbene, si assume come misura del grado di fiducia di E, cioè come probabilità di E, il rapporto fra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di E e quello dei casi possibili (Fig. 1); cioè il numero $\frac{3}{6}$ o anche, ricordando altri modi equivalenti di scriverlo: $\frac{1}{2}$; $1/2$; $0{,}5$; 0.5; 50% .

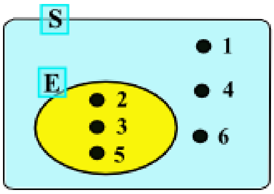

FIG. 1

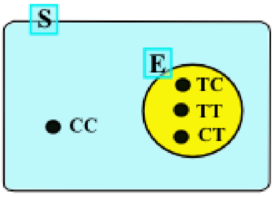

FIG. 2

---

[2] Ricordiamo che il numero 1 non si considera "numero primo".

- Nell'esperimento del lancio di una moneta per due volte, il cui spazio di prova è l'insieme:
  $$\{TT, TC, CT, CC\},$$
  consideriamo l'evento E: «esce almeno una volta TESTA». Evidentemente i casi favorevoli ad esso sono: TT, TC, CT (Fig. 2). Si assume come probabilità di E il numero $3/4$ o, scritto diversamente: 0,75 oppure 75% .
- Con riferimento all'esperimento consistente nell'estrarre a caso una pallina da un'urna che contiene 3 palline bianche e 5 palline nere, consideriamo l'evento E: «esce pallina bianca».
  Chiaramente i casi possibili sono 8 mentre quelli favorevoli all'evento sono 3. La probabilità di quest'evento è perciò il numero $3/8$ ovvero, scritto in modo diverso: 0,375 ovvero $37{,}5\%$.

In generale:

La **probabilità** di un evento casuale è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento ed il numero dei casi possibili.

Oppure, osservando che il numero dei casi favorevoli ad un evento E non è altro che il numero degli elementi di E – che indichiamo con $n(E)$ – e che il numero dei casi possibili non è altro che il numero degli elementi dello spazio S di prova dell'esperimento che si considera – cioè $n(S)$ – possiamo affermare che:

La **probabilità** di E è il numero $p(E)$ tale che:
$$\mathbf{p(E)=\frac{n(E)}{n(S)}}.$$

Siccome $E\subseteq S$ e di conseguenza $n(E)\leq n(S)$, è evidente che risulta: $\mathbf{0\leq p(E)\leq 1}$.
In particolare:

- se $p(E)=0$ – nel qual caso $E=\emptyset$ – l'evento si dice **impossibile**;
- se $p(E)=1$ – nel qual caso $E=S$ – l'evento si dice **certo**.

Per esempio, nell'esperimento del lancio di un dado, la probabilità che esca il numero 7 è chiaramente 0; mentre quella che esca un numero naturale non nullo che non superi 6 è evidentemente 1.
In altri termini:

- l'evento «esce il numero 7» è impossibile;
- l'evento «esce un numero dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$» è certo.

13.2.2 Considerato un esperimento finito di spazio di prova S, tutti i possibili casi che costituiscono S si dicono anche ***eventi elementari***. Per esempio:

- nel lancio di una moneta, gli eventi elementari sono 2:
  «esce TESTA», «esce CROCE»;
- nell'estrazione casuale dei numeri della TOMBOLA, gli eventi elementari sono 90:
  «esce 1», «esce 2», … , «esce 90»;
- nel lancio di un dado per due volte (o nel lancio di due dadi), gli eventi elementari sono le 36 coppie ordinate di numeri indicate qui appresso:

$$\begin{matrix}(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).\end{matrix}$$

La conoscenza degli eventi elementari di uno spazio di prova facilita ovviamente il calcolo della probabilità di un evento collegato in qualche modo agli eventi elementari. A titolo di esempio, con riferimento all'ultimo dei tre esempi considerati sopra, si può costruire una tabella delle probabilità che la somma dei due numeri usciti abbia un determinato valore, ovviamente compreso fra 2 e 12, estremi inclusi (Tab. 1) e anche costruire un istogramma che visualizzi come si distribuiscono tali probabilità (Fig. 3).

TAB. 1 – Distribuzione delle probabilità della somma dei due numeri usciti nel lancio di due dadi

Somma dei due numeri usciti	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilità	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

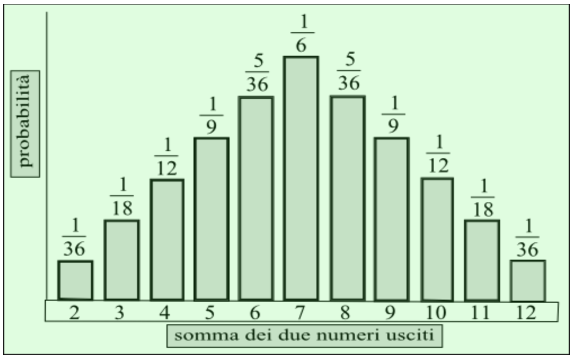

FIG. 3

Nel calcolo della probabilità di un evento casuale, relativo ad un dato esperimento, abbiamo supposto tacitamente che non ci sia ragione perché un qualsiasi evento elementare abbia possibilità di presentarsi maggiore o minore di un qualunque altro evento elementare dello stesso esperimento. Abbiamo supposto, cioè, che gli eventi elementari di uno stesso esperimento abbiano la stessa probabilità di verificarsi o, come anche si dice, che siano ***equiprobabili***.
Ma come possiamo esser sicuri di tale equiprobabilità?
La risposta sembrerebbe ovvia: basta calcolare le probabilità degli eventi elementari e controllare che sono uguali.
Ma ragioniamo un momento su questo fatto e riprendiamo, a tal riguardo, la definizione di probabilità data prima, integrata però, come deve esser fatto per correttezza, dalla dichiarazione dell'equiprobabilità degli eventi elementari:

- La **probabilità** di un evento casuale è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli ad esso ed il numero dei casi possibili, supposti *equiprobabili*.

Dunque, come dicevamo, per stabilire l'equiprobabilità di due eventi elementari, sembra che si debbano calcolare le loro probabilità; ma per questo bisogna ricorrere alla definizione di "probabilità" e quindi bisogna sapere preventivamente che i due eventi sono equiprobabili.
È come la storia del cane che si morde la coda. È quello che si chiama un *ragionamento circolare* o *circolo vizioso*.
Non intendiamo addentrarci in un discorso sottile sulla faccenda, che a voi studenti apparirebbe poco comprensibile. Ci limitiamo soltanto a dire che, nei casi nei quali solitamente si applica la precedente

definizione di probabilità, è effettivamente ragionevole pensare che siano equiprobabili gli eventi elementari dell'esperimento; e ciò senza calcolare preventivamente le loro probabilità.
Questi casi, in genere, sono quelli in cui, per una sorta di simmetria, non c'è ragione di privilegiare un esito rispetto ad un altro e riguardano lanci di monete o di dadi, estrazioni casuali di carte da un mazzo o di palline da un'urna, situazioni insomma in cui la sorte, il caso sono gli unici a decidere il risultato. Ovviamente in modo "onesto", senza trucchi.

13.2.3 Vi sono casi in cui l'equiprobabilità degli eventi elementari riguarda situazioni più interessanti dei giochi a sorte. Consideriamo le seguenti domande:

a) Qual è la probabilità di una coppia di genitori di avere un figlio maschio?
b) Se i genitori hanno due figli, qual è la probabilità che almeno uno sia un maschio?

Per rispondere alla prima delle due domande bisogna sapere che responsabili del sesso del nascituro sono i "cromosomi". Ogni individuo ne possiede una coppia: la coppia XX se è di sesso femminile, la coppia XY se è di sesso maschile.
Bisogna sapere, inoltre, che il nascituro prende a caso un cromosoma dal padre e uno dalla madre.
A questo punto abbiamo tutti gli elementi per rispondere alle due domande.

a) Il nascituro prende dalla madre certamente il cromosoma X. Dal padre, invece, può prendere sia il cromosoma X sia il cromosoma Y: ognuno con probabilità $1/2$. Ne consegue che egli è caratterizzato dalla coppia di cromosomi XX con probabilità $1/2$ e dalla coppia XY con probabilità $1/2$. Dunque la probabilità che il nascituro sia di sesso maschile (cromosoma XY) è $1/2$, esattamente uguale a quella che sia di sesso femminile (cromosoma XX).
b) Teniamo presente che lo spazio di prova è l'insieme $\{\text{M-M}, \text{M-F}, \text{F-M}, \text{F-F}\}$, dove "M" sta per maschio ed "F" per femmina. La probabilità cercata è perciò 3/4. Facciamo notare, per la cronaca, che la situazione è analoga a quella in cui, nel lancio di una moneta TESTA-CROCE, effettuato due volte, si chiede di conoscere la probabilità che almeno una volta esca "testa".

13.2.4 Adesso, prima di procedere, vogliamo metterti alla prova, proponendoti alcuni esercizi [3].

1. ® Si estrae a caso uno dei 90 numeri della tombola. Calcola la probabilità che esso sia un numero: a) pari; b) primo; c) divisibile per 7; d) divisore di 90.

2. Sono lanciati due dadi, ciascuno con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire. L'esito di ogni lancio è quindi l'uscita di una coppia di numeri. Determina: a) lo spazio di prova dell'esperimento; b) l'evento E caratterizzato dalla proposizione «la somma dei due numeri usciti è divisibile per 3»; c) la probabilità di E.

3. Sono lanciati due dadi, ciascuno con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire. L'esito di ogni lancio è quindi l'uscita di una coppia di numeri. Calcola le probabilità che la loro somma: a) sia divisibile per 2 ma non per 3; b) sia divisibile per 3 ma non per 2; c) sia divisibile per 2 e per 3; d) non sia divisibile né per 2 né per 3.
Quanto vale la somma delle quattro probabilità trovate?

4. ® Un'urna contiene delle palline, che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 12 palline sono bianche, 10 nere, 4 palline bianche sono di plastica, 3 palline nere sono di vetro. Viene estratta a caso una pallina dall'urna. Calcola la probabilità che sia: a) bianca; b) nera; c) di pla-

---

[3] In questo gruppo di esercizi, come in quelli che seguono, alcuni esercizi sono contrassegnati con il simbolo **®:** la loro risoluzione, totale o parziale può essere riscontrata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente

stica; d) di vetro; e) bianca e di plastica; f) bianca e di vetro; g) nera e di plastica; h) nera e di vetro.

5. ® Una coppia di genitori programma di avere 3 figli. Qual è la probabilità che almeno 2 di essi siano di sesso maschile?
6. Nel gioco "Chi vuol essere milionario", il concorrente deve rispondere ad una domanda, scegliendo la risposta fra quattro alternative. Il concorrente è sicuro che due di queste alternative sono errate.
   a) Se sceglie a caso fra le altre due alternative, quale probabilità ha di indovinare quella giusta?
   b) Se decide di usufruire della possibilità di affidarsi al computer, che elimina casualmente due delle quattro alternative, quale probabilità c'è che, delle due alternative rimaste, una sia quella corretta e l'altra sia una delle due che egli ritiene errate?
7. Nel gioco "Uno contro 100", il concorrente deve rispondere ad una domanda, scegliendo la risposta fra tre alternative. Egli dispone di 3 jolly, di cui uno gli dà la possibilità di dare due risposte, un altro elimina una delle alternative scorrette. Ammesso che il concorrente non abbia idea di quale alternativa scegliere, è più conveniente usare il 1° o il 2° di questi due jolly?
8. Una coppia di genitori ha 4 figli: è più probabile che siano 2 di un sesso e 2 di un altro sesso oppure che siano 3 di un sesso ed uno di un altro sesso?
9. Prendi in esame i numeri primi p minori di 50 e tali che anche 2p–1 sia un numero primo e scrivi il loro insieme. Calcola quindi la probabilità che, prendendone due a caso, diversi fra loro, la loro somma sia ancora un numero primo.

13.2.5 Considerato un dato esperimento finito, di spazio di prova S, sia E un evento relativo ad esso. L'insieme S–E (Fig. 4), vale a dire l'insieme complementare di E rispetto ad S, si chiama ***evento contrario*** (o ***opposto*** o ***complementare***) di E. La proposizione che lo caratterizza è la negazione di quella che caratterizza E. Per questo S–E si indica con $\bar{\mathbf{E}}$ (o con $\tilde{\mathbf{E}}$ o con $\neg\mathbf{E}$).

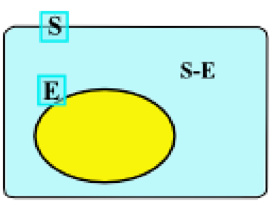

FIG. 4

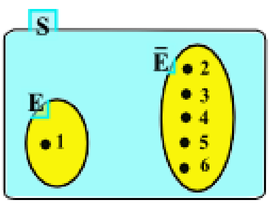

FIG. 5

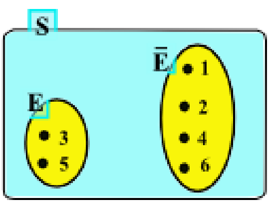

FIG. 6

Per esempio, nel lancio di un dado:

- Se E è l'evento «esce il numero 1», $\bar{E}$ è l'evento «esce un numero diverso da 1» (Fig. 5). Si ha: $p(E)=\frac{1}{6}$; $p(\bar{E})=\frac{5}{6}$.
- Se E è l'evento «esce un numero primo e dispari», $\bar{E}$ è l'evento «esce un numero non primo o non dispari» (Fig. 6). Si ha: $p(E)=\frac{2}{6}$; $p(\bar{E})=\frac{4}{6}$.

In entrambi i casi risulta evidentemente:

$$\mathbf{p(E)+p(\bar{E})=1}\,.$$

E questo è un fatto che si verifica sempre. Infatti:

$$p(\bar{E})=p(S-E)=\frac{n(S-E)}{n(S)}=\frac{n(S)-n(E)}{n(S)}=1-\frac{n(E)}{n(S)}=1-p(E)\,.$$

E da qui segue subito la relazione che si voleva provare. In sostanza:

Due eventi sono ***complementari*** (o ***opposti*** o ***contrari***) se uno dei due certamente si verifica ma è escluso che si verifichino entrambi.

Talvolta è più semplice calcolare la probabilità di un certo evento dopo aver determinato quella dell'evento contrario, piuttosto che calcolarla direttamente.

A questo riguardo consideriamo il seguente esempio.

- ESERCIZIO. Calcola la probabilità che, lanciando due volte un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi la stessa probabilità di uscire, esca almeno una volta il numero 1.

RISOLUZIONE. I casi possibili (evidenziati dal grafo di figura 7) sono tanti quanti i modi di associare ad ognuno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ciascuno di essi: ossia 6^2 e cioè 36.

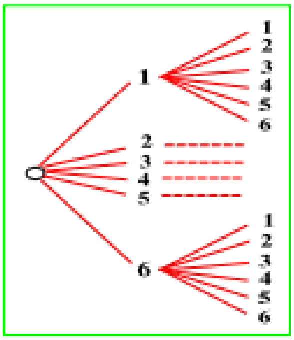

FIG. 7

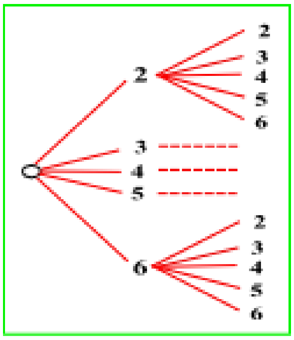

FIG. 8

Adesso, invece di calcolare direttamente $p(E)$, dove E è l'evento «esce almeno una volta 1», la calcoliamo attraverso $p(\overline{E})$, dove $\overline{E}$ è chiaramente l'evento «non esce mai 1». I casi favorevoli a $\overline{E}$ (evidenziati dal grafo di figura 8) sono tanti quanti i modi di associare ad ognuno dei numeri $2, 3, 4, 5, 6$ ciascuno di essi: vale a dire 5^2 e cioè 25. Dunque:

$$p(E)=1-p(\overline{E})=1-\frac{5^2}{6^2}\approx 30{,}56\% .$$

Per la verità quest'esercizio si può risolvere agevolmente anche col calcolo diretto di $p(E)$.
Infatti, considerando lo spazio di prova dell'esperimento, vale a dire l'insieme A^2, dove $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, si può notare (Tab. 2) che: $n(A^2)=36$, $n(E)=11$. Di modo che, per l'appunto:

$$p(E)=\frac{11}{36}\approx 30{,}56\% .$$

6	x					
5	x					
4	x					
3	x					
2	x					
1	x	x	x	x	x	x
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

TAB. 2

Tuttavia, la risoluzione diretta avrebbe comportato delle serie complicazioni se i lanci del dado, invece di 2, fossero stati già 3. Invece, col calcolo effettuato mediante la probabilità contraria, la probabilità dell'evento E «esce almeno una volta 1», si trova facilmente anche in questo caso:

$$p(E)=1-p(\overline{E})=1-\frac{5^3}{6^3}\approx 42{,}13\% .$$

E se i lanci fossero n, quanto varrebbe p(E)?

13.2.6 Consideriamo l'esperimento consistente nel lancio di un dado con le facce numerate da 1 a 6, di cui naturalmente ogni esito è l'uscita di uno di quei sei numeri. Numeri che si suppone abbiano la stessa probabilità di uscire. Sicché lo spazio di prova dell'esperimento è l'insieme:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Consideriamo quindi i seguenti eventi, caratterizzati dalle proposizioni indicate a fianco di ciascuno di essi:

E_1: «esce un numero pari»; E_2: «esce un multiplo di 3».

È evidente che, se esce il numero "6", si presentano entrambi gli eventi.

- Quando due eventi casuali, E_1 ed E_2, si possono presentare contemporaneamente – quando cioè $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ – allora i due eventi si dicono ***compatibili***.
- Quando invece $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ – vale a dire quando i due eventi E_1 ed E_2 non si possono manifestare contemporaneamente – allora si dicono ***incompatibili*** (o ***disgiunti***).

Per esempio, due eventi complementari sono certamente incompatibili.

Ancora un esempio: se l'esperimento consiste nell'estrarre casualmente una pallina da un'urna contenente palline di due colori (bianche, nere), che possono essere di vetro o di plastica, gli eventi:

E_1: «esce una pallina bianca», E_2: «esce una pallina di plastica»

sono evidentemente compatibili, vale a dire che la pallina estratta può essere bianca e di plastica.

Anche nel caso in cui l'esperimento prevede più di due eventi si può parlare di eventi compatibili o incompatibili. Per la precisione:

N eventi di un esperimento si dicono:
- ***compatibili*** se il verificarsi di uno di essi non esclude il verificarsi degli altri,
- ***incompatibili*** (o ***mutuamente disgiunti*** o ***mutuamente esclusivi***) se il verificarsi di uno di essi esclude il verificarsi di tutti gli altri.

Essi si dicono, inoltre, ***esaustivi*** (dello spazio di prova) se, presi collettivamente, esauriscono tutti i possibili esiti dell'esperimento.

Per esempio, nell'esperimento del lancio di un dado, con le facce numerate da 1 a 6:
- sono incompatibili e non esaustivi gli eventi "esce un numero primo", "esce un numero composto";
- sono compatibili ed esaustivi gli eventi "esce un numero primo", "esce un numero pari", "esce il numero 1";
- sono esaustivi e incompatibili gli eventi "esce un numero pari", "esce un numero dispari";
- sono compatibili ma non esaustivi gli eventi "esce un numero primo", "esce un numero pari".

Prova a fornire una spiegazione di tutto ciò, utilizzando anche i diagrammi di Eulero-Venn.

13.2.7 ESERCIZI E PROBLEMI SULLA PROBABILITÀ CLASSICA.

1. Si lancia un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire. Calcola la probabilità che esca:
   a) il numero 1; b) un numero pari; c) un multiplo di 4; d) un numero non primo.
2. Un'urna contiene 18 palline bianche, 32 palline nere e 20 palline rosse. Si estrae a caso una pallina. Calcola la probabilità che sia: a) bianca; b) nera; c) rossa.
3. Da un mazzo di carte da BRISCOLA se ne estrae una a caso. Calcola la probabilità che:
   a) sia una carta di "coppe"; b) sia una "figura" (sono figure "fanti", "cavalli" e "re");

c) sia un "re" o una carta di "denari"; d) non sia un "asso" né una carta di "spade".

[**R.** ...; c) $13/40$; d) $27/40$]

4. Si lancia per tre volte una moneta "onesta" nel gioco TESTA-CROCE.

1) Determina lo spazio di prova dell'esperimento, rappresentando con un grafo le possibili successioni in cui si presentano le due facce della moneta.
2) Calcola la probabilità di ottenere nei tre lanci:
   a) almeno una volta "testa"; b) al più una volta "testa";
   c) almeno una volta "testa" ed almeno una volta "croce"; d) almeno due volte "testa";
   e) due volte "testa" ed una volta "croce".

$\left[\textbf{R.} \ldots ; \text{b)} \frac{7}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right]$

5. Si estrae uno dei 90 numeri della Tombola.

a) Determina l'evento E_1 caratterizzato dalla proposizione «il numero estratto è divisibile per 5» e calcolane la probabilità.

b) Determina l'evento E_2 caratterizzato dalla proposizione «il numero estratto è divisibile per 8» e calcolane la probabilità.

c) Verifica che risulta: $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.

6. In un'urna vi sono 5 palline bianche e 3 palline nere.

a) Si estrae una pallina a caso e, senza guardarla, la si accantona. Si estrae quindi una seconda pallina. Qual è la probabilità che quest'ultima sia bianca?

b) Si estrae una pallina a caso e si vede che è bianca. Si estrae quindi una seconda pallina. Qual è la probabilità che quest'ultima sia nera?

c) Si estrae una pallina a caso e si vede che è nera. Si estrae quindi una seconda pallina. Qual è la probabilità che quest'ultima sia bianca?

[**R.** a) $5/8$; b) $3/7$; c) $5/7$]

7. ® Un'urna contiene 2 palline bianche e 3 palline nere. Si considerino i seguenti esperimenti:

a) si estrae una pallina e, senza rimetterla nell'urna, se ne estrae un'altra [4];

b) si estrae una pallina e, dopo averla rimessa nell'urna, se ne estrae un'altra [4];

c) si estraggono simultaneamente due palline.

In ciascuno dei tre esperimenti calcola la probabilità che le due palline estratte siano: 1) bianche; 2) nere. [**R.** a1) $1/10$, b1) $4/25$, c1) $1/10$; ...]

8. ® Un'urna contiene 15 palline bianche e 17 palline nere. Si considerino gli stessi esperimenti dell'esercizio precedente. Nei primi due calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia nera e la seconda sia bianca. Nel terzo esperimento calcolare la probabilità che le due palline siano una bianca ed una nera. [**R.** a) 25,71%, b) 24,90%, c) 51,41%]

9. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 75 sono bianche, 62 sono di vetro; si sa inoltre che 27 palline bianche sono di vetro e 30 palline nere sono di plastica. Si estrae una pallina a caso. Calcola la probabilità che sia: a) nera; b) di vetro; c) nera e di vetro; d) nera ma non di vetro; e) di vetro ma non nera; f) non nera e non di vetro.

[**R.** a) 46,42%; b) 44,28%; c) 25%; d) 21,42%; e) 19,28%; f) 34,28%]

10. Un'urna A contiene 4 palline contrassegnate dai numeri 1, 3, 5, 7. Un'urna B contiene 3 palline con-

[4] Le estrazioni eseguite senza rimettere la pallina estratta nell'urna si denominano *estrazioni bernoulliane*; quelle eseguite rimettendo nell'urna la pallina estratta si denominano *estrazioni non bernoulliane*. Prendono il nome dal matematico svizzero Jakob Bernouilli (1654-1705).

trassegnate dai numeri 1, 3, 5. Estraendo una pallina di numero a da A ed una pallina di numero b da B, si forma il numero 10a+b. Dopo aver visualizzato la situazione con un grafo, calcola la probabilità che il numero suddetto sia:

a) minore di 20; b) maggiore di 20; c) compreso fra 20 e 60.

[**R.** a) 25%; b) 75%; c) 50%]

11. Si lanciano due dadi con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire.

a) Determina l'evento caratterizzato dalla proposizione «escono due numeri la cui somma è maggiore di 7» e calcolane la probabilità.

b) Determina l'evento caratterizzato dalla proposizione «escono due numeri la cui somma è minore di 7» e calcolane la probabilità.

c) I due eventi suddetti sono esaustivi dello spazio di prova dell'esperimento?

12. Calcola la probabilità che, estraendo uno dei 90 numeri della Tombola, questo non sia divisibile per 13. [**R.** 93,33%]

13. Calcola la probabilità che almeno una volta esca "testa" quando si lancia una moneta "onesta" per: a) 2 volte; b) 3 volte; c) 4 volte; d) n volte. [**R.** ... ; b) 87,5%; c) 93,75%; ...]

14. Calcolare la probabilità che almeno una volta esca l'«1» o il «2» quando si lancia un dado "onesto" per: a) 2 volte; b) 3 volte; c) 4 volte; d) n volte. [**R.** ... ; b) 70,37%; c) 80,25%; ...]

15. In tre urne, numerate da 1 a 3, vengono messe a caso tre buste, una in ogni urna, esse pure numerate da 1 a 3. Calcola la probabilità che capiti nell'urna che porta lo stesso numero:

a) almeno una busta; b) una ed una sola busta; c) una busta al più.

[**R.** a) 66,67%; b) 50%; c) 83,33%]

16. Si isolino le 13 carte di Cuori di un mazzo da Bridge [5].

a) Da queste 13 carte se ne estrae una a caso e, senza guardarla, la si mette da parte. Si estrae quindi una seconda carta. Qual è la probabilità che questa sia l'Asso?

b) Dalle 13 carte se ne estrae una a caso e, constatato che non è l'Asso, si estrae una seconda carta senza rimettere la prima nel mazzo. Qual è la probabilità che la seconda carta estratta sia l'Asso?

c) Dalle 13 carte se ne estraggono due a caso. Qual è la probabilità che fra esse vi sia l'Asso?

[**R.** a) 7,69%; b) 8,33%; c) 15,38%]

17. ® Paola lancia una moneta e Marco ne lancia due: Marco vince se ottiene più "teste" di Paola, altrimenti vince Paola. La probabilità che esca "testa" e quella che esca "croce" sono le stesse su tutte e tre le monete. Chi ha più probabilità di vincere, Paola o Marco?

18. ® Si scelgano a caso due punti sulla superficie terrestre (supposta sferica). Qual è la probabilità che siano entrambi nell'emisfero boreale? [**R.** 1/4]

19. Sulla tastiera di una cassaforte sono riportate le cifre da 0 a 9 e le lettere A, B (Fig. 9).

1	2	3
4	5	6
7	8	9
A	0	B

FIG. 9

[5] Lo diciamo una volta per tutte: un mazzo di carte da Bridge è composto da 52 carte, suddivise in 4 colori, che sono Picche, Cuori, Quadri, Fiori. Ogni colore è composto da 13 carte, e precisamente: Asso, Due, Tre, Quattro, Cinque, Sei, Sette, Otto, Nove, Dieci, Fante, Donna, Re. Le 4 carte Fante, Donna, Re, Asso sono chiamate *onori*.

Per aprire la cassaforte è necessario digitare in un preciso ordine 5 tasti diversi. Ammesso che sia necessario un secondo per digitare 5 tasti e, a seguire, mezzo secondo di pausa, qual è la probabilità che, digitando a caso 5 tasti (ma in modo che ogni successione sia diversa dalle altre), si riesca ad aprire la cassaforte in 12 ore? [**R.** ≈0,30]

20. Si lanciano due dadi, aventi entrambi le facce numerate da 1 a 6 e le medesime probabilità di uscire. Calcolare le probabilità dei seguenti eventi:

a) La somma dei due numeri usciti è pari. b) La somma dei due numeri usciti è un numero primo.
c) Il prodotto dei due numeri usciti è pari. d) Il prodotto dei due numeri usciti è maggiore di 9.
e) I due numeri usciti sono entrambi pari. f) I due numeri usciti sono entrambi dispari.
g) I due numeri usciti sono uguali. h) I due numeri usciti sono diversi.

21. In un sacchetto sono contenute palline di due colori diversi: bianco e nero. Il numero delle palline bianche è 1,5 volte quello delle palline nere. Dire quali delle seguenti probabilità si possono determinare e quali no.

a) Probabilità che, estratta una pallina a caso, sia bianca.
b) Si estrae una pallina a caso e la si mette da parte senza guardarla. Se ne estrae una seconda a caso. Probabilità che questa sia nera.
c) Si estrae una pallina a caso e si constata che è bianca. Se ne estrae una seconda a caso. Probabilità che questa sia nera.

22. La tabella sottostante (Tab. 3) sintetizza il numero d famiglie di una determinata comunità e, in corrispondenza, il numero dei vani delle loro abitazioni. Calcolare la probabilità che, scelta a caso una famiglia della comunità, viva in un’abitazione con: a) almeno 4 vani; b) non più di 4 vani.
I due eventi proposti sono compatibili? Sono esaustivi?

N° famiglie	4	6	10	3	2
N° vani	2	3	4	5	6

TAB. 3

23. In un sacchetto sono contenute palline di 5 colori diversi: nero, rosso, giallo, verde, blu. L’istogramma sottostante (Fig. 10) ne descrive la distribuzione esatta. Si estrae a caso una pallina. Calcolare la probabilità che: a) sia rossa; b) sia verde o blu; c) non sia rossa né gialla.

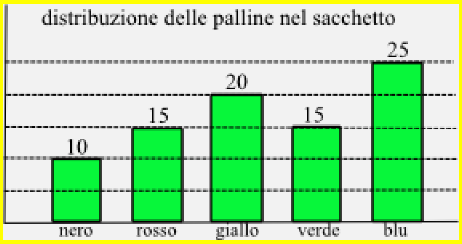

FIG. 10

24. Le 6 facce di un dado, perfettamente bilanciato, sono contrassegnate da numeri che soddisfano alle seguenti condizioni:
(1) La probabilità che, in un lancio del dado, esca il numero 2 è 1/2, quella che esca il 3 è 1/3, quella che esca il 4 è 1/4.
(2) La probabilità che, in un lancio del dado, esca il numero 2 è 1/2, quella che esca il 3 è 1/3, quella che esca il 6 è 1/6.

a) Per ciascuna delle situazioni (1) e (2) fornire la dimostrazione che è possibile oppure dimostrare che è impossibile.
b) Nel caso in cui la situazione sia possibile spiegare come sono distribuiti i numeri sulle facce del dado.

13.3 VALUTAZIONE FREQUENTISTA DELLA PROBABILITÀ

13.3.1 Le situazioni nelle quali si può ricorrere alla valutazione classica della probabilità, pur essendo numerose ed interessanti, sono poche, specialmente rispetto a quelle che hanno una rilevanza in problemi concreti e reali, attinenti soprattutto all'economia, alle scienze sperimentali, alla vita sociale in genere. In problemi di questo tipo non è possibile valutare preventivamente se gli eventi siano o no equiprobabili.

Ce ne possiamo rendere conto facilmente considerando le seguenti questioni.

- Calcolare la probabilità che una persona, scelta a caso fra gli automobilisti di una certa città, subisca un incidente automobilistico nel prossimo anno.
- Hai avuto modo di constatare che un certo dado è fasullo, vale a dire che alcune facce compaiono più spesso ed alcune meno spesso rispetto alle altre facce, per cui concludi che gli eventi possibili non sono equiprobabili. Come si fa a calcolare la probabilità che esca una determinata faccia?
- Sei venuto a sapere che, fra i televisori prodotti da una certa azienda, ce ne sono di difettosi. Come si fa a calcolare qual è la probabilità che, prendendone uno a caso, sia proprio difettoso?

Problemi siffatti non si possono risolvere ricorrendo alla valutazione classica della probabilità. Bisogna battere altre piste.

Riprendiamo allora l'esperimento del lancio di una moneta. La probabilità, nella concezione classica, che in un lancio esca TESTA è 0,5. Abbiamo eseguito l'esperimento per 50 volte, nel senso che per 50 volte effettivamente abbiamo lanciato una moneta: abbiamo contato 23 TESTE (è il risultato che noi abbiamo ottenuto, ma altri potrebbero ottenerne uno diverso). Sappiamo che questo numero 23 si chiama *frequenza assoluta*. Diciamo *frequenza relativa* il rapporto: 23/50=0,46.

♦ In generale, in un esperimento ripetuto N volte (nelle stesse condizioni):
- ***frequenza assoluta*** di un evento casuale è il numero n di volte ($n \le N$) in cui l'evento si manifesta;
- ***frequenza relativa*** (o semplicemente ***frequenza***) è il numero f dato dal rapporto n/N fra la frequenza assoluta n ed il numero N di prove (per cui, essendo $n \le N$, risulta: $0 \le f \le 1$).

Ritornando all'esperimento, ripetiamolo per un numero N di volte via via crescente, eseguite sempre nelle medesime condizioni e, dopo aver controllato i valori della frequenza assoluta n dell'evento «esce TESTA», calcoliamo le corrispondenti frequenze relative.

I risultati (da noi ottenuti simulando l'esperimento al computer) sono raccolti nella tabella 4.

N	50	100	500	1000	2000	3000	5000	10000	15000	20000	25000	30000
n	23	52	261	484	986	1527	2544	5050	7487	9933	12590	14919
f	0,460	0,520	0,522	0,484	0,493	0,509	0,509	0,505	0,499	0,497	0,504	0,497

TAB. 4

Come si vede, i valori della frequenza f, per un gran numero di prove, oscillano intorno al valore 0,5 della probabilità p dell'evento, calcolata – lo ripetiamo – secondo la valutazione classica.

Ora, questo fatto non si verifica soltanto nell'esperimento del lancio di una moneta, ma ogni volta che si ha a che fare con un esperimento nel quale un certo evento ha una probabilità p (in senso classico) di verificarsi.

Per esempio, sempre mediante una simulazione al computer, abbiamo compilato la tabella 5, relativa alla frequenza con cui si presenta l'evento E: «la somma dei due numeri usciti è 12» nel lancio di due dadi. La probabilità p dell'evento, nella concezione classica, è: $p=\frac{1}{36}\approx 0{,}028$.

N	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000	25000	30000
n	1	2	8	13	22	57	124	293	396	564	724	897
f	0,020	0,020	0,040	0,026	0,022	0,028	0,025	0,029	0,026	0,028	0,029	0,030

TAB. 5

Si può constatare che anche adesso si verifica quanto detto sopra; vale a dire che i valori della frequenza f, per un gran numero di prove, oscillano intorno al valore della probabilità p dell'evento, calcolata secondo la valutazione classica.

Possiamo allora assumere il seguente principio suggerito dall'esperienza e noto come *legge empirica del caso*:

- **LEGGE EMPIRICA DEL CASO.** La frequenza f di un evento casuale, di probabilità p in senso classico, pur variando al variare del numero N delle prove, effettuate tutte nelle medesime condizioni, al crescere di N si approssima, benché non in modo regolare, alla probabilità p dell'evento.
  La differenza $|f-p|$ si approssima a zero (ma non in modo regolare).

13.3.2 La legge empirica del caso è il presupposto per una nuova valutazione della probabilità.

Partiamo ancora una volta da un esperimento.

In un'urna ci sono delle palline, in parte bianche e in parte nere. Non ne conosciamo il numero; quindi non siamo in grado di sapere qual è la probabilità, nella concezione classica, di estrarre dall'urna una pallina bianca.

Ripetiamo 100 volte l'esperimento di estrarre una pallina dall'urna (la pallina estratta, una volta rilevatone il colore, viene rimessa nell'urna). Registriamo questo esito: 30 volte la pallina estratta è stata bianca, 70 volte è stata nera.

Rifacendoci alla legge empirica del caso, cosa possiamo concludere circa la composizione dell'urna e circa la probabilità di estrarre da essa una pallina bianca? Cerca di rispondere, prima di continuare nella lettura, magari discutendo della questione con i tuoi compagni.

Se hai risposto che le palline bianche presenti nell'urna sono, con buona approssimazione, nel rapporto 3:7 rispetto a quelle nere e che la probabilità di estrarre dall'urna una pallina bianca è 0,3 con pari approssimazione, hai risposto correttamente.

Ecco dunque una nuova valutazione di probabilità, detta **valutazione frequentista** (o **statistica**):

- La **probabilità** di un evento casuale è il rapporto fra il numero di volte in cui l'evento si verifica ed il numero di prove effettuate tutte nelle medesime condizioni; cioè è la frequenza dell'evento.

Alla valutazione frequentista di probabilità si può ricorrere sia quando si conosce la probabilità classica di un evento sia quando questa non si conosce. A condizione che si riesca ad effettuare l'esperimento per un numero adeguato di volte.

Fornisci alcuni esempi di eventi casuali la cui probabilità può essere calcolata ricorrendo alla concezione classica ed alcuni esempi in cui non può esserlo, mentre può essere calcolata ricorrendo alla concezione frequentista.

13.3.3 ESERCIZI.

1. Da esperienze acquisite con controlli precedenti, si sa che, mediamente, su 148 televisori di una data marca, uno è difettoso. Compri un televisore di quella marca. Qual è la probabilità che sia difettoso?
2. Su una data "ruota" del gioco del LOTTO il numero "13" non esce da 120 estrazioni. Fra gli altri numeri il massimo ritardo è di 75 settimane. Se decidessi di puntare sull'uscita di un numero su quella "ruota", avresti qualche preferenza per il "13" o, sotto questo aspetto, giudicheresti equivalenti tutti i numeri?
3. Sulle ultime 1800 persone nate in una data città si è riscontrato che 921 sono maschi. Qual è la probabilità che il prossimo nato sia un maschio? Quale che sia una femmina? [**R.** 51,17%; 48,83%]
4. Un'indagine condotta fra 3600 abitanti di una data città ha mostrato che in un anno 432 abitanti sono stati "scippati" mentre andavano per strada. Qual è la probabilità che ad un abitante di quella città capiti quella disavventura? [**R.** 12%]
5. Hai avuto modo di osservare che in 100 lanci di un dado le facce si sono presentate con la frequenza indicata nella sottostante tabella (Tab. 6). Scommetteresti sulla perfetta simmetria del dado? Calcola la probabilità che in un lancio successivo esca: a) un numero minore di 4; b) un multiplo di 2; c) un numero dispari e primo; d) un numero dispari e/o primo. [**R.** a) 40%; b) 33%; c) 55%; ...]

Faccia uscita	1	2	3	4	5	6
Frequenza assoluta	12	15	13	16	42	2

TAB. 6

6. Un'urna contiene 1370 palline diversamente colorate. In seguito a 100 estrazioni casuali di una pallina (che dopo ogni estrazione è stata rimessa nell'urna), si è ottenuto l'esito riassunto nella tabella 7, che sei invitato a completare. Stabilisci qual è, con approssimazione, la composizione dell'urna e qual è la probabilità che, in una estrazione successiva, la pallina estratta sia: a) bianca; b) nera; c) rossa, d) verde; e) bianca o rossa; f) bianca o perlomeno non nera.
[**R.** All'incirca: 342 bianche, 521 nere, 192 rosse, 315 verdi; ... .]

	pallina bianca	pallina nera	pallina rossa	pallina verde
n : frequenza assoluta	25	38	14	23
f : frequenza relativa				

TAB. 7

7. Un'indagine, condotta fra i 973 impiegati di un'azienda, ha rivelato che 520 sono di sesso femminile; inoltre 274 hanno un'età compresa fra i 15 ed i 25 anni, 352 un'età compresa fra i 26 ed i 45 anni, gli altri un'età superiore ai 45 anni. Calcola la probabilità che, scelto a caso un impiegato: a) sia di sesso maschile; b) abbia un'età superiore ai 25 anni; c) abbia un'età che non superi i 45 anni.
[**R.** a) 46,56%; b) 71,84%; c) 64,34%]
8. In una comunità di 35000 persone è stato scelto a caso un campione rappresentativo di 140 persone. Per queste ultime è stato rilevato che: 1) 17 non hanno ancora compiuto 15 anni; 2) 92 hanno un'età compresa fra 15 e 65 anni; 3) 31 hanno superato i 65 anni di età. Stabilisci qual è, con approssimazione, la ripartizione della comunità in base alle fasce d'età considerate. Scelta ora a caso una delle persone della comunità, calcola la probabilità: a) p_1 che appartenga alla 1ª fascia d'età; b) p_2 che appartenga alla 2ª fascia; c) p_3 che appartenga alla 3ª fascia.

Quanto vale $p_1+p_2+p_3$? È normale che sia così? [**R.** ... ; $p_1 \approx 12,14\%$, $p_2 \approx 65,71\%$, $p_3 \approx 22,14\%$; ...]

13.4 VALUTAZIONE SOGGETTIVA DELLA PROBABILITÀ

13.4.1 Non c'è dubbio che la valutazione frequentista della probabilità si possa applicare ad un numero di situazioni maggiore del numero delle situazioni in cui si può applicare la valutazione classica, pur con dei limiti, derivanti essenzialmente dal fatto che le varie frequenze sono, in genere, diverse e solo in un numero molto grande di prove tendono a stabilizzarsi. Ed in più di una situazione non è né comodo né economico fare molte prove. Si pensi, per esempio, alle prove da effettuare per valutare quante, tra le lampadine prodotte da una fabbrica, sono difettose (la loro durata è circa $4/5$ di quelle buone): certamente non possono essere controllate molte lampadine, se non si vuole mandare in rovina la fabbrica. Ad ogni modo, pur senza considerare queste difficoltà, ci sono delle situazioni in cui neanche la valutazione frequentista va bene. Basti pensare ai seguenti casi.

Calcolare la probabilità che:

- l'Inter vinca il prossimo campionato di calcio;
- domani piova sulla tua città;
- hai tu di essere interrogato nella prossima lezione di matematica.

D'altra parte sono comuni espressioni come questa: «L'Inter ha il 20% di probabilità di vincere il campionato, la Juventus ne ha il 15%».

O come quest'altra: «Gli allibratori danno il cavallo Zampa Veloce vincente alla pari». O ancora: «Gli allibratori danno 2 a 5 il Milan vincitore della Champions League». Sono espressioni in gergo per significare, nel primo caso, che gli allibratori (sono quelli che registrano le scommesse) pagano a coloro che scommettono sulla vittoria del cavallo Zampa Veloce, in caso di vincita, una somma, oltre alla posta, pari alla puntata effettuata; nel secondo caso, che pagano, sempre in caso di vincita, una somma, oltre alla posta, pari a $2/5$ della puntata.

Sorge allora legittima una domanda: come si fa a dare una certa valutazione della probabilità in casi come quelli cui sopra si è accennato?

Certamente non ricorrendo alla definizione frequentista né tanto meno a quella classica. Mancano i presupposti per poterlo fare.

Ecco, la valutazione è soggettiva ed è data sulla base delle informazioni di cui si dispone, ma soprattutto è fondata sul concetto di *gioco equo*.

Per capire di cosa si tratti, supponiamo che un giocatore, in un qualsiasi gioco, abbia probabilità p di vincere una certa somma s e probabilità $p'=1-p$ di perdere la somma s'. Ebbene, il gioco si dice **equo** se risulta: $\mathbf{sp=s'p'}$. Vale a dire: un gioco si dice equo se il prodotto della probabilità p di vincere la somma s per la somma s medesima è uguale al prodotto della probabilità $\mathbf{p'=1-p}$ di perdere la somma s' per la somma s' medesima.

Dalla precedente uguaglianza, dividendo entrambi i membri per sp' e semplificando, si ottiene:

$$\frac{p}{p'}=\frac{s'}{s}\ ;$$

e, per una nota proprietà delle proporzioni (proprietà del comporre), segue:

$$\frac{p}{p+p'}=\frac{s'}{s'+s}\ ;$$

infine, tenendo presente che $p+p'=1$ e chiamando $S=s'+s$ la somma dell'importo che il giocatore può perdere e di quello che può vincere, si trova:

$$p=\frac{s'}{S}.$$

Quest'ultima relazione può essere letta in questo modo: p è il rapporto fra la somma s' che il giocatore stima equo scommettere sul verificarsi di un certo evento ed il ricavo S (scommessa s' più vincita s) che ne ottiene in caso di vincita. È questa la base della **valutazione soggettiva della probabilità**. Si ha precisamente la seguente definizione:

♦ La **probabilità** che un soggetto attribuisce ad un evento casuale è il numero:

$$\mathbf{p=\frac{s'}{S}}$$

dove s' è la somma che egli stima equo scommettere a condizione di riscuotere la somma S se l'evento si verifica, essendo S la somma complessiva della puntata s' e del guadagno ottenuto s.

Per esempio, quando affermo che «domani al 60% pioverà», intendo dire che, in una scommessa sono disposto a pagare, tanto per dire, 6 euro a condizione di riscuoterne 10 se effettivamente pioverà. Con un guadagno, quindi, di 4 euro. Per l'appunto, la probabilità è: $p=\frac{6}{10}=60\%$. Sostanzialmente, quindi, ci sono due scommettitori (A e B) che accettano le condizioni; vale a dire che al 60% domani pioverà. Se allora A punta 6 euro sull'evento "domani pioverà", B punta 4 euro sull'evento contrario "domani non pioverà", cui si attribuisce la probabilità del 40%. Chi vince prende tutta la posta, vale a dire 10 euro. Naturalmente, per coerenza, A deve essere disposto a puntare 4 euro sull'evento "domani non pioverà" per riceverne 10 se ciò effettivamente avverrà. Nello stesso tempo, B deve essere disposto a puntare 6 euro sull'evento "domani pioverà" per riceverne 10 se ciò accadrà.

Riprendendo poi gli esempi degli allibratori, nel caso della scommessa sul cavallo Zampa Veloce essi valutano uguale a:

$$\frac{s}{s+s}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

la probabilità che il cavallo vinca; nell'altro caso valutano uguale a:

$$\frac{s}{\frac{2}{5}s+s}=\frac{1}{\frac{2}{5}+1}=\frac{5}{7}$$

la probabilità che il Milan si aggiudichi la Champions League.

In generale: **dare m ad n il verificarsi di un certo evento** equivale ad attribuire all'evento la stessa probabilità di estrarre casualmente una pallina bianca da un'urna che contiene m+n palline, di cui n bianche ed m nere. Ossia, detta p tale probabilità:

$$p=\frac{n}{m+n}.$$

La locuzione "dare alla pari" significa "dare 1 ad 1". Siccome poi:

$$p=\frac{n}{m+n}=\frac{1}{\frac{m}{n}+1}$$

pur con qualche forzatura nel linguaggio, la locuzione precedente si può enunciare anche in questo modo: **dare m ad n il verificarsi di un certo evento** equivale ad attribuire all'evento la stessa probabilità di estrarre casualmente una pallina bianca da un'urna che contiene $\frac{m}{n}+1$ palline, di cui una bianca ed $\frac{m}{n}$ nere.

Il numero $k=\frac{m}{n}+1$, evidentemente maggiore di 1, si chiama ***quota*** della scommessa [6]. Cosicché, **dare m ad n il verificarsi di un evento significa fissare la quota** $\mathbf{k=\frac{m}{n}+1}$ e fissare la quota k implica ovviamente attribuire all'evento la probabilità di verificarsi:

$$\mathbf{p=\frac{1}{k}}.$$

Fornisci alcuni esempi di eventi casuali la cui probabilità non può essere calcolata ricorrendo alla valutazione frequentista né tanto meno a quella classica, ma può essere calcolata ricorrendo alla valutazione soggettiva.
Dimostra inoltre che se si scommette la somma s sul verificarsi di un certo evento quotato k, la cosiddetta "vincita" ks rappresenta il ricavo dello scommettitore, mentre il guadagno è ovviamente ks−s.

13.4.2 ESERCIZI.

a. Roberto è disposto a pagare 10 euro se la Juventus perderà il prossimo incontro di calcio, a condizione di guadagnarne 20 se l'evento si verificherà. Che probabilità attribuisce Roberto alla sconfitta della Juventus? [**R.** 1/3]
b. La vittoria dell'Italia ai campionati mondiali di calcio era quotata 1,5 dagli allibratori. Che probabilità attribuivano alla vittoria dell'Italia? [**R.** 2/3]
c. Paolo è disposto a scommettere che al 70% il Grande Sciatore vincerà la prossima gara di slalom speciale. Posto che Paolo scommetta 35 euro, quanto s'aspetta di guadagnare se vincerà la scommessa? [**R.** € 15]
d. Un allibratore valuta uguale al 25% la probabilità di un dato evento. Se è onesto, quale quota dovrebbe stabilire per colui che scommette sul verificarsi di quell'evento? [**R.** 4]
e. Spiega quale significato deve essere attribuito all'espressione: «Scommetto al 70% che domani Piero sarà interrogato in Matematica». Se fossi un allibratore, quale quota avrei fissato per tale evento? [**R.** ...; 10/7]
f. Nell'incontro di pugilato "X contro Y" la vittoria di X è data a 5. Calcola quale probabilità di vittoria gli allibratori attribuiscono al pugile X. Se uno scommettitore ha puntato € 100 sulla vittoria di X, quale somma guadagnerà in caso di vincita? [**R.** 20%; € 400]
g. Nell'incontro di calcio Inter-Juventus la sconfitta dell'Inter è quotata 3,5. Calcola quale probabilità di sconfitta è attribuita all'Inter. Se uno scommettitore ha puntato € 10 sulla sconfitta dell'Inter, quale somma guadagnerà in caso di vincita? [**R.** 2/7; € 25]
h. Con riferimento ad un certo incontro di BASKET tra la nazionale statunitense e la nazionale italiana, gli allibratori hanno valutato pari al 70% la probabilità di vittoria degli Stati Uniti ed al 30% quella dell'Italia. Se uno scommettitore ha puntato € 70 sulla vittoria degli Stati Uniti, quanto guadagnerà in caso di vincita? E se ha puntato € 15 sulla vittoria dell'Italia quanto guadagnerà in caso di vincita? [**R.** € 30, € 35]
i. Nella fase finale della Coppa Italia di calcio erano rimaste due sole squadre: l'Inter e la Roma. Gli allibratori avevano fissato le seguenti quote: Inter vincente a 1,60 e Roma a 2,10. Nella valutazione degli allibratori, quale probabilità aveva l'Inter di aggiudicarsi il trofeo? Quale la Roma? [**R.** 62,5%, ≈47,6%]
j. Paolo era disposto a scommettere 4 contro 1 sulla vittoria dell'Inter in quel campionato di calcio. Qua-

[6] Questa definizione di "quota della scommessa" è la cosiddetta "quota europea". Esistono altri formati, come quello inglese e quello americano. Ma non ce ne occupiamo.

le probabilità Paolo attribuiva alla vittoria dell'Inter?

[A] 25%   [B] 20%   [C] 75%   [D] 80%

Individua l'alternativa corretta fornendo un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

k. Nella stagione 2007/08 della Champions League, uno dei quarti di finale si giocava fra Roma e Manchester. Le quote fissate da un'agenzia di scommesse erano le seguenti: 2,55 per la qualificazione della Roma alle semifinali; 1,40 per quella del Manchester. Il gioco poteva considerarsi equo?

[**R.** Osserva che $p(\text{Roma}) \approx 39{,}2\%$ e $p(\text{Manchester}) \approx 71{,}4\%$; per cui ...]

l. Nell'incontro di calcio Milan-Cagliari, le quote fissate da un'agenzia di scommesse erano le seguenti: vittoria del Milan 1,30; pareggio 4,50; vittoria del Cagliari 9,50. Diresti che si trattava di un gioco equo?

m. Luca inserisce in un sacchetto 4 palline, 2 bianche e 2 nere. Quindi ne estrae due a caso e, mentre mostra all'amico Marco il colore di una di esse, nasconde l'altra e domanda all'amico: «Sei disposto a scommettere alla pari che l'altra pallina è del medesimo colore?» Cosa dovrebbe rispondere Marco?

[**R.** Non disponibile]

13.4.3 Da quanto precede si capisce che il limite della valutazione soggettiva della probabilità è costituito dal fatto che soggetti diversi possono dare valutazioni anche assai diverse della probabilità di uno stesso evento: basti pensare alle diverse quote dei vari allibratori in caso di eventi sui quali si scommette. Tutto dipende, in ultima analisi, dalle informazioni di cui dispone il soggetto che valuta la probabilità dell'evento, oltre che dal suo giudizio.

S'intende che, nei casi ritenuti "equilibrati", come ad esempio nel lancio di una moneta non truccata oppure nell'estrazione casuale di un numero della Tombola e in casi analoghi, ogni soggetto è portato a valutare equiprobabili i vari eventi elementari e si comporta di conseguenza. Così come, nei casi in cui sia possibile ripetere quante volte si vuole l'esperimento, ogni soggetto è portato a valutare che la probabilità coincida con la frequenza relativa.

Ma, ritornando ai casi che esulano da queste due fattispecie, il limite di valutazioni diverse della probabilità di uno stesso evento sussiste. I probabilisti "soggettivisti" giurano che questo limite è superabile chiamando in causa la coerenza della scommessa. Anzi, ritengono che proprio la valutazione soggettiva della probabilità abbia il diritto di essere concepita come l'unica "definizione" di probabilità, mentre le altre sono soltanto "valutazioni".

I probabilisti "non soggettivisti", ovviamente, la pensano in maniera diversa. Noi non intendiamo entrare in questo ginepraio di opinioni e ci fermiamo qui, accontentandoci delle poche nozioni esposte.

NOTA BENE. Gli esercizi proposti passo dopo passo ci sembrano più che sufficienti per questo primo approccio con la probabilità. Per questo motivo non c'è una sezione "verifiche". Può essere, tuttavia, utile il "laboratorio di matematica", proposto qui appresso, come anche la "breve sintesi per domande e risposte" posta a chiusura di questa unità.

LABORATORIO DI MATEMATICA. I seguenti esercizi richiedono molta attenzione.

Discutine in classe con i tuoi compagni e, se del caso, chiedete assistenza al professore.

1. ® Attorno ad un tavolo vi sono 4 sedie contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, 4. Quattro persone, esse pure contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, 4, vi si mettono sedute scegliendo a caso i posti. Si vuole calcolare la probabilità che:

a) la persona "1" si sieda sulla sedia "1";
b) le persone "1" e "2" vadano a sedersi rispettivamente sulle sedie "1" e "2".

Più in generale si vuole calcolare la probabilità che sulle sedie contrassegnate dai rispettivi numeri:
1) non capiti alcuna persona;
2) si sieda una ed una sola persona;
3) capitino tre persone e tre soltanto;
4) capitino due persone al più;
5) si siedano due persone almeno.

2. In una classe di 25 alunni il professore sceglie l'alunno da interrogare con questo criterio: se il giorno in cui si svolge la lezione è contrassegnato da un numero non maggiore di 25, interroga l'alunno che nel registro corrisponde a quel numero; se invece quel numero è maggiore di 25 addiziona le sue cifre ed interroga l'alunno che nel registro corrisponde alla somma trovata. Tutti gli alunni hanno la stessa probabilità di essere interrogati oppure ci sono alunni che hanno maggiore probabilità di altri di essere interrogati?

3. ® Durante una festa paesana Tizio, con un fantasmagorico cappello in testa, sta facendo questo gioco. Fa vedere tre cartoncini uguali in tutto fuorché nel colore: uno è rosso su entrambe le facce, uno è nero su entrambe le facce, uno è rosso su una faccia e nero sull'altra. Infila i tre cartoncini in una busta e ne fa estrarre uno a caso da uno spettatore in modo però che del cartoncino estratto si veda solo una faccia. Che questa sia rossa o che indifferentemente sia nera, scommette alla pari che l'altra faccia è dello stesso colore. Pensi che il gioco sia equo?

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Si lancia una moneta "Testa-Croce" per cinque volte. Supponendo che si tratti di una moneta "onesta", è più probabile l'uscita della sequenza "Testa-Testa-Testa-Testa-Testa" oppure quella della sequenza "Testa-Croce-Croce-Testa-Croce"?

2. Nel lancio di una moneta "Testa-Croce" per cinque volte consecutive è uscita "Testa". Supponendo che si tratti di una moneta "onesta", è più probabile che esca "Testa" o che esca "Croce" nel sesto lancio?

3. È vero che, nel lancio di due dadi, i casi in cui può uscire come somma "7" sono 3, e cioè: $1+6,\ 2+5,\ 3+4$?

4. È vero che la somma e il prodotto di due numeri che esprimono misure di probabilità sono sempre misure di probabilità?

5. Quando N eventi si dicono incompatibili? Quando esaustivi?

6. Quando due eventi si dicono complementari?

7. Un sacchetto contiene palline bianche e palline nere, ma non si sa in quale misura. Si sa, però, che se si estrae a caso una pallina, la probabilità che sia bianca è 40%. Non è possibile calcolare la probabilità che la pallina sia nera poiché non si conosce la composizione dell'urna. È vero o è falso?

8. Da 170 estrazioni del Lotto non esce il numero 90 sulla ruota di Napoli e questo è il massimo ritardo su quella ruota. Possiamo concludere che nella prossima estrazione, in virtù della legge empirica del caso, la probabilità che esca 90 è maggiore di quella degli altri numeri?

9. Se Paolo scommette 4 contro 1 sul verificarsi di un evento, che probabilità sta attribuendo al verificarsi dell'evento?

10. La finale del torneo di calcio Champions League si disputava fra Liverpool e Milan. Un'agenzia di scommesse quotava vincente il Liverpool a 2,00 e il Milan a 1,60. Nella valutazione dell'agenzia, quale probabilità aveva il Liverpool di aggiudicarsi la coppa? Quale il Milan? Secondo te, si può dire che il gioco fosse equo?

11. Il sig. Rossi ha 4 figli. La situazione che siano 2 maschi e 2 femmine è quella più probabile. È vero o è falso?

12. Paolo, avendo invitato a cena i suoi tre amici, ha assegnato a ciascuno di loro un ben preciso posto a tavola. Sennonché, presi dalla foga della discussione che precede la cena, i 3 amici prendono posto in modo del tutto casuale, mentre Paolo siede effettivamente al posto che aveva riservato per sé. Calcolare la probabilità che: a) ciascuno dei 3 amici si metta a sedere nel posto che gli era stato assegnato; b) nessuno dei 3 amici si metta a sedere nel posto assegnatogli.

RISPOSTE.

1. Le due sequenze hanno la stessa identica probabilità di verificarsi.

2. Le due probabilità sono uguali ad 1/2.

3. No. I casi sono sei: “1” su un dado e “6” sull’altro oppure “6” sul primo e “1” sul secondo; ancora “2” su un dado e “5” sull’altro oppure “5” sul primo e “2” sul secondo; infine “3” su un dado e “4” sull’altro oppure “4” sul primo e “3” sul secondo.

4. No per la somma, sì per il prodotto. La somma, infatti, può superare il valore 1, che è il massimo valore della misura di una probabilità, mentre il prodotto non supera mai questo valore.

5. N eventi si dicono *incompatibili* quando il verificarsi di uno qualsiasi di essi esclude che si verifichi qualcuno degli altri. N eventi si dicono, invece, *esaustivi* (dello spazio degli eventi) se, presi assieme, esauriscono tutti gli esiti dell’esperimento che si considera.

6. Quando uno di essi si verifica certamente e l’altro no. Si dicono anche *opposti* o *contrari*.

7. È falso. In tal caso, infatti, pur non conoscendo la composizione dell’urna, si sa che i due eventi “la pallina estratta è bianca” e “la pallina estratta è nera” sono complementari, perciò la somma delle loro probabilità è 1. Siccome una di esse è 40%, l’altra è 60%.

8. No. La probabilità che esca 90 è esattamente uguale a quella degli altri numeri. La legge empirica del caso non fornisce alcuna informazione su una singola estrazione. Ci dice solamente che, col crescere indefinitamente del numero delle estrazioni, tutti i numeri si presentano con una frequenza prossima alla probabilità.

9. Gli sta attribuendo la probabilità $\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}=20\%$.

10. Al Liverpool era attribuita la probabilità $\frac{1}{2{,}00}=50{,}0\%$, al Milan la probabilità $\frac{1}{1{,}60}\approx 62{,}5\%$. Poiché la vittoria del Liverpool o quella del Milan erano gli unici eventi possibili, peraltro incompatibili, affinché il gioco potesse giudicarsi equo occorreva che la somma delle due probabilità fosse 1, vale a dire 100%: essa era invece 112,5% e perciò il gioco non era equo.

11. Un idoneo grafo mostra che i casi possibili sono 16: in un caso i 4 figli sono tutti maschi ed in un caso tutte femmine; in 6 casi sono 2 maschi e 2 femmine; in 4 casi sono 3 maschi ed una femmina ed in 4 casi sono 3 femmine ed un maschio. Quindi, effettivamente, la situazione più probabile è che siano 2 maschi e 2 femmine.

12. Un semplice ragionamento evidenzia che i casi possibili sono 6, in uno solo dei quali i 3 amici prendono i posti assegnati loro, mentre sono 2 i casi in cui nessuno di loro prende il posto assegnatogli. Di conseguenza … .

LETTURA

Le quote nelle scommesse.

In alcuni quesiti, in cui sono fissate delle quote di avvenimenti agonistici, abbiamo chiesto di stabilire se il gioco potesse ritenersi equo. Vogliamo approfondire questa questione.

Incominciamo con l'immaginare che le quote fissate per un determinato incontro di calcio, nel "formato europeo" da noi seguito, siano le seguenti:

esce 1	esce X	esce 2
2	3	6

Come noto, la probabilità p che si attribuisce all'evento "esce w", del quale è stata fissata la quota k, è $p(w)=\frac{1}{k}$. Nel caso specifico si ha: $p(1)=1/2$, $p(X)=1/3$, $p(2)=1/6$. Di conseguenza:

$$p(1)+p(X)+p(2)=1.$$

Ipotizziamo adesso che Carlo speri in una vincita (lorda) di 30 euro puntando sui tre risultati, in misura proporzionata alle loro probabilità. Questo significa che egli deve puntare:

- $\frac{1}{2}\times 30=15$ (€) sull'uscita del segno "1";
- $\frac{1}{3}\times 30=10$ (€) sull'uscita del segno "X";
- $\frac{1}{6}\times 30=5$ (€) sull'uscita del segno "2".

A conti fatti, dunque, Carlo deve puntare 30 euro per ricevere una vincita di 30 euro. Di fatto, non guadagna e non perde. Questo perché il gioco, nel caso specifico, è equo.

Supponiamo adesso che le quote siano le seguenti:

esce 1	esce X	esce 2
2	3	5

Si ha allora: $p(1)=1/2$, $p(X)=1/3$, $p(2)=1/5$. Di conseguenza: $p(1)+p(X)+p(2)=31/30$.
Di nuovo, ipotizziamo che Carlo speri in una vincita (lorda) di 30 euro puntando sui tre risultati, in misura proporzionata alle loro probabilità. Questo significa che egli deve puntare:

- $\frac{1}{2}\times 30=15$ (€) sull'uscita del segno "1";
- $\frac{1}{3}\times 30=10$ (€) sull'uscita del segno "X";
- $\frac{1}{5}\times 30=6$ (€) sull'uscita del segno "2".

Egli dunque deve puntare 31 euro per vincerne 30: la perdita è assicurata. Essa è pari ad 1 euro, che è uguale a $\frac{31}{30}-1=\frac{1}{30}$ di 30 euro.
La perdita di Carlo si traduce ovviamente in un guadagno sicuro per l'agenzia di scommesse.

Al contrario, se la somma delle probabilità fosse minore di 1, il gioco ancora non sarebbe equo, ma questa volta si tradurrebbe in una perdita per l'agenzia di scommesse.

Tutto questo porta a comprendere perché le agenzie di scommesse, che certamente non sono istituti di beneficenza, fissano quote tali che le probabilità dei possibili eventi in gioco abbiano somma p superiore ad 1. La differenza p−1 è quella che in gergo è definita "aggio" (in inglese: *over-round*). Quanto maggiore è p, tanto maggiore è il guadagno per l'agenzia di scommesse.