Prerequisiti:
- Saper operare con i numeri razionali.
- Riconoscere e usare correttamente le diverse rappresentazioni dei numeri (frazioni, numeri decimali, percentuali).
- Conoscere i valori approssimati.
- Possedere le nozioni fondamentali della logica.
- Conoscere le diverse valutazioni della probabilità

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *calcolare la probabilità dell'evento "unione" e dell'evento "intersezione" di due eventi*
- *definire e calcolare la probabilità condizionata*
- *distinguere tra eventi dipendenti e indipendenti*
- *risolvere problemi di probabilità*
- *utilizzare il linguaggio degli insiemi e della logica*

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

Probabilità: approfondimenti

Unità 14

14.1 PREMESSA

Le conoscenze acquisite con lo studio della precedente unità devono essere sicure per poter riprendere e approfondire l'argomento con possibilità di successo.
In particolare, devono essere chiare le diverse valutazioni di probabilità di un evento ed i concetti di eventi compatibili e incompatibili, di eventi complementari, di eventi esaustivi.
A questo fine ti proponiamo alcuni esercizi da risolvere, prima di iniziare lo studio di questa unità. Se trovi difficoltà nella loro risoluzione, ti suggeriamo di ripassare a fondo l'unità sopraccitata.

ESERCIZI.

1. In un sacchetto ci sono 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono a caso, una dopo l'altra, senza rimettere nel sacchetto la pallina estratta. È più probabile che sia estratta la successione di palline 1-2-3-4-5 o quella 2-4-3-1-5? Argomenta la tua risposta.
2. Si lanciano due dadi, con le facce numerate da 1 a 6. Indicata con S la somma dei due numeri usciti, considera i seguenti eventi:
   E_1: S è un numero primo; E_2: S è un numero composto.
   Si tratta di eventi esaustivi? Si tratta di eventi compatibili? Argomenta la tua risposta.
3. I coniugi Rossi sperano di avere 3 figli. Quanto vale la probabilità che almeno uno sia maschio?
4. Un'urna contiene delle palline, che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 62 palline sono bianche, 55 nere, 35 palline bianche sono di plastica, 31 palline nere sono di vetro. Viene estratta a caso una pallina dall'urna. Calcola la probabilità che sia: a) bianca di plastica; b) nera di plastica; c) bianca di vetro; d) nera di vetro.
   Quanto vale la somma delle 4 probabilità ottenute? Diresti che i 4 eventi considerati siano esaustivi?
5. Si estrae a caso uno dei 90 numeri della Tombola.
   a) Determina l'evento E_1: «il numero estratto è divisibile per 3» e calcolane la probabilità.
   b) Determina l'evento E_2: «il numero estratto è divisibile per 7» e calcolane la probabilità.
   c) Verifica che risulta: $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1)+p(E_2)-p(E_1 \cap E_2)$.
6. Un'indagine condotta fra 750 abitanti di una data città ha mostrato che in un anno 32 abitanti sono stati "scippati" mentre andavano per strada. Qual è la probabilità che ad un abitante di quella città capiti quella disavventura?
7. Hai avuto modo di osservare che in 100 lanci di un dado le facce si sono presentate con la frequenza indicata nella tabella 1.

Faccia uscita	1	2	3	4	5	6
Frequenza assoluta	10	4	15	14	44	13

TAB. 1

   Scommetteresti sulla perfetta simmetria del dado? Calcola la probabilità che in un lancio successivo esca: a) un numero minore di 4; b) un multiplo di 2; c) un numero dispari e primo; d) un numero dispari e/o primo.
8. In una comunità di 27244 persone è stato scelto a caso un campione rappresentativo di 134 persone. Per queste ultime è stato rilevato che: 1) 16 non hanno ancora compiuto 18 anni; 2) 90 hanno un'età compresa fra i 18 ed i 65 anni; 3) 31 hanno superato i 65 anni di età.
   Stabilisci qual è, con approssimazione, la ripartizione della comunità in base alle fasce d'età considerate.
   Scelta ora a caso una delle persone della comunità, calcola la probabilità: a) p_1 che appartenga alla 1ª

fascia d'età; b) p_2 che appartenga alla 2ª fascia; c) p_3 che appartenga alla 3ª fascia.
Quanto vale $p_1+p_2+p_3$? È normale che sia così?

9. Quella volta, già a metà campionato gli allibratori davano 1 a 19 la conquista dello scudetto da parte dell'INTER. Quale probabilità di vittoria assegnavano all'INTER?
10. Quale significato bisogna attribuire all'espressione "dare m ad n" il verificarsi di un dato evento?
11. Se è fissata la quota k sul verificarsi di un evento, quale probabilità è attribuita al verificarsi dello stesso?

14.2 REGOLA DELLA SOMMA

14.2.1 Considera l'esperimento del lancio di un dado con le facce numerate da 1 a 6, di cui naturalmente ogni esito è l'uscita di uno di quei numeri, che si suppone abbiano la stessa probabilità di uscire. Lo spazio di prova dell'esperimento è evidentemente l'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Considera adesso i seguenti eventi:

E_1: «esce un numero pari»; E_2: «esce un multiplo di 3».

L'evento «esce un numero pari o multiplo di 3» è $E_1 \cup E_2$.

Si trova: (calcola tu – Fig. 1):

$$p(E_1) = \ldots, \quad p(E_2) = \ldots, \quad p(E_1 \cup E_2) = \ldots.$$

Sussiste una particolare relazione fra $p(E_1 \cup E_2)$, $p(E_1)$ e $p(E_2)$. Riesci a trovarla?

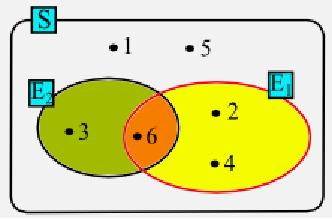

FIG. 1

14.2.2 Prendi in esame quest'altra situazione. L'esperimento consista nell'estrazione casuale di uno dei 90 numeri della TOMBOLA. Per cui, detto S il suo spazio di prova, risulta: $S = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 90\}$.
Considera quindi i seguenti eventi:

E_1: «esce un numero primo»; E_2 : «esce un numero minore di 16».

L'evento «esce un numero primo o minore di 16» è, come sopra, $E_1 \cup E_2$.

Calcola le probabilità di questi tre eventi E_1, E_2, $E_1 \cup E_2$, non prima di aver osservato (rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn la situazione) che:

- l'insieme E_1 è costituito dai seguenti 24 numeri:
  2-3-5-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43-47-53-59-61-67-71-73-79-83-89;
- l'insieme E_2 è costituito dai 15 numeri:
  1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15;
- infine l'insieme $E_1 \cup E_2$ è formato da 33 numeri: i primi 15 numeri naturali a partire da 1 e i 18 numeri primi, tra quelli elencati sopra, maggiori di 15:
  1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-
  17-19-23-29-31-37-41-43-47-53-59-61-67-71-73-79-83-89.

Pertanto (calcola ancora tu):

$p(E_1) = \dots, \; p(E_2) = \dots, \; p(E_1 \cup E_2) = \dots .$

Stessa domanda di prima: quale relazione sussiste fra $p(E_1 \cup E_2)$, $p(E_1)$ e $p(E_2)$?

14.2.3 La relazione che cerchiamo è la seguente:

[1] $$\mathbf{p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Quali che siano gli insiemi finiti E_1 ed E_2 (Fig. 2), è:

$$N(E_1 \cup E_2) = N(E_1) + N(E_2) - N(E_1 \cap E_2);$$

e perciò, posto che E_1 ed E_2 siano due eventi di un esperimento finito di spazio di probabilità S, risulta:

$$p(E_1 \cup E_2) = \frac{N(E_1 \cup E_2)}{N(S)} = \frac{N(E_1) + N(E_2) - N(E_1 \cap E_2)}{N(S)} =$$

$$= \frac{N(E_1)}{N(S)} + \frac{N(E_2)}{N(S)} - \frac{N(E_1 \cap E_2)}{N(S)} = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) .$$

Come volevamo dimostrare.

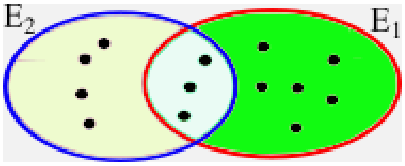

FIG. 2

14.2.4 Quando $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, cioè quando i due eventi sono incompatibili, per cui $p(E_1 \cap E_2) = 0$, la relazione [1] assume la seguente forma particolare:

[2] $$\mathbf{p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)}.$$

La formula [1] esprime la cosiddetta **regola della somma per due eventi compatibili**.

La formula [2] esprime la **regola della somma per due eventi incompatibili**.

Ovviamente, mentre la [1] può applicarsi anche agli eventi incompatibili – basta porre 0 al posto di $p(E_1 \cap E_2)$ – la [2], invece, può applicarsi soltanto agli eventi incompatibili.

La formula [2] si estende al caso di più di due eventi, a condizione però che siano due a due incompatibili. Si ha allora il cosiddetto *principio delle probabilità totali*.

♦ **PRINCIPIO DELLE PROBABILITÀ TOTALI.** Se un evento E si verifica quando si verifica uno degli eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ – due a due incompatibili – allora risulta (Fig. 3, dove n=4):

$$\mathbf{p(E) = p(E_1) + p(E_2) + \cdots + p(E_n)}.$$

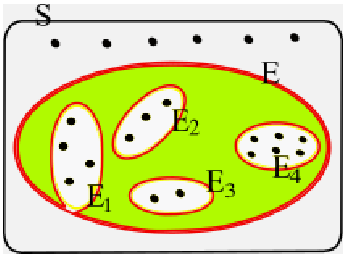

FIG. 3

14.2.5 Puoi verificare il livello del tuo apprendimento risolvendo le seguenti questioni (altre questioni, più o meno complesse di queste, troverai nella sezione "verifiche" posta alla fine dell'unità).

1. Da un mazzo di carte da "briscola" è estratta una carta a caso. Calcola la probabilità che sia un Asso o una carta di denari, eseguendo il calcolo sia direttamente (può essere utile un diagramma di Eulero-Venn), sia per mezzo della regola della somma.
2. Sono lanciati due dadi con le facce numerate da 1 a 6, aventi tutte la stessa probabilità di uscire. Calcola

la probabilità che i due numeri usciti siano primi fra loro o abbiano per somma 10.

3. Ti è stato detto che in 1000 lanci di un dado le facce si sono presentate con la frequenza assoluta indicata nella tabella 2.

Faccia uscita	1	2	3	4	5	6
Frequenza assoluta	115	22	117	172	421	153

TAB. 2

Calcola la probabilità che, in un lancio successivo di quel dado, esca un numero primo o un numero dispari, eseguendo il calcolo sia direttamente sia ricorrendo alla regola della somma.

4. Un'indagine, condotta fra 1200 abitanti di una città di età superiore ai 20 anni, ha fatto registrare che 90 dei soggetti interpellati hanno un diploma di scuola secondaria superiore e 350 sono disoccupati; addirittura tra i disoccupati vi sono 65 persone munite di diploma. Calcola la probabilità che, scelto a caso un abitante di quella città, di età superiore ai 20 anni, risulti o disoccupato o munito di diploma di scuola secondaria superiore.
5. Una fabbrica produce biciclette da corsa, ma alcune biciclette presentano dei difetti. Precisamente: 2 biciclette su 100 presentano imperfezioni nel telaio, mentre 4 su 150 presentano difetti nella moltiplica. Se compri una bicicletta uscita da quella fabbrica quale probabilità hai che presenti qualche difetto?
   [**R.** ≈4,6%]
6. Giorgio è disposto a scommettere € 50 che il Milan vincerà il prossimo incontro di calcio con la Lazio, a condizione di guadagnare € 20 se il Milan effettivamente vincerà. È altresì disposto a scommettere € 80 che il ciclista Pedivella vincerà la prossima gara ciclistica, a patto di guadagnarne 30 se l'evento si verificherà. Calcola quale probabilità si attribuisce Giorgio di vincere almeno una delle due scommesse.
7. Un'urna contiene 9 palline uguali, contrassegnate con le cifre da 1 a 9. Si estraggono a caso, una dopo l'altra, tre palline senza rimetterle nell'urna: le cifre che le contrassegnano, scritte da sinistra a destra, secondo l'ordine di estrazione, formano un numero. Qual è la probabilità che questo numero sia:
   a) pari? b) maggiore di 500? c) pari o maggiore di 500?
8. Quella volta la vittoria della Roma era quotata 4 nel campionato italiano di calcio e 11 in Champions League.
   a) Quale probabilità era attribuita alla vittoria della Roma in almeno una delle due competizioni?
   b) Quale probabilità che la Roma non vincesse alcuna delle due competizioni?
   [**R.** a) ≈31,82%; b) …]

14.3 REGOLA DEL PRODOTTO

14.3.1 Considera l'esperimento consistente nell'estrazione casuale di uno dei 90 numeri della TOMBOLA e l'evento E_1: «il numero estratto è divisibile per 5».

Si trova (Fig. 4) che:

$$p(E_1) = \dots .$$

Supponi adesso di sapere (qualcuno te l'ha confidato) che il numero estratto è pari: quale probabilità pensi che esso abbia di essere divisibile per 5?

La probabilità dell'evento E_1, calcolata quando si sa che si è verificato un certo evento E_2, si chiama **probabilità condizionata** di E_1 quando si è verificato E_2 (o probabilità di E_1 *condizionata* da E_2). Si indica con la scrittura:

$$\mathbf{p(E_1|E_2)}.$$

e si legge: «pi di E_1 se E_2» oppure «pi di E_1 dato E_2» [1].

Con riferimento all'esperimento suddetto, sei riuscito a calcolare la probabilità di E_1 : «il numero estratto è divisibile per 5», condizionata da E_2 : «il numero estratto è pari»? Se non ce l'hai fatta ti aiutiamo noi.

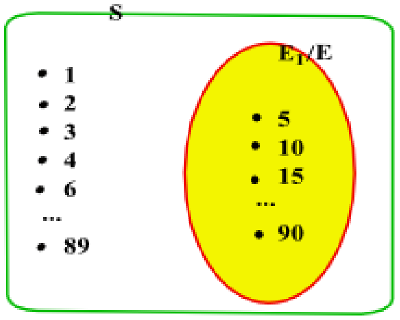

FIG. 4

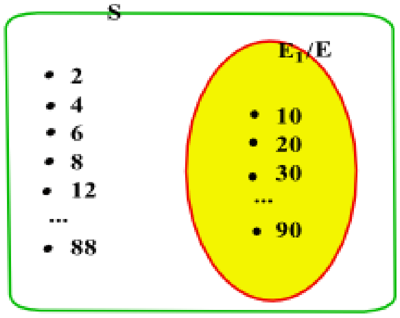

FIG. 5

Osserva per prima cosa che i casi possibili al verificarsi di $E_1|E_2$ sono 45 (tanti quanti sono i numeri pari della tombola) e che i casi favorevoli sono 9 (tanti quanti sono i numeri pari divisibili per 5).

Allora (Fig. 5):

$$p(E_1|E_2) = \dots .$$

Dunque $p(E_1|E_2) = p(E_1)$.
Avviene sempre così?
Per rispondere a quest'interrogativo, comincia a considerare lo stesso esperimento precedente, ma adesso sia E_1: «il numero estratto è divisibile per 10».

Sicché:

$$p(E_1) = \dots .$$

Di nuovo, come prima, supponi che l'evento E_1 si verifichi quando si sa già che si è verificato l'evento E_2: «il numero estratto è pari». Si trova allora:

$$p(E_1|E_2)=\frac{9}{45}=\frac{1}{5} .$$

Dunque, in questo caso, $p(E_1|E_2) \neq p(E_1)$. La risposta alla domanda precedente è evidentemente NO.

14.3.2 Cambiamo esperimento. Un'urna contiene due palline bianche "b1" e "b2" ed una pallina nera "n". Si estrae una pallina dall'urna e, dopo avercela rimessa, se ne estrae una seconda. Lo spazio di prova dell'esperimento è allora S^2, dove $S=\{b1, b2, n\}$. Pertanto (Fig. 6):

$$S^2 = \{(b1,b1), (b1,b2), (b1,n), (b2,b1), (b2,b2), (b2,n), (n,b1), (n,b2), (n,n)\}.$$

Considera l'evento E_1: «la seconda pallina estratta è bianca».
Ed è sottinteso che la prima può essere qualsiasi. Allora evidentemente:

$$E_1 = \{(b1,b1), (b2,b1), (n,b1), (b1,b2), (b2,b2), (n,b2)\};$$

per cui $N(E_1)=6$. D'altronde $N(S^2)=9$.

Sicché:

$$p(E_1) = \dots .$$

Supponi ora che l'evento E_1 si verifichi quando si sa già che la prima pallina estratta è bianca o, se si vuole, quando si sa che si è verificato l'evento E_2: «la prima pallina estratta è bianca».

---

[1] Ci corre l'obbligo di segnalare che alcuni autori indicano con la scrittura $P_B(A)$ la probabilità di A se B.

Adesso lo spazio di prova relativo all'evento $E_1|E_2$ non è più S^2, bensì il sottoinsieme di S^2 nel quale la prima componente di ogni coppia è "pallina bianca" (cioè b1 o b2); vale a dire l'insieme (Fig. 7):

$$\{(b1,b1),\ (b1,b2),\ (b1,n),\ (b2,b1),\ (b2,b2),\ (b2,n)\}.$$

Che è esattamente E_2.

A sua volta, l'insieme dei casi favorevoli ad $E_1|E_2$ è:

$$\{(b1,b1),\ (b1,b2),\ (b2,b1),\ (b2,b2)\};$$

cioè $E_1 \cap E_2$.

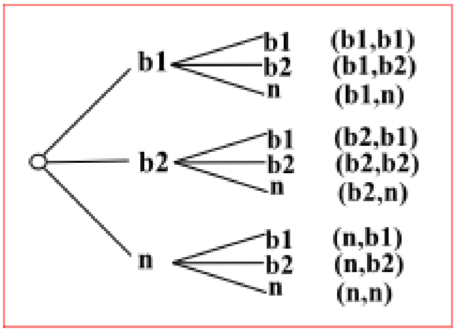

FIG. 6

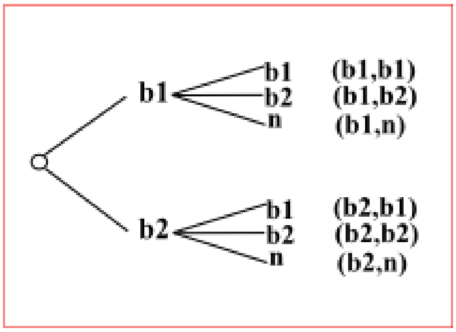

FIG. 7

Pertanto:

$$p(E_1|E_2) = \dots .$$

Ossia, di nuovo, $p(E_1|E_2) = p(E_1)$.

Supponi adesso che l'esperimento consista nell'estrarre una pallina dalla stessa urna di prima e di estrarne ancora una seconda, ma senza rimettere la prima dentro l'urna. Lo spazio di prova dell'esperimento è ora $S \times S'$, dove S è sempre l'insieme $\{b1,b2,n\}$, ma S' è l'insieme che si ottiene da S eliminando un suo elemento ed uno soltanto. Per cui $N(S \times S') = 3 \times 2 = 6$.

Sia ancora E_1 l'evento: «la seconda pallina estratta è bianca».

Perciò, tenendo presente che la prima pallina estratta non è stata rimessa nell'urna:

$$E_1 = \{(b2,b1),\ (n,b1),\ (b1,b2),\ (n,b2)\}.$$

Dunque: $p(E_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Di nuovo supponi che l'evento E_1 si verifichi sapendo che si è verificato l'evento:

$$E_2\text{: «la prima pallina estratta è bianca».}$$

Adesso lo spazio di prova relativo ad $E_1|E_2$ è:

$$E_2 = \{(b1,b2),\ (b1,n),\ (b2,b1),\ (b2,n)\}$$

e risulta:

$$E_1|E_2 = E_1 \cap E_2 = \{(b1,b2),\ (b2,b1)\}.$$

Pertanto: $p(E_1|E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

In questo caso, dunque, $p(E_1|E_2) \neq p(E_1)$.

14.3.3 Al tirar delle somme, nel calcolo della probabilità di un evento E_1, condizionato dal verificarsi di un altro evento E_2, si possono verificare i due seguenti fatti:

$$p(E_1|E_2) = p(E_1), \qquad p(E_1|E_2) \neq p(E_1).$$

Nel primo caso si dice che E_1 è ***indipendente*** da E_2; nel secondo che E_1 è ***dipendente*** da E_2.

14.3.4 Riprendendo i quattro esempi discussi in 14.3.1 e in 14.3.2, si può constatare che risulta:

[3] $$\mathbf{p(E_1 \cap E_2) = p(E_1|E_2) \cdot p(E_2)}\ .$$

In questa formula, nei casi in cui E_1 è indipendente da E_2, al posto di $p(E_1|E_2)$ può essere sostituito $p(E_1)$. Per cui in questi casi la [3] diventa:

[4] $$\mathbf{p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)}\ .$$

La formula [3] esprime la cosiddetta **regola del prodotto per eventi dipendenti**.

La formula [4] esprime la **regola del prodotto per eventi indipendenti**.

Della formula [3] – e di conseguenza della [4] – può essere fornita una dimostrazione generale.

Intanto, se $p(E_2)=0$, ossia se $E_2=\emptyset$, allora anche $E_1 \cap E_2=\emptyset$ e perciò $p(E_1 \cap E_2)=0$. In questo caso, dunque, la [3] è vera.

Supponiamo allora $p(E_2)\neq 0$. Come dire: $E_2\neq\emptyset$. Chiamato S lo spazio di prova di un certo esperimento finito, siano E_1 ed E_2 due eventi relativi ad esso. Si ha chiaramente:

$$p(E_2)=\frac{N(E_2)}{N(S)}\ , \qquad p(E_1 \cap E_2)=\frac{N(E_1 \cap E_2)}{N(S)}\ .$$

Se consideriamo l'evento E_1 condizionato da E_2, lo spazio di prova di $E_1|E_2$ è E_2, mentre l'insieme dei casi favorevoli al verificarsi di $E_1|E_2$ è $E_1 \cap E_2$. Pertanto:

$$p(E_1|E_2)=\frac{N(E_1 \cap E_2)}{N(E_2)}=\frac{\frac{N(E_1 \cap E_2)}{N(S)}}{\frac{N(E_2)}{N(S)}}=\frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}\ .$$

Da qui segue chiaramente la [3].

Osserviamo che dalla formula [3], scambiano E_1 con E_2, segue: $p(E_2 \cap E_1)=p(E_2|E_1)\cdot p(E_1)$. E siccome $p(E_1 \cap E_2)=p(E_2 \cap E_1)$, allora risulta:

[5] $$\mathbf{p(E_1|E_2) \cdot p(E_2) = p(E_2|E_1) \cdot p(E_1)}\ .$$

Da questa relazione, se $p(E_1|E_2)=p(E_1)$, purché queste probabilità siano non nulle, vale a dire se E_1 è indipendente da E_2, segue subito $p(E_2|E_1)=p(E_2)$, che è come dire che E_2 è indipendente da E_1.

Insomma, se un evento è indipendente da un altro anche questo è indipendente da quello: si dice più semplicemente che i due eventi sono **indipendenti** (o **mutuamente indipendenti**).

Prima di procedere ti invitiamo a verificare la formula [5] risolvendo il seguente esercizio.

Considera l'estrazione casuale di uno dei 90 numeri della TOMBOLA e verifica che sono uguali le due seguenti probabilità:

a) la probabilità che il numero estratto sia pari sapendo che è divisibile per 3, moltiplicata per la probabilità che il numero estratto sia divisibile per 3;

b) la probabilità che il numero estratto sia divisibile per 3 sapendo che è pari, moltiplicata per la probabilità che il numero estratto sia pari.

Adesso qualche altro esercizio da risolvere.

1. A proposito della moltiplicazione di due probabilità: Ritieni che la probabilità "prodotto" sia maggiore, minore o uguale alle probabilità che si moltiplicano? Perché?
2. Hai avuto modo di osservare che in oltre 200 lanci di una moneta, la faccia "testa" si è presentata nel 58% dei lanci. Se lanci due volte quella moneta, quale probabilità attribuisci all'uscita di:
   a) due teste? b) due croci? c) una testa e una croce?

Quanto vale la somma delle tre probabilità ottenute?
Inoltre, quale probabilità attribuisci all'uscita di:
d) almeno una testa? e) al più una testa? f) almeno una croce? g) al più una croce?
[**R.** a) ≈33,64%; b) ≈17,64%; c) ≈48,72%; .... ; d) ≈82,36%; e) ≈66,36%; ...]

3. Nel torneo di calcio di Coppa Italia della stagione 2007/08 si sarebbero disputate i seguenti incontri di semifinale: Roma-Catania e Lazio-Inter. Un'agenzia di scommesse aveva fissato le seguenti quote sul passaggio del turno:

Passa il turno	Roma	Catania	Lazio	Inter
Quota	1,30	3,00	3,30	1,25

Calcolare quale probabilità l'agenzia attribuiva a ciascuna delle seguenti finali:
a) Roma-Lazio, b) Roma-Inter, c) Catania-Lazio, d) Catania-Inter.
[**R.** a) ≈23,3%; b) ≈61,5%; ...]

4. Si consideri il gioco del Lotto. Qual è la probabilità che il primo estratto sulla ruota di Napoli ed il primo estratto sulla ruota di Bari siano il medesimo numero 47?
5. Si lanciano due dadi le cui facce, numerate da 1 a 6, hanno la stessa probabilità di uscire. Calcolare la probabilità che i due numeri usciti siano:
a) entrambi pari sapendo che sono diversi tra loro; b) diversi tra loro sapendo che sono entrambi pari.
[**R.** a) $1/5$; b) $2/3$]
6. In una scatola, disposti alla rinfusa, vi sono 5 paia di calzini di 5 colori diversi, compreso il rosso. Si estraggono a caso, uno dopo l'altro, due calzini. Qual è la probabilità che:
a) formino un paio di calzini? b) formino il paio di calzini rossi? c) formino un paio di calzini non rossi? d) non formino un paio di calzini? e) non formino il paio di calzini rossi?
[**R.** a) 1/9; b) 1/45; c) 4/45; d) 8/9; e) 44/45]

14.3.5 Le formule [3] e [4] si estendono al caso di più di due eventi, distinguendo naturalmente la situazione in cui essi sono dipendenti l'uno dagli altri da quella in cui sono indipendenti.
In generale vale il cosiddetto *principio delle probabilità composte*.

♦ **PRINCIPIO DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE**: Se un evento E si verifica quando si verificano gli eventi **mutuamente indipendenti** $E_1, E_2, \dots, E_n$, allora:

$$\mathbf{p(E) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot \ldots \cdot p(E_n)};$$

Se invece gli eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ **non sono mutuamente dipendenti** allora:

$$\mathbf{p(E) = p(E_1) \cdot p(E_2|E_1) \cdot p(E_3|E_1, E_2) \cdot \ldots \cdot p(E_n|E_1, E_2, \ldots, E_{n-1})},$$

dove $p(E_3|E_1,E_2)$ indica la probabilità di E_3 condizionata da E_1 ed E_2 e in maniera analoga per le altre espressioni.

Ti proponiamo un paio di esercizi:

1. I coniugi Anna e Franco hanno il 20% di probabilità di mettere al mondo un figlio biondo. Calcolare la probabilità che, avendo 3 figli: a) almeno uno di essi sia biondo; b) esattamente uno di essi sia biondo.
[**R.** a) 48,8%; b) 38,4%]
2. In un'urna ci sono 5 palline, di cui 3 sono rosse. Si estraggono a caso 3 palline. Calcolare la probabilità che siano tutte e tre rosse nel caso che ogni pallina estratta sia rimessa nell'urna e nel caso che non lo sia.

14.4 PROBABILITÀ E GRAFI

14.4.1 Spesso è utile accompagnare l'applicazione delle formule [3] e [4] con dei grafi.

- A questo riguardo, riprendiamo il primo degli esperimenti descritti in 14.3.2 e calcoliamo la probabilità che le due palline estratte siano bianche, quella che siano nere e quella che siano di colore diverso.

Un grafo (Fig. 8) mostra le possibili situazioni: in esso il numero posto su un arco indica la probabilità che l'evento (evidenziato dal secondo nodo dell'arco) ha di verificarsi.

Per calcolare la probabilità dell'evento "bb" (pallina bianca – pallina bianca) è sufficiente moltiplicare le probabilità indicate sugli archi che, dal nodo iniziale, fanno giungere al nodo finale relativo appunto alla situazione bb. Analogamente negli altri casi, per cui:

$$p(bb)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9};\quad p(nn)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9};\quad p(bn\cup nb)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}.$$

Naturalmente $p(bn\cup nb)$ si poteva calcolare diversamente, considerando che è la probabilità contraria di $p(bb\cup nn)$. Ragion per cui:

$$p(bn\cup nb)=1-p(bb\cup nn)=1-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{9}.$$

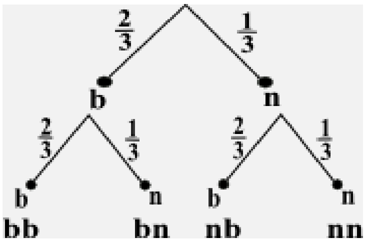

FIG. 8

- Descriviamo un'altra situazione, in cui è comodo l'uso dei grafi. Il problema è il seguente:

Qual è la probabilità di trovare, fra n persone di un dato insieme scelto a caso, due persone che festeggino il compleanno nello stesso giorno?

Questo problema, noto come **problema del compleanno**, fu proposto per la prima volta nel 1939 dallo scienziato austriaco Richard Von Mises (1883-1953).

RISOLUZIONE. Si tratta di calcolare la probabilità di trovare due persone nate nello stesso giorno dell'anno (1 gennaio, 2 gennaio, 3 gennaio, ... , 31 dicembre – si supponga, per comodità, un anno non bisestile), in un gruppo di n persone scelte a caso, nessuna delle quali nata il 29 febbraio.

Intanto è chiaro che il gruppo deve essere formato da almeno due persone perché abbia un senso quello che chiediamo: quindi $n\geq 2$. È poi evidente che, se il gruppo è formato da almeno 366 persone, c'è la certezza di trovarne due nate nello stesso giorno: dunque supporremo $n\leq 365$. Insomma n è compreso fra 2 e 365, estremi inclusi.

Prendiamo allora una qualsiasi persona nel gruppo: la probabilità che essa sia nata in un giorno dell'anno, senza precisare quale, è chiaramente 1 (in effetti, quella persona in qualche giorno è pur nata). Diciamo A questo giorno (ad esempio, potrebbe essere: A = 11 marzo).

Prendiamo adesso una qualunque altra persona, diversa dalla prima, e calcoliamo la probabilità che sia nata nello stesso giorno A della prima. Di casi possibili ce ne sono evidentemente 365: tanti quanti sono i giorni dell'anno; di casi favorevoli ce n'è uno soltanto: che la 2ª persona sia nata nello stesso giorno A della 1ª. Quindi la probabilità che ci sia una coincidenza è $\frac{1}{365}$. Invece la probabilità che non ci sia alcuna coinci-

denza, cioè la probabilità contraria della precedente, è $1-\frac{1}{365}$ (Fig. 9).
Se la 2ª persona scelta non è nata nel giorno A, significa che è nata in un giorno B dell'anno, diverso da A (ad esempio, potrebbe essere: B = 15 febbraio).
Prendiamo allora una terza persona e adesso, dopo aver constatato che la 2ª persona non è nata nello stesso giorno della 1ª, calcoliamo la probabilità che ci sia una coincidenza. Di casi possibili ce ne sono ancora 365 ovviamente, ma di casi favorevoli adesso ce ne sono 2: che la 3ª persona sia nata nel giorno A o che sia nata nel giorno B. Quindi la probabilità di avere una coincidenza a questo punto dell'esperimento, è $\frac{2}{365}$. La probabilità contraria di questa, cioè $1-\frac{2}{365}$, è la probabilità che la 3ª persona non sia nata né nel giorno A né nel giorno B (Fig. 10).

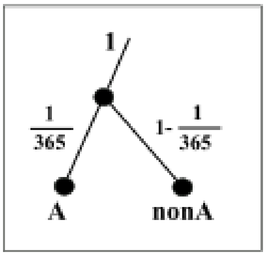

FIG. 9

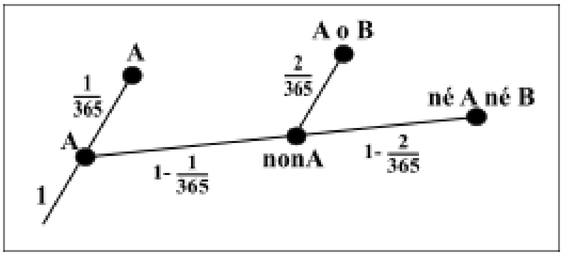

FIG. 10

Dunque la probabilità p'(3) che, in un gruppo di 3 persone, <u>non</u> ve ne siano due nate nello stesso giorno dell'anno, è:

$$p'(3)=\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right).$$

Continuando con lo stesso ragionamento si giunge alla schematizzazione di figura 11, dove 0C sta per "0 coincidenze" ed 1C sta per "1 coincidenza". Per cui, la probabilità $p'(n)$ che, in un gruppo di n persone (con $2\leq n\leq 365$), vi siano 0 coincidenze, ossia che <u>non</u> vi siano 2 persone nate nello stesso giorno dell'anno, è:

$$p'(n)=\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{365}\right).$$

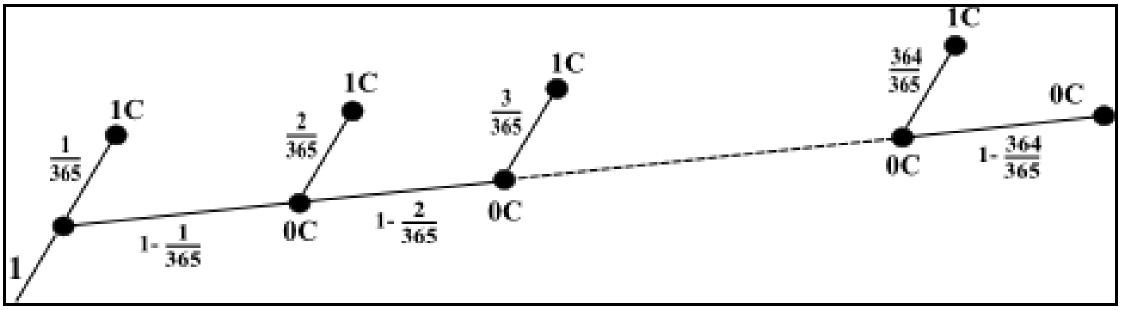

FIG. 11

Di conseguenza, la probabilità $p(n)$ che nel gruppo delle n persone ve ne siano almeno due nate nello stesso giorno dell'anno, cioè la probabilità contraria di $p'(n)$, è $p(n)=1-p'(n)$, vale a dire:

$$p(n)=1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{365}\right).$$

Utilizzando uno strumento di calcolo automatico, si ha per esempio:

$p(10)\approx 11{,}70\%$; $p(20)\approx 41{,}14\%$; $p(22)\approx 47{,}57\%$; $p(23)\approx 50{,}73\%$;

$$p(30) \approx 70{,}63\% \; ; \quad p(40) \approx 89{,}12\% \; ; \quad p(50) \approx 97{,}04\% \, .$$

Risultato quantomeno sorprendente: con appena 23 persone, prese a caso, si hanno più probabilità di trovarne due nate nello stesso giorno che di non trovarne; con 50 persone si ha addirittura praticamente la certezza di trovarne due nate nello stesso giorno (infatti la probabilità di non trovarle è appena del 2,96%).

Il grafico della funzione $p(n)$ (Fig. 12) rende evidente la crescita rapida di $p(n)$ al crescere di n, tant'è che per $n>50$ i valori di $p(n)$ tendono a differire così poco da 1 che il grafico di $p(n)$ tende a sovrapporsi a quello della retta $p=1$: cosa che, in pratica, avviene per $n>60$. Esso evidenzia, inoltre, che effettivamente $p(n)>0{,}5$ già per $n>23$.

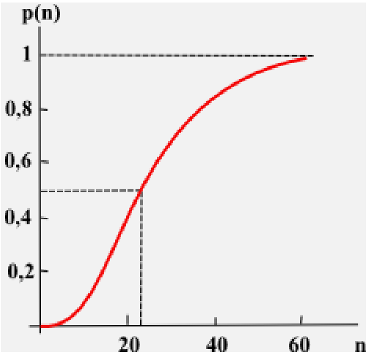

FIG. 12

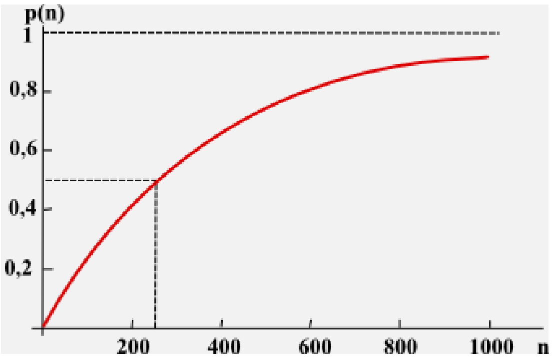

FIG. 13

- Il seguente problema "sembra" essere analogo al precedente, ma invece è completamente diverso:

Trovare la probabilità che, scelta a caso una fra n persone scelte a caso,
ve ne sia almeno un'altra che festeggi lo stesso compleanno.

RISOLUZIONE. Supponiamo, come prima, che l'anno non sia bisestile e accertiamoci in via preliminare che tra le n persone non ci sia nessuno nato il 29 febbraio. Allora, scelta a caso una persona e constatato che è nata nel giorno A (per esempio: 15 febbraio), la probabilità che, fra le altre $n-1$ persone, nessuna sia nata nel giorno A, ossia la probabilità che ognuna delle altre $n-1$ persone sia nata in uno dei 364 giorni diversi da A, è evidentemente:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{n-1} \; ;$$

per cui la probabilità che almeno un'altra delle $n-1$ persone rimaste sia nata nel giorno A è:

$$p(n)=1-\left(\frac{364}{365}\right)^{n-1} \, .$$

Questa volta, sempre utilizzando uno strumento di calcolo automatico, si trova che:

$$p(50) \approx 12{,}58\%; \quad p(100) \approx 23{,}78\%; \quad p(150) \approx 33{,}55\%; \quad p(200) \approx 42{,}07\%;$$
$$p(250) \approx 49{,}50\%; \quad p(253) \approx 49{,}91\%; \quad p(254) \approx 50{,}05\%.$$

E, cosa che non sorprende affatto, ci vogliono almeno 254 persone affinché si abbia più probabilità di trovarne una che sia nata nello stesso giorno di un'altra scelta a caso, piuttosto che di non trovarne. Inoltre, non c'è la certezza di trovare un'altra persona nata nel giorno A con un numero elevato di persone. In realtà, ad esempio per $n=3500$, si ha $p(3500) \approx 99{,}99\%$. Che è una probabilità altissima, ma non è la certezza. Certezza che, in teoria, si ha solo se n è infinito.

Anche adesso il grafico della funzione (Fig. 13) è illuminante.

- Con ragionamento analogo a quello seguito nei due precedenti problemi, risolvere questi altri due problemi:

a) Qual è la probabilità di trovare, fra n persone scelte a caso, due persone con lo stesso segno zodiacale? In particolare, per quale valore di n la probabilità è maggiore di 1/2?
b) Qual è la probabilità che, scelta a caso una fra n persone scelte a caso, ve ne sia almeno un'altra con lo stesso segno zodiacale? In particolare per quale valore di n la probabilità è maggiore di 1/2?

[**R.** a) … , n=5; b) … , n=9]

14.4.2 Un paio di esercizi da risolvere con la tua parziale collaborazione.

- ESERCIZIO 1. Un'urna contiene 7 palline bianche, 5 palline nere e 4 palline rosse. Si estraggono in successione 3 palline senza rimetterle nell'urna. Calcolare la probabilità che esse siano nell'ordine bianca-bianca-nera.

RISOLUZIONE (Traccia). L'evento E si verifica quando si verificano i seguenti eventi:
E_1: «la prima pallina estratta è bianca»,
$E_2|E_1$: «la seconda pallina estratta è bianca, sapendo che la prima è bianca»,
$E_3|E_1,E_2$: «la terza pallina è nera, sapendo che la prima è bianca e la seconda è bianca».

Siccome (Fig. 14):

$$p(E_1) = \dots, \quad p(E_2|E_1) = \dots, \quad p(E_3|E_1,E_2) = \dots,$$

risulta:

$$p(E) = \dots = 6{,}25\%.$$

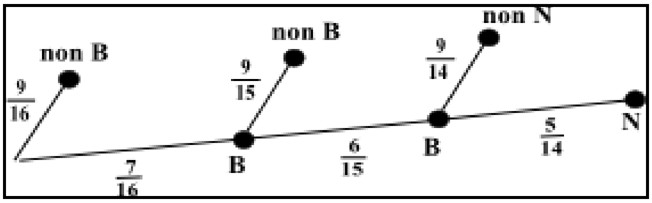

FIG. 14

- ESERCIZIO 2. Un'urna contiene 100 palline, delle quali 25 bianche, 25 nere, 25 rosse e 25 verdi. Se ne estraggono 4 una dopo l'altra, senza rimetterle nell'urna. Calcolare la probabilità che:
  1) tra le 4 palline estratte non ce ne siano due dello stesso colore;
  2) le 4 palline estratte siano tutte bianche;
  3) le 4 palline estratte siano tutte dello stesso colore;
  4) almeno due delle palline estratte siano dello stesso colore;
  5) le prime due palline estratte siano rosse;
  6) le prime due palline estratte siano dello stesso colore.

RISOLUZIONE.
1) Occupiamoci dell'evento E_1 di cui al punto 1 (Fig. 15).

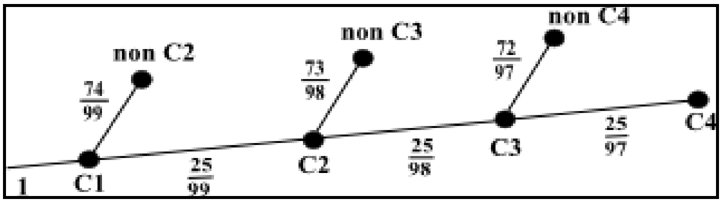

FIG. 15

Estratta una prima pallina, essa avrà un colore qualsiasi C1 fra i quattro possibili. A questo punto l'urna risulta modificata: essa infatti ha, ora, 99 palline di cui 24 del colore C1; la probabilità che la seconda pallina

abbia il colore C2 diverso da C1 è $25/99$.
Dopo aver estratto la seconda pallina, nell'urna ne rimangono 98, di cui 24 del colore C1 e 24 del colore C2. Allora, la probabilità di estrarre una terza pallina del colore C3, diverso sia da C1 sia da C2, è $25/98$. Infine, la probabilità che la quarta pallina estratta abbia il rimanente colore C4 (diverso dai tre precedenti) è $25/97$. In definitiva, la probabilità p(E1) è:

$$p(E_1)=\frac{25}{99}\cdot\frac{25}{98}\cdot\frac{25}{97}\approx 1{,}66\%\,.$$

2) Indicato con E_2 l'evento di cui al punto 2 (Fig. 16), si trova:

$$p(E_2)=\frac{25}{100}\cdot\frac{24}{99}\cdot\frac{23}{98}\cdot\frac{22}{97}\approx 0{,}32\%\,.$$

Lasciamo a te la giustificazione di ciò.

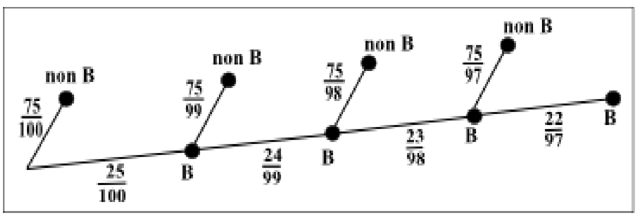

FIG. 16

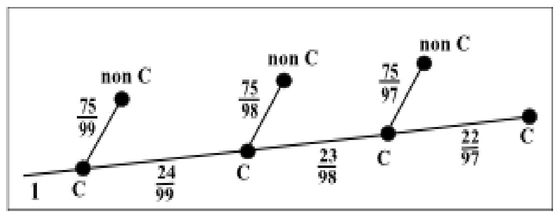

FIG. 17

3) Detto, adesso, E_3 l'evento di cui al punto 3 (Fig. 17) ed estratta una pallina, questa avrà un colore C qualsiasi fra i quattro possibili. A questo punto la probabilità che la seconda pallina abbia lo stesso colore C è $24/99$, la probabilità che la terza pallina abbia ancora colore C è $23/98$ e la probabilità che la quarta abbia pure colore C è $22/97$. Quindi:

$$p(E_3)=\frac{24}{99}\cdot\frac{23}{98}\cdot\frac{22}{97}\approx 1{,}29\%\,.$$

Osserviamo che $p(E_3) = 4\,p(E_2)$.
In effetti, si può notare che la probabilità che le quattro palline estratte siano tutte di un prefissato colore è sempre $p(E_2)$ e che, di conseguenza, la probabilità $p(E_3)$ che esse siano dello stesso colore (qualunque esso sia), per il principio delle probabilità totali è:

$$p(E_3) = p(E_2)+p(E_2)+p(E_2)+p(E_2) = 4\,p(E_2).$$

4) In merito all'evento E_4 di cui al punto 4, basta osservare che l'evento "almeno due delle quattro palline estratte sono dello stesso colore" è l'evento contrario di E_1 "tra le quattro palline estratte non ce ne sono due dello stesso colore". Sicché:

$$p(E_4)=p\left(\overline{E}_1\right)=1-p(E_1)\approx 98{,}34\%\,.$$

5) Riguardo agli altri due eventi, E_5 ed E_6, la cui analisi lasciamo completamente a te, si trova:

$$p(E_5)\approx 6{,}06\%\,;\quad p(E_6)\approx 24{,}24\%\,.$$

VERIFICHE [2]

1. Si lancia per 2 volte un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire. È più probabile che:

---

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

a) escano due numeri la cui somma è divisibile per 2 o due numeri la cui somma è divisibile per 3?
b) il primo numero che esce sia maggiore o che sia minore del secondo?
c) escano due numeri uguali o due numeri diversi?
d) la somma dei due numeri che escono sia maggiore o minore di 6?

2. Calcolare $p(E_1 \cup E_2)$ nei seguenti casi:
1) Nel lancio di un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire:
E_1: «esce un numero dispari», E_2: «esce un numero primo».
2) Nel lancio di due dadi, entrambi con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire, la somma dei due numeri usciti:
E_1: « è divisibile per 3», E_2: « è dispari».
3) Nel gioco della Tombola, il primo numero estratto:
E_1: «è un multiplo di 7», E_2: «è un multiplo di 6».
4) Nel gioco della Tombola, il primo numero estratto:
E_1: «è un multiplo di 5», E_2 «è un multiplo di 6».

[**R.** ... ; 2) $\approx 66,67\%$; ... ; 4) $1/3$]

3. Calcolare $p(E_1 \cap E_2)$ nei seguenti casi:
1) Nel lancio di un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi le stesse probabilità di uscire:
E_1: «esce un multiplo di 2», E_2: «esce un multiplo di 6».
2) Nel gioco della Tombola il primo numero estratto:
E_1: «è un multiplo di 4», E_2: «è un multiplo di 6».
3) Nel gioco della Tombola, ai primi due numeri estratti:
E_1: «il primo numero è divisibile per 2», E_2: «il secondo numero è divisibile per 2».

[**R.** ... ; 2) $\approx 7,78\%$; 3) $\approx 24,72\%$]

4. Un'indagine condotta fra 2500 abitanti di una data città ha rilevato che, in un anno, 120 abitanti hanno avuto un incidente stradale e 70 hanno avuto la casa svaligiata. Trovare la probabilità che un abitante di quella città: 1) abbia un incidente stradale; 2) abbia la casa svaligiata; 3) subisca entrambe le disavventure. [**R.** 1) $\approx 4,8\%$; 2) $\approx 2,8\%$; 3) $\approx 0,13\%$]

5. Si considera l'esperimento di lanciare un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi tutte la stessa probabilità di uscire. Si effettuano due lanci. Calcolare la probabilità che escano due numeri: 1) pari; 2) dispari; 3) la cui somma non supera 4; 4) dispari e/o primi; 5) pari e/o primi.

[**R.** 1) $1/4$; 2) ... ; 3) $1/6$; 4) $7/18$; 5) $17/36$]

6. Un'indagine, condotta fra i 973 impiegati di un'azienda, ha rivelato che 520 sono di sesso femminile; inoltre 274 hanno un'età che va dai 15 ai 25 anni, 352 un'età che va dai 26 ai 45 anni, gli altri un'età superiore ai 45 anni. Calcolare la probabilità che una persona, presa a caso tra gli impiegati: 1) sia una donna di età compresa fra i 26 ed i 45 anni; 2) sia una donna oppure abbia un'età superiore ai 65 anni; 3) sia un uomo di età non superiore ai 45 anni.

7. Roberto scommette 10 euro (a condizione di guadagnarne 4) che domani sarà interrogato in Italiano e scommette altri 10 euro (a condizione di guadagnarne 8) che sarà interrogato in Fisica. Calcolare la probabilità che, secondo il parere di Roberto, ha egli di essere interrogato: 1) in Italiano; 2) in Fisica; 3) in Italiano ed in Fisica; 4) in Italiano e/o in Fisica; 5) in Italiano ma non in Fisica; 6) in Fisica ma non in Italiano. [**R.** 1) ... ; 2) ... ; 3) $25/63$; 4) $55/63$; 5) $20/63$; 6) $10/63$]

8. Nell'incontro di calcio Fiorentina-Juventus la vittoria della Fiorentina è quotata 1,8: Giovanni scommette sulla vittoria della Fiorentina. Nell'incontro di calcio Inter-Milan la vittoria dell'Inter è quotata 2,6: Giovanni scommette sulla vittoria dell'Inter. Calcolare la probabilità che, nella stima degli allibra-

tori, ha Giovanni di vincere: 1) entrambe le scommesse; 2) almeno una delle due scommesse; 3) nessuna delle due scommesse. [**R.** 1) ≈21,37%; 2) ≈72,65%; 3) ≈27,35%]

9. ® In una classe composta da 14 ragazze e 9 ragazzi deve essere scelta a sorteggio una delegazione formata da una ragazza e un ragazzo. Tra le ragazze vi sono 3 Lucia e tra i ragazzi 2 Roberto. Calcolare la probabilità che la delegazione includa: 1) una Lucia; 2) un Roberto; 3) una Lucia e un Roberto; 4) una Lucia e/o un Roberto; 5) nessuna Lucia e nessun Roberto.
[**R.** ... ; 3) ≈4,76%; 4) ≈38,89%; 5) ≈61,11%]

10. In una classe composta da 16 ragazze e 8 ragazzi deve essere costituita una delegazione formata da 3 elementi scelti a sorteggio: 2 tra le ragazze ed 1 tra i ragazzi. Nella classe vi sono 3 Serena e 2 Fabio. Calcolare la probabilità che la delegazione includa: 1) un Fabio; 2) almeno una Serena; 3) una Serena ed una sola; 4) due Serena e nessun Fabio; 5) due Serena e un Fabio; 6) nessuna Serena e nessun Fabio. [**R.** ... ; 2) 35%; 3) 32,5%; 4) 1,875%; 5) 0,625%; 6) 48,75%]

11. Da un mazzo di carte da Bridge [3] si estrae a caso una carta e, dopo averla rimescolata nel mazzo, se ne estrae un'altra. Calcolare la probabilità che le due carte estratte siano: 1) due Re; 2) un Re e/o un Asso; 3) due carte di picche.

12. Da un mazzo di carte da Bridge si estrae una carta e, dopo averla messa da parte, se ne estrae una seconda. Calcolare la probabilità che: 1) la 1ª carta sia il Re di picche e la 2ª l'Asso di picche; 2) le due carte estratte siano due Assi; 3) fra le due carte estratte vi sia almeno un Asso; 4) fra le due carte estratte non vi siano Assi; 5) le due carte estratte siano di cuori; 6) le due carte estratte siano dello stesso colore; 7) le due carte estratte siano di colore diverso; 8) le due carte estratte siano un Asso e/o una carta di picche. [**R.** ... ; 3) ≈14,93%; 4) ≈85,07%; ... ; 6) ≈23,53%; 7) ≈76,47%; ...]

13. Da un mazzo di carte da Bridge:
   1) si estrae una carta e, senza guardarla, la si mette da parte.
      a) Qual è la probabilità che una seconda carta estratta sia un onore (sono onori: A-R-Q-F)?
      b) Controllata la prima carta estratta e constatato che non è un onore, qual è la probabilità che, estraendo una seconda carta, questa sia un onore?
      c) Controllata la prima carta estratta e constatato che è un onore, qual è la probabilità che, estraendo una seconda carta, questa sia un onore?
   2) si estraggono due carte.
      a) Qual è la probabilità che siano entrambe onori?
      b) Qual è la probabilità che fra esse ci sia almeno un onore?
      c) Qual è la probabilità che non ci siano onori?

[**R.** 1a) ≈30,77%; 1b) ≈31,37%; 1c) ≈29,41%; 2a) ≈9,05%; 2b) ≈52,49%; 2c) ≈47,51%]

14. Un'urna contiene 30 palline, delle quali 15 bianche, 9 nere e 6 rosse. A caso sono estratte due palline una di seguito all'altra, dopo aver rimesso nell'urna la prima pallina estratta. a) Quanto vale la probabilità che le due palline siano di colore diverso? b) Quanto vale questa probabilità se la prima pallina estratta non è rimessa nell'urna? [**R.** a) 62%; b) ≈64,14%]

15. ® Un'urna contiene 50 palline, delle quali 20 bianche, 18 nere e 12 rosse. Sono estratte una dopo l'altra tre palline e, ogni volta, la pallina estratta viene rimessa nell'urna. Calcolare la probabilità che: 1) le tre palline estratte siano bianche; 2) le tre palline estratte siano nere; 3) almeno due delle palline estratte siano bianche. [**R.** ... ; 3) 35,2%]

16. ® Un'urna contiene 50 palline, delle quali 25 bianche, 15 nere e 10 rosse. Sono estratte una dopo l'altra tre palline senza rimetterle nell'urna. Calcolare la probabilità che: 1) le tre palline estratte siano

[3] Sulle caratteristiche di un mazzo di carte da Bridge vedere nota 2 unità13.

nere; 2) almeno due delle tre palline estratte siano nere; 3) due delle tre palline estratte e due soltanto siano nere; 4) la prima e la terza pallina siano rosse e la seconda no; 5) le tre palline estratte siano dello stesso colore. [**R.** … ; 2) ≈21,07%; 3) ≈18,75%; … ; 5) ≈14,67%]

17. Un'urna contiene 20 palline, delle quali 10 bianche, 6 nere e 4 rosse. Sono estratte tre palline una di seguito all'altra. Calcolare la probabilità che: a) le tre palline siano di colore diverso; b) almeno due abbiano lo stesso colore ed eseguire il calcolo nei seguenti casi: 1) ogni pallina estratta viene rimessa nell'urna; 2) ogni pallina estratta non viene rimessa nell'urna.
[**R.** a1) 18%; b1) 82%; a2) ≈21,05%; b2) ≈78,95%]

18. In una classe formata da n ragazze e 10 ragazzi deve essere scelta a sorteggio una delegazione costituita da una ragazza e da un ragazzo. Tra le ragazze vi sono 3 Mirella e tra i ragazzi 2 Mario. a) Esprimere in funzione di n la probabilità p che la delegazione sia formata da una Mirella ed un Mario. b) Calcolare quanto vale n se p=4% . $\left[\textbf{R.}\ \text{a) } p=\frac{3}{5n};\ \text{b) } n=15\right]$

19. All'inizio di quella stagione calcistica, la vittoria dell'Inter era quotata 4 nel campionato italiano e 8 in Champions League. Calcolare quant'era, secondo la valutazione degli allibratori, la probabilità che l'Inter:
1) vincesse il campionato italiano ma non la Champions;
2) vincesse la Champions ma non il campionato italiano;
3) vincesse entrambe le competizioni;
4) vincesse almeno una delle due competizioni;
5) non vincesse alcuna delle due competizioni.
1) ≈21,9%; 2) ≈9,4%; 3) ≈3,1%; 4) ≈34,4%; 5) ≈65,6%]

20. Si lanciano 4 monete "testa-croce", le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Punto sull'uscita di 4 "teste". Qual è il minimo numero di lanci che devo effettuare per avere più probabilità di vincere che di perdere? [**R.** 11]

21. Qui sotto è riprodotta una "cartella" del gioco della "Tombola".

7			**31**	**40**		**69**	**79**	
4		**23**	**37**		**58**		**74**	
	13	**25**		**47**	**53**			**87**

Si estraggono a caso due dei 90 numeri della "Tombola". Calcolare la probabilità che:
a) siano entrambi sulla cartella;
b) formino un "ambo" (si trovino, cioè, sulla stessa riga);
c) siano entrambi sulla cartella, ma senza formare un "ambo";
d) almeno uno di essi sia sulla cartella;
e) uno ed uno solo di essi sia sulla cartella.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\frac{7}{267};\ \text{b)}\frac{2}{267};\ \text{c)}\frac{5}{267};\ \text{d)}\frac{82}{267};\ \text{e)}\frac{25}{89}.\right]$$

22. Il sig. Rossi ha due figli: si sa che il maggiore è femmina. Qual è la probabilità che il minore sia femmina? Quale che sia maschio?
Anche il sig. Bianchi ha due figli: si sa che uno di essi è femmina. Qual è la probabilità che l'altro figlio sia femmina? Quale che sia maschio?
[**R.** … ; 1/3, 2/3]

23. Il sig. Bianchi ha tre figli: si sa che uno è maschio. Qual è la probabilità che gli altri due figli siano: a) entrambi maschi? b) entrambi femmine? c) uno maschio e l'altro femmina?

[R. a) $1/7$; b) $3/7$; c) ...]

24. Il sig. Rossi ha 3 figli: si sa che uno è maschio. Si indichi con p' la probabilità che, fra gli altri due figli, vi sia almeno una femmina.
Anche il sig. Bianchi ha 3 figli: si sa che il maggiore è maschio. Si indichi con p" la probabilità che almeno uno degli altri due figli sia femmina.
È maggiore p' o p"? Quanto vale | p'–p"| ? [R. ... ; | p'–p" |$=3/28$]

25. ® LABORATORIO DI MATEMATICA. Disponi di un bastoncino. A caso lo dividi in tre parti. Qual è la probabilità che queste parti costituiscano i lati di un triangolo?
Discutine in classe con i tuoi compagni e, se non riuscite a risolvere la questione, chiedete l'aiuto del professore.

26. In un'urna vi sono 20 palline, di cui 10 bianche e altrettante nere. Sono estratte a caso 4 palline, senza reinserimento. Quant'è la probabilità che siano 2 bianche e 2 nere? [R. ≈ 41,8%]

27. ® Valeria gioca a TESTA o CROCE con una moneta non bilanciata: la probabilità che esca TESTA è, infatti, diversa da quella che esca CROCE. Valeria lancia due volte la moneta. È più probabile che le due facce uscite siano uguali o che siano diverse?

28. In un'urna ci sono 4 palline, 2 bianche e 2 nere. Sono estratte a caso, una dopo l'altra, 2 palline, senza reinserimento. È più probabile che le palline estratte siano dello stesso colore o di colore diverso?

29. Guido e Laura sono due figli dei coniugi Rossi. Il loro comune amico Mario domanda curioso: «Ma quanti siete in famiglia?» Risponde Guido: «Ti posso dire che ho tanti fratelli e altrettante sorelle». La risposta di Laura è invece questa: «I miei fratelli sono il triplo delle mie sorelle».
Se si scelgono a caso due dei figli dei coniugi Rossi, è più probabile che siano dello stesso sesso o di sessi diversi? [R. È più probabile che siano di sesso diverso]

30. Si lancia per tre volte una moneta "testa-croce", le cui facce hanno le stesse probabilità di uscire.
a) Si constata che nel terzo lancio è uscita "testa". Qual è la probabilità che negli altri due lanci almeno una volta sia uscita "testa"?
b) Si constata che in uno dei tre lanci è uscita "testa". Qual è la probabilità che negli altri due lanci almeno una volta sia uscita "testa"?

[R. a) $3/4$; b) $4/7$]

31. In un sacchetto sono contenute 36 palline di tre colori diversi: rosso, bianco, nero. Dal sottostante diagramma a torta (Fig. 18) se ne può dedurre l'esatta distribuzione.

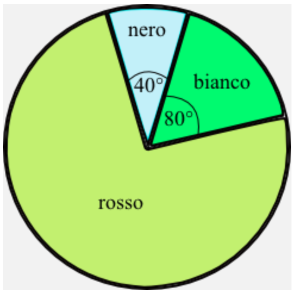

FIG. 17

Sono estratte a caso due palline, una dopo l'altra, senza rimetterle nel sacchetto. Calcolare la probabilità che:
a) la prima sia bianca e la seconda nera; b) nessuna delle due sia bianca;
c) siano dello stesso colore; d) siano di colore diverso.

[**R**. a) $8/315$; b) $21/35$; c) $31/63$; d) …]

32. Si lanciano due dadi con le facce numerate da 1 a 6, aventi la stessa probabilità di uscire. Si constata che i numeri usciti sono uguali. Calcolare la probabilità che siano uguali ad 1.

33. Un evento ha probabilità p di verificarsi. Calcolare la probabilità che in n prove l'evento si verifichi almeno una volta.

34. Le semifinali della Champions League 2017 erano le seguenti:

Monaco – Juventus, Real Madrid – Atletico Madrid.

Un'agenzia di scommesse registrava le quote di passaggio del turno registrate nella tabella sottostante:

Squadra	Monaco	Juventus	Real Madrid	Atletico Madrid
Quote	2,75	1,40	1,53	2,37

Calcolare quale probabilità era valutata dall'agenzia per ciascuna delle seguenti finali:

a) Monaco – Atletico Madrid. b) Monaco – Real Madrid.
c) Juventus – Atletico Madrid. d) Juventus – Real Madrid.

[**R**. a) $\approx 15{,}34\%$; b) $\approx 23{,}77\%$; c) $\approx 30{,}14\%$; d) $\approx 46{,}69\%$]

35. Si lanciano tre monete "Testa-Croce", le cui facce hanno tutte le medesime probabilità di uscire. Calcolare la probabilità che le tre facce uscite NON siano uguali. [**R**. 75%]

36. I signori Verdi hanno 4 figli. È più probabile che siano due di un sesso e due dell'altro sesso oppure che siano tre di un sesso ed uno dell'altro sesso? [**R**. una delle due probabilità è $1/2$, l'altra $3/8$]

37. I signori Rossi hanno 4 figli. Si sa che uno di essi è maschio. Dimostrare che la probabilità che 2 degli altri 3 figli siano maschi ed una sia femmina è uguale alla probabilità che siano tutte e 3 femmine, calcolando tali probabilità. [**R**. $4/15$]

38. I signori Bianchi hanno 4 figli. Si sa che uno di essi è maschio ed una è femmina. Stabilire se è più probabile che gli altri due figli siano dello stesso sesso o di sesso diverso, calcolando le relative probabilità. [**R**. una delle due probabilità è $4/7$, l'altra $3/7$]

39. Per la finale nazionale di BASKET si sono qualificate la squadra di Milano e quella di Trento. Si aggiudica il titolo di campione la squadra che arriva per prima a vincere 4 gare sulle 7 che ipoteticamente si dovrebbero disputare. Ammettiamo che Milano abbia probabilità 3/5 di aggiudicarsi ogni singola gara. Calcolare la probabilità che:

a) Milano si aggiudichi il titolo di campione in non più di 5 gare;
b) Trento si aggiudichi il titolo di campione in non più di 5 gare;
c) una delle due squadre si aggiudichi il titolo di campione in non più di 5 gare;
d) nessuna delle due squadre si aggiudichi il titolo di campione in non più di 5 gare

$$\left[\mathrm{R.}\ \text{a) } p(\text{Milano})=\left(\frac{3}{5}\right)^4+4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{2}{5}=33{,}696\ \%;\ \text{b) } p(\text{Trento})=\left(\frac{2}{5}\right)^4+4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\frac{3}{5}=6{,}144\ \%;\ \text{c) } 39{,}84\ \%;\ \text{d) } \ldots\right]$$

40. In un'urna sono contenute 10 palline, di cui 6 bianche e 4 nere. Si estrae una pallina a caso e se è bianca è accantonata, se invece è nera è rimessa nell'urna. Si estrae quindi a caso una seconda pallina. Calcolare la probabilità che: a) le due palline estratte siano dello stesso colore; b) le due palline estratte siano di colore diverso; c) la seconda pallina estratta sia bianca; d) la seconda pallina estratta sia nera. [**R**. a) $37/75$; … ; c) $43/75$; …]

41. In un'urna sono contenuti i 90 numeri della tombola. Si estrae un numero a caso e se è pari è accantonato, se invece è dispari è rimesso nell'urna. Si estrae quindi a caso un secondo numero. È più probabile che il secondo numero estratto sia pari o che sia dispari?

42. In un'urna sono contenute 10 palline di cui 4 bianche; in una seconda urna sono contenute 10 palline di cui 5 bianche; in una terza urna sono contenute 10 palline di cui 6 bianche. Si estrae a caso una pallina da ciascuna delle tre urne. Qual è la probabilità che almeno una delle tre palline estratte sia bianca? [**R.** 88%]

43. In un'urna vi sono due palline: una bianca ed una nera; in una seconda urna vi sono tre palline: due bianche ed una nera. Si scommette sull'estrazione di una pallina bianca e la cosa può avvenire in due modi: 1) si sceglie a caso una delle due urne e da essa si estrae, sempre a caso, una pallina; 2) si versano tutte le palline in una medesima urna e da questa si estrae una pallina a caso.
Qual è la strategia che assicura la maggiore probabilità di estrarre la pallina bianca, la 1) o la 2)?

44. In un'urna sono contenute 10 palline bianche e 5 palline nere; in una seconda urna vi sono 4 palline bianche e 6 palline nere. Si sceglie a caso un'urna e da essa si estrae una pallina.
a) Qual è la probabilità che sia bianca? Quale quella che sia nera?
b) Senza reimmettere la pallina estratta nell'urna, se ne estrare una seconda. Qual è la probabilità che le due palline estratte siano entrambe bianche? Quale quella che siano entrambe nere? Quale la probabilità che siano di colore diverso?

$$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } p(B)=\frac{8}{15},\ \ldots;\ \text{b) } p(BB)=\frac{59}{210},\ p(NN)=\frac{3}{14},\ \ldots\right]$$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1 Quando due eventi si dicono incompatibili? Quando indipendenti?

2 In un'urna sono contenute 10 palline numerate da 1 a 10. Si estrare casualmente una pallina. Considera i seguenti eventi:
E: Il numero che contrassegna la pallina estratta è pari.
F: Il numero che contrassegna la pallina estratta è primo.
G: Il numero che contrassegna la pallina estratta è un multiplo di 5.
Delle seguenti alternative, individuare l'unica corretta e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata:
[A] Entrambi gli eventi E ed F sono dipendenti da G.
[B] Nessuno dei due eventi E ed F è dipendente da G.
[C] L'evento E è dipendente da G ma l'evento F non lo è.
[D] L'evento F è dipendente da G ma l'evento E non lo è.

3 La probabilità che Leonardo, al rientro dalle vacanze, venga interrogato in matematica è 80%; quella che venga interrogato in italiano è 56%. Per ciascuna delle seguenti questioni una sola alternativa è corretta: individuala.
a) La probabilità che Leonardo sia interrogato in matematica e in italiano è:
[A] 44,8%; [B] 136,0%; [C] 4,48%; [D] 0,0448%.
b) La probabilità che Leonardo non sia interrogato né in matematica né in italiano è:
[A] 64,0%; [B] 8,8%; [C] 0,88%; [D] 88,0%.
c) La probabilità che Leonardo sia interrogato in matematica ma non in italiano è:
[A] 35,2%; [B] 24,0%; [C] 36,0%; [D] 0,352%.
d) La probabilità che Leonardo sia interrogato in italiano ma non in matematica è:
[A] 24,0%; [B] 0,24%; [C] 1,12%; [D] 11,2%.
e) La probabilità che Leonardo sia interrogato in almeno una delle due materie è:
[A] 136,0%; [B] 91,2%; [C] 9,12%; [D] 13,6%.

4 Da un'urna contenente i 90 numeri della TOMBOLA ne estrai uno e, senza guardarlo, lo metti in tasca. Quindi ne estrai un secondo. La probabilità che il secondo numero estratto sia il "90":
[A] è 1/90; [B] è 1/89;
[C] è 1/45; [D] non si può calcolare poiché non si conosce il primo numero estratto.
Una sola alternativa è corretta. Quale?

5 Paolo gioca sull'uscita del numero 47 sulla ruota di Napoli o su quella di Firenze. Quale probabilità ha di vincere?

6 In un'urna vi sono 4 palline uguali in tutto e per tutto, tranne che nel colore. Precisamente: 3 palline sono bianche ed una soltanto è nera. Si estraggono 2 palline a caso. Saresti disposto a scommettere alla pari sui due eventi: a) le due palline sono bianche; b) una delle due palline è bianca e l'altra è nera?

7 Mario Rossi ha due figli: almeno uno di essi è maschio. Sia p' la probabilità che l'altro figlio sia femmina. Anche Giulio Bianchi ha due figli: il maggiore di essi è maschio. Sia p" la probabilità che l'altro figlio sia femmina. Risulta:
[A] $p'>p''$; [B] $p''>p'$; [C] $p'=p''$.
Una sola alternativa è corretta. Quale?

8 Alla vigilia dei quarti di finale, nella stagione 2007/08, un'agenzia di scommesse quotava 13 la Roma vincente in Champions League e 7 la Fiorentina vincente in Coppa Uefa. Fabio decise di scommettere sia sulla vittoria della Roma sia su quella della Fiorentina. Quale probabilità aveva Fabio, nella valutazione dell'agenzia, di:
a) vincere entrambe le scommesse; b) vincere almeno una delle scommesse;
c) vincere una ed una soltanto delle due scommesse; d) non vincere alcuna delle due scommesse.

9 Alle semifinali del campionato nazionale di Basket si incontrano le squadre di Venezia e Trento. Si qualifica alla finale la squadra che si aggiudica 3 gare sulle 5 che ipoteticamente si dovrebbero giocare. La due squadre hanno la stessa probabilità di vincere ogni singola gara. Calcolare la probabilità che una delle due squadre riesca a qualificarsi per la finale in non più di 4 incontri.

RISPOSTE.

1. Due eventi A e B si dicono *incompatibili* quando non possono presentarsi nello stesso tempo. In tal caso $A\cap B=\emptyset$ e perciò $p(A\cap B)=0$.
Un evento A si dice indipendente da un evento B se $p(A|B)=p(A)$, cioè se la probabilità di A non è influenzata dal verificarsi dell'evento B. In tal caso è pure B indipendente da A e i due eventi si dicono *indipendenti*.

2. [D] è l'alternativa corretta, dal momento che E è indipendente da G, mentre F è dipendente da G. Infatti:
$$p(E) = p(E|G) = \frac{1}{2}\ ,\ \ p(F) = \frac{2}{5}\ ,\ \ p(F|G) = \frac{1}{2}\,.$$

3. Le risposte corrette sono le seguenti: a) [A]; b) [B]; c) [A]; d) [D]; e) [B].

4. L'alternativa corretta è la [A]. Infatti l'aver messo da parte il primo numero estratto, senza guardare di che numero si tratti, non modifica la nostra quantità di informazione rispetto a quella che si avrebbe se il numero non fosse stato estratto per nulla.

5. Il 47 esce sulla ruota di Napoli o esce sulla ruota di Firenze sono due eventi compatibili. Indicato con 47_N il primo evento e con 47_F il secondo e tenuto presente che la probabilità che esca un determinato numero su una determinata ruota del Lotto è $5/90$ ovvero $1/18$, si ha allora:
$$p(47_N\cup 47_F)=p(47_N)+p(47_F)-p(47_N\cap 47_F)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{18}\approx 10{,}80\%.$$

6. La scommessa alla pari è equa. I due eventi, infatti, hanno la stessa probabilità, che è $1/2$.

In effetti, utilizzando un apposito grafo e indicando per comodità con b_1, b_2, b_3 le tre palline bianche e con n la pallina nera, tutte le possibili coppie di palline sono le seguenti:

$$b_1b_2,\ b_1b_3,\ b_1n;\ \ b_2b_1,\ b_2b_3,\ b_2n;\ \ b_3b_1,\ b_3b_2,\ b_3n;\ \ nb_1,\ nb_2,\ nb_3.$$

Ed è immediato constatare che, delle 12 eventualità, 6 competono alla coppia bianca-bianca e 6 alla coppia bianca-nera (o nera-bianca).

Al medesimo risultato si giunge ragionando in base alle probabilità totali e composte. In effetti, la probabilità che escano due palline bianche è:

$$p(bb)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

mentre la probabilità che escano due palline di colore diverso è, come sopra:

$$p(bn)+p(nb)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{2}\ .$$

7. In generale, se non si hanno informazioni sul sesso dei due figli, ci sono 4 casi possibili (per primo è scritto il sesso del figlio maggiore): M-M, M-F, F-M, F-F. Nel caso di Mario Rossi, dovendosi evidentemente escludere l'eventualità F-F, le possibilità sono: M-M, M-F, F-M. Si ha, perciò: $p'=2/3$. Nel caso di Giulio Bianchi, considerato che il figlio maggiore è M, i casi possibili sono: M-M, M-F, dovendosi escludere di necessità le eventualità: F-M, F-F. Si ha, perciò: $p''=1/2$. In conclusione, l'alternativa corretta è [A].

8. La probabilità che la Roma vincesse la sua competizione era, nella valutazione dell'agenzia di scommesse: $P_R=1/13$; quella che la Fiorentina vincesse la sua competizione era: $P_F=1/7$. Pertanto, le probabilità richieste sono:

$$\text{a)}\ p_a=P_RP_F=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{7}\ ;\quad \text{b)}\ p_b=P_R+P_F-P_RP_F\ ;\quad \text{c)}\ p_c=P_R(1-P_F)+P_F(1-P_R)\ ;\quad \text{d)}\ p_d=1-p_b\ .$$

9. Sano P_V e P_T rispettivamente le probabilità che siano Venezia o Trento a qualificarsi in non più di 4 incontri. P_V è data dalla somma della probabilità P' che Venezia vinca le prime 3 partite e P" che vinca 3 delle prime 4 partite (ma non le prime 3, situazione già presa in considerazione). Ora, si ha:

$$P'=P(VVV)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\ ;\ P''=P(VVTV)+P(VTVV)+P(TVVV)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}\ .$$

Pertanto:

$$P_V=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}.$$

Siccome $P_T=P_V$, allora la probabilità cercata è:

$$P=2\ P_V=\frac{5}{8}.$$

LETTURA

UN GIOCO DI BUSTE

Quel giorno il Professore di matematica decise di interrogare Andrea sulla probabilità.

Prof - Penso che conosciate tutti il nuovo gioco a premi condotto da Gerry Scotti. Comunque ve lo ricordo. Al vincitore sono offerte tre buste sigillate nelle quali sono indicati altrettanti premi di valori diversi. Il concorrente può scegliere una busta, aprirla, controllare l'entità del premio e decidere se accettare il premio indicato o rinunciarvi. Se accetta il premio il gioco finisce. Se vi rinuncia (nel qual caso non può più ritor-

narvi sopra) sceglie una seconda busta, la apre, controlla l'entità del premio e decide se accettarlo o rifiutarlo. Se lo accetta il gioco finisce. Se lo rifiuta non gli rimane che accettare il premio indicato nella terza busta. È chiaro il marchingegno?
Andrea - Un po' contorto, ma credo di aver capito come funziona il gioco.
Prof - Bene. Allora ti chiedo: se il concorrente dovesse scegliere assolutamente a caso fra le tre buste e prendere obbligatoriamente il premio che è indicato nella busta scelta, quale probabilità avrebbe di aggiudicarsi il premio più alto?
Andrea - È facile, Prof: i casi possibili sono tre e sono equiprobabili; vi è un solo caso favorevole all'evento, dunque la probabilità richiesta è $1/3$.
Prof - Bravissimo. Proprio così. Però il concorrente non sceglie del tutto a caso, ma può usufruire di alcune informazioni. Pensi che questo lo possa aiutare a scegliere una strategia che gli assicuri una probabilità migliore e comunque maggiore di $1/3$?
Andrea - Non saprei dire, ma vediamo di ragionare. Quando il concorrente sceglie la prima busta e la apre per leggervi l'entità del premio, in realtà non può concludere nulla poiché il 1° premio può essere proprio quello ma potrebbe essere anche in una delle altre due buste. Quindi la probabilità che la busta che egli ha scelto sia quella col premio più alto è sempre $1/3$. Non migliora.
Prof - E fin qui il tuo ragionamento non fa una grinza. Ma il concorrente ha altre possibilità. Non lo dimenticare.
Andrea - Se il concorrente rifiuta la prima busta, ne sceglie un'altra, la apre e controlla l'entità del premio, si trova ora nella stessa situazione di prima. No, mi pare che anche adesso non ci sia una strategia per migliorare la probabilità di aggiudicarsi il premio più alto.
Prof - Ne sei proprio sicuro? Attento, Andrea: quale informazione acquisisce il concorrente dopo che ha letto il contenuto della seconda busta?
Andrea - Conosce l'entità del premio indicato dalla seconda busta.
Prof - Solo questo? Non gli serve a nulla aver letto il contenuto della prima busta?
Andrea - Conosce anche l'entità del premio indicato nella prima busta, ma non riesco a capire come ciò possa servirgli.
Pierino (*È seduto all'ultimo banco, di solito pensa ad altro, ma a volte interviene con osservazioni intelligenti*): Se posso, Prof, credo di poter dire che, una volta aperta la seconda busta, il concorrente può confrontare il valore dei premi indicati nelle due buste aperte.
Prof - Bravo Pierino. E adesso come procedi?
Pierino - Non saprei proprio.
Prof - Non fa niente. Riprendiamo con te, Andrea: sapresti sfruttare l'indicazione di Pierino?
Andrea - No.
Prof - Senti, sai costruire una tabella che rappresenti tutte le situazioni che si possono presentare nell'estrazione delle tre buste, una dopo l'altra?
Andrea - Sì, Prof, questo sono in grado di farlo. La tabella è la seguente:

Situazione N°	1ª busta estratta	2ª busta estratta	3ª busta estratta
1	1° premio	2° premio	3° premio
2	1° premio	3° premio	2° premio
3	2° premio	1° premio	3° premio
4	2° premio	3° premio	1° premio
5	3° premio	1° premio	2° premio
6	3° premio	2° premio	1° premio

Prof - Bravo Andrea. Ora dimmi, questa tabella non ti suggerisce nulla riguardo ad una possibile strategia del concorrente che vuole migliorare la probabilità di assicurarsi il premio più alto?
Andrea - Prof non riesco a vederci altro, oltre al fatto che ogni situazione ha 1 possibilità su 6 di presentarsi, ma in ogni caso 2 volte su 6, ossia 1 su 3, il concorrente si aggiudica il 1° premio.
Prof - Continui a ragionare come se l'aver aperto le due buste e averne controllato il contenuto non ti abbia dato alcuna informazione e, in ultima analisi, come se il concorrente scegliesse del tutto a caso. Ricorda l'indicazione di Pierino.
Andrea - Dunque, cerchiamo di concentrarci e raccogliamo le idee. [*Una lunga pausa di meditazione*]. Il concorrente non è costretto a scegliere a caso, ma può in qualche modo utilizzare delle informazioni. Già questo mi fa concludere che una strategia per migliorare la probabilità di assicurarsi il 1° premio dovrebbe esserci. Non può essere la stessa cosa nei due casi: nel 1° sceglie proprio a caso, nel 2° può servirsi di certe informazioni.
Prof - Cominci finalmente a ragionare con la testa. Continua.
Andrea - Escludo la possibilità di accettare il premio della prima busta poiché in questo caso non migliorerei la probabilità, che rimarrebbe sempre $1/3$.
Prof - Di nuovo bravo. Continua.
Andrea - Concentriamoci sulla seconda busta. Se l'accetto comunque, non miglioro alcuna probabilità poiché è come se scegliessi a caso su tre buste.
Prof - Continua così che stai andando forte.
Andrea - Come faceva notare Pierino, ho la possibilità di confrontare i premi delle due buste. Ora [*breve pausa; illuminazione improvvisa*] … sì, ci sono.
Prof - Allora fa' sapere anche a noi.
Andrea - Se il valore della seconda busta supera quello della prima e il concorrente accetta il premio di questa seconda busta, come mostra la tabella precedente si assicura 2 volte su 6 il 1° premio (situazioni nella tabella: 3 e 5). Se invece l'entità del premio della seconda busta è inferiore a quello della prima, egli rifiuta la seconda busta e, di necessità, accetta il premio indicato dalla terza: in questo caso solo 1 volta su 6 si aggiudica il 1° premio (*situazione 4 nella tabella*).
Prof - Bravissimo. Adesso riassumi: qual è la strategia?
Andrea - Il concorrente apre la prima busta, ne guarda il contenuto e la rifiuta in ogni caso; poi sceglie una seconda busta, la apre e ne guarda il contenuto: se l'entità del premio della seconda busta supera quella della prima, la accetta altrimenti la rifiuta e accetta il premio della terza busta. In questo modo egli ha 3 possibilità su 6 (situazioni 3, 5, 4 nella tabella) di aggiudicarsi il 1° premio, e perciò ha probabilità $1/2$.
Prof - Perfetto. Hai avuto qualche incertezza ma te la sei cavata molto bene. Meriti un bel voto: 9. Vai a posto. Adesso attenzione. Proviamo a complicare la vita ai concorrenti di Gerry Scotti. Cosa succede se, con le stesse regole di prima, le buste offerte sono 4 invece di 3? Si capisce, da quanto avete sentito da Andrea, che anche adesso ci dovrebbe essere una strategia che migliori la probabilità $1/4$ di una scelta del tutto casuale. Per trovarla basta ragionare come ha fatto Andrea. Ma vi dico di più: di strategie ne esistono due e si ottengono in entrambi i casi probabilità diverse fra loro ma maggiori di $1/4$. Lascio a voi di determinare tali probabilità come compito per casa.