Prerequisiti:
- Saper operare con i numeri razionali.
- Saper utilizzare il calcolo algebrico

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *delineare un quadro storico delle varie concezioni della probabilità*
- *risolvere problemi di probabilità*

Dati e previsioni: un po' di storia

Unità 15

15.1 MEDIE

Le medie aritmetica, geometrica e armonica sembra che fossero conosciute dalle popolazioni della Mesopotamia fin dal 2000 a.C.. Da esse le avrebbe apprese Pitagora (circa 580-500 a.C.) nei suoi viaggi in quei luoghi.
Fatto sta che la tradizione attribuisce a Pitagora l'introduzione di quelle medie, mentre furono poi i suoi seguaci (in particolare: Archita di Taranto, V sec. a.C. e Ippaso di Metaponto, V-IV sec. a.C.) ed altri matematici posteriori (in particolare: Teone di Smirne, II sec. d.C. e Pappo di Alessandria, III sec. d.C.) che ne fecero uno studio approfondito, aggiungendo inoltre altre sette medie alle tre originarie.

Le medie degli Antichi, in verità, sono presentate in forma diversa da quella che conosciamo noi. Intanto sono sempre medie di due numeri. E poi sono definite come numeri che soddisfano a determinate proporzioni.

Così, detti a, b due numeri positivi (supponiamo $a \geq b$) e chiamata m una loro media:

- m è una **media aritmetica** se risulta: $\frac{a-m}{m-b}=\frac{a}{a}$, che è come dire: $a-m=m-b$, ossia:
$$m=\frac{a+b}{2}\ .$$
- m è una **media geometrica** se risulta: $\frac{a-m}{m-b}=\frac{a}{m}$, che è come dire: $m^2=ab$, ossia:
$$m=\sqrt{ab}\ .$$
- m è una **media armonica** se risulta: $\frac{a-m}{m-b}=\frac{a}{b}$, che è come dire: $ab-bm=am-ab$, ossia:
$$m(a+b)=2ab, \text{ o anche: } m=\frac{2ab}{a+b} \text{ oppure: } m=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$
Detto per curiosità, in origine questa media era detta ***subcontraria***. Solo dopo che i Pitagorici scoprirono il legame tra i suoi termini ed alcuni accordi musicali, decisero di rinominarla media armonica.
- Le altre sette medie non hanno nomi particolari e sono definite dalle seguenti relazioni (ribadiamo che stiamo supponendo $a>b$):
$$\frac{a-m}{m-b}=\frac{b}{a},\quad \frac{a-m}{m-b}=\frac{m}{a},\quad \frac{a-m}{m-b}=\frac{b}{m},\quad \frac{a-m}{a-b}=\frac{a}{b},\quad \frac{a-m}{a-b}=\frac{m}{a},\quad \frac{a-b}{m-b}=\frac{b}{a},\quad \frac{a-b}{m-b}=\frac{m}{a}\ .$$

15.2 CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

15.2.1 La prima definizione di probabilità di un evento casuale è conosciuta come ***definizione classica della probabilità***: comparve nel 1812 in un'opera del matematico francese **Pierre Simon de Laplace** (1749–1827).
Questo non significa che prima di allora non si fossero affrontate questioni di tipo probabilistico. In realtà, il problema, collegato esclusivamente ai giochi d'azzardo, è antico quanto il mondo. Non mancano, infatti, in letteratura esempi di scommesse che fanno pensare a valutazioni di probabilità, benché in termini rudimentali.
I primi contributi atti a definire meglio i contorni della questione si hanno con il cosiddetto "problema della divisione delle parti".

Si cimentarono nella sua risoluzione, ma con risultati errati, Luca Pacioli (1445 - ca. 1515), Gerolamo Cardano (1501 ca. - 1576), Niccolò Tartaglia (1505 ca. - 1557). Noi non ci soffermiamo su queste soluzioni e ritorneremo sulla questione fra breve.
Prima, però, ci preme segnalare che di "calcolo delle probabilità" si occuparono anche lo scienziato tedesco Johannes Kepler (1571-1630) e lo scienziato pisano Galileo Galilei (1564-1642).

Per esempio, a Galilei fu posta la seguente questione (correlata ad un gioco d'azzardo, chiamato *zara*):
«Nel lancio di tre dadi la somma "9" e la somma "10" possono essere ottenute entrambe in 6 modi, ma l'esperienza mostra che la somma "10" si ottiene più spesso della somma "9". Come si spiega questo fatto?»
I 6 modi in cui si può ottenere la somma "9" sarebbero, secondo coloro che ponevano la questione [(1)]:

1+2+6, 1+3+5, 1+4+4, 2+2+5, 2+3+4, 3+3+3.

Quelli in cui si può ottenere la somma "10" sarebbero a loro volta:

1+3+6, 1+4+5, 2+2+6, 2+3+5, 2+4+4, 3+3+4.

C'è un errore nella premessa, che Galilei segnalò correttamente: in effetti, la somma "10" può essere ottenuta un numero di volte (ben 27) maggiore di quello (25) relativo alla somma "9" e il fatto sperimentale concorda appunto con ciò.
Il ragionamento può essere sintetizzato nella tabella 1.

Se in uno dei tre dadi esce:	si ha somma 9:		si ha somma 10:	
	per un numero di volte uguale a:	se la somma degli altri due numeri è:	per un numero di volte uguale a:	se la somma degli altri due numeri è:
1	5	8 (2-6, 6-2, 3-5, 5-3, 4-4)	4	9 (3-6, 6-3, 4-5, 5-4)
2	6	7 (1-6, 6-1, 2-5, 5-2, 3-4, 4-3)	5	8 (2-6, 6-2, 3-5, 5-3, 4-4)
3	5	6 (1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 3-3)	6	7 (1-6, 6-1, 2-5, 5-2, 3-4, 4-3)
4	4	5 (1-4, 4-1, 2-3, 3-2)	5	6 (1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 3-3)
5	3	4 (1-3, 3-1, 2-2)	4	5 (1-4, 4-1, 2-3, 3-2)
6	2	3 (1-2, 2-1)	3	4 (1-2, 2-1)

TAB. 1

Per esempio, tanto per chiarire, se in uno dei tre dadi esce 1:
- si ha somma 9, se la somma degli altri due numeri è 8, nei seguenti 5 casi: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2;
- si ha somma 10, se la somma degli altri due numeri è 9, nei seguenti 4 casi: 3+6, 4+5, 5+4, 6+3.

15.2.2 A gettare le basi di una vera e propria teoria del calcolo delle probabilità furono i francesi **Pierre Fermat** (1601-1665) e **Blaise Pascal** (1623-1662), in un'interessante e proficua corrispondenza sviluppatasi nel corso dell'anno 1654. Corrispondenza ispirata da questioni che a Pascal poneva il suo

[1] Sembra che a porre la questione a Galilei sia stato Cosimo II de' Medici, granduca di Toscana (1590-1621).

amico Antoine Gombaud (16-7-1684), Cavaliere di Méré, e che Pascal comunicava a Fermat per uno scambio di opinioni.

- Uno dei problemi che il Cavaliere di Méré propose a Pascal era proprio il ***problema della divisione delle parti*** (che qualche studioso denomina anche ***problema della partita interrotta***) e nella sostanza non differisce molto dal seguente [2]:

Due persone – che per comodità chiamiamo A e B – decidono di giocare alcune partite. In ogni partita vince l’uno o l’altro dei due giocatori, i quali hanno la stessa probabilità di vincita. Vince la posta chi arriva per primo a vincere 4 partite. Ma dopo 5 partite, quando A ne ha vinte 3 e B ne ha vinte 2, i giocatori decidono di interrompere il gioco. Come deve essere divisa la posta?

Le opinioni su questa questione non erano proprio coincidenti. Tant’è che alcuni sostenevano che la posta dovesse essere divisa fra A e B nel rapporto $3/2$, dal momento che A aveva vinto 3 partite e B ne aveva vinte 2; altri affermavano che doveva essere ripartita nel rapporto $2/1$ giacché a B mancavano 2 partite per giungere a 4 e ad A ne mancava una soltanto.
Pascal e Fermat giudicarono che sbagliavano gli uni e gli altri e lo fecero con ragionamenti corretti anche se diversi fra loro. Ma il ragionamento di Fermat era più semplice di quello di Pascal, tanto da far dire a quest’ultimo, in una lettera indirizzata a Fermat (1654):
«*Ammiro il vostro metodo sulla divisione delle parti, ancora di più ora che l’ho ben capito, questo metodo è interamente vostro e non ha niente in comune con il mio e arriva facilmente allo stesso risultato*».
Il risultato era che la posta doveva essere ripartita proporzionalmente alle possibilità di vincita finale che aveva ciascuno dei giocatori al momento dell’interruzione e quindi nel rapporto $3/1$.

Proviamo a risolvere il problema in una maniera a noi congeniale, ma sostanzialmente non molto dissimile da quella di Fermat.

Siccome dopo due altre partite uno dei giocatori sarebbe certamente giunto a vincerne quattro, si trattava di vedere quali possibilità ci fossero in queste due partite.
Vi sono evidentemente 4 possibilità:

1) vince A, vince A;   2) vince A, vince B;
3) vince B, vince A;   4) vince B, vince B.

Nel 1° e nel 2° caso A vince la posta (e non è neanche necessario giocare la 2ª partita poiché A è giunto a quota 4 vittorie). Nel 3° caso vince ancora A. Nel 4° caso vince B.
Dunque A vince tre volte e B una sola volta. La posta deve essere allora ripartita tra A e B nel rapporto $3/1$.

- Quello descritto sopra fu uno dei tanti problemi che il Cavaliere di Méré propose a Pascal. Eccone un altro, a titolo di curiosità.

Nel lancio di un dado, puntando sul “6” chiedo a priori di poter eseguire 4 lanci per avere maggiore possibilità di vincere che di perdere. Nel lancio di due dadi, puntando sul “doppio 6”, i casi possibili sono 36 e, come 4 rispetto a 6, così 24 è i $2/3$ di 36. Quindi, per avere la maggiore possibilità di vincere che di perde-

[2] Per il caso generale vedere: Unità 27 – Calcolo combinatorio. Il binomio di Newton, esercizio N° 52.

re dovrei chiedere a priori di poter effettuare 24 lanci. Tuttavia, 24 lanci non sono sufficienti a darmi maggiore possibilità di vincere che di perdere. Come si spiega ciò? (3)

Anche di questo problema Pascal e Fermat fornirono la soluzione.
Pure adesso diamo una spiegazione seguendo ragionamenti a noi familiari.
Dunque, nel caso di n lanci di un dado, la probabilità che non esca il "6" è:

$$p=\left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

per cui la probabilità che esca almeno un "6", vale a dire la probabilità contraria, è:

$$q=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Affinché abbia più possibilità di vincita che di perdita, questa probabilità deve essere ovviamente maggiore di 1/2, ossia deve risultare:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>\frac{1}{2}.$$

Ora, utilizzando una semplice calcolatrice scientifica, possiamo compilare la tabella 2.

n	2	3	4
$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$	0,30	0,42	0,51

TAB. 2

Da essa si desume che, effettivamente, chiedendo di poter effettuare 4 lanci, ho maggiore possibilità di vincere che di perdere.
Nel caso di n lanci di due dadi, la probabilità che non esca un "doppio 6" è:

$$p=\left(\frac{35}{36}\right)^n,$$

per cui la probabilità che esca almeno un "doppio 6" è:

$$q=1-\left(\frac{35}{36}\right)^n.$$

Come prima, affinché abbia più possibilità di vincere che di perdere, deve essere:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n>\frac{1}{2}.$$

Di nuovo, basta compilare un'idonea tabella (Tab. 3).

n	23	24	25
$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$	0,476	0,491	0,505

TAB. 3

Perciò, per avere più possibilità di vincita che di perdita, devo chiedere di poter eseguire 25 lanci: 24 non mi danno la garanzia.

15.2.3 Altri pensatori contribuirono a sviluppare la materia. Tra loro, in particolare:

---

[3] È verosimile che il Cavaliere di Méré avesse fatto molte prove e avesse notato quella che egli riteneva un'anomalia.

- l'olandese **Christian Huygens** (1629-1695) con l'opera *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (*Sui ragionamenti nel gioco dei dadi*), pubblicata nel 1657 e ispirata pare dalla corrispondenza tra Pascal e Fermat; si tratta in realtà del primo trattato di probabilità della storia e costituì un vero e proprio punto di riferimento per gli studiosi che si occuparono dell'argomento nei successivi 50 anni;
- lo svizzero **Jakob Bernoulli** (1654-1705) con l'*Ars Conjectandi* (L'*Arte della congettura*);
- il francese **Abraham De Moivre** (1667-1754), del quale segnaliamo due opere, una scritta in latino – *De Mensura Sortis* – ed una in inglese – *The Doctrine of Changes*.

A dire il vero, in tutti i lavori precedenti al *The Doctrine of Changes* di De Moivre, il concetto esplicito di "probabilità" è di fatto inesistente. Anche se non manca, come in Bernoulli, un'idea del termine "probabilità": «*La probabilità è un grado di certezza e da questa differisce come il tutto dalla parte*». E lo stesso termine "probabilità" compare già nel 1663 nel titolo di un'opera dello studioso spagnolo **Juan Caramuel y Lobkowitz** (1606-1682) dal titolo per l'appunto: *Apologema pro antiquissima et universalissima doctrina de probabilitate*, inserita a quel tempo nell'indice dei libri proibiti.
Ma il concetto vero e proprio di "probabilità" fa capolino per la prima volta nel 1718 nell'opera *The Doctrine of Changes* di De Moivre.
«L'autore parla esplicitamente di *probability of an event*, come di quella frazione il cui numeratore è il numero dei casi coi quali l'evento può verificarsi e il denominatore è la somma di tale numero col numero dei casi con i quali può non verificarsi» [(4)].
Si sottintende che i casi si verificano con "pari facilità". È già la definizione classica.

15.2.4 Chi legge queste note potrebbe legittimamente domandarsi come facessero gli studiosi, prima di De Moivre, a risolvere questioni di probabilità senza utilizzare il concetto di probabilità. Il fatto è che dominava a quell'epoca il concetto di *speranza matematica* (o *expectatio*, come la chiamò Huygens, che la introdusse) in una maniera che non coinvolgeva direttamente la probabilità. Un paio di esempi per rendere l'idea, ma anche per chiarire come la "speranza matematica" non fosse la stessa cosa presso tutti gli studiosi.

- Huygens, in uno degli innumerevoli esercizi presenti nel *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, dice sostanzialmente: Se un giocatore ha p opportunità di vincere la somma a e q opportunità di vincere la somma b, essendo le opportunità equivalenti, la sua *speranza matematica* (vale a dire ciò che mediamente si aspetta di vincere) è:

$$\frac{\mathrm{pa}+\mathrm{qb}}{\mathrm{p}+\mathrm{q}}.$$

- Jakob Bernoulli, nell'*Ars Conjectandi*, afferma: Se un giocatore ha p opportunità di vincere la somma a e q possibilità di non vincerla, la sua speranza matematica è:

$$\frac{\mathrm{pa}}{\mathrm{p}+\mathrm{q}}.$$

Le cose cambiarono dopo De Moivre e soprattutto con l'opera di Laplace. Ma di questo avremo modo di occuparci più avanti, ma molto più in là [(5)].

---

[4] Cfr.: Pascal Dupont, *Primo incontro con la probabilità*, Torino, S.E.I., 1985
[5] Cfr.: Unità 79 – Distribuzioni di probabilità.

15.2.5 Nei lavori di Pascal e Fermat, ma soprattutto in quelli di Huygens, Bernoulli e De Moivre ci sono le basi del calcolo delle probabilità, ma chi di questo fece una teoria completa e rigorosa fu il marchese **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827). I suoi risultati, compresa quella che consideriamo la definizione classica della probabilità, sono contenute in due opere diventate veri e propri classici: la *Théorie analytique des probabilités* del 1812 ed *Essai philosophique des probabilités* pubblicato nel 1814.

P. S. de Laplace (1749–1827)

Ricordiamo la ***definizione di probabilità nella concezione classica***:

La ***probabilità*** di un evento casuale è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli ad esso ed il numero dei casi possibili, supposti *equiprobabili*.

In seguito, il calcolo delle probabilità, nato per frivole faccende di gioco d'azzardo, non solo fece registrare una notevole evoluzione per opera di valenti matematici, tra cui ci piace citare il tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e il francese Simeon Denis Poisson (1781-1840), ma finì per diventare uno degli strumenti applicativi più importanti in molti campi, come l'economia, le scienze sperimentali, le assicurazioni, la medicina, eccetera.

15.3 CONCEZIONE FREQUENTISTA

15.3.1 La concezione classica della probabilità è, come noto, inficiata da un circolo vizioso, che, come si sa, è superabile in molte situazioni in cui, soprattutto per ragioni di simmetria, è possibile ritenere *a priori* con ragionevolezza che gli eventi elementari siano equiprobabili.

Purtroppo le situazioni in cui si può applicare la definizione suddetta, pur essendo numerose ed interessanti, sono in ogni caso poche, specialmente rispetto a quelle che hanno una rilevanza in problemi concreti e reali, attinenti soprattutto all'economia, alle scienze sperimentali, alla vita sociale in genere.

In problemi di questo tipo non è possibile valutare preventivamente se gli eventi siano o no equiprobabili. Ne abbiamo visto qualche esempio nell'unità 13, paragrafo n. 13.3.1.

Problemi siffatti non si possono risolvere ricorrendo alla definizione classica di probabilità. Di fatto, in queste circostanze si ricorre alla cosiddetta ***definizione frequentista*** (o ***statistica***):

La ***probabilità*** di un evento casuale è il rapporto fra il numero di volte in cui l'evento si verifica ed il numero di prove effettuate tutte nelle medesime condizioni, cioè è la frequenza dell'evento.

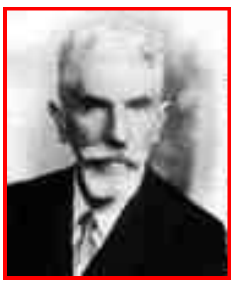
15.3.2 La concezione frequentista della probabilità nasce, almeno a livello implicito, quasi certamente anch'essa con i giocatori d'azzardo, che avevano modo di riflettere sugli esiti di molte prove. In effetti, ripensando al Cavaliere di Méré, possiamo ipotizzare che solo l'osservazione di un gran numero di lanci poteva portarlo a fare le congetture che faceva. Ma questa concezione comparve esplicitamente solo nel XVII secolo con lo sviluppo della statistica: sono, infatti, i registri delle natalità, delle mortalità e dei matrimoni nelle grosse città che consentono quelle osservazioni concrete che stanno alla base della concezione frequentista della probabilità. Il ruolo delle assicurazioni fece poi da moltiplicatore d'interesse per la questione.

Nel carteggio tra Pascal e Fermat non c'è alcun riferimento alla "frequenza" degli eventi. Questo concetto compare in Jakob Bernoulli, precisamente nelle sue *Annotationes* al *De Ratiociniis* di Huygens.

La concezione frequentista si afferma definitivamente nell'Ottocento. I maggiori contributi al riguardo vennero dai francesi **Antoin Augustin Cournot** (1801-1877) e **August Bravais** (1811-1863), dall'inglese **Karl Pearson** (1857-1936) e dall'italiano **Guido Castelnuovo** (1865-1952). Ma chi trovò una sistemazione teorica della concezione frequentista della probabilità fu lo scienziato austriaco **Richard von Mises** (1883-1953).

A questi studiosi sono pure dovuti importanti risultati in campo prettamente statistico.

Alla definizione frequentista di probabilità si può ricorrere, come noto, sia quando si conosce la probabilità classica di un evento sia quando questa non si conosce. A condizione che si riesca ad eseguire l'esperimento per un numero adeguato di volte.



G. Castelnuovo (1865–1952)

B. de Finetti (1906–1985)

15.4 CONCEZIONE SOGGETTIVA

15.4.1 Non c'è dubbio che la definizione frequentista della probabilità si possa applicare ad un numero di situazioni maggiore rispetto al numero delle situazioni in cui si può applicare la definizione classica, pur con dei limiti, derivanti essenzialmente dal fatto che le varie frequenze sono solitamente diverse e solo in un numero molto grande di prove tendono a stabilizzarsi. Ed in più di una situazione non è né comodo né economico fare molte prove. Ad ogni modo, pur senza considerare queste difficoltà, ci sono delle situazioni in cui neanche la definizione frequentista va bene. Ne abbiamo visto alcuni esempi nell'unità 13, paragrafo n. 13.4.1.

In tali situazioni la ripetitività delle prove ha poco significato e pertanto neanche la concezione frequentista della probabilità funziona. Meno che mai funziona la concezione classica.

Sappiamo che situazioni come queste si risolvono ricorrendo alla ***definizione soggettiva*** di probabilità:

La ***probabilità***, che un soggetto attribuisce ad un evento casuale, è il numero **p=s'/S**, dove s' è la somma che egli stima equo scommettere a condizione di riscuotere la somma S se l'evento si verifica, essendo S la somma complessiva della puntata s' e del guadagno ottenuto S–s'.

15.4.2 La teoria della probabilità secondo la concezione soggettivista si è sviluppata tutta nel secolo scorso ed ha avuto come fondatore e massimo esponente il matematico italiano **Bruno de Finetti** (1906-1985). Egli incominciò ad occuparsene giovanissimo fin dalla fine degli anni ’20 e ne gettò le basi fin dal 1937 con un articolo in francese dal titolo *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*. La sua opera *Teoria delle Probabilità*, del 1970, costituisce il principale punto di riferimento per i probabilisti, soggettivisti e no.

La teoria della probabilità soggettiva fu sviluppata poi anche dallo statunitense **Leonard J. Savage** (1917-1971) nel suo lavoro dal titolo *Foundations of Statistics* del 1954, nel quale egli attribuisce esplicitamente a de Finetti il concetto di probabilità soggettiva. A lui va il merito di aver diffuso quegli aspetti della teoria di de Finetti riguardanti il suo impiego nei problemi di statistica.

15.4.3 Ci sarebbero, dunque, almeno tre definizioni di probabilità: classica, frequentista, soggettiva. Francamente sono un po’ troppe.

Bisogna dire che, dal punto di vista dei “probabilisti soggettivisti”, l’unica definizione accettabile è quella soggettiva, che effettivamente è la più generale, mentre le altre sono, a loro dire, valutazioni della probabilità che si collocano come casi particolari della valutazione soggettiva, applicabili peraltro in situazioni eccezionali. Questa interpretazione trova molti proseliti, specialmente in Italia, e tutti provenienti in linea diretta o indiretta dalla scuola di de Finetti.

Tra coloro che si mostrano veramente critici nei confronti della concezione soggettiva della probabilità, i più si trovano fuori dell’Italia e particolarmente in Russia [(6)], ma non solo.

Ultimamente, quella che sembra affermarsi è la teoria assiomatica, sia in uno studio elementare della probabilità sia soprattutto in uno studio avanzato, benché proprio come critica alla teoria assiomatica de Finetti mostrò che le basi della probabilità possono essere altre.

A questa teoria, che vede il suo fondatore nel matematico russo **Andrei Nikolaevič Kolmogorov** (1903-1987), faremo un breve cenno in una unità successiva, ma molto più in là [(7)].

NOTA. Per le caratteristiche dell’unità riteniamo che non siano necessari esercizi di verifica. È sufficiente la consueta “breve sintesi per domande e risposte”.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. In cosa consiste la concezione classica della probabilità?
2. In cosa consiste la concezione frequentista della probabilità?
3. In cosa consiste la concezione soggettiva della probabilità?
4. Come si enuncia il problema della divisione delle parti?
5. Stabilisci se è corretto affermare che nel lancio di 3 dadi, con le facce numerate da “1” a “6”, la somma “9” si ottiene nei seguenti 6 modi:

$$1+2+6,\ \ 1+3+5,\ \ 1+4+4,\ \ 2+2+5,\ \ 2+3+4,\ \ 3+3+3$$

[6] Si veda al riguardo: Gnedenko B. V., *Teoria della probabilità*, Roma, Editori Riuniti, 1986.
[7] Cfr.: Unità 87 – Il metodo assiomatico, N° 87.4.

e la somma "10" nei seguenti 6 modi:

$$1+3+6,\ \ 1+4+5,\ \ 2+2+6,\ \ 2+3+5,\ \ 2+4+4,\ \ 3+3+4.$$

6. Si lanciano due dadi con le facce numerate da "1" a "6", aventi tutte la stessa probabilità di uscire. Qual è il numero minimo di lanci che bisogna effettuare affinché, puntando sull'uscita di un "doppio 4", si abbia una probabilità di vincere di almeno il 60%?

RISPOSTE.

1. La concezione classica della probabilità consiste nell'assumere come definizione di probabilità la seguente: La ***probabilità*** di un evento casuale è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli ad esso ed il numero dei casi possibili, supposti *equiprobabili*.
2. La concezione frequentista della probabilità consiste nell'assumere come definizione di probabilità la seguente: La ***probabilità*** di un evento casuale è il rapporto fra il numero di volte in cui l'evento si verifica ed il numero di prove effettuate tutte nelle medesime condizioni; cioè è la frequenza dell'evento.
3. La concezione soggettiva della probabilità consiste nell'assumere come definizione di probabilità la seguente: La ***probabilità*** che un soggetto attribuisce ad un evento casuale è il numero $p=s'/s$, dove s' è la somma che egli stima equo scommettere a condizione di riscuotere la somma s se l'evento si verifica, essendo s la somma complessiva della puntata s' e del guadagno ottenuto.
4. Una enunciazione del problema della divisione delle parti è la seguente: «Due persone – A e B – decidono di giocare alcune partite. In ogni partita vince l'uno o l'altro dei due giocatori, i quali hanno la stessa probabilità di vincita. Vince la posta chi arriva per primo a vincere n partite. Ma dopo m partite (con m<n), quando A ne ha vinte p e B ne ha vinte q (p+q=m), i giocatori decidono di interrompere il gioco. Come deve essere divisa la posta?»
5. Non è corretto. La somma "9" si ottiene, infatti, in 25 modi e la somma "10" in 27 modi.
6. La probabilità $p(n)$ che, in n lanci dei due dadi, esca almeno una volta il "doppio 4" è:

$$p(n) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n .$$

Deve risultare ovviamente:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{60}{100}.$$

e ciò accade per $n \geq 33$.