Prerequisiti:

- Conoscere i criteri di congruenza dei triangoli.
- Conoscere le proprietà e le condizioni di parallelismo tra rette.
- Aver acquisito il concetto di rette perpendicolari.
- Saper utilizzare le proprietà dei parallelogrammi.
- Avere acquisito il concetto di funzione.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *costruire modelli di figure piane e di loro trasformate in base ad una isometria utilizzando sia materiale povero sia un apposito software matematico*
- *individuare isometrie particolari nel mondo reale*
- *definire una trasformazione geometrica del piano*
- *definire un'isometria*
- *riconoscere e dimostrare quali proprietà si conservano in una isometria generica, in una traslazione, in una rotazione, in una simmetria assiale*
- *produrre congetture e dimostrare proprietà di figure geometriche utilizzando le proprietà delle isometrie*
- *analizzare e risolvere semplici problemi utilizzando le proprietà delle isometrie*

Isometrie nel piano

Unità 16

16.1 TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE NEL PIANO

16.1.1 Prendi un cartoncino (per esempio un cartoncino triangolare ABC) e fallo scorrere nel piano che lo contiene fino a portarlo nella posizione A'B'C' (Fig. 1).

Immagina che assieme ai punti del cartoncino scorrano allo stesso modo tutti i punti del piano: hai ottenuto che – come il punto A viene trasformato in A', il punto B in B', il punto C in C' – così pure il generico punto P del piano risulti trasformato in P'.

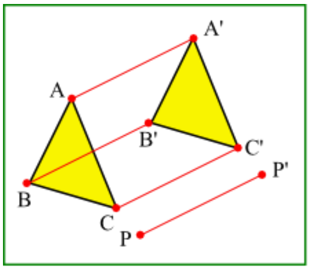

FIG. 1

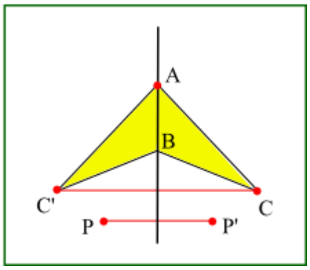

FIG. 2

Un'altra situazione.

Prendi ancora un cartoncino (per esempio un cartoncino triangolare ABC) e ribaltalo attorno alla retta del suo lato AB fino a disporlo nella posizione ABC' complanare (cioè giacente nello stesso piano) a quella iniziale (Fig. 2).

Come prima, immagina che assieme ai punti del cartoncino vengano ribaltati tutti i punti del suo piano: hai ottenuto che – come C viene trasformato in C' – allo stesso modo il generico punto P del piano risulti trasformato in P'.

16.1.2 In ciascuna delle due situazioni illustrate sopra, il piano risulta trasformato in se stesso in modo che ad ogni suo punto P sia associato un punto P' del piano medesimo. Si dice che si è ottenuta una "trasformazione geometrica" del piano (o nel piano). In termini più rigorosi:

Si definisce **TRASFORMAZIONE GEOMETRICA** del (o nel) piano ogni applicazione del piano in sé, vale a dire ogni funzione t che a ciascun punto P del piano associ uno ed un sol punto P' del piano stesso.

Si scrive:

$$\mathbf{t}:\ \mathbf{P} \to \mathbf{P}' \quad \text{o anche:} \quad \mathbf{P}' = \mathbf{t}\,(\mathbf{P})$$

e si legge rispettivamente: «la trasformazione t che al punto P associa P'» e «P' è uguale a t di P».

Fra le trasformazioni geometriche nel piano α si annovera la trasformazione **i** per la quale si ha:

$$P = \mathbf{i}\,(P),\ \ \forall P \in \alpha\ .$$

Vale a dire la trasformazione che ad ogni punto P del piano associa il punto stesso, per cui in realtà essa lascia tutto inalterato: si chiama **trasformazione identica** (o **identità**).

Ma di trasformazioni geometriche ce ne sono altre. Per il momento ci limitiamo a fornire un paio di esempi.

- Fissato un punto O del piano α, ad ogni punto $P\in\alpha$ è possibile associare il punto P' simmetrico di P rispetto ad O (Fig. 3). Questa trasformazione si chiama **simmetria centrale** di centro O.
- Fissata una retta r del piano α, ad ogni punto $P\in\alpha$ è possibile associare il punto P' tale che:
  - se $P\in r$ allora P'=P, cioè P è trasformato in se stesso (per questo si dice ***punto unito***);
  - se $P\notin r$ allora la retta PP' e la retta r sono perpendicolari e, detto H il loro punto intersezione, ri-

sulta PH≅P'H (Fig. 4).

Questa trasformazione si chiama **simmetria assiale** di *asse* r ed i due punti corrispondenti P, P' si dicono l'uno simmetrico dell'altro rispetto ad r.

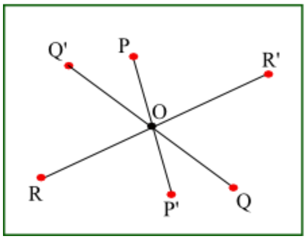

FIG. 3

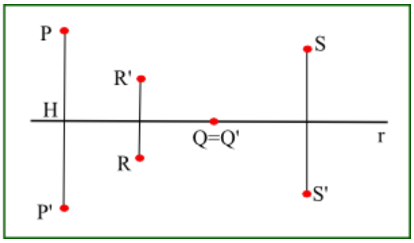

FIG. 4

Conosci figure geometriche, ma anche oggetti reali, che presentano assi di simmetria? Prova a farne un elenco.

In realtà, la trasformazione rappresentata in figura 2 è una simmetria assiale. Quella rappresentata, invece, in figura 1 è una traslazione: ce ne occuperemo fra breve.

16.2 ISOMETRIE

16.2.1 Tra le trasformazioni geometriche ci occupiamo qui delle cosiddette "isometrie", cioè di quelle trasformazioni geometriche che lasciano invariate le distanze dei punti. Si ha precisamente la seguente definizione:

♦ Una **ISOMETRIA** (o **TRASFORMAZIONE ISOMETRICA**) è un'applicazione biiettiva [1] μ del piano in sé, tale che, detti A e B due punti qualsiasi del piano e chiamati A' e B' i loro trasformati secondo la μ – cioè A'=μ(A) e B'=μ(B) – risulti: dist(A',B')=dist(A,B).

In questo paragrafo e nei successivi ci proponiamo di studiare alcune particolari isometrie e di stabilire se ci sono delle proprietà delle figure geometriche che non cambiano quando le figure subiscono una trasformazione isometrica.

Prima però ti proponiamo alcuni quesiti.

1. Spiega quale differenza c'è fra trasformazione geometrica e isometria.
2. Stabilisci il valore di verità delle due proposizioni seguenti:
   - Ogni trasformazione geometrica è un'isometria.
   - Ogni isometria è una trasformazione geometrica.
3. Considera la seguente trasformazione geometrica nel piano α:
   Fissato un punto O, ad ogni punto P è associato il punto P' tale che i punti O, P, P' siano allineati (con O situato tra P e P') e si abbia: $\overline{OP'}=2\,\overline{OP}$. Spiega perché essa non è un'isometria.

Passiamo adesso ad evidenziare tre importanti proprietà delle isometrie.

♦ TEOREMA 1. **Ogni isometria trasforma ogni retta in una retta.**

DIMOSTRAZIONE. Siano r una retta qualunque e μ un'isometria qualunque. Vogliamo dimostrare che μ trasforma r in una retta. A questo riguardo siano A, B due qualsiasi punti distinti di r ed A', B' i loro tra-

[1] Ricordiamo che una **applicazione biiettiva** (o **funzione biiettiva**) di un insieme A in un insieme B è una funzione che, non solo ad ogni elemento x di A associa uno ed un solo elemento y di B, ma ad ogni elemento y di B associa uno ed un solo elemento di A, precisamente quell'elemento x di cui y era l'immagine.

sformati nella μ; ossia: A'=μ(A) e B'=μ(B). Ci proponiamo di far vedere che la trasformata di r nella μ è proprio la retta A'B', che per comodità chiamiamo r'.
Per questo incominciamo a mostrare che ad ogni punto $C \in r$ la μ associa $C' \in r'$.
Se C coincide con A o con B la conclusione è banale.
Supponiamo allora che C sia compreso fra A e B (Fig. 5 – Il ragionamento si conduce allo stesso modo se C precede A o se C segue B). Allora, per una nota relazione, risulta:

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) .$$

D'altro canto, posto C'=μ(C), per definizione di isometria si ha:

$$d(A',B')=d(A,B),\ \ d(A',C')=d(A,C),\ \ d(C',B')=d(C,B).$$

Dunque:

$$d(A',B') = d(A',C') + d(C',B') .$$

Ne consegue che, per la medesima relazione su accennata, i tre punti A', B', C' sono allineati; per cui $C' \in r'$. Possiamo allora concludere che l'isometria μ trasforma la retta r nella retta r'. In simboli: μ(r)=r'.

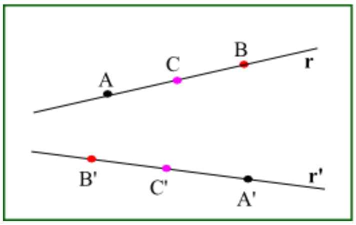

FIG. 5

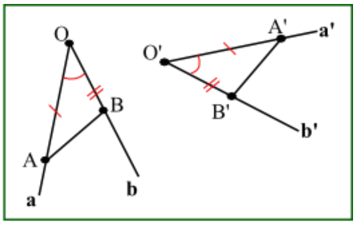

FIG. 6

♦ TEOREMA 2. **Ogni isometria trasforma ogni angolo in un angolo congruente.**

DIMOSTRAZIONE. Considerato un angolo $a\widehat{O}b$ (Fig. 6), siano A un punto della semiretta Oa (cioè della semiretta a di origine O) e B un punto della semiretta Ob, entrambi distinti da O. Una data isometria μ trasforma questi punti O, A, B nei punti O', A', B' e quindi la semiretta Oa nella semiretta O'a' di origine O' passante per A', la semiretta Ob nella semiretta O'b' di origine O' passante per B' e, in definitiva, l'angolo $a\widehat{O}b$ nell'angolo $a'\widehat{O'}b'$.
Vogliamo dimostrare che questi due angoli sono congruenti.
Intanto, per definizione di isometria, risulta: $O'A' \cong OA$, $O'B' \cong OB$, $A'B' \cong AB$.
Per cui, i due triangoli A'B'O' ed ABO sono congruenti per il terzo criterio di congruenza. Ne discende che gli angoli in O ed in O' sono congruenti. Ciò che volevamo dimostrare.

Prima di occuparci del prossimo teorema è opportuno richiamare una precisazione a proposito delle rette parallele ricordando, in particolare, che:
- due rette si dicono ***parallele*** se coincidono o se non hanno punti comuni;
- due rette che non hanno punti comuni si dicono ***strettamente parallele*** (o ***parallele in senso stretto***).

♦ TEOREMA 3. **Ogni isometria trasforma rette strettamente parallele in rette strettamente parallele.**

DIMOSTRAZIONE. Dette a, b due rette parallele in senso stretto (e quindi non coincidenti), sappiamo intanto che una generica isometria μ le trasforma in due rette a', b'. Ragionando per assurdo, supponiamo che queste due rette a', b' abbiano in comune un punto P' e chiamiamo P il punto che ha per

corrispondente P’ nell’isometria μ. Siccome P’ appartiene sia alla retta a’ sia alla b’, allora il punto P deve appartenere alle rette che hanno per corrispondenti, nell’isometria μ, le rette a e b. Sicché tali rette a, b non sarebbero strettamente parallele. Contro l’ipotesi che lo siano.
Se ne desume che le rette a’, b’ non hanno punti comuni. Sono appunto parallele in senso stretto.

NOTA. Nelle righe precedenti abbiamo spiegato che ogni isometria trasforma: - ogni retta in una retta, - ogni angolo in un angolo congruente, - rette parallele in rette parallele.
Queste proprietà si possono esprimere anche dicendo che in ogni isometria: - le rette sono *invarianti*, - gli angoli sono *invarianti*, - il parallelismo delle rette è *invariante*.
Altri invarianti avremo modo di incontrare nel prosieguo degli studi.
La ***teoria degli invarianti***, con risultati che vanno ben al di là delle poche cose che abbiamo detto sopra, ebbe come suo primo studioso il matematico tedesco **Paul Gordan** (1837-1912), professore nell’università di Erlangen, una cittadina situata a circa 20 km a Nord di Norimberga. Egli la sviluppò con metodo tipico dell’algebra. Avremo occasione in futuro di mostrare qualcosa al riguardo [(2)].
Ma chi portò la teoria a livelli eccelsi, guadagnando, anche se non solo per questo, l’ammirazione dell’universo matematico dell’epoca, fu una sua allieva, **Emmy Noether** (1882-1935), un vero genio matematico, la prima donna ad essere invitata come conferenziera ad un Congresso di Matematici, il Congresso Internazionale tenutosi a Zurigo nel 1932.
A Emmy Noether è riconosciuta pure la primogenitura nella creazione dell’algebra astratta [(3)].
Il matematico sovietico Pavel Aleksandrov (1896-1982), amico e collaboratore di Emmy all’università di Gottinga, scrisse di lei che fu “il più grande matematico donna di tutti i tempi”. E non fu il solo ad esprimere giudizi così lusinghieri su di lei.

16.2.2 A questo punto, lasciando provvisoriamente le isometrie, è necessaria un’altra precisazione.
Fin qui, trattando degli angoli, non abbiamo distinto tra primo e secondo lato, giacché gli angoli non sono stati considerati “orientati”. Siccome però c’interessa anche questo tipo di angoli, è bene che ce ne occupiamo una volta per tutte.
Avvertiamo che ci limiteremo ad una esposizione intuitiva dell’argomento, anche se sarebbe possibile una esposizione assolutamente rigorosa, che però qui non riteniamo opportuno sviluppare per non appesantire la trattazione.
Assegnate due semirette r, s aventi la stessa origine, diciamo **angolo orientato** (r,s) la parte di piano spazzata dalla semiretta r quando ruota attorno alla sua origine per sovrapporsi alla semiretta s (si pensi alle lancette di un orologio).
La definizione in realtà non individua un solo angolo, potendosi intendere per angolo orientato (r,s) l’angolo descritto da r quando, per sovrapporsi ad s, ruota in senso antiorario o in senso orario (Fig. 7).
Ora, se fissiamo convenzionalmente un verso positivo di rotazione (per esempio quello *antiorario*), dei due angoli precedenti il primo – quello descritto in senso antiorario – si dice *positivo*, l’altro si dice *negativo*.

[2] Cfr.: Unità 46 – Trasformazioni nel piano: rappresentazione analitica.
[3] Si tratta di un argomento di cui non è previsto lo studio nella scuola secondaria, ma solo nel corso di laurea in Matematica. Noi abbiamo voluto ugualmente farvi un cenno, esclusivamente a beneficio di chi ne fosse interessato. Abbiamo inserito il nostro contributo in questo stesso sito, nella cartella “Integrazione 4”, file “Fuori programma”, cap. 3 – Operazioni e strutture algebriche.

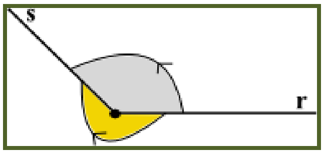

FIG. 7

Indichiamo l'ampiezza di un angolo orientato (r,s) con la stessa scrittura **(r,s);** oppure, ma solo se c'è qualche possibilità di equivoco, con la scrittura **mis(r,s)**; oppure, ancora, se il primo lato dell'angolo è la semiretta di origine O passante per A ed il secondo lato è la semiretta di origine O passante per B, con una delle scritture: $\mathbf{A\hat{O}B}$ oppure $\mathbf{mis}\left(\mathbf{A\hat{O}B}\right)$. Tale ampiezza va naturalmente considerata in senso relativo. Essa, in pratica, è positiva o negativa a seconda che (r,s) sia rispettivamente positivo o negativo. Ovviamente se (r,s) è l'angolo nullo, si ha: mis(r,s)=0.

Osserviamo adesso che, fissato il primo lato di un angolo orientato e fissato il verso positivo di rotazione (***che, da qui in avanti, supporremo in via definitiva essere quello*** **antiorario**), per ogni ampiezza α resta univocamente determinata la posizione del secondo lato dell'angolo.

A questo riguardo ti proponiamo per esercizio di fissare una semiretta Ox come primo lato degli angoli e, ovviamente con il supporto di un goniometro, disegnare il secondo lato di ciascuno degli angoli di ampiezze: $30°,\ -45°,\ 90°,\ -90°,\ 150°,\ -160°$.

16.2.3 Dopo quest'inciso, riprendiamo le isometrie e supponiamo che una data isometria trasformi l'angolo orientato (b,a) nell'angolo orientato (b',a'). Ebbene, può capitare che questi due angoli, congruenti, abbiano lo stesso verso (Fig. 8) oppure verso contrario (Fig. 9).

Nel primo caso l'isometria si dice ***diretta***, nel secondo si dice ***speculare*** [4].

Facciamo notare che per subire un'isometria speculare, una figura deve uscire dal piano e rientrarvi. Finché rimane nel piano non può subire che un'isometria diretta. Ti renderai meglio conto di ciò fra breve, quando tratteremo le simmetrie assiali.

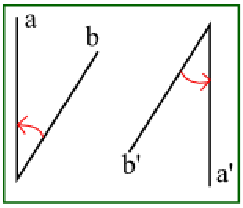

FIG. 8

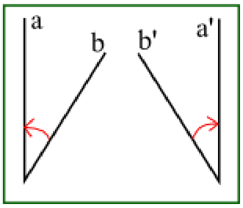

FIG. 9

Due figure che si corrispondono in un'isometria si dicono ***isometriche***.

Più precisamente si dicono ***direttamente isometriche*** se si corrispondono in un'isometria diretta, ***specularmente isometriche*** se si corrispondono in un'isometria speculare.

Per riepilogare:

1. Come si definisce un'isometria?
2. Quali proprietà si conservano in una trasformazione isometrica?
3. Un'isometria quando si dire diretta? Quando speculare?

[4] Altri autori preferiscono il termine *inversa* invece di *speculare*. Noi preferiamo il termine *speculare* giacché l'altro termine è riservato alla situazione particolare in cui la trasformazione è una funzione invertibile.

16.3 SIMMETRIE CENTRALI E SIMMETRIE ASSIALI

16.3.1 Abbiamo già avuto occasione di definire sia la "simmetria centrale" sia la "simmetria assiale" come particolari trasformazioni geometriche.

Allo scopo di farti familiarizzare con tali trasformazioni, ti proponiamo alcune costruzioni.

- Disegna un triangolo ABC, isoscele sulla base BC. Disegna poi:
  - il triangolo A'B'C' trasformato di ABC nella simmetria centrale di centro A;
  - il triangolo A"B"C" trasformato di ABC nella simmetria centrale di centro B.
- Disegna un rombo ABCD. Disegna poi:
  - il rombo A'B'C'D' trasformato di ABCD nella simmetria assiale di asse AB;
  - il rombo A"B"C"D" trasformato di ABCD nella simmetria assiale di asse BC.

♦ TEOREMA 1. **Ogni simmetria centrale è un'isometria diretta.**

DIMOSTRAZIONE. Bisogna dimostrare anzitutto che la simmetria centrale è un'applicazione biiettiva del piano in sé. Detta s_O la simmetria centrale di centro O e posto $P'=s_O(P)$, al punto P' risulta evidentemente associato il punto P nella trasformazione s_O, cioè $P=s_O(P')$. La simmetria centrale di centro O ammette perciò l'inversa. Di conseguenza l'applicazione s_O è biiettiva.

Siano ora AB ed A'B' due segmenti che si corrispondono nella simmetria centrale di centro O (Fig. 10). Questo, per definizione di simmetria centrale, significa che: $OA \cong OA'$ ed $OB \cong OB'$. Inoltre: $A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$ perché angoli opposti al vertice. Dunque i due triangoli AOB ed A'OB' risultano congruenti per il primo criterio di congruenza. Di conseguenza: $AB \cong A'B'$.

Per cui la simmetria centrale è effettivamente un'isometria.

D'altronde i due angoli orientati $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$, corrispondenti nella simmetria centrale e perciò congruenti, hanno lo stesso verso. E questo vale per due qualunque angoli corrispondenti nella simmetria centrale. Dunque l'isometria è diretta.

Ti proponiamo adesso di individuare se le seguenti figure hanno un centro di simmetria:

- triangolo equilatero; - quadrato; - rettangolo; - trapezio isoscele.

♦ DEFINIZIONE.

Una trasformazione che ad ogni punto P associa P' e, nello stesso tempo, a P' associa P, si dice **involutoria**.

La simmetria centrale è, evidentemente, una trasformazione involutoria.

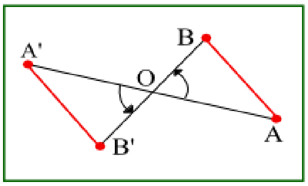

FIG. 10

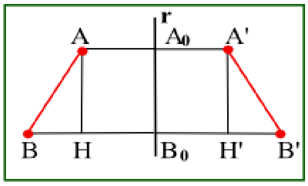

FIG. 11

♦ TEOREMA 2. **Ogni simmetria assiale è un'isometria speculare.**

DIMOSTRAZIONE. Come nella dimostrazione precedente, bisogna far vedere dapprima che l'applicazione è biiettiva. Detta s_r la simmetria assiale di asse r e posto $P'=s_r(P)$, al punto P' la s_r associa evidentemente P (anche questa trasformazione è *involutoria*). La simmetria assiale s_r ammette perciò l'inversa. Di conseguenza risulta essere un'applicazione biiettiva.

Siano ora AB ed A'B' due segmenti corrispondenti in una simmetria assiale di asse r.
Sorvoliamo sull'ipotesi banale che $A,B \in r$, nel qual caso A'=A e B'=B, per cui AB≅A'B'.
Lasciamo a te l'analisi del caso in cui uno solo dei punti A, B appartenga all'asse di simmetria.
Soffermiamoci sull'ipotesi che né A né B appartengano ad r (Fig. 11).
Chiamati A_0 e B_0 i punti in cui le rette AA' e BB' rispettivamente secano l'asse r, risulta, per definizione di simmetria assiale: $AA_0 \cong A_0A'$ e $BB_0 \cong B_0B'$.
Ora, detti H ed H' i piedi delle perpendicolari condotte rispettivamente da A ed A' alla retta BB', si giustifica facilmente che: AH≅A'H' e BH≅H'B'. Di modo che i due triangoli AHB ed A'H'B', rettangoli rispettivamente in H ed H', risultano congruenti per il 1° criterio di congruenza. Di conseguenza: AB≅A'B'.
Per cui la simmetria assiale è effettivamente un'isometria.
D'altronde i due angoli orientati $B\widehat{A}H$ e $B'\widehat{A'}H'$, corrispondenti nella simmetria assiale e perciò congruenti, hanno versi opposti. E ciò vale per due qualunque angoli corrispondenti nella simmetria assiale, che è per questo un'isometria è speculare.
Una simmetria assiale rispetto ad una retta r si chiama pure **ribaltamento** intorno ad r (o anche **riflessione** (5) rispetto ad r). La figura che la subisce è costretta ad uscire dal piano e rientrarvi.

16.3.2 Dunque le simmetrie centrali e le simmetrie assiali sono particolari isometrie. Questo significa che le proprietà, che rimangono invarianti rispetto ad una generica isometria, si conservano sia in una simmetria centrale sia in una simmetria assiale. Pertanto:
Ogni simmetria centrale e ogni simmetria assiale trasformano: segmenti in segmenti congruenti, angoli in angoli congruenti, rette in rette, rette parallele in rette parallele.
Ma queste due trasformazioni, proprio perché isometrie particolari, conservano proprietà particolari.
Andiamo ad occuparcene.

♦ TEOREMA 1. **Ogni simmetria centrale trasforma ogni retta in una retta parallela**.
DIMOSTRAZIONE. Sia s la simmetria centrale di centro O e sia a una qualunque retta del piano. Intanto s(a), vale a dire la corrispondente della retta a nella simmetria s, è una retta: chiamiamola a'.
Se $O \in a$, è evidente che a viene trasformata in se stessa (si dice che è *retta unita*), per cui a'=a. Dunque a' è parallela ad a.
Supponiamo $O \notin a$. Questo implica intanto che a'≠a. Per cui: o a' non ha punti comuni con a oppure a' ha in comune con a un solo punto P.
Nella seconda ipotesi, posto P'=s(P):

$$P \in a \rightarrow P' \in a' \quad \text{e} \quad P' \in a' \rightarrow P \in a.$$

In altri termini, siccome P' non coincide con P, le due rette distinte a ed a' dovrebbero avere due punti in comune. Il che è assurdo poiché per due punti passa una ed una sola retta.
Rimane pertanto la sola ipotesi che a' non abbia punti comuni con a. Cioè a' è parallela ad a.

♦ TEOREMA 2. **Ogni simmetria assiale trasforma ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria in se stessa (è *retta unita*).**

Lasciamo la semplice dimostrazione a te, proponendoti pure alcuni esercizi.

---

[5] Alcuni autori chiamano "riflessione" una qualsiasi isometria speculare.

1. Elenca alcune proprietà geometriche che si conservano in un'isometria. Queste proprietà si conservano in una simmetria centrale? Si conservano in una simmetria assiale? Le proprietà che si conservano in una simmetria centrale si conservano in una generica isometria?
2. Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni:
   - Ogni isometria trasforma due qualsiasi rette parallele in due rette parallele.
   - Ogni isometria trasforma due qualsiasi rette perpendicolari in due rette perpendicolari.
   - Ogni isometria trasforma una retta qualsiasi in una retta parallela ad essa.
   - Ogni simmetria centrale trasforma una qualsiasi retta passante per il centro di simmetria in se stessa.
   - Ogni simmetria centrale trasforma un triangolo qualunque in un triangolo con i lati paralleli al primo.
   - Ogni simmetria assiale trasforma un triangolo qualunque in un triangolo con i lati paralleli al primo.
3. Spiega quando, in una trasformazione geometrica, un punto si dice "unito", una retta si dice "unita". Fornisci qualche esempio di trasformazione geometrica in cui vi sono punti uniti e qualche esempio in cui vi sono rette unite.
4. Spiega quando una trasformazione geometrica si dice "involutoria". Conosci qualche trasformazione involutoria?

16.4 ROTAZIONI

16.4.1 Fissato un punto O del piano α, è possibile associare ad ogni punto $P\in\alpha$ il punto $P'\in\alpha$ tale che:
- se $P=O$ allora $P'=P$;
- se $P\neq O$ allora $OP'\cong OP$ e $P\widehat{O}P'=\varphi$, dove φ è un'ampiezza assegnata.

In figura 12 è $\varphi = 45°$, mentre in figura 13 è $\varphi = -90°$.

Questa trasformazione del piano in sé si chiama **rotazione** di *ampiezza* φ e di *centro* O (o intorno ad O).

Si può constatare che, se $\varphi=180°$, la rotazione di centro O si identifica con la *simmetria centrale* di centro O. Per cui:

La simmetria centrale di centro O è una particolare rotazione intorno ad O.

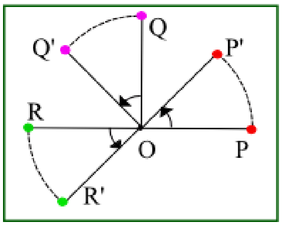

FIG. 12

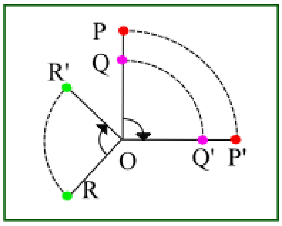

FIG. 13

♦ TEOREMA. **Ogni rotazione nel piano è un'isometria diretta.**

DIMOSTRAZIONE. Come in altre circostanze, bisogna far vedere che l'applicazione è biiettiva e poi che due segmenti che si corrispondono in una qualsiasi rotazione sono congruenti e che due angoli orientati corrispondenti hanno lo stesso verso. Detta allora r la rotazione di centro O e di ampiezza φ e posto $P'=r(P)$, è possibile associare a P' il punto P considerando la rotazione di centro O e di ampiezza $-\varphi$. La rotazione r ammette perciò l'inversa e pertanto è un'applicazione biiettiva.

Siano ora AB ed A'B' due segmenti che si corrispondono nella rotazione di centro O ed ampiezza φ (Fig. 14). Questo, per definizione di rotazione, comporta che:

$$OA \cong OA', \ OB \cong OB', \ A\widehat{O}A' = B\widehat{O}B'.$$

Di conseguenza pure $A\widehat{O}B = A'\widehat{O}B'$, poiché le due ampiezze si ottengono sottraendo (come in figura) o sommando ad ampiezze uguali la stessa ampiezza.

[Nel nostro caso specifico: $A\widehat{O}A' - B\widehat{O}A' = B\widehat{O}B' - B\widehat{O}A'$.]

Pertanto i due angoli corrispondenti $A\widehat{O}B$ ed $A'\widehat{O}B'$ sono congruenti ed hanno lo stesso verso. Inoltre i due triangoli AOB ed A'OB' risultano congruenti per il 1° criterio di congruenza. Dunque, i segmenti AB ed A'B' sono congruenti. In definitiva la rotazione considerata è un'isometria diretta. [c.v.d.]

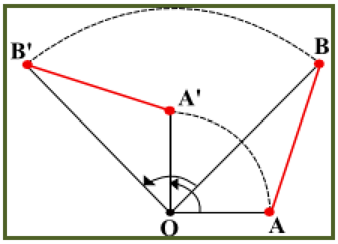

FIG. 14

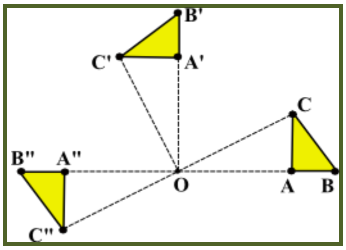

FIG. 15

16.4.2 In virtù del teorema precedente, in ogni rotazione si conservano le proprietà delle figure che rimangono invarianti in una qualsiasi isometria.

Di più, come tu stesso sei invitato a dimostrare:

Ogni rotazione di centro O trasforma ogni retta per O in una retta per O.

In figura 15 sono rappresentati il triangolo ABC, il triangolo A'B'C' trasformato di ABC mediante la rotazione di 90° intorno ad O ed il triangolo A"B"C" simmetrico di ABC rispetto ad O. Il triangolo A"B"C" è anche il trasformato di A'B'C' mediante la rotazione di 90° intorno ad O.

Alcuni esercizi per te.

1. Elenca le proprietà delle figure che si conservano in una rotazione intorno ad un dato punto.
2. Tra le figure piane che conosci, individuane qualcuna che sia trasformata in se stessa da una rotazione intorno ad un particolare punto.
3. Disegna un quadrato ABCD. Disegna poi:
   - il quadrato A'B'C'D' trasformato di ABCD nella rotazione di 30° intorno ad A;
   - il quadrato A"B"C"D" trasformato di ABCD nella rotazione di –45° intorno ad A.

16.5 VETTORI E TRASLAZIONI

16.5.1 Incominciamo con la ripetizione di un concetto che abbiamo avuto già occasione di definire altrove: il concetto di *direzione*.

Nell'insieme delle rette del piano, la relazione di parallelismo (intesa in senso largo) gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Essa è pertanto una relazione di equivalenza e per questo consente di ripartire le rette del piano in classi di equivalenza. Ognuna di tali classi di equivalenza, cioè ogni insieme di rette parallele, si chiama **direzione**.

Spiega in maniera esauriente perché in ogni isometria si conservano le direzioni.

Naturalmente, ogni retta individua una ed una sola direzione (detta la ***direzione della retta***) ma non si identifica con essa, dal momento che quella direzione può essere individuata da una qualsiasi altra retta parallela a quella considerata. Diciamo che una data retta è "un rappresentante" della direzione che individua. Questo significa che, ogni volta che si vuole rappresentare una data direzione, è sufficiente prendere, appunto come rappresentante di essa, una qualunque retta che ha quella direzione. Fermo restando che "retta" e "direzione della retta" sono due enti distinti.

Attenzione a non confondere la "direzione" di una retta col "verso" (o "orientamento") della retta. Infatti, mentre una retta individua una sola direzione, su di essa sono possibili due versi.

Per rappresentare una retta assieme ad uno dei suoi versi possibili, si usa "frecciare" la retta (Fig. 16).
Nello studio condotto fin qui, è stato indifferente considerare l'uno o l'altro dei due versi possibili sulle rette, per cui i segmenti contenuti in esse sono stati considerati non orientati. Di modo che il segmento AB e il segmento BA indicano, in sostanza, lo stesso segmento.
In quello che diremo fra breve, però, è fondamentale tenere conto anche del verso prefissato sulla retta. I segmenti che ne risultano si dicono ***segmenti orientati***.

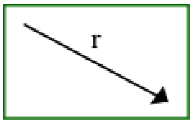

FIG. 16

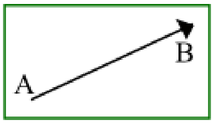

FIG. 17

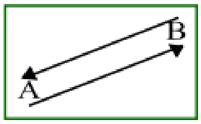

FIG. 18

Il segmento orientato AB si rappresenta come in figura 17 e si indica con la scrittura **(A,B)**, che evidenzia la coppia ordinata di punti che costituiscono il suo *primo estremo* (cioè A) e il suo *secondo estremo* (cioè B). Sicché il segmento orientato (A,B) e il segmento orientato (B,A) non rappresentano più lo stesso segmento ma due segmenti congruenti che differiscono per avere versi opposti (Fig. 18). Tali segmenti si dicono *opposti*.
Ad ogni segmento orientato (A,B) risultano dunque associati una *lunghezza* (quella del segmento non orientato AB), una *direzione* (quella della retta AB), un *verso* (quello che va da A a B).

16.5.2 Se due segmenti orientati (A,B) e (A',B') hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso, si dicono *equipollenti*; si scrive:

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) \sim (\mathbf{A}',\mathbf{B}')$$

e si legge: «il segmento orientato (A,B) è equipollente al segmento orientato (A',B')».
Si può dimostrare che la relazione di equipollenza, definita nell'insieme S dei segmenti orientati del piano, è riflessiva, simmetrica e transitiva. Per cui essa è una relazione di equivalenza. Ne discende che S può essere ripartito in classi di equivalenza. Ognuna di esse, cioè ogni insieme di segmenti orientati equipollenti, è un nuovo ente geometrico che si chiama **vettore**.
Ovviamente <u>ciascun vettore è individuato da un segmento orientato, ma non si identifica con esso</u>; anzi può essere individuato da un qualunque altro segmento orientato equipollente a quello. Diciamo che il segmento orientato è "un rappresentante" del vettore che individua. Questo significa che, tutte le volte che serve rappresentare un dato vettore, basta prendere, appunto come suo rappresentante, uno dei segmenti orientati che lo individuano. Fermo restando che "segmento orientato" e "vettore" sono due enti distinti.
Il vettore individuato dal segmento orientato (A,B) si indica con la scrittura:

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\ .$$

Più genericamente, un vettore si può indicare pure con una lettera (minuscola o maiuscola) sovrastata da una freccia; in questo modo:

$$\vec{\mathbf{u}},\ \vec{\mathbf{v}},\ \vec{\mathbf{w}},\ \vec{\mathbf{x}},\ \vec{\mathbf{y}},\ \vec{\mathbf{E}},\ \vec{\mathbf{F}},\ \vec{\mathbf{B}}$$

e anche in altri modi, di cui però non ci occupiamo.

I punti A, B si dicono, nell'ordine, *primo* e *secondo estremo* del vettore $\overrightarrow{AB}$.

La direzione, il verso e la lunghezza del segmento orientato (A,B) – che individua il vettore – si chiamano rispettivamente *direzione*, *verso* e *modulo* del vettore.

Generalmente il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$ si indica con la scrittura: $|\overrightarrow{AB}|$, ed è evidente che risulta: $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$.

Se il vettore è indicato con $\vec{u}$, il suo modulo si indica con $|\vec{u}|$ oppure, quando non si creano equivoci, semplicemente con u.

Conveniamo di considerare il *vettore nullo*, che indichiamo con $\vec{0}$, come il vettore avente modulo nullo e direzione e verso indeterminati.

16.5.3 Il vettore $\overrightarrow{AB}$ si dice *uguale* al vettore $\overrightarrow{CD}$ se e solo se (A,B)~(C,D).

In sostanza due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, tali che $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, sono lo stesso vettore.

Se, invece, i due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno direzione e modulo uguali ma versi opposti (Fig. 19) si dicono *opposti* e si scrive: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$.

Considerati un vettore $\vec{u}$ e un qualsiasi punto P, si definisce ***somma del punto e del vettore*** il punto Q tale che $\overrightarrow{PQ}=\vec{u}$ (Fig. 20). Si scrive:

$$Q = P + \vec{u}\ .$$

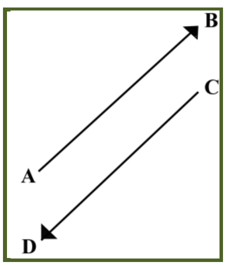

FIG. 19

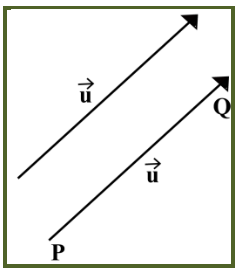

FIG. 20

16.5.4 Siano $\vec{u},\vec{v}$ due vettori non aventi la stessa direzione. Scelto un qualsiasi punto A, costruiamo i punti B, C tali che (Fig. 21): $B=A+\vec{u}$, $C=B+\vec{u}$. Il vettore $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$ si dice ***somma*** dei due vettori $\vec{u},\vec{v}$ e si scrive:

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\ .$$

Se i due vettori $\vec{u},\vec{v}$ hanno la stessa direzione, o come si dice se sono *paralleli*, procediamo esattamente come nel caso precedente. In questa circostanza il vettore somma $\vec{u}+\vec{v}$ è parallelo ai vettori $\vec{u},\vec{v}$.

Lasciamo a te l'analisi dettagliata di tutti i possibili casi che si possono presentare.

Noi ci limitiamo a dire che la somma di due vettori non dipende dalla particolare scelta del punto A, ma solo dai vettori coinvolti. Questo si può dimostrare, ma noi non lo facciamo.

NOTA BENE. Il *vettore* è uno strumento molto importante non solo in matematica (e avrai modo di constatarlo nel prosieguo dei tuoi studi) ma anche nelle scienze sperimentali ed è precisamente utile a rappresentare molte grandezze fisiche, in particolare quelle che non è possibile determinare soltanto con l'attribuzione di una misura (come le cosiddette *grandezze scalari*, quali per esempio: lunghezza, area, massa, ecc.); ma richiedono, per la loro completa determinazione, oltre alla misura, la conoscenza della direzione e del verso in cui agiscono. Sono tali, per esempio, la velocità, l'accelerazione, la forza, eccetera: sono dette, per l'appunto, *grandezze vettoriali*. Di esse hai modo di occuparti nello studio dei fenomeni fisici.

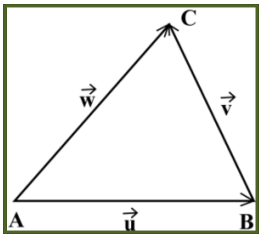

FIG. 21

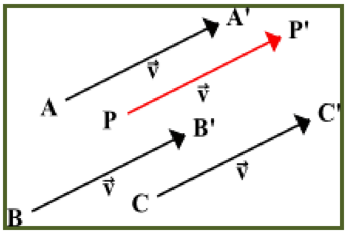

FIG. 22

16.5.5 Considerato adesso nel piano α un vettore $\vec{v}$, è possibile associare ad ogni punto $P \in \alpha$ il punto P' tale che (Fig. 22): $P' = P + \vec{v}$.

Rimane, in questo modo, definita una trasformazione geometrica del piano, detta **traslazione** di *vettore* $\vec{v}$.

♦ TEOREMA. **Ogni traslazione nel piano è un'isometria diretta.**

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione è biiettiva. Infatti, detta τ la traslazione di vettore $\vec{v}$ e posto $P' = \tau(P)$, al punto P' si può far corrispondere il punto P tale che $P = P' + (-\vec{v})$.

Siano ora AB ed A'B' due segmenti corrispondenti nella τ (Fig. 23). Questo, per definizione di traslazione, significa che: $A' = A + \vec{v}$, $B' = B + \vec{v}$. Di modo che, il quadrilatero AA'B'B, avente i lati opposti AA' e BB' congruenti e paralleli, è un parallelogramma. Ne discende che $AB \cong A'B'$. Dunque la τ è un'isometria.

Siano adesso $M\hat{O}N$ ed $M'\hat{O}'N'$ due angoli corrispondenti nella τ (Fig. 24). Intanto, siccome la τ è un'isometria, essi sono congruenti. D'altronde conservano lo stesso verso nella traslazione. Per cui l'isometria è diretta.

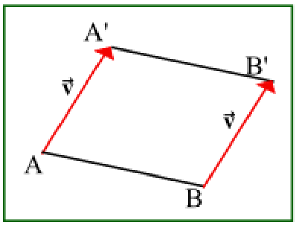

FIG. 23

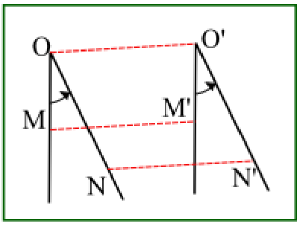

FIG. 24

Come conseguenza di questo teorema si ha che una traslazione conserva tutte le proprietà delle figure che rimangono invarianti rispetto ad una generica isometria.

In più, come tu stesso puoi dimostrare, per esercizio:

Ogni traslazione trasforma ogni retta in una retta parallela.

In figura 25 sono rappresentati il triangolo ABC, il triangolo A'B'C' trasformato di ABC mediante la traslazione τ' e il triangolo A"B"C" trasformato di ABC mediante la traslazione τ''.

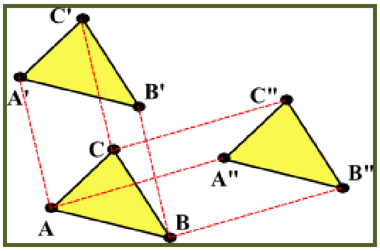

FIG. 25

Alcuni quesiti per te.

1. Elenca quali proprietà si conservano in una traslazione.
2. Dimostra che: $(A,B)\sim(C,D)$ se e solo se $(A,C)\sim(B,D)$.
3. Dimostra che i segmenti orientati (A,B) e (C,D) sono equipollenti e non allineati (cioè non contenuti nella stessa retta) se e solo se il quadrilatero ABDC un parallelogramma.
4. Spiega perché in una traslazione diversa dall'identità non vi sono punti uniti e perché una traslazione con un punto unito è l'identità. Spiega inoltre perché in una generica traslazione vi sono infinite rette unite. Quale caratteristica hanno queste rette?
5. Considerato un triangolo ABC, rettangolo in A, disegna:
   - il triangolo A'B'C' trasformato di ABC secondo la traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$;
   - il triangolo A"B"C" trasformato di A'B'C' secondo la traslazione di vettore $\overrightarrow{BC}$.

   Si può concludere che il triangolo A"B"C" è il trasformato di ABC secondo la traslazione di vettore $\overrightarrow{AC}$?

16.6 ESERCIZI E COMPLEMENTI

1. Una figura geometrica che venga trasformata in se stessa da una simmetria centrale si dice che ha il ***centro di simmetria***. Tra le figure piane che conosci, qualcuna ha il centro di simmetria?
2. Una figura geometrica che venga trasformata in se stessa da una simmetria assiale si dice che ha un ***asse di simmetria***.

   a) Tra le figure piane che conosci, qualcuna ha almeno un asse di simmetria?

   b) Stabilisci se le seguenti figure hanno assi di simmetria ed eventualmente quanti e quali:
   - due rette incidenti;
   - due rette parallele;
   - triangolo isoscele;
   - triangolo equilatero;
   - rettangolo;
   - quadrato;
   - rombo;
   - parallelogramma generico;
   - trapezio isoscele.

   c) Quanti assi di simmetria ha un triangolo equilatero? Quanti un quadrato? Quanti un pentagono regolare o un esagono regolare o un ettagono regolare? Sei in grado di generalizzare ad un poligono regolare di n lati?
3. La retta perpendicolare ad un dato segmento nel suo punto medio è asse di simmetria per il segmento. Si chiama per l'appunto **asse del segmento**. Vale il seguente teorema:

   ♦ TEOREMA. L'asse di un segmento è l'insieme dei punti (luogo dei punti) del piano equidistanti dagli estremi del segmento.

   DIMOSTRAZIONE (Traccia). Dato il segmento AB e indicato con r il suo asse, si deve provare che:

   $$1)\ P\in r \rightarrow \overline{PA}=\overline{PB}\,; \qquad 2)\ \overline{PA}=\overline{PB} \rightarrow P\in r\,.$$

   dove P è un punto del piano della figura.

   La verità della prima implicazione segue immediatamente dal fatto che i segmenti PA e PB si corrispondono nella ...

Per dimostrare la seconda implicazione basta osservare che, siccome ... allora il punto P deve essere punto unito; per cui $P \in r$.

4. Dimostra il seguente teorema (vedi l'esercizio precedente):

   ♦ TEOREMA. Gli assi dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto (detto **circocentro del triangolo**), equidistante dai vertici.

5. La bisettrice di un angolo è asse di simmetria per l'angolo. Dimostra il seguente teorema:

   ♦ TEOREMA. La bisettrice di un angolo (convesso) è l'insieme dei punti (luogo dei punti) del piano equidistante dai lati dell'angolo.

   DIMOSTRAZIONE (Traccia). Considerato l'angolo $a\widehat{O}b$ e chiamata r la sua bisettrice, bisogna provare che:

   $$1)\quad P\epsilon r \rightarrow d(P,a) = d(P,b); \qquad 2)\quad d(P,a) = d(P,b) \rightarrow P\epsilon r\,.$$

   dove con le scritture $d(P,a)$, $d(P,b)$ si sono indicate le distanze del punto P del piano dalle rette $a,\ b$ rispettivamente.

   Chiamati allora $A,\ B$ i piedi delle perpendicolari condotte da P alle rette $a,\ b$ nell'ordine, la verità sia della prima che della seconda implicazione discende dalla congruenza dei due triangoli OPA e OPB. Questi, peraltro, sono congruenti perché ... .

6. Dimostra il seguente teorema (vedi esercizio precedente):

   ♦ TEOREMA. Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto (detto **incentro del triangolo**), equidistante dai lati del triangolo.

7. Considerato l'insieme V dei vettori piani e l'operazione "+" definita in esso, dimostra che, comunque vengano presi i vettori $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ e detto $\vec{0}$ il vettore nullo, risulta:

   $$\vec{\boldsymbol{u}} + \mathbf{0} = \vec{\boldsymbol{u}},\ \ (\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) + \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{u}} + (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}),\ \ \vec{\boldsymbol{u}} + (-\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\mathbf{0}},\ \ \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}}\,.$$

8. La seconda delle uguaglianze dell'esercizio precedente dà significato alla scrittura: $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, con la quale s'intende l'una o l'altra delle espressioni che figurano nell'uguaglianza stessa.

   Dimostra che, comunque vengano presi i punti A, B, C, il vettore: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ è il vettore nullo.

16.7 PROBLEMI DA RISOLVERE MEDIANTE L'APPLICAZIONE DELLE ISOMETRIE

16.7.1 PROBLEMA RISOLTO (di dimostrazione)

Ogni parallelogramma ha un centro di simmetria.

RISOLUZIONE. Il centro di simmetria O di una figura è tale che, per ogni punto P della figura, il suo simmetrico Q rispetto ad O è ancora un punto della figura.

Ora, se la figura è un parallelogramma ABCD (Fig. 26), il centro di simmetria, se esiste, non può che essere il punto O in cui si secano le diagonali AC e BD.

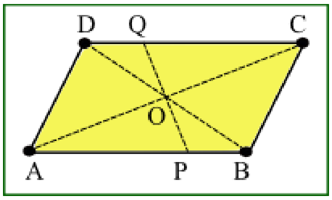

FIG. 26

Per dimostrarlo basta far vedere che, preso un qualsiasi punto P del parallelogramma, il punto Q, simmetrico di P rispetto ad O, appartiene ancora al parallelogramma.

Intanto sappiamo che O biseca le diagonali AC e BD: dunque A e C si corrispondono nella simmetria centrale di centro O, così come si corrispondono B e D. Inoltre si corrispondono, nelle stessa simmetria, i lati paralleli AB e DC, così come si corrispondono i lati paralleli AD e BC.
Allora, se P è un punto del lato AB, il suo simmetrico rispetto ad O, cioè Q, deve necessariamente appartenere al lato DC, simmetrico di AB rispetto ad O.
Ugualmente se P appartiene ad uno degli altri lati.
La dimostrazione potrebbe essere condotta senza coinvolgere le trasformazioni geometriche, ma ricorrendo a coppie di triangoli congruenti. Sapresti farlo?

16.7.2 ESERCIZI.

1. Dimostra che ogni trapezio isoscele ha uno ed un solo asse di simmetria.
2. Stabilisci se un rombo ha assi di simmetria e/o il centro di simmetria.
3. Disponi soltanto di riga non graduata e di compasso (oltre che degli strumenti per scrivere, è sottinteso). Sul foglio da disegno sono tracciati un punto O ed una retta r. Costruisci la retta r’ simmetrica di r rispetto ad O.
4. Disponi soltanto di riga non graduata. Sul foglio da disegno sono tracciati i punti A e B e i loro simmetrici A’ e B’ rispetto ad una stessa retta r. Costruisci la retta r.
   Quindi costruisci il simmetrico di un qualunque punto P rispetto alla retta r.

LABORATORIO DI MATEMATICA.

1. ® Devi risolvere il seguente problema (noto come **problema di Erone**):
   Si deve andare dalla posizione A alla posizione B (Fig. 27), ma bisogna farlo toccando la retta s in un suo qualsiasi punto P. Trova la posizione di P per la quale il cammino AP+PB sia il più breve.
   Discutine in classe con i tuoi compagni, fate qualche congettura, verificate, dimostrate. Quando non sapete cosa fare chiedete l’aiuto del professore.

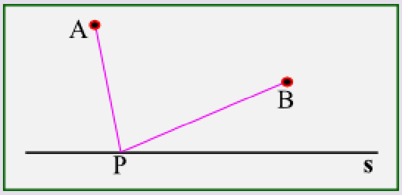

FIG. 27

2. ® Devi risolvere il seguente problema:
   Sul tavolo del bigliardo ABCD vi sono due palline: una nella posizione M, l’altra in N.
   a) La prima pallina viene lanciata in modo da urtare la seconda dopo che ha toccato la sponda AB. In quale punto la pallina tocca la sponda?
   b) La pallina posta in M viene lanciata contro la sponda AB in modo da toccare anche la sponda BC prima di urtare la pallina posta in N. In quali punti la pallina deve toccare le due sponde?
   Discutine in classe con i tuoi compagni, fate qualche congettura, verificate, dimostrate. Quando non sapete cosa fare chiedete l’aiuto del professore.

VERIFICHE [6]

1. Disegnati i due segmenti orientati, (A,B) ed (A’,B’), opposti ma non allineati, determina un’isometria che trasformi (A,B) in (A’,B’).
2. Disegnato un triangolo T e indicato con O un punto esterno ad esso, si disegni il triangolo T’ ottenuto trasformando T mediante una rotazione di 120° intorno ad O ed il triangolo T” trasformato di T mediante la simmetria centrale di centro O.
3. Disegnato un quadrilatero Q e indicato con O un punto esterno ad esso, disegna il quadrilatero Q’ ottenuto trasformando T mediante una rotazione di 60° intorno ad O ed il quadrilatero Q” trasformato di T mediante la simmetria centrale di centro O.
4. Due punti corrispondenti, A e A’, sono sufficienti per individuare una determinata:
   [A] traslazione che muta A in A’; [B] rotazione che muta A in A’;
   [C] simmetria centrale che muta A in A’; [D] simmetria assiale che muta A in A’.
   Individua tutte le risposte corrette e fornisci una esauriente motivazione delle scelte operate.
5. Ogni isometria trasforma:
   [A] una qualsiasi retta in una retta;
   [B] una qualsiasi retta in una retta parallela ad essa;
   [C] due qualsiasi rette parallele fra loro in due rette parallele fra loro;
   [D] un qualsiasi angolo retto in un angolo retto.
   Individua tutte le risposte corrette e fornisci una esauriente motivazione delle scelte operate.
6. Un’isometria avente almeno un punto unito può essere una:
   [A] traslazione; [B] rotazione; [C] simmetria assiale.
   Individua tutte le risposte corrette e fornisci una esauriente motivazione delle scelte operate.
7. Un’isometria piana che trasformi una qualsiasi retta in una retta parallela alla prima può essere una:
   [A] traslazione; [B] rotazione; [C] simmetria assiale.
   Individua tutte le risposte corrette e fornisci una esauriente motivazione delle scelte operate.
8. Due rette corrispondenti, r ed r’, strettamente parallele, quante traslazioni determinano?
   [A] Nessuna. [B] Una soltanto. [C] Due soltanto. [D] Infinite.
   Individua tutte le risposte corrette e fornisci una esauriente motivazione delle scelte operate.
9. Un’isometria piana che trasformi qualche retta r in una retta r’ parallela ad r può essere una:
   [A] traslazione; [B] rotazione; [C] simmetria assiale.
   Individua tutte le risposte corrette e fornisci una esauriente motivazione delle scelte operate.
10. ® Il quadrato ABCD e il triangolo equilatero ABE hanno in comune il lato AB e nessun altro punto. Il quadrato ruota in senso orario intorno al triangolo in modo che, nella nuova posizione assunta, abbia in comune con esso solo un lato. Quanti giri deve fare il quadrato per ritornare nella posizione originaria?
    [A] 1 ; [B] 2 ; [C] 3 ; [D] 4 .
    Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una sufficiente spiegazione della scelta operata.
11. Fra le seguenti figure individua quelle che hanno il centro di simmetria, quelle che hanno almeno un asse di simmetria e quelle per le quali esiste almeno una rotazione che le muta in se stesse:

[6] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella “Integrazione 2”, file “Matematica – Integrazione 2, unità 1-27”, pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

triangolo isoscele;	triangolo equilatero;	due rette perpendicolari;
rettangolo;	quadrato;	rombo;
parallelogramma;	trapezio isoscele;	pentagono regolare.

12. ® Fra i triangoli di data base e di uguale area determinare quello che ha il perimetro minore e dimostrare che è il triangolo isoscele sulla base assegnata.

13. Considerato il parallelogramma generico ABCD, disegna la retta a passante per i punti A e C, la retta b passante per i punti B e D, la retta c perpendicolare alla retta a nel punto O in cui si secano le diagonali del parallelogramma e la retta d perpendicolare alla retta b nel punto O. Quali delle rette a, b, c, d sono assi di simmetria per il parallelogramma?

[A] Solo le rette a, b. [B] Solo le rette c, d.

[C] Tutte e quattro le rette. [D] Nessuna delle quattro rette.

14. Considerata la seguente figura (Fig. 28), disegna la sua simmetrica rispetto al punto O:

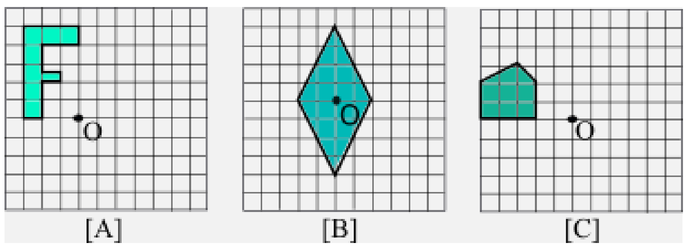

FIG. 28

15. Considerata la seguente figura (Fig. 29), disegna la sua simmetrica rispetto alla retta a:

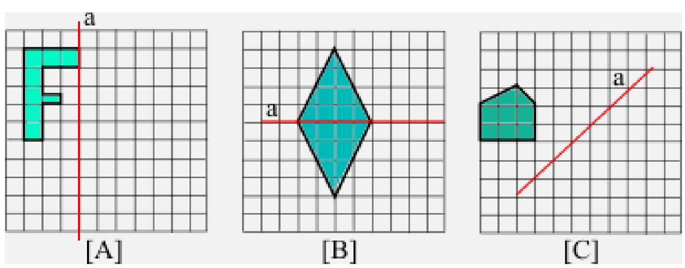

FIG. 29

16. Considerata la seguente figura (Fig. 30), disegna la figura che si ottiene da essa mediante una rotazione di ampiezza α intorno ad O:

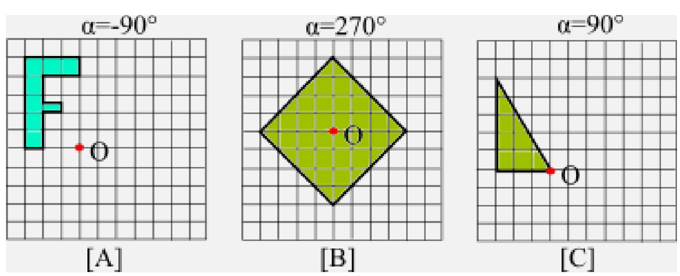

FIG. 30

17. Considerata la seguente figura (Fig. 31), disegna la figura che si ottiene da essa mediante la traslazione di vettore $\vec{v}$:

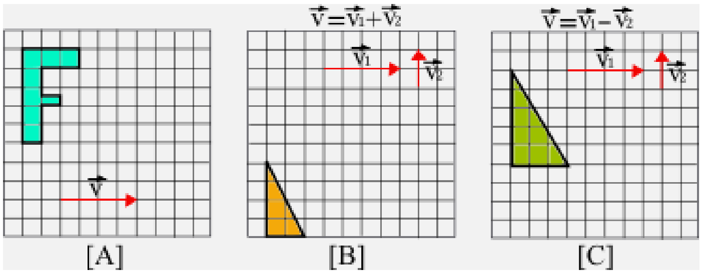

FIG. 31

18. Sia ABC un triangolo in cui l'angolo in C misura 100° e sia K l'incentro del triangolo. I dati sono sufficienti per determinare la misura di qualcuno degli angoli interni del triangolo AKB?

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Che differenza c'è fra trasformazione geometrica e isometria?
2. È vero che ogni isometria piana trasforma un qualsiasi segmento in un segmento congruente, un angolo in un angolo congruente, una retta in una retta, due rette parallele in due rette parallele?
3. Quali isometrie trasformano una qualsiasi retta in una retta parallela?
4. Quali isometrie presentano punti uniti? Quali un solo punto unito? Quali più d'uno?
5. Nella simmetria assiale l'asse di simmetria è retta unita luogo di punti uniti. Ci sono altre rette unite?
6. Oltre alla simmetria assiale vi sono altre isometrie che presentano rette unite?
7. Un'isometria quando si dice involutoria?
8. Quali isometrie sono involutorie?
9. Come si definisce il concetto di "direzione"?
10. Come si definisce il concetto di "vettore"?
11. Quali tra le isometrie studiate sono dirette e quali speculari?
12. Come si definisce ciascuno dei seguenti punti: circocentro, incentro?
13. È vero che il circocentro e l'incentro di un triangolo sono punti interni al triangolo, comunque esso sia?
14. Un'isometria piana diversa dall'identità, la quale trasformi una retta in una retta parallela può essere una simmetria assiale?
15. Si considerino le seguenti figure geometriche: triangolo isoscele, parallelogramma, trapezio isoscele. Qualcuna di esse ha un centro di simmetria? Qualcuna ha un asse di simmetria?
16. È corretto affermare che ogni traslazione ha infinite rette unite?
17. Una figura ha un centro di simmetria. Si può affermare che, di conseguenza, ha due assi di simmetria perpendicolari?

RISPOSTE.

1. Una trasformazione geometrica è ogni applicazione del piano in sé. Una isometria è una particolare trasformazione geometrica: precisamente è una applicazione biiettiva del piano in sé che lascia invariate le distanze dei punti.
2. Sì. Quelli elencati sono alcuni degli invarianti dell'isometria.

3. Traslazione; simmetria centrale.
4. La rotazione presenta un solo punto unito: il centro della rotazione. La simmetria assiale presenta infiniti punti uniti: tutti i punti dell'asse di rotazione, che pertanto è retta unita.
5. Sì. Ogni retta perpendicolare all'asse di rotazione è retta unita, ma non è luogo di punti uniti.
6. Sì. Sono la traslazione e la simmetria centrale. Nella traslazione ogni retta avente la direzione del vettore che determina la traslazione è retta unita. Nella simmetria centrale ogni retta passante per il centro della simmetria è retta unita. Ma tali rette unite non sono luoghi di punti uniti.
7. Un'isometria si dice involutoria quando, posto che P' sia l'associato di P nell'isometria, qualunque sia il punto P, tale punto P è l'associato di P' nella stessa isometria.
8. Simmetria centrale; simmetria assiale.
9. Una direzione è una classe di rette parallele. Una qualsiasi retta della classe è buona a rappresentare la direzione.
10. Un vettore è una classe di segmenti orientati equipollenti. Un qualunque segmento orientato della classe è buono a rappresentare il vettore che si identifica con la classe.
11. La rotazione e la traslazione sono isometrie dirette, la simmetria assiale è un'isometria speculare.
12. Si tratta di due punti notevoli di un triangolo. Precisamente si tratta dei punti in cui si intersecano i suoi assi (circocentro) e le sue bisettrici (incentro).
13. No. Solo l'incentro è un punto interno al triangolo, qualunque esso sia. Il circocentro, invece, è interno al triangolo solo se esso è acutangolo; se è rettangolo il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa e se è ottusangolo il circocentro è esterno al triangolo.
14. Dipende dal modo di intendere l'espressione "trasformi una retta" o, meglio, l'articolo indeterminativo "UNA", che in essa figura. Se è inteso nel senso di "ogni" allora l'isometria non può essere una simmetria assiale. Se, invece, è inteso nel senso di "qualche" allora può esserlo: ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria è, in effetti, trasformata in se stessa ed è quindi parallela alla prima.
15. Il parallelogramma ha un centro di simmetria: è il punto d'incontro delle diagonali; ma non ha assi di simmetria, a meno che non si tratti di un parallelogramma particolare come il rettangolo o il rombo. Il triangolo e il trapezio non hanno un centro di simmetria, a meno che il triangolo non sia equilatero; ma hanno entrambi un asse di simmetria: nel triangolo isoscele è la mediana relativa alla base propriamente detta, nel trapezio isoscele è la retta passante per i punti medi delle basi.
16. Lo è. Sono, infatti, rette unite le infinite rette aventi la stessa direzione del vettore che individua la traslazione.
17. Certamente no. Un rettangolo, per esempio, ha un centro di simmetria e due assi di simmetria perpendicolari, ma un generico parallelogramma ha ancora un centro di simmetria, però non ha assi di simmetria.