Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le proprietà delle isometrie

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *riconoscere e dimostrare quali isometrie si ottengono componendone due altre*
- *descrivere i movimenti che mutano un triangolo equilatero in se stesso e individuarne le caratteristiche*

Composizione di isometrie

Unità 17

17.1 COMPOSIZIONE DI ISOMETRIE

17.1.1 Supponiamo di indicare con T un insieme di trasformazioni geometriche del piano e siano t’ e t” due qualsiasi fra esse: t’ trasformi il punto P in P’, t” mandi P’ in P”. Ha, allora, senso considerare la trasformazione t che manda direttamente P in P” (Fig. 1).

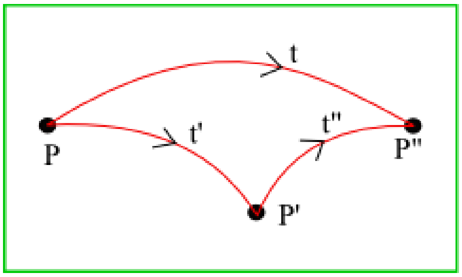

FIG. 1

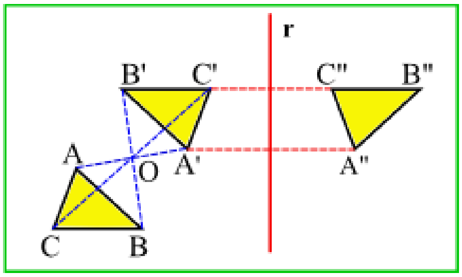

FIG. 2

Questa trasformazione t si chiama **trasformazione prodotto** di t’ per t” e si indica con la scrittura:

$$\mathbf{t'} \circ \mathbf{t''},$$

che si legge: «***t’ composto con t”***».

In figura 2 è illustrata, con riferimento ai movimenti del triangolo ABC, la trasformazione $s_O \circ s_r$, dove s_O è la simmetria centrale di centro O ed s_r è la simmetria assiale di asse r. In altri termini:

$$s_O :\ ABC \to A'B'C', \quad s_r :\ A'B'C' \to A''B''C'', \quad s_O \circ s_r :\ ABC \to A''B''C''.$$

Ci proponiamo adesso di studiare le composizioni di due isometrie.

17.1.2 Per prima cosa dimostriamo il seguente teorema.

♦ TEOREMA. **Il prodotto di due isometrie è un’isometria.**

DIMOSTRAZIONE. Siano μ’ e μ” due qualunque isometrie: μ’ trasformi i punti A, B nei punti A’, B’ e μ” mandi A’, B’ in A”, B” rispettivamente. Dunque $\mu'\circ\mu''$ manda A, B direttamente in A”, B”.
Siccome $d(A,B)=d(A',B')$ e $d(A',B')=d(A'',B'')$, allora $d(A,B)=d(A'',B'')$. E ciò vale per ogni scelta dei punti A, B del piano. Dunque anche la trasformazione $\mu'\circ\mu''$ è un’isometria.

17.1.3 Dimostriamo adesso un altro teorema.

♦ TEOREMA.
Il prodotto di due rotazioni di centro O è una rotazione di centro O.

DIMOSTRAZIONE. Siano r’ ed r” due qualsiasi rotazioni di centro O, di ampiezze rispettivamente α’ e α”. La prima mandi A in A’ e la seconda trasformi A’ in A” (Fig. 3). Ne risulta evidentemente che la trasformazione che manda A direttamente in A” non è altro che la rotazione di ampiezza α’+α”. Dunque $r'\circ r''$ è ancora una rotazione intorno ad O.

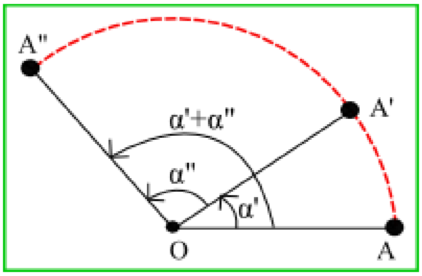

FIG. 3

17.1.4 Passiamo ad altre isometrie.

♦ TEOREMA. **Il prodotto di due traslazioni è una traslazione.**

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo due qualunque traslazioni, τ’ e τ”. La prima mandi P in P’ e la seconda trasformi P’ in P”. Ne risulta evidentemente che la traslazione di vettore $\vec{v'}+\vec{v''}$, dove $\vec{v'}$ e $\vec{v''}$ sono rispettivamente i vettori di τ’ e di τ”, è la trasformazione che manda P direttamente in P”. Pertanto $\tau' \circ \tau''$ è ancora una traslazione.
In figura 4, con riferimento alle trasformazioni del triangolo ABC, sono evidenziate la traslazione τ’ che muta ABC in A’B’C’, la traslazione τ” che muta A’B’C’ in A”B”C” e la traslazione $\tau=\tau'\circ\tau''$ che trasforma ABC direttamente in A”B”C”.

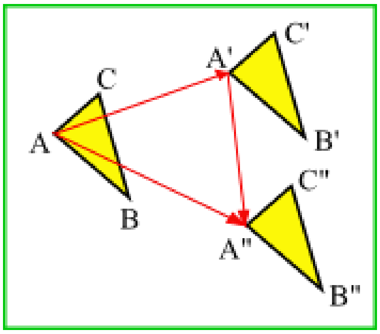

FIG. 4

17.1.5 Occupiamoci adesso del prodotto di due simmetrie assiali, distinguendo due casi, a seconda che gli assi delle due simmetrie siano paralleli o secanti.

1° CASO

♦ TEOREMA. **Il prodotto di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione.**

DIMOSTRAZIONE. Siano s’ ed s” due simmetrie assiali di assi paralleli a’ ed a” rispettivamente. La simmetria s’ trasformi il segmento AB in A’B’ ed s” muti A’B’ in A”B” (Fig. 5). Per dimostrare che $s'\circ s''$ è una traslazione basta far vedere che i segmenti orientati (A, A”) e (B, B”) sono equipollenti.
Anzitutto osserviamo che i punti A, A’, A” sono allineati. Infatti la retta AA’, che è perpendicolare ad a’, lo è pure ad a” e perciò passa anche per A”.
Allo stesso modo si spiega che sono allineati i punti B, B’, B”, che si trovano su un’altra perpendicolare alle rette a’, a”.
In base a questo possiamo già concludere che i segmenti orientati (A,A”) e (B,B”) hanno la stessa direzione e lo stesso verso.
Chiamiamo ora:
- H’ ed H” i punti in cui la retta AA” interseca a’ ed a” rispettivamente;
- K’ e K” i punti in cui la retta BB” interseca a’ ed a” rispettivamente;
- d la distanza delle due rette parallele a’ ed a”, cioè d=d(H’,H”)=d(K’,K”).

Osserviamo che si ha:

$$AA'' = 2\,H'A' + 2\,A'H'' = 2(H'A' + A'H'') = 2\,H'H'' = 2d\,,$$
$$BB'' = 2\,K'B' + 2\,B'K'' = 2(K'B' + B'K'') = 2\,K'K'' = 2d\,.$$

In altri termini, i due segmenti orientati (A,A”) e (B,B”) hanno anche la stessa lunghezza.
Pertanto la trasformazione geometrica $s'\circ s''$ è la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA''}$. Ovvero la traslazione il cui vettore ha modulo doppio della distanza dei due assi di simmetria, direzione perpendicolare a tali assi e verso che va dalla retta a’ alla retta a”.

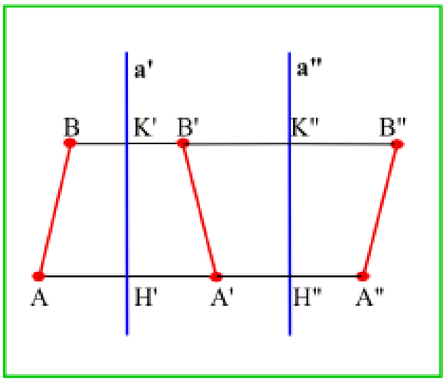

FIG. 5

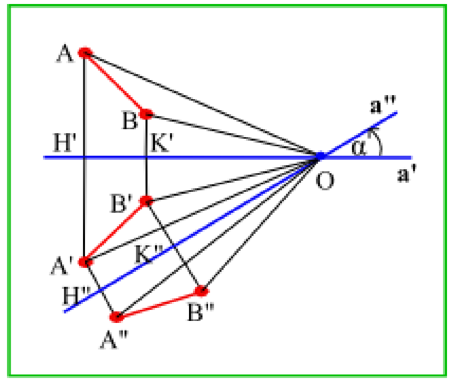

FIG. 6

2° CASO.

♦ TEOREMA. **Il prodotto di due simmetrie assiali con assi secanti è una rotazione.**

DIMOSTRAZIONE. Con le stesse premesse della dimostrazione precedente, salvo che adesso gli assi a’ ed a” sono secanti (Fig. 6), per dimostrare che $s' \circ s''$ è una rotazione – e precisamente una rotazione intorno al punto O di intersezione delle due rette a’ ed a” – proveremo che:

$$OA = OA'', \quad OB = OB'', \quad A\widehat{O}A'' = B\widehat{O}B'',$$

dove gli angoli sono evidentemente orientati.

L’uguaglianza delle lunghezze dei segmenti è giustificata dal fatto che i segmenti OA ed OA'' sono entrambi congruenti ad OA' e, del pari, OB ed OB'' sono entrambi congruenti ad OB'.

Per dimostrare l’uguaglianza delle ampiezze degli angoli orientati $A\widehat{O}A''$ e $B\widehat{O}B''$ osserviamo che si ha: $A\widehat{O}A' = 2\, H'\widehat{O}A'$ e $A'\widehat{O}A'' = 2\, A'\widehat{O}H''$, per cui: $A\widehat{O}A'' = 2\, H'\widehat{O}H''$.

Parimenti: $B\widehat{O}B' = 2\, K'\widehat{O}B'$ e $B'\widehat{O}B'' = 2\, B'\widehat{O}K''$, per cui: $B\widehat{O}B'' = 2\, K'\widehat{O}K''$.

Siccome $H'\widehat{O}H'' = K'\widehat{O}K''$ allora $A\widehat{O}A'' = B\widehat{O}B''$.

Effettivamente $s' \circ s''$ è una rotazione di centro O. Precisamente è la rotazione di ampiezza doppia dell’ampiezza dell’angolo di cui deve ruotare la retta a’ per sovrapporsi alla retta a”.

Dalla precedente situazione si desume, come caso particolare, che se i due assi di simmetria sono perpendicolari la rotazione ha ampiezza 180° e perciò è la simmetria centrale con centro nel punto d’intersezione O dei due assi (Fig. 7).

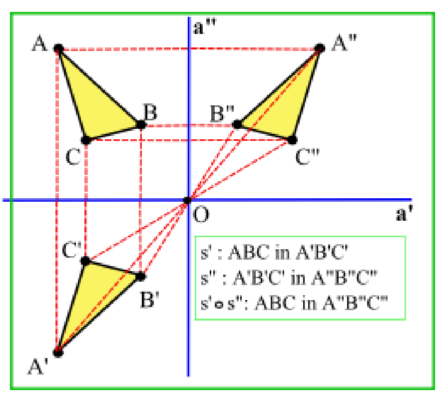

FIG. 7

17.1.6 Le varie isometrie (nel piano) fin qui esaminate portano a concludere che esse sono o ***traslazioni*** o ***rotazioni intorno ad un punto*** o ***simmetrie assiali***.

Naturalmente possono essere composte due isometrie non dello stesso tipo, come per esempio una traslazione con una rotazione (Fig. 8) oppure una traslazione con una simmetria assiale (Fig. 9). Nel primo caso si ottiene un'isometria diretta, che qualcuno chiama **rototraslazione**; nel secondo un'isometria speculare, che alcuni chiamano **glissosimmetria** (ed altri **antitraslazione** o anche **riflessotraslazione**).

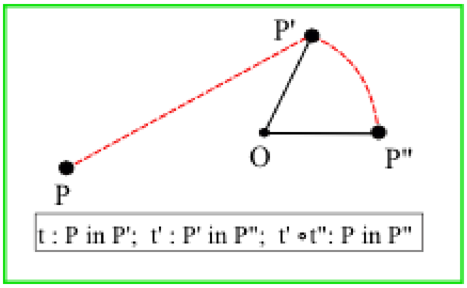

FIG. 8

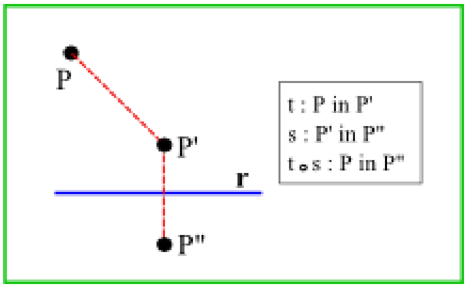

FIG. 9

In ogni caso, si tratta di isometrie che derivano dalla composizione di quelle precedenti, le quali pertanto possono essere considerate come le isometrie fondamentali.

Si potrebbe poi dimostrare (ma noi non lo facciamo) che:

Ogni isometria piana si ottiene dalla composizione di due o più isometrie fondamentali.

Anzi, a ben riflettere, siccome una traslazione ed una rotazione si ottengono componendo due opportune simmetrie assiali, l'unica isometria fondamentale è proprio la simmetria assiale. Pertanto:

♦ **Una qualunque isometria piana si può pensare ottenuta componendo due o più simmetrie assiali.**

17.2 ISOMETRIE E CONGRUENZE.

17.2.1 A suo tempo [1] abbiamo definito i ***triangoli congruenti***. Nella precedente unità abbiamo definito i ***triangoli isometrici***. Per comodità, ripetiamo tali definizioni:

- *Due triangoli si dicono **congruenti** se i lati dell'uno sono rispettivamente congruenti a quelli dell'altro e gli angoli dell'uno sono rispettivamente congruenti a quelli dell'altro.*
- *Due triangoli si dicono **isometrici** se esiste un'isometria che trasforma l'uno nell'altro.*

Le due definizioni, come si può capire, sono concettualmente diverse.

Esse, però, sono equivalenti, nel senso che:

due triangoli sono isometrici se e solo se sono congruenti.

Cerchiamo di chiarire bene questo fatto.

Si dimostra subito che:

Se due triangoli sono isometrici allora sono congruenti.

[1] Cfr.: Unità 7 – Geometria: dall'intuizione alla dimostrazione.

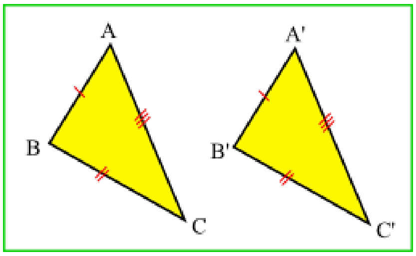

FIG. 10

Infatti, detti A, B, C i vertici di un triangolo, chiamiamo A', B', C' i vertici del triangolo trasformato mediante una data isometria (Fig. 10: qui si tratta di una traslazione, ma potrebbe essere un'isometria qualunque). Intanto non v'è dubbio che i due triangoli siano isometrici. D'altronde, proprio in virtù dell'isometria, risulta:

$$AB \cong A'B', \quad BC \cong B'C', \quad CA \cong C'A'.$$

Sicché, per il 3° criterio di congruenza, i due triangoli sono anche congruenti.

17.2.2 Proviamo adesso che:

Se due triangoli sono congruenti allora sono isometrici.

DIMOSTRAZIONE. Dati due triangoli congruenti ABC ed A'B'C', si tratta di far vedere che esiste un'isometria che trasforma l'uno nell'altro.
Naturalmente i due triangoli possono trovarsi in una posizione qualsiasi, perciò i casi da prendere in esame sono parecchi. Noi ci soffermeremo su due soli di essi, lasciando a te il compito, se lo credi, di esaminarne altri.
Nei due casi che vogliamo affrontare, i triangoli non hanno vertici comuni e non hanno i lati mutuamente paralleli. Insomma sono in posizione del tutto generica.

- Se essi sono direttamente congruenti (Fig. 11), dapprima la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA'}$ muta ABC in $A'B_1C_1$ e poi la rotazione intorno ad A' di ampiezza uguale a $B_1\widehat{A'}B'$ muta $A'B_1C_1$ in A'B'C'. Esiste, dunque, un'isometria che trasforma ABC in A'B'C': si tratta di una ***rototraslazione***.
- Se i due triangoli sono specularmente congruenti (Fig. 12), dapprima la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA'}$ trasforma ABC in $A'B_1C_1$ e poi la simmetria assiale rispetto alla bisettrice dell'angolo $B_1\widehat{A'}B'$ trasforma $A'B_1C_1$ in A'B'C'. Esiste, dunque, un'isometria che trasforma ABC in A'B'C': si tratta precisamente di una ***glissosimmetria***.

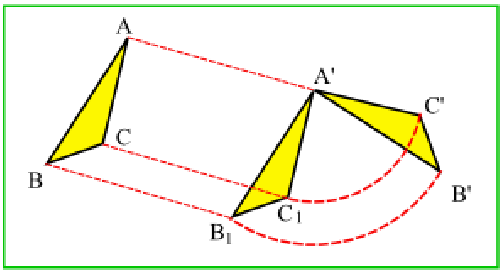

FIG. 11

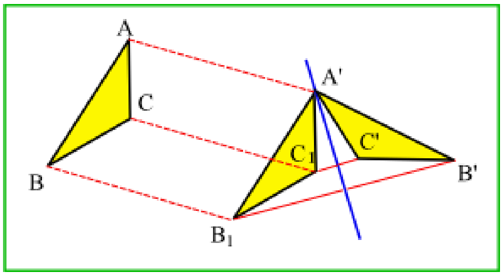

FIG. 12

In definitiva:

la definizione di triangoli congruenti è equivalente a quella di triangoli isometrici.

Questo discorso potrebbe estendersi poi alle figure in genere, ma noi non lo facciamo.
Ci limitiamo semplicemente a precisare che un'**isometria** è chiamata anche **congruenza** e due ***figure isometriche*** sono dette pure ***figure congruenti***. Pertanto, da qui in avanti non faremo più distinzione fra "congruenza" ed "isometria".
C'è poi da dire che molti, come lo stesso Euclide per esempio, parlano semplicemente di **uguaglianza** e di ***figure uguali***. Non c'è nulla di strano, a patto però che sia chiaro che due figure geometriche "uguali" non sono da intendersi necessariamente come la medesima figura.
In fin dei conti, parlare di figure geometriche "isometriche", "congruenti" o "uguali" è la stessa cosa.

17.3 TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE: PROPRIETÀ

17.3.1 Quando si ha a che fare con un insieme T di trasformazioni geometriche può essere interessante porsi alcune domande ed ancora più interessante conoscere le risposte. In particolare:

a) Se si effettua dapprima una generica trasformazione T_1 e poi una trasformazione T_2, il risultato è lo stesso di quello che si ottiene eseguendo dapprima la T_2 e poi la T_1?
In altri termini: *vale la proprietà commutativa dell'operazione prodotto*?
b) Considerate tre qualsiasi trasformazioni T_1, T_2, T_3, se la trasformazione $T_1 \circ T_2$ si fa seguire dalla trasformazione T_3 si ottiene lo stesso risultato effettuando dapprima la trasformazione T_1 e poi la trasformazione $T_2 \circ T_3$?
In altri termini: *vale la proprietà associativa dell'operazione prodotto*?

17.3.2 La risposta alla prima domanda è NO, non vale la proprietà commutativa del prodotto delle trasformazioni geometriche. Vale a dire: prese due qualsiasi trasformazioni geometriche, T_1 e T_2, in genere risulta $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$. Per provarlo basta un controesempio.

A questo riguardo ti proponiamo di risolvere il seguente esercizio.
È dato il triangolo ABC, rettangolo in A. Costruisci il suo trasformato mediante la traslazione di vettore $\overrightarrow{CA}$ fatta seguire dalla simmetria assiale rispetto alla retta AB. Costruisci quindi il trasformato del triangolo ABC mediante la simmetria assiale rispetto alla retta AB, fatta seguire dalla traslazione di vettore $\overrightarrow{CA}$. Potrai constatare che i risultati delle due operazioni sono diversi.

Questo tuttavia non significa che non possano esistere trasformazioni geometriche per le quali vale la proprietà commutativa del prodotto.
Per esempio essa vale nell'insieme delle traslazioni e vale anche nell'insieme delle rotazioni di dato centro.

Diversamente dalla proprietà commutativa, che vale per particolari trasformazioni ma non vale in generale, la proprietà associativa vale in qualunque insieme di trasformazioni geometriche. Sussiste infatti il seguente teorema.

TEOREMA.
Dato un insieme T di trasformazioni geometriche, chiuso rispetto all'operazione prodotto "∘" e prese tre sue qualsiasi trasformazioni T_1, T_2, T_3, risulta: $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$.
DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una qualsiasi figura A del piano e diciamo B, C, D le figure che si ottengono trasformandola via via come indicato in figura 13 dalle trasformazioni generiche T_1, T_2, T_3.

In altri termini: $B=T_1(A)$, $C=T_2(B)$, $D=T_3(C)$.

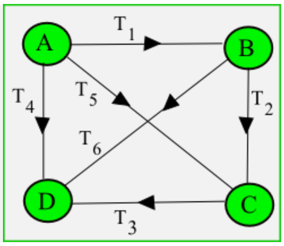

FIG. 13

Per cui:

$$T_1 \circ T_2 = T_5 \qquad T_2 \circ T_3 = T_6 \qquad T_5 \circ T_3 = T_1 \circ T_6 = T_4 \,.$$

Risulta chiaramente:

$$(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_5 \circ T_3 = T_4 \qquad T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = T_1 \circ T_6 = T_4$$

e pertanto:

$$(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3) \,.$$

Come volevasi dimostrare.

17.4 MOVIMENTI CHE MUTANO UNA FIGURA IN SE STESSA.

17.4.1 Le isometrie nel piano sono chiamate talora ***movimenti euclidei***. Tra essi hanno particolare interesse quelli che trasformano una figura in se stessa.

Ovviamente, considerato che questi particolari movimenti non possono essere traslazioni, l'interesse c'è se la figura presenta assi di simmetria e/o un centro di simmetria. Se tali simmetrie non ci sono, l'unico movimento che trasforma la figura in se stessa è evidentemente l'**identità**.

Tra le figure sulle quali ci sembra opportuno fermare la nostra attenzione c'è il triangolo equilatero. Faremo tuttavia un cenno ai poligoni regolari.

17.4.2 Occupiamoci dei **movimenti che mutano un triangolo equilatero in se stesso.**

Sia allora assegnato il triangolo equilatero ABC.

• Tra i movimenti che lo mutano in se stesso c'è ovviamente l'identità: indichiamola con $\mathbf{m_0}$. Anzi, per evidenziare il fatto che essa lascia tutto al suo posto, usiamo il modo evidenziato nella figura 14 per rappresentarla simbolicamente, evidenziando a fianco il fatto che il triangolo ABC è trasformato in un triangolo che lascia esattamente al loro posto i vertici (per la verità i due triangoli dovrebbero immaginarsi sovrapposti).

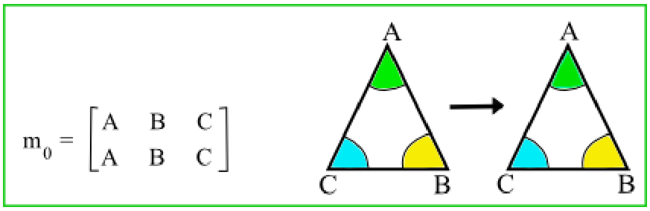

FIG. 14

• Un movimento vero e proprio è quello che ruota il triangolo di 120° in senso orario intorno al suo centro (Fig. 15). Lo chiamiamo $\mathbf{m_1}$. Esso porta A al posto di B, B al posto di C e C al posto di A.

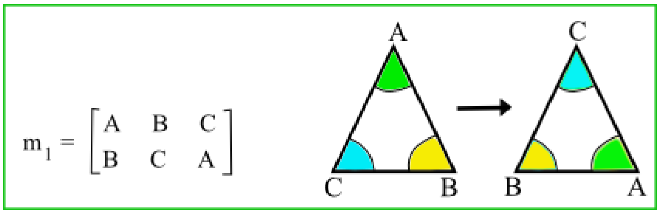

FIG. 15

Altri movimenti, che puoi illustrare da te con figure apposite, sono i seguenti:

• Il movimento **m_2** che ruota il triangolo di 240°, in senso orario, intorno al suo centro. Porta il vertice A in C, il vertice B in A ed il vertice C in B.

$$m_2=\begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}.$$

• Il movimento **m_3** che ribalta il triangolo rispetto alla sua mediana passante per il vertice A. Esso lascia A al suo posto, mentre porta B in C e C in B.

$$m_3=\begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix}.$$

• Il movimento **m_4** che ribalta il triangolo rispetto alla sua mediana passante per il vertice B. Esso lascia B al suo posto, mentre porta A in C e C in A.

$$m_4=\begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}.$$

• Il movimento **m_5** che ribalta il triangolo rispetto alla sua mediana passante per il vertice C. Esso lascia C al suo posto, mentre porta A in B e B in A.

$$m_5=\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}.$$

Dunque 6 movimenti, compresa l'identità, mutano un triangolo equilatero in sé.

Facciamo notare che di questi movimenti, 3 avvengono nel piano, nel senso che il triangolo non esce dal piano che lo contiene: sono le rotazioni. Invece 3 costringono il triangolo ad uscire dal piano: sono i ribaltamenti (o simmetrie assiali).

L'aspetto interessante della questione è che, se due di questi movimenti si susseguono l'uno dopo l'altro, si ottiene uno di tali movimenti. Ora, se per esempio m_2 è il primo movimento che subisce il triangolo e m_4 il secondo, qual è il movimento risultante, cioè $m_2 \circ m_4$? Come si trova questo movimento?

Certo, si potrebbe riflettere sui movimenti effettivi del triangolo e trovare la risposta. Ma c'è un modo più semplice di farlo. Basta tener presente che si ha:

$$m_2 \circ m_4 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}$$

e constatare che il primo movimento porta A in C ed il secondo C in A, per cui il movimento composto porta A in A, ossia lascia A al suo posto; così pure il primo movimento porta B in A ed il secondo A in C, per cui il movimento composto porta B in C; analogamente si trova che il movimento composto porta C in B. Pertanto:

$$m_2 \circ m_4 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} = m_3$$

In modo analogo si ragiona sulla composizione di due altri movimenti qualsiasi.

I risultati di quest'operazione "∘", considerata nell'insieme $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ dei movimenti che mutano un triangolo equilatero in se stesso, possono essere tabellati in modo analogo a quello che si segue solitamente per la tavola pitagorica. Solo che adesso c'è il vantaggio di avere a che fare con un insieme finito e quindi tutti i casi possono essere presi in esame.

La tabella di cui stiamo parlando è riportata qui sotto (Tab. 1), ancorché in forma incompleta.
Il compito di completarla è lasciato a chi legge.

$\circ$	**m_0**	**m_1**	**m_2**	**m_3**	**m_4**	**m_5**
m_0			m_2	m_3		
m_1		m_2	m_0	m_4		m_3
m_2				m_5	m_3	
m_3	m_3	m_5	m_4			
m_4			m_5			
m_5		m_4				

TAB. 1

Una volta completata la tabella, si possono scoprire alcune interessanti proprietà dell'operazione "$\circ$":
- è "ovunque definita", come dire che l'insieme $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ è "chiuso" rispetto all'operazione;
- non è commutativa;
- ammette l'elemento neutro.

Adesso alcune domande:
- L'operazione è associativa?
- Preso un qualunque movimento dell'insieme, esiste nell'insieme un movimento tale che la composizione dei due movimenti, effettuata nei due sensi (il primo con il secondo ed il secondo con il primo) dia come risultato l'elemento neutro?
- Esiste nell'insieme qualche sottoinsieme, che sia a sua volta chiuso rispetto all'operazione prodotto e nel quale l'operazione sia commutativa? In tale sottoinsieme vale la proprietà associativa dell'operazione prodotto?

17.4.3 Per quanto attiene ai **movimenti che trasformano un quadrato in se stesso** si possono fare considerazioni analoghe a quelle relative al triangolo equilatero e trarre conclusioni simili.
Puoi effettuare da solo questa indagine.
Noi ci limitiamo a segnalare che i movimenti in questione sono 8: di essi 4 avvengono nel piano e sono rotazioni intorno al centro del quadrato (ivi compresa l'identità) e 4 costringono il quadrato ad uscire dal piano e sono simmetrie rispetto a rette privilegiate.

17.4.4 Più in generale, è possibile prendere in esame i **movimenti che mutano un poligono regolare in se stesso**. Ebbene, considerando il triangolo equilatero, abbiamo visto che tali movimenti sono 6, dei quali 3 avvengono nel piano e altrettanti al di fuori del piano. Considerando il quadrato, abbiamo visto che tali movimenti sono 8, dei quali 4 nel piano e altrettanti al di fuori di esso. In generale, i movimenti che mutano un poligono regolare di n lati in se stesso sono 2n, dei quali n nel piano (le rotazioni intorno al centro del poligono) ed n al di fuori di esso (si possono ottenere componendo uno di tali movimenti con ciascuno dei movimenti che avvengono nel piano).
Chi ne avesse voglia può approfondire da solo questa questione, eventualmente con l'aiuto dell'insegnante.
Noterà, fra le altre cose, una difformità di comportamento dei poligoni di un numero pari di lati rispetto a quelli aventi un numero dispari di lati.

VERIFICHE [2]

1. Considerato un triangolo ABC, rettangolo in A, e chiamato O il punto simmetrico di A rispetto alla retta BC, disegna:

- il triangolo A’B’C’ trasformato di ABC nella rotazione r’ di 120° intorno ad O;
- il triangolo A”B”C” trasformato di A’B’C’ nella rotazione r” di 60° intorno ad O.

Si può concludere che il triangolo A”B”C” è il trasformato di ABC nella trasformazione r’ ∘ r”? Cos’è questa trasformazione?
Si può affermare che r’ ∘ r”= r” ∘ r’ ? Questa relazione vale quali che siano le rotazioni r’, r” ?

2. Considerato un rettangolo ABCD, disegna:

- il rettangolo A’B’C’D’ trasformato di ABCD nella traslazione t’ di vettore $\overrightarrow{AB}$;
- il rettangolo A”B”C”D” trasformato di A’B’C’D’ nella traslazione t” di vettore $\overrightarrow{AC}$.

Si può concludere che il rettangolo A”B”C”D” è il trasformato di ABCD nella trasformazione t’ ∘ t”? Cos’è questa trasformazione?
Si può affermare che t’ ∘ t”= t” ∘ t’ ? Questa relazione vale quali che siano le traslazioni t’, t” ?

3. Considerato un quadrato ABCD e indicata con r la retta simmetrica di AB rispetto a CD, disegna:

- il quadrato A’B’C’D’ trasformato di ABCD nella simmetria assiale a’ rispetto alla retta AB;
- il quadrato A”B”C”D” trasformato di A’B’C’D’ nella simmetria assiale a” rispetto alla retta r.

Si può concludere che il quadrato A”B”C”D” è il trasformato di ABCD nella trasformazione a’ ∘ a”? Cos’è questa trasformazione?
Si può concludere che a’ ∘ a”= a” ∘ a’ ? Questa relazione vale quali che siano le simmetrie assiali a’, a”?

4. Considerato un triangolo ABC, rettangolo in A, si indichi con r’ la retta parallela ad AB condotta per il punto simmetrico di C rispetto ad AB e con r” la retta parallela ad AC condotta per il punto simmetrico di B rispetto ad AC. Disegna:

- il triangolo A’B’C’ trasformato di ABC nella simmetria assiale a’ di asse r’;
- il triangolo A”B”C” trasformato di A’B’C’ nella simmetria assiale a” di asse r”.

Si può concludere che il triangolo A”B”C” è il trasformato di ABC nella trasformazione a’⎿a”? Cos’è questa trasformazione?
Si può concludere che a’ ∘ a”= a” ∘ a’ ? Questa relazione vale quali che siano le due simmetrie assiali a’, a”?

5. Considerato un triangolo ABC, rettangolo in A, e chiamato M il punto medio dell’ipotenusa, indica con:

s la simmetria centrale di centro M; t la traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$.

Quindi disegna:

- il triangolo A’B’C’ trasformato di ABC secondo la trasformazione s⎿t;
- il triangolo A”B”C” trasformato di ABC secondo la trasformazione t⎿s.

---

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella “Integrazione 2”, file “Matematica – Integrazione 2, unità 1-27”, pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

Si può concludere che $s \circ t = t \circ s$? Si può affermare che la trasformazione $s \circ t$ è un'isometria? Perché?

6. ® Un'isometria non identica avente almeno un punto unito può essere una:
A) traslazione; B) rotazione; C) simmetria assiale; D) rototraslazione; E) glissosimmetria.
Individua tutte le risposte corrette e fornisci un'esauriente motivazione delle scelte operate.

7. ® Un'isometria piana non identica che trasformi ogni retta in una retta parallela alla prima, può essere una:
A) traslazione; B) rotazione; C) simmetria assiale; D) rototraslazione; E) glissosimmetria.
Individua tutte le risposte corrette e fornisci un'esauriente motivazione delle scelte operate.

8. ® Un'isometria piana non identica che trasformi qualche retta r in una retta r' perpendicolare ad r può essere una:
A) traslazione; B) rotazione; C) simmetria assiale; D) rototraslazione; E) glissosimmetria.
Individua tutte le risposte corrette e fornisci un'esauriente motivazione delle scelte operate.

9. ® Ogni rototraslazione non degenere (composizione di una traslazione e di una rotazione non identiche), assegnata in un piano, trasforma:
A) ogni retta in una retta parallela;
B) ogni segmento in un segmento congruente;
C) due qualsiasi rette parallele tra loro in due rette parallele tra loro;
D) ogni angolo retto in un angolo retto.
Individua tutte le risposte corrette e fornisci un'esauriente motivazione delle scelte operate.

10. ® Tra le glissosimmetrie non degeneri (composizione di una traslazione di vettore non nullo con una simmetria assiale), assegnate in un piano, ve n'è almeno una che:
A) ha almeno un punto unito;
B) ha almeno una retta unita;
C) trasforma due rette parallele fra loro in due rette parallele fra loro;
D) trasforma un angolo retto in un angolo retto.
Individua tutte le risposte corrette e fornisci un'esauriente motivazione delle scelte operate.

11. Disegna un triangolo ABC isoscele sulla base AB e rettangolo. Disegna quindi il triangolo che si ottiene da esso facendo seguire alla rotazione di 90° intorno ad A, in senso antiorario, la traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$. Il trasformato del triangolo ABC dopo i due movimenti assume una posizione particolare rispetto al triangolo ABC: quale?

[**R**. … . Il trasformato di ABC … è il triangolo simmetrico di ABC rispetto alla retta BC]

12. Nella figura sottostante (Fig. 16) sono rappresentati il triangolo ABC, il punto A' e la retta r. Disegnare la figura che si ottiene facendo subire al triangolo dapprima la traslazione di vettore $\overrightarrow{AA'}$ e, di seguito, la simmetria assiale rispetto alla retta r.

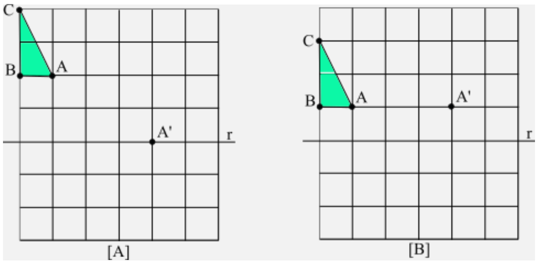

FIG. 16

13. Nella figura a fianco (Fig. 17) sono rappresentati il quadrato ABCD e la retta r. Disegnare la figura F' ottenuta facendo subire al quadrato dapprima la rotazione di 90° in senso orario intorno ad A e, di seguito, la simmetria assiale rispetto alla retta r.

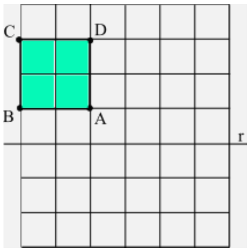

FIG. 17

14. Nella figura sottostante (Fig. 18) sono rappresentati due triangoli rettangoli uguali. I segmenti BC e A'B' sono contenuti nella stessa retta. Costruisci e descrivi un'isometria che trasformi il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'.

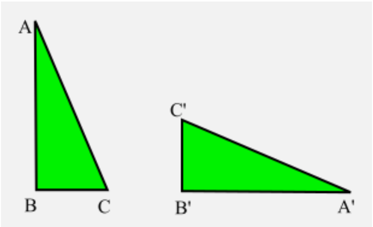

FIG. 18

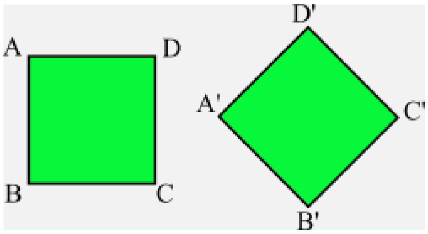

FIG. 19

15. Nella figura sovrastante (Fig. 19) sono rappresentati due quadrati uguali. Le rette AB e A'C' sono perpendicolari. Costruisci e descrivi un'isometria che trasformi il quadrato ABCD nel quadrato A'B'C'D'.

16. Sono dati una figura F, un vettore $\vec{v}$ e una retta r. Siano poi τ la traslazione di vettore $\vec{v}$ e σ la simmetria assiale rispetto alla retta r.
   a) Di norma risulta $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$: provalo assumendo che F sia un triangolo.
   b) Esiste una situazione particolare in cui $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$: qual è questa situazione? Verificalo nel caso in cui F è un triangolo.

17. Elencare tutti i movimenti (compresa l'identità) che mutano:
   - un rettangolo in se stesso;
   - un rombo in se stesso;
   - la figura formata da due rette perpendicolari in se stessa.

   In ognuna delle tre situazioni compilare la tabella di composizione dei movimenti. Si nota qualche particolarità interessante?

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Si considerino l'insieme delle rotazioni di dato centro, quello delle traslazioni e l'insieme delle simmetrie assiali. È vero che ognuno di essi è chiuso rispetto all'operazione prodotto?
2. Cos'è una rototraslazione? È vero che si tratta di un'isometria diretta?
3. Cos'è una glissosimmetria? È vero che si tratta di un'isometria diretta?

4. Quale trasformazione si ottiene componendo due simmetrie assiali? Questa trasformazione può essere una simmetria assiale?
5. Quante e quali simmetrie assiali bisogna comporre per ottenere una simmetria centrale?
6. Si considerino le seguenti trasformazioni geometriche: traslazione, rotazione, simmetria centrale, simmetria assiale, rototraslazione, glissosimmetria. Fra esse ve ne sono di quelle che trasformano due qualsiasi rette parallele in due rette parallele? Ve ne sono di quelle che trasformano ogni retta in una retta parallela alla prima?
7. Si considerino una traslazione T, una rotazione R di dato centro ed una simmetria assiale A. Una figura F è sottoposta alla trasformazione $T \circ R$ e successivamente alla simmetria assiale A ed è così trasformata nella figura F'. Alla stessa figura F si fa subire dapprima la traslazione T e successivamente la trasformazione $R \circ A$, ottenendo la figura F". È vero che F' ed F" sono la stessa figura?
8. Quanti e quali sono i movimenti che, lasciando fermo un vertice, mutano un quadrato in se stesso?

RISPOSTE.

1. No. Sono chiusi l'insieme delle rotazioni e quello delle traslazioni, ma non l'insieme delle simmetrie assiali. Il prodotto di due simmetrie assiali, infatti, non è una simmetria assiale ma una rotazione (se i due assi di simmetria sono incidenti) o una traslazione (se i due assi sono paralleli).
2. Una rototraslazione è la composizione di una rotazione con una traslazione o di una traslazione con una rotazione. Si tratta in ogni caso di un'isometria, giacché è possibile dimostrare che lascia invariate le distanze. Ed è un'isometria diretta poiché lascia invariato il senso di rotazione degli angoli.
3. Una glissosimmetria è la composizione di una simmetria assiale con una traslazione o di una traslazione con una simmetria assiale. Si tratta in ogni caso di un'isometria, giacché è possibile dimostrare che lascia invariate le distanze. Ma non è un'isometria diretta, bensì speculare, poiché inverte il senso di rotazione degli angoli.
4. Dipende dalle posizioni reciproche degli assi di simmetria, a ed a'.
   a) Se a ed a' sono parallele (in senso stretto), allora la trasformazione prodotto è una traslazione.
   b) Se a ed a' sono incidenti, allora la trasformazione prodotto è una rotazione (in particolare è una simmetria centrale se a ed a' sono perpendicolari).
   c) Siccome non sono possibili altre posizioni delle rette a ed a', che naturalmente sono considerate distinte, ne discende che la trasformazione prodotto non potrà essere una simmetria assiale.
5. Bisogna comporre due simmetrie assiali con assi perpendicolari.
6. Tutte le trasformazioni geometriche considerate sono isometrie e perciò, come ogni isometria, trasformano rette parallele in rette parallele. Fra tali isometrie, però, solo la traslazione e la simmetria centrale trasformano ogni retta in una retta parallela.
7. Sì, è vero, in virtù del fatto che le trasformazioni in gioco sono tutte isometrie e nell'insieme delle isometrie, chiuso rispetto all'operazione prodotto, vale la proprietà associativa di questa operazione.
8. I movimenti che, lasciando fisso un vertice di un quadrato, lo mutano in se stesso sono l'identità e la simmetria rispetto alla diagonale del quadrato passante per il vertice fisso. Possono essere concepite anche come rotazioni intorno alla diagonale del quadrato passante per quel vertice e precisamente le rotazioni di ampiezze 0° (identità) e 180°.