Rette nel piano cartesiano

Unità 19

Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le tecniche di calcolo numerico e letterale.
- Avere consapevolezza dei concetti fondamentali della geometria piana (in particolare: punto medio di un segmento, bisettrice di un angolo, parallelismo, perpendicolarità, parallelogrammi, distanze, vettori piani, isometrie particolari, teoremi di Pitagora e di Euclide).
- Saper risolvere semplici equazioni di 1° grado

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *rappresentare una retta in un piano cartesiano*
- *enunciare e dimostrare la condizione di parallelismo di due rette*
- *enunciare e dimostrare la condizione di perpendicolarità di due rette*
- *trovare le equazioni della retta parallela e di quella perpendicolare ad una retta data condotte per un punto dato*
- *scrivere la formula della distanza di un punto di date coordinate da una retta di data equazione*
- *calcolare l'area di un triangolo di cui sono assegnate le coordinate dei vertici*
- *risolvere problemi di geometria nel piano cartesiano*

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

N.B.: In qualche dimostrazione ed in qualche esercizio si presuppone di saper risolvere questioni del genere seguente: «Dati due numeri reali a, b, trovare un numero reale x tale che ax=b oppure a+x=b». Non occorre uno studio preventivo della teoria delle equazioni (che tuttavia non si esclude). Basta infatti il semplice ricorso alle proprietà delle operazioni con i numeri reali.

19.1 LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

19.1.1 Nell'unità 11 – Funzioni e grafici – ci siamo occupati, in maniera empirica, intuitiva, della rappresentazione grafica, in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), della funzione:

$$y = a\,x + b\,,$$

dove a, b sono numeri reali assegnati, con $a\neq 0$, ed x è una variabile reale. Abbiamo ivi concluso che la funzione $y=ax+b$ rappresenta una retta. Lo abbiamo fatto osservando che attribuendo valori qualsiasi x_1, x_2, x_3, … alla variabile x e calcolando i corrispondenti valori y_1, y_2, y_3, … di y, i punti ottenuti:

$$(x_1, y_1),\ \ (x_2, y_2),\ \ (x_3, y_3),\ \ \ldots$$

"sembrano" stare su una retta.

Adesso, non solo vogliamo dare una veste razionale a questo fatto, ma ci proponiamo anche di approfondire l'argomento, facendo vedere, tra le altre cose, che i punti di una retta del piano cartesiano (Oxy) hanno coordinate (x,y) che non necessariamente soddisfano ad una relazione del tipo $y=ax+b$.

Diciamo, intanto, che questa relazione – che, lo ripetiamo, rappresenta in forma sintetica l'insieme dei punti (x,y) che con le loro coordinate la soddisfano – si dice anche **equazione della retta** che rappresenta.

Lo ripetiamo: non è detto che tutte le rette abbiano un'equazione di quel tipo.

Ma procediamo con ordine.

19.1.2 In un piano cartesiano ortogonale (Oxy), consideriamo i due punti distinti, A e B, aventi la stessa ascissa h ed ovviamente ordinate diverse y_A e y_B. Dunque i due punti (Fig. 1): $A(h, y_A)$ e $B(h, y_B)$.

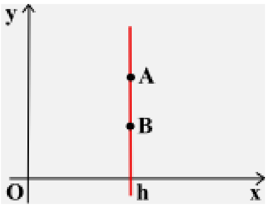

FIG. 1

È evidente che, essendo la retta r dei punti A, B parallela all'asse y, ogni suo punto P ha ascissa h e, viceversa, ogni punto di ascissa h appartiene ad r. Sicché ogni punto di r ha coordinate (x,y) che soddisfano alla condizione $x=h$ e ogni punto, le cui coordinate soddisfano a questa condizione, appartiene ad r. In conclusione:

Ogni retta parallela all'asse y ha un'equazione del tipo:

[1] $$\mathbf{x = h}$$

e, viceversa, ogni equazione di questo tipo rappresenta una retta parallela all'asse y.

In particolare: **l'asse y ha equazione x = 0**.

19.1.3 Supponiamo, invece, che i due punti distinti, $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$, non si trovino su una parallela all'asse y (Fig. 2). Come dire: $x_A\neq x_B$.

Indicato con P(x,y) un generico punto della loro retta r, i due vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ differiscono, al più, per modulo e verso, ma hanno certamente la stessa direzione; per cui risulta: $\overrightarrow{AP}=k\,\overrightarrow{AB}$, dove $k\in\mathbb{R}_0$. Poiché: $\overrightarrow{AP}\,(x-x_A,\ y-y_A)$ e $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A,\ y_B-y_A)$, deve essere:

$$x - x_A = k(x_B - x_A),\ \ y - y_A = k(y_B - y_A)\ .$$

Da qui, effettuando il rapporto membro a membro fra la seconda uguaglianza e la prima, segue:

[**2**] $$\mathbf{\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}\,.$$

Così abbiamo dimostrato che: ogni punto appartenente alla retta AB, non parallela all'asse y, ha coordinate (x,y) che soddisfano alla [2].

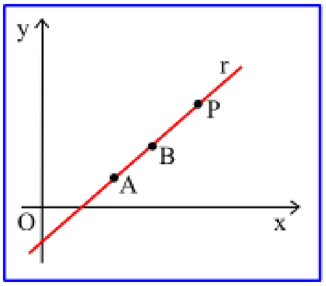

FIG. 2

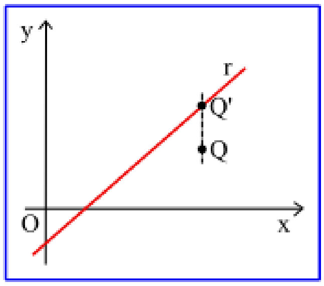

FIG. 3

Ciò di per sé non è sufficiente per farci concludere che la [2] è l'equazione di una retta. Bisogna, infatti, provare che: ogni punto di coordinate (x,y), soddisfacenti alla condizione [2], appartiene alla retta AB.

Questo, in effetti, si dimostra. Noi, per la precisione, invece di dimostrare quella implicazione, dimostriamo la sua contronominale, vale a dire: se un punto non appartiene alla retta r=AB, le sue coordinate non soddisfano alla [2].

Detto allora $Q(x_Q,y_Q)$ un punto non appartenente alla retta r (Fig. 3), sia Q' il punto di r avente la stessa ascissa di Q; vale a dire: $Q'(x_Q,y_{Q'})$.

Poiché $Q'\in r$, le sue coordinate soddisfano all'equazione [2]:

$$\frac{y_{Q'}-y_A}{x_{Q'}-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\,.$$

D'altronde $Q'\neq Q$ e perciò $y_{Q'}\neq y_Q$; di conseguenza:

$$\frac{y_Q-y_A}{x_Q-x_A}\neq\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\,.$$

Ossia le coordinate di Q non soddisfano alla [2]. Ciò che si voleva dimostrare.

Adesso possiamo veramente concludere:

L'equazione:

[**2**] $$\mathbf{\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}\,.$$

rappresenta la retta passante per i punti $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ non appartenenti ad una parallela all'asse y, ossia tali che $x_A\neq x_B$.

19.1.4 L'equazione [2], dopo alcuni passaggi algebrici, può mettersi nella forma seguente:

[3] $$\mathbf{y=m\,x+n}\,,$$

dove si è posto:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\,,\quad n=\frac{x_By_A-x_Ay_B}{x_B-x_A}\,.$$

Infatti, dalla [2], con passaggi successivi, si ottiene via via:

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A),\qquad y=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x+y_A-\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x_A,$$

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{y_A(x_B - x_A) - (y_B - y_A)x_A}{x_B - x_A}, \qquad y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}.$$

I due numeri reali m, n hanno un preciso significato geometrico:

- Il numero n è il valore di y, calcolato dalla [3], quando ad x si attribuisce il valore 0. In altri termini, è l'ordinata del punto N della retta la cui è ascissa è 0 (Fig. 4). Si chiama ***ordinata all'origine***.

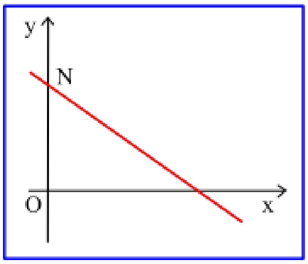

FIG. 4

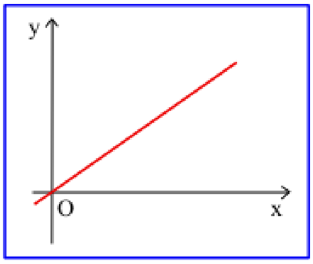

FIG. 5

  È di tutta evidenza che se $n=0$ la retta passa per O (Fig. 5) ed ha equazione:

  $$\mathbf{y = m\,x}\,.$$

  Come sai già, questa equazione esprime la *legge della proporzionalità diretta*.

- Riguardo al numero m, possiamo notare che, quanto esso è più grande in valore assoluto, tanto più la retta y=mx è inclinata sull'asse x (Fig. 6). Per questo il numero m è chiamato ***pendenza*** (o ***coefficiente angolare***) della retta. Inoltre, se consideriamo l'angolo di cui deve ruotare l'asse x in senso antiorario, intorno all'origine degli assi cartesiani, per sovrapporsi alla retta (chiamato ***angolo della retta con l'asse* x**), possiamo notare che quando la pendenza della retta è positiva quest'angolo è acuto e quand'è negativa esso è ottuso.

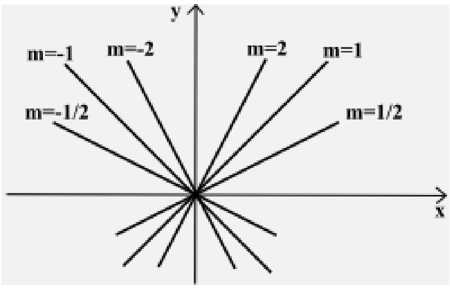

FIG. 6

Se $m=0$ la retta, parallela all'asse x, ha equazione:

$$\mathbf{y = n}\,.$$

In particolare: **l'equazione $\mathbf{y = 0}$ rappresenta l'asse x**.

19.1.5 Riassumiamo.

L'insieme delle rette del piano cartesiano (Oxy) è rappresentato dalle equazioni seguenti:

$$\mathbf{y = m\,x + n}: \text{ rette non parallele all'asse y},$$

$$\mathbf{x = h}: \text{ rette parallele all'asse y},$$

dove m, n, h sono numeri reali qualsiasi.

Ora, come si comprende facilmente, queste due equazioni sono casi particolari di quest'altra:

$$\mathbf{a\,x + b\,y + c = 0}\,;$$

la prima ottenuta per b≠0, la seconda per b=0.
Pertanto quest'ultima equazione, nella quale a, b, c sono numeri reali qualunque, purché a, b non contemporaneamente nulli, rappresenta l'insieme delle rette del piano cartesiano (Oxy).

Facciamo notare tuttavia che, mentre fissata una terna ordinata di numeri reali (a,b,c), con a, b non contemporaneamente nulli, è determinata la retta di equazione:

$$a\,x + b\,y + c = 0\,,$$

fissata, al contrario, una retta, non c'è una sola terna ordinata di numeri reali (a,b,c) che la determina.
Per comprendere questo fatto, basta pensare alle terne seguenti:

$$(2,3,4),\ (6,9,12),\ \left(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}\right).$$

La prima conduce alla retta di equazione: $2\,x + 3\,y + 4 = 0$.
La seconda alla retta di equazione: $6\,x + 9\,y + 12 = 0$.
La terza alla retta di equazione: $2\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$.
Si tratta evidentemente della stessa retta, dal momento che la seconda equazione si ottiene dalla prima dopo aver moltiplicato per 3 i suoi due membri e la terza dopo averli moltiplicati per $\sqrt{3}$.
Insomma, è vero che ad una retta non corrisponde una sola terna di numeri reali (a,b,c), ma due terne diverse differiscono soltanto per un fattore costante diverso da 0 e da 1, cioè i numeri di una terna si ottengono dai corrispondenti numeri dell'altra dopo averli moltiplicati per un fattore costante diverso da 0 e da 1. Perciò, se supponiamo che i numeri che compongono la terna (a,b,c) non abbiano fattori comuni diversi da 1, (se a, b, c fossero numeri naturali, diremmo che essi sono numeri primi tra loro), ad ogni retta corrisponde una ed una soltanto di tali terne.

Ti proponiamo il seguente esercizio.
Trovare i valori dei parametri reali a, b, c in modo che la retta di equazione ax+by+c=0 passi per i punti P, Q, assegnati in un piano cartesiano (Oxy), sapendo che:

a) $P(1,2),\ \ Q(3,5)$. b) $P\left(\frac{1}{2},-1\right),\ \ Q(-2,1)$.

Per indicare che una retta r ha equazione, mettiamo, ax+by+c=0, ci serviremo a volte della seguente scrittura simbolica:

$$r \equiv a\,x + b\,y + c = 0$$

e leggiamo: «la retta r di equazione ax+by+c=0».

19.1.6 ESERCIZI.

1. Spiegare se i punti A, B, C sono allineati (cioè appartengono alla stessa retta) o se non lo sono.

a) $A(2,-1),\ B\left(\frac{3}{2},-2\right),\ C(7,9)$. *b)* $A(0,32),\ B\left(\frac{25}{32},0\right),\ C\left(\frac{1}{5},28\right)$.

c) $A(2,36),\ B\left(-\frac{1}{3},15\right),\ C(-4,-18)$.

2. Determinare l'equazione della retta passante per i punti A, B sapendo che:

a) $A(-2,3),\ B(-2,4)$. *b)* $A\left(\frac{5}{2},0\right),\ B\left(\frac{5}{2},-3\right)$.

c) $A(1,0),\ B(-2,0)$. *d)* $A(-2,-2),\ B(0,-2)$.

e) $A(1,2),\ B\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. *f)* $A\left(3,-\frac{1}{3}\right),\ B\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$.

g) $A(0,-2),\ B\left(\frac{5}{3},-1\right)$. *h*) $A\left(\frac{3}{4},-1\right),\ B(2,-3)$.

3. Determinare le equazioni delle rette dei lati del triangolo ABC sapendo che:

a) $A(-1,2),\ B(2,-1),\ C(-1,4)$. *b*) $A\left(\frac{3}{2},0\right),\ B\left(0,\frac{2}{3}\right),\ C(0,-1)$.

c) $A\left(-\frac{1}{2},1\right),\ B\left(-1,\frac{2}{5}\right),\ C(0,0)$. *d*) $A\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right),\ B(1,0),\ C\left(-2,\frac{3}{2}\right)$.

4. Trovare l'equazione della retta di coefficiente angolare m e passante per il punto A sapendo che:

a) $m=1,\ A(0{,}0)$. *b*) $m=\frac{1}{2},\ A\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.

c) $m=-\frac{2}{3},\ A\left(-\frac{1}{4},2\right)$. *d*) $m=\sqrt{2},\ A(\sqrt{2},-1)$.

19.2 RETTE PARALLELE

19.2.1 Esprimendoci con un linguaggio più preciso di quello usato in precedenza, dovremmo dire che l'equazione $x=h$, con $h\in\mathbb{R}$, rappresenta l'insieme delle rette parallele all'asse y. Con abuso di linguaggio, diciamo che queste rette hanno pendenza "infinita".

Parimenti, l'equazione $y=n$, con $n\in\mathbb{R}$, rappresenta l'insieme delle rette parallele all'asse x. La loro pendenza è 0.

Di modo che, quando due rette hanno equazioni di uno dei due tipi suddetti, purché dello stesso tipo, è immediato concludere che sono parallele.

Così pure è facile determinare le equazioni delle due rette, una parallela all'asse y ed una parallela all'asse x, condotte per un dato punto.

A titolo di esempio, le due rette parallele agli assi cartesiani condotte per il punto A(3, 1) hanno le seguenti equazioni (Fig. 7): $x=3$, $y=1$.

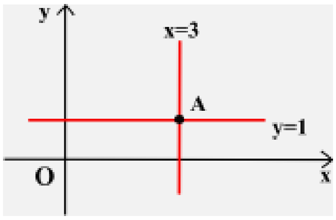

FIG. 7

19.2.2 Se <u>le rette non sono parallele agli assi di riferimento</u>, il riconoscimento del loro eventuale parallelismo è pure semplice, ma non altrettanto immediata ne è la spiegazione.

Ad ogni modo consideriamo le due rette:

$$r\equiv y=m\,x+n\,,\quad r'\equiv y=m'\,x+n'.$$

Intuitivamente ci rendiamo conto che, se sono parallele, hanno la stessa pendenza e, viceversa, se hanno la stessa pendenza sono parallele. Come dire:

$$\mathbf{r \parallel r' \leftrightarrow m = m'}\,.$$

Ma questa non è una dimostrazione, anche se siamo fortemente convinti che così deve essere.

Vediamola allora una dimostrazione della doppia implicazione suddetta. Implicazione che esprime il seguente teorema:

- TEOREMA.

Due rette sono parallele se e solo se hanno uguale pendenza.

DIMOSTRAZIONE. Poggia sul fatto – noto dallo studio della geometria elementare – che una traslazione trasforma una retta in una retta parallela.

Consideriamo, allora, la traslazione di componenti (x_0,y_0); essa ha le seguenti equazioni:

$$x' - x = x_0\,,\quad y' - y = y_0\,.$$

Supponiamo, ora, che una data retta r abbia equazione:

$$y = m\,x + n\,.$$

Intanto è certo che la sua trasformata, in base alla traslazione, è una retta s parallela ad r.

- Dimostriamo che le due rette parallele r ed s hanno la stessa pendenza.

A tal proposito troviamo l'equazione della retta s, trasformata di r. Per questo dobbiamo sostituire nell'equazione di r, al posto di x ed y, le loro espressioni ottenute dalle precedenti equazioni della traslazione, vale a dire:

$$x = x' - x_0\,,\quad y = y' - y_0\,.$$

L'equazione di s è allora la seguente:

$$y' - y_0 = m\,(x' - x_0),\quad \text{ossia: } y' = m\,x' + (y_0 - m\,x_0 + n);$$

o anche, indicando, come siamo soliti fare, con x ed y – invece che con x' ed y' – le coordinate correnti, cioè le coordinate del generico punto del piano:

$$y = m\,x + (y_0 - m\,x_0 + n)\,.$$

Si può notare che la pendenza di s è effettivamente m, la stessa di r.

Dunque:

Due rette parallele hanno la stessa pendenza.

- Consideriamo adesso due rette r, s aventi la stessa pendenza m. Dimostriamo che sono parallele.

Le loro equazioni siano le seguenti:

$$r \equiv y = m\,x + n,\qquad s \equiv y = m\,x + n'.$$

Se dimostriamo che esiste una traslazione che trasforma la prima nella seconda, dobbiamo concludere che, di fatto, le due rette sono parallele.

Ora, come visto sopra, la trasformata della retta r secondo la traslazione di componenti (x_0,y_0) è la retta di equazione:

$$y = m\,x + (y_0 - m\,x_0 + n)\,.$$

Questa coincide evidentemente con la retta s se risulta:

$$n' = y_0 - m\,x_0 + n\,.$$

Quindi, fissata arbitrariamente la componente x_0, basta scegliere y_0 uguale ad $n'+mx_0-n$ perché la traslazione di componenti (x_0,y_0) trasformi r in s. Ne deriva che $r \parallel s$. Perciò:

Due rette aventi la stessa pendenza sono parallele.

Il teorema è così dimostrato.

19.2.3 Vediamo alcuni esercizi sull'argomento.

- ESERCIZIO 1. Trovare l'equazione della retta r passante per il punto $A(x_A,y_A)$ e parallela alla retta $s \equiv y=mx+n$.

RISOLUZIONE. Poiché r è parallela ad s la sua equazione è del tipo:

$$y = m\,x + p.$$

Siccome $A \in r$ le sue coordinate devono soddisfare a quest'equazione; perciò:

$$y_A = m\,x_A + p.$$

Da questa relazione ricaviamo p e sostituiamo il valore ottenuto, $p = y_A - m\,x_A$, nella prima. Otteniamo:

$$y = m\,x + (y_A - m\,x_A),$$

o anche, scritto in forma equivalente:

$$\mathbf{y - y_A = m\,(x - x_A)}\,.$$

Questa è l'equazione cercata.
Più in generale:

L'equazione:

$$\mathbf{y - y_A = m\,(x - x_A)}$$

esprime l'equazione della retta passante per il punto $A(x_A, y_A)$ ed avente pendenza assegnata m.

- ESERCIZIO 2. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le rette di equazione:

$$y = (a-1)x + (2a+1)\,,$$

dove alla lettera a può essere attribuito ogni valore reale (si dice che a è un *parametro reale*). Calcolare per quale valore di a si ottiene una retta parallela a quella passante per i punti $A(-1, 2)$ e $B(3, 1)$ e determinare la sua equazione.

RISOLUZIONE. Affinché si abbia una retta parallela ad AB occorre che la pendenza della generica retta assegnata, cioè $a-1$, sia uguale alla pendenza m_{AB} di AB. Siccome:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{3+1} = -\frac{1}{4},$$

deve risultare: $a-1 = -\frac{1}{4}$, ossia: $a = \frac{3}{4}$. Per questo valore di a, sostituito nell'equazione assegnata, si ottiene l'equazione della retta parallela ad AB. Precisamente:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}.$$

- ESERCIZI DA RISOLVERE.

1. Per ciascuna delle seguenti coppie di rette segnare la lettera V se le rette sono parallele e la lettera F se non lo sono:
   a) $x=2;\ 2x=1.$ V F
   b) $y+3=0,\ 3y+1=0.$ V F
   c) $y=3x,\ y=3.$ V F
   d) $2x-y=0,\ 4x-2y+1=0.$ V F
   e) $y=2x-1,\ 2x-y-1=0.$ V F

2. Per il punto *A* condurre la parallela alla retta r sapendo che:

a) $A(2,1),\ r \equiv x = 3.$ b) $A(1,-2),\ r \equiv 2y - 1 = 0.$ c) $A\left(\frac{1}{4},-4\right),\ r \equiv y = x.$

d) $A\left(-1,\frac{1}{2}\right),\ r \equiv y = 2x + \frac{5}{2}.$ e) $A\left(\frac{1}{2},-2\right),\ r \equiv 2x + 3y - 1 = 0.$

3. Trovare i valori dei parametri reali a, b per i quali la retta di equazione $ax+by+1=0$ risulta parallela alla retta r, sapendo che:

a) $r \equiv 2x+3y+2=0.$ b) $r \equiv y=2x+4.$

$\left[\mathbf{R}.\ \text{a) Deve risultare } \frac{a}{b}=\frac{2}{3}\text{, vale a dire } \frac{a}{2}=\frac{b}{3}\text{; quindi, indicato con k il valore uguale di questi due rapporti, deve essere } a=2k, b=3k\text{, dove k è un qualsiasi numero reale non nullo. b) …}\right]$

19.3 RETTE PERPENDICOLARI

19.3.1 Se una retta – assegnata in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) – ha equazione del tipo $x=h$, se cioè è parallela all'asse y, è evidente che ogni perpendicolare ad essa è parallela all'asse x, per cui ha equazione del tipo $y=k$.

Viceversa, ogni perpendicolare ad una retta del tipo $y=k$ ha equazione del tipo $x=h$.

Il problema sorge quando le rette non sono parallele agli assi di riferimento. In questo caso vale il seguente teorema.

- TEOREMA.

Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette – non parallele agli assi cartesiani ortogonali di riferimento – siano perpendicolari è che il prodotto delle loro pendenze sia uguale a –1.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitare la dimostrazione al caso in cui le due rette passano per l'origine O del riferimento (Oxy). Se infatti così non fosse, basterebbe prendere le parallele ad esse condotte appunto per O. Siano allora le due rette (Fig. 8):

$$r \equiv y = m x\,,\quad r' \equiv y = m' x\,.$$

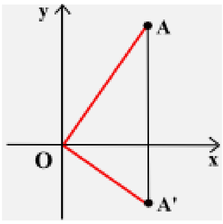

FIG. 8

Prendiamo i punti $A\in r$ ed $A'\in r'$ in modo che sia $x_A = x_{A'} = 1$. Per cui: $A(1,m)$, $A'(1,m')$.

Osserviamo anzitutto che si ha:

$$\overline{OA}^2=1+m^2,\quad \overline{OA'}^2=1+m'^2,\quad \overline{AA'}^2=(m-m')^2=m^2+m'^2-2mm'.$$

Ora, se r è perpendicolare ad r', il triangolo AOA' è rettangolo in O; per cui, in virtù del teorema di Pitagora, risulta: $\overline{OA}^2+\overline{OA'}^2=\overline{AA'}^2$, da cui segue:

$$\left(1+m^2\right)+\left(1+m'^2\right)=m^2+m'^2-2mm',$$

ossia, dopo aver semplificato:

$$m\,m' = -1.$$

Dunque la condizione è necessaria.

Viceversa, se $mm'=-1$, si ha:

$$\overline{AA'}^2=m^2+m'^2-2(-1)=m^2+m'^2+2$$

e perciò: $\overline{OA}^2+\overline{OA'}^2=\overline{AA'}^2$; cosicché, per il teorema inverso del teorema di Pitagora, il triangolo AOA' risulta rettangolo in O e, di conseguenza r è perpendicolare ad r'.

Dunque la condizione è sufficiente.

In conclusione:

$$\mathbf{r \perp r' \leftrightarrow mm' = -1}$$

ma solo se né r né r’ sono perpendicolari agli assi di riferimento.

19.3.2 Ti presentiamo adesso un esercizio risolto sulla base delle conoscenze precedenti. Poi ti proporremo alcuni esercizi da risolvere.

- ESERCIZIO. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), trovare l’equazione della retta r passante per il punto $P\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ e perpendicolare alla retta s di equazione $y=-\frac{1}{3}x+2$.

RISOLUZIONE. La pendenza m della retta r è tale che $m\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$, per cui $m=3$. La retta r ha dunque equazione: $y-y_P=m(x-x_P)$, ossia: $y-2=3\left(x+\frac{1}{2}\right)$, da cui segue: $y=3x+\frac{7}{2}$.

Sei invitato a disegnare le due rette.

- ESERCIZI DA RISOLVERE.

1. Condurre la perpendicolare alla retta r per il punto A, sapendo che:

a) $r \equiv 2x+1=0,\ A\left(2,\frac{1}{2}\right)$. b) $r \equiv 2y-3=0,\ A\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

c) $r \equiv x-2y=0,\ A\left(\frac{1}{2},-1\right)$. d) $r \equiv 3x-2y-1=0,\ A\left(-\frac{1}{2},-2\right)$.

[**R.** … ; c) $2x+y=0$; d) $2x+3y+7=0$]

2. Sono assegnate le rette di equazione:

$$(m-1)\,x-(2\,m+1)\,y-(m+2)=0\ ,$$

dove m è un parametro reale. Tra di esse determinare quella che è perpendicolare:

a) all’asse x; b) all’asse y; c) alla retta $3\,x+2\,y-1=0$.

Disegnare sullo stesso piano le rette trovate.

[**R.** a) $x=-1$; b) …; c) $2x-3y-1=0$.]

3. Seguendo i due procedimenti descritti sotto, determinare l’equazione dell’**asse del segmento** AB, sapendo che:

a) $A(2,3),\ B(-4,3)$. b) $A(1,-2),\ B(1,5)$.

c) $A(2,1),\ B\left(-\frac{1}{2},2\right)$. d) $A\left(-\frac{2}{3},-1\right),\ B\left(\frac{1}{3},-2\right)$.

Uno dei due procedimenti è basato sulla definizione di asse di un segmento (*retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio*) e l’altro su una proprietà che lo caratterizza come luogo geometrico (*luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento*).

[**R.** … ; d) $3x-3y-4=0$.]

4. Trovare i valori dei parametri reali a, b per i quali la retta di equazione $ax+by+1=0$ risulta perpendicolare alla retta r, sapendo che:

a) $r \equiv 2x+3y+2=0$. b) $r \equiv y=2x+4$.

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{R.}\ \text{a) Deve risultare } \frac{a}{b}\cdot\frac{2}{3}=-1\text{, vale a dire } \frac{a}{b}=-\frac{3}{2}\text{, ossia: } \frac{a}{3}=\frac{b}{-2}\text{; quindi, indicato con k il valore}\\ \text{uguale di questi due rapporti, deve essere } a=3k, b=-2k,\\ \text{dove k è un qualsiasi numero reale non nullo. b) …}\end{array}\right]$$

19.3.3 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati il punto $A(x_A,y_A)$ e la retta $r \equiv ax+by+c=0$. Ci proponiamo di determinare la **distanza del punto dalla retta**.

Tralasciamo l’ipotesi banale che r sia parallela ad uno degli assi coordinati: di questo caso ti puoi occupare personalmente.

Supponiamo allora che la retta r non sia parallela né all'asse x né all'asse y. La distanza di A da r, indicata con dist(A,r) o anche con d(A,r), potrebbe essere calcolata seguendo questo procedimento:

- si trova l'equazione della retta p passante per A e perpendicolare ad r;
- si determinano le coordinate del punto H in cui p seca r;
- si calcola dist(P,H) che è precisamente uguale a dist(A,r).

Si tratta di un procedimento piuttosto laborioso (che potrai seguire, peraltro, solo dopo che avrai imparato come si trova il punto intersezione di due rette) per un risultato che, invece, può essere conseguito rapidamente applicando una semplice formula, la seguente:

[**4**]
$$\mathbf{dist}(\mathbf{A},\mathbf{r}) = \frac{|\mathbf{ax_A} + \mathbf{bx_B} + \mathbf{c}|}{\sqrt{\mathbf{a^2} + \mathbf{b^2}}}.$$

Questa formula, però, deve essere dimostrata. È esattamente quello che andiamo a fare.

19.3.4 Supponiamo in un primo momento che il punto A coincida con l'origine O del sistema cartesiano di riferimento (Fig. 9). Chiamati M ed N i punti in cui r seca l'asse x e l'asse y rispettivamente, dist(A,r) è uguale alla misura dell'altezza AH relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo AMN. Per cui:

$$\mathrm{dist(A,r)}=\frac{\overline{\mathrm{AM}}\cdot\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{MN}}}.$$

Si trova abbastanza agevolmente che:

$$\overline{\mathrm{AM}}=|x_M|=\left|\frac{c}{a}\right|,\quad \overline{\mathrm{AN}}=|y_N|=\left|\frac{c}{b}\right|,\quad \overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{AN}}^2}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}}=\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2};$$

di conseguenza:

$$\mathrm{dist(A,r)}=\frac{\left|\frac{c}{a}\right|\left|\frac{c}{b}\right|}{\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}},$$

da cui infine:

[5]
$$\mathbf{dist}(\mathbf{A},\mathbf{r}) = \frac{|\mathbf{c}|}{\sqrt{\mathbf{a^2} + \mathbf{b^2}}}.$$

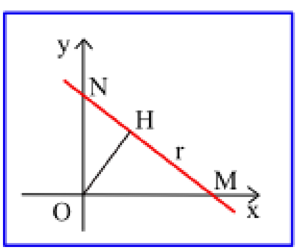

FIG. 9

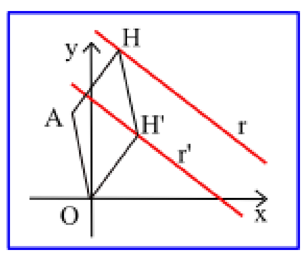

FIG. 10

Se A≠O consideriamo la traslazione di vettore $\overrightarrow{AO}$ che porta il punto $A(x_A, y_A)$ in O (Fig. 10). Poiché $\overrightarrow{AO}$ $(-x_A, -y_A)$, le equazioni di questa traslazione sono:

$$x' - x = - x_A,\quad y' - y = - x_A.$$

In base ad esse, scritte naturalmente in questa forma equivalente:

$$x = x' + x_A,\quad y = y' + y_A,$$

la retta r viene trasformata nella retta r' di equazione:

$$a\,(x'+x_A) + b\,(y'+y_A) + c = 0\,,$$

ossia, ridotta a forma normale:

$$a\,x' + b\,y' + (a\,x_A + b\,y_A + c) = 0\,.$$

Siccome la traslazione è un'isometria e, per questo, lascia invariate le distanze dei punti, risulta dist(A,r)=dist(O,r') e dunque, in virtù della [5], segue la [4]:

$$\text{dist}(A,r)=\frac{|ax_A+bx_B+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

19.3.5 ESERCIZI.

1. Calcolare $d(A,r)$ sapendo che:

a) $A\left(0,\frac{1}{2}\right),\ r\equiv 2x+3=0.$ b) $A\left(\frac{1}{3},-1\right),\ r\equiv y=2.$

c) $A\left(-1,\frac{1}{2}\right),\ r\equiv x-2y+3=0.$ d) $A\left(-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right),\ r\equiv y=-x-1.$

$\left[\textbf{R.}\ \ldots\,;\ d)\ \frac{\sqrt{2}}{12}\right]$

2. Dopo aver controllato che le due rette a, b sono parallele, calcolare la loro distanza, sapendo che:

a) $a\equiv 2x-1=0,\ b\equiv 3x+2=0.$ b) $a\equiv 4y+3=0,\ b\equiv 2y+1=0.$

c) $a\equiv 2x-3y=0,\ b\equiv 2x-3y+6=0.$ d) $a\equiv 3x-4y+1=0,\ b\equiv 6x-8y-3=0.$

[**R.** Si ricorda che la distanza di due rette parallele è uguale alla distanza di un qualunque punto dell'una retta dall'altra. ... ; d) 1/2]

LABORATORIO DI MATEMATICA.

Ricorda la definizione di bisettrice di un angolo:

La bisettrice di un angolo è la semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e lo divide in due parti congruenti.

Dimostra con considerazioni di geometria sintetica che:

La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

Dimostra con considerazioni di geometria sintetica che:

Le bisettrici degli angoli apposti al vertice sono perpendicolari.

Sulla scorta delle informazioni ottenute, tenendo presente la formula della distanza di un punto da una retta, prova a risolvere le seguenti questioni, una volta riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Trova le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette a, b e verifica che sono perpendicolari, sapendo che:

1) $a\equiv x=2,\ b\equiv y=3.$ 2) $a\equiv 2x-1=0,\ b\equiv 5x-12y=0.$

3) $a\equiv x+y=0,\ b\equiv x-y=0.$ 4) $a\equiv 3x+4y=0,\ b\equiv 6x-8y+1=0.$

[**R.** ... ; 2) $16x+24y-13=0,\ 36x-24y-13=0$; ...]

Trova infine le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dagli assi cartesiani.

19.4 EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA

19.4.1 Ritorniamo su quella che possiamo definire ***equazione vettoriale della retta passante per due punti*** A e B, vale a dire, indicato con P un generico punto:

$$\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AB}, \quad \text{dove } k \in \mathbb{R}_0 \;.$$

Abbiamo visto come da questa relazione, una volta indicate con (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x,y) rispettivamente le coordinate di A, B, P, si ottengono le seguenti equazioni:

$$x - x_A = k\,(x_B - x_A), \quad y - y_A = k\,(y_B - y_A)\;.$$

Da qui segue:

[6] $$x = x_A + k\,(x_B - x_A), \quad y = y_A + k\,(y_B - y_A)\;.$$

Queste equazioni esprimono la variazione delle coordinate del generico punto P della retta AB al variare del parametro reale k: sono dette ***equazioni parametriche della retta*** AB.

Una volta constatato che $(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$ sono le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ secondo gli assi cartesiani e che tale vettore è evidentemente parallelo alla retta AB, le [6] possono essere interpretate con maggior precisione come le **equazioni parametriche della retta passante per il punto A e parallela al vettore $\overrightarrow{AB}$**..

In generale, le equazioni:

[7] $$x = x_0 + kl, \; y = y_0 + km$$

dove k è un parametro reale non nullo, si chiamano le *equazioni parametriche della retta passante per il punto* (x_0, y_0) *e parallela al vettore di componenti* (l, m) *secondo gli assi cartesiani*.

19.4.2 Il passaggio dalle equazioni parametriche [7] di una retta all'equazione cartesiana è di fatto noto: si tratta, come abbiamo già visto nel precedente paragrafo 19.1.3, di calcolare k da ciascuna delle due equazioni e di uguagliare i valori ottenuti. Solitamente si dice che si elimina il parametro k fra le due equazioni. L'equazione cartesiana della retta si trova immediatamente ed è la seguente:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}\,.$$

I due numeri l, m si chiamano ***parametri direttori*** della retta.

Anche il passaggio dalla forma cartesiana della retta alle sue equazioni parametriche non è difficile. Considerata infatti una generica retta di equazione $ax+by+c=0$, si prende un suo qualsiasi punto (x_0, y_0), per cui si ha: $ax_0+by_0+c=0$. Deve essere soddisfatta pertanto la seguente relazione: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, ottenuta sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti. Da essa segue:

$$\frac{x - x_0}{-b} = \frac{y - y_0}{a}\,.$$

Ponendo ora uguale a k il rapporto uguale, risulta:

$$\frac{x - x_0}{-b} = k, \quad \frac{y - y_0}{a} = k\;.$$

Da qui seguono le equazioni parametriche cercate:

$$x = x_0 - kb, \;\; y = y_0 + ka.$$

Queste equazioni mostrano pure che i parametri direttori della retta sono rispettivamente $-b$ ed a.

NOTA BENE. Mentre è unica l'equazione cartesiana della retta di cui sono assegnate le equazioni parametriche, non è così per le equazioni parametriche ottenute dall'equazione cartesiana. E questo si capisce bene, poiché il punto sulla retta può essere scelto in infiniti modi. Nondimeno, pur potendo essere diversi fra loro, i parametri direttori differiscono gli uni dagli altri al più per un fattore costante.
Puoi verificare da solo quanto qui affermato prendendo l'equazione cartesiana di una retta e trovando le sue equazioni parametriche una volta prendendo un punto della retta ed un'altra volta prendendo un punto diverso della retta medesima.

19.4.3 Ti proponiamo adesso alcuni esercizi, avvertendo che su questo argomento non te ne saranno proposti altri nella sezione "verifiche". Senza specificarlo di volta in volta, supponiamo che il piano sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

1. Disegnare la retta r sapendo che le sue equazioni parametriche sono le seguenti:

a) $x=2+3k,\ y=3-2k.$ b) $x=3t,\ y=\frac{1}{2}t-1.$ c) $x=\frac{2}{3}m+\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{3}m+2.$

2. Trovare l'equazione cartesiana della retta r sapendo che le sue equazioni parametriche sono quelle dell'esercizio precedente. [**R.** a)…; b)…; c) $2x+4y-9=0$]

3. Trovare le equazioni parametriche della retta r sapendo che la sua equazione cartesiana è la seguente:

a) $2x-y+3=0.$ b) $3x+2y-4=0.$ c) $x+y-2=0.$

4. La retta r passa per il punto $(1, 0)$ ed è parallela al vettore di componenti $(-2, 1)$ secondo gli assi cartesiani. Trovarne le equazioni parametriche e successivamente l'equazione cartesiana.

5. La retta r passa per il punto $(2, -1)$ ed è perpendicolare al vettore di componenti $(2, -1)$ secondo gli assi cartesiani. Trovarne le equazioni parametriche e cartesiana. [**R.** … ; $2x-y-5=0$]

VERIFICHE

N.B.: ***Anche quando non è detto espressamente e però può servire, il piano si suppone riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali* (Oxy).**

1. Ogni retta ha equazione del tipo $y=ax+b$, dove a, b sono numeri reali. È vero o falso?

2. Ogni equazione del tipo $y=ax+b$, dove a, b sono numeri reali, rappresenta una retta. È vero o falso?

3. La retta passante per i punti $A(2,3)$ e $B(2,-3)$ ha equazione del tipo $y=ax+b$, dove a, b sono numeri reali. È vero o falso?

4. La retta passante per i punti $A(2,3)$ e $B(-2,3)$ ha equazione del tipo $y=ax+b$, dove a, b sono numeri reali. È vero o falso?

5. Sono assegnate le rette:

$$a \equiv y = 4^{2/3}x + 2,\quad b \equiv y = 2^{3/2}x - 2.$$

La pendenza di a è maggiore di quella di b. È vero o falso?

6. Sono assegnate le rette:

$$\text{(a)}\ \ y = (2m-1)\,x + m, \qquad \text{(b)}\ \ y = 2\,(m+1)\,x - 1,$$

dove m è un parametro reale.

Esiste almeno un valore di m cui corrispondono una retta delle (a) ed una retta delle (b) che risultino parallele. È vero o falso?

7. È assegnata la retta di equazione $y = 3^{1/2}x + 2$. Le rette ad essa perpendicolari hanno pendenza uguale a:

A) $3^{-1/2}$; B) 3^{-2}; C) $-3^{-1/2}$; D) -3^{-2}.

Una sola risposta è corretta. Individuarla.

8. È assegnata la retta di equazione $y=x\sqrt{2}+2$. Le rette ad essa perpendicolari hanno pendenza uguale a:

A) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; B) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$; C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Una sola risposta è corretta. Individuarla.

9. Sono assegnate le rette di equazione $y=(2m-1)x+2$, dove m è un parametro reale. Per ogni retta scelta fra esse, esiste fra le stesse rette la parallela alla prima.
Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

10. Sono assegnate le rette di equazione $y=(2m-1)x+2$, dove m è un parametro reale. Per ogni retta scelta fra esse, esiste fra le stesse rette la perpendicolare alla prima.
Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

11. Sono assegnati i seguenti punti:

$$A\left(-2,\frac{1}{2}\right),\ B(3,2),\ C\left(-\frac{3}{2},4\right);\qquad A'(0,1),\ B'\left(5,-\frac{1}{2}\right),\ C'\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right).$$

Verificare che i due triangoli ABC ed A'B'C' sono congruenti.

12. PROBLEMA RISOLTO. È assegnato il triangolo ABC.

a) Costruire, utilizzando i soli strumenti riga e compasso, la retta r passante per A ed equidistante dai vertici B e C, ma non parallela alla retta BC.

b) Ammesso che il piano del triangolo sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e che i vertici A, B, C abbiano coordinate rispettivamente: $(0,0)$, $(3,0)$, $(1,2)$, trovare l'equazione della retta r e verificare che effettivamente risulta equidistante da B e C.

RISOLUZIONE. Dato il triangolo ABC (Fig. 11), si consideri risolto il problema. Per cui la retta r risulta equidistante da B e C. Come dire che BH=CK. Ma allora, chiamato M il punto in cui si secano le rette r e BC, i due triangoli rettangoli BHM e CKM hanno i cateti BH e CK congruenti e così pure gli angoli in B e in C. Dunque sono congruenti. Di conseguenza: BM=CM. Cosicché M è il punto medio del lato BC.
Ne consegue la costruzione cercata: la retta r è la congiungente il punto A con il punto medio M di BC. Da qui in avanti la risoluzione è banale.

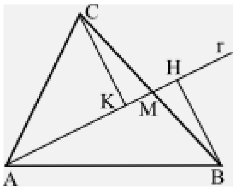

FIG. 11

13. Data la retta r, determinare le equazioni delle rette che hanno da essa distanza uguale a d, sapendo che:

a) $r\equiv x+y-1=0,\ d=\sqrt{2}$; b) $r\equiv 3x-4y=0,\ d=1$; c) $r\equiv 2x+y+2=0,\ d=2$.

[**R.** a) x+y+1=0, x+y–3=0; …]

14. Sono assegnati i punti $P(p,0)$ e $Q(0,q)$, dove p, q sono numeri reali non nulli. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché una retta passi per essi è che si possa mettere nella forma seguente, detta ***equazione segmentaria*** della retta:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1\,.$$

15. Una ditta di trasporti pratica i seguenti prezzi: 40 euro al quintale fino a 15 quintali, 25 euro per ogni quintale oltre i 15. Scrivere e rappresentare la funzione che esprime il costo y (in euro) del trasporto praticato dalla ditta per mezzo del numero x di quintali trasportati.

$$\left[\mathbf{R.}\ y=\begin{cases}40\,x & \text{per } 0<x\le 15\\ 25\,x+225 & \text{per } x>15\end{cases}\right]$$

16. È dato il quadrilatero convesso di vertici $A(4,3), B(-2,4), C(-1,-2), D(4,-1)$.

a) Trovare il numero P dei punti aventi entrambe le coordinate intere e situati sul perimetro del quadrilatero.

b) Trovare il numero I dei punti aventi entrambe le coordinate intere e situati all'interno del quadrilatero.

c) Calcolare l'area S del quadrilatero.

d) Verificare che risulta:

$$\mathbf{S = I + \frac{P}{2} - 1}\,.$$

NOTA BENE: La formula precedente vale per ogni poligono (convesso o concavo), i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere. Esprime una proprietà dei poligoni conosciuta come ***teorema di Pick***.

Prende il nome dal matematico austriaco *Georg Alexander Pick* (1859-1942), il quale pubblicò il teorema in un articolo del 1899. In realtà, il teorema fu praticamente ignorato fino al 1969, allorché il matematico polacco *Hugo Dyonizy Steinhaus* (1887-1972) lo rese famoso, dopo averlo incluso nel suo libro *Mathematical Snapshots* (*Matematica per istantanee*).

Detto per la cronaca, Pick morì, all'età di 82 anni, in un campo di concentramento, due settimane dopo esservi stato rinchiuso. Vi era stato internato dai nazisti perché di famiglia ebraica.

17. Risolvere il medesimo esercizio precedente, ma con riferimento al pentagono concavo ABCDE di vertici $A(5,6), B(3,3), C(0,5), D(0,0), E(3,0)$.

18. Nella figura sottostante (Fig. 12) è evidenziato un pentagono irregolare.

a) Calcolare la sua area.

b) Trovare le equazioni delle rette dei lati del pentagono.

c) Di ciascuno dei lati del pentagono dire qual è la pendenza.

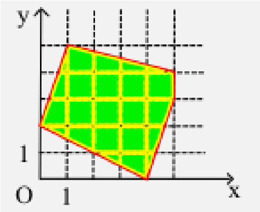

FIG. 12

19. Nell'unità 7, approcciando lo studio della geometria, abbiamo presentato una situazione paradossale. Abbiamo fatto vedere precisamente che il quadrato di figura 13, ritagliato opportunamente, può essere ricomposto nel rettangolo di figura 14.

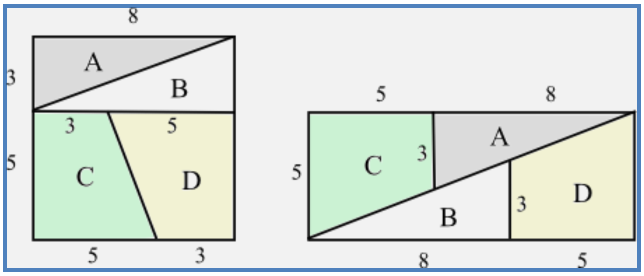

FIG. 13 FIG. 14

Il paradosso consiste nel fatto che il quadrato ha area 64, mentre il rettangolo ha area 65. E questo ovviamente non può accadere. In realtà, c'è qualcosa che non va nella costruzione del rettangolo e precisamente i pezzi non collimano lungo la diagonale. A suo tempo hai intuito questo (o ti è stato spiegato) attraverso un esperimento che comporta la costruzione materiale del rettangolo. Ora possiedi gli strumenti per darne una spiegazione razionale. Sei invitato a farlo.

20. Sono assegnati i punti $A(2,0)$ e $B(4,2)$.

a) Esistono due rette, r ed s, passanti per O ed equidistanti dai punti A e B: trovare le loro equazioni.

b) Si prendano sulle due rette r ed s i punti di ascissa 1: calcolare l'area del quadrilatero convesso avente per vertici questi punti ed i punti A e B.

$$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ y=x,\ \ y=\frac{1}{3}x;\ \ \text{b)}\ \frac{7}{3}\right]$$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

1. Ogni equazione del tipo y=ax+b, dove a, b sono parametri reali, rappresenta una retta nel piano cartesiano (Oxy). È vero o falso?

2. Ogni retta del piano cartesiano (Oxy) è rappresentata da un'equazione del tipo y=ax+b, dove a, b sono parametri reali. È vero o falso?

3. È vero che condizione necessaria e sufficiente affinché i tre punti $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$, assegnati in un piano cartesiano (Oxy), siano allineati è che risulti soddisfatta la condizione:
$$\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\ ?$$

4. Ogni retta del piano cartesiano (Oxy) è rappresentata da un'equazione del tipo ax+by+c=0, dove a, b, c sono parametri reali purché a, b non siano nulli contemporaneamente. È vero o falso?

5. Considerate le due rette r ed s di equazioni y=ax+b ed y=a'x+b', assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), la condizione a=a' è solo sufficiente, solo necessaria o necessaria e sufficiente per concludere che le due rette r ed s sono parallele?

6. Considerate le due rette r ed s di equazioni y=ax+b ed y=a'x+b', assegnate in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), quale condizione deve essere soddisfatta affinché le due rette r ed s siano perpendicolari? Si tratta di una condizione solo sufficiente, solo necessaria o necessaria e sufficiente?

7. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la retta di equazione y=–2x+1. È vero o falso che la pendenza di una qualsiasi retta perpendicolare ad essa è $-1/2$?

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazione y=(m–2)x+1. È vero o falso che, per ogni scelta m' di m, esiste un valore m" di m per cui le due rette di coefficiente angolare m'–2 ed m"–2, fra quelle assegnate, sono perpendicolari?

9. Quali sono le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dagli assi cartesiani ortogonali (Oxy)?

10. Dal teorema di Pick (vedere esercizio N° 16) si desume una condizione necessaria e sufficiente affinché un poligono, i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere, abbia un'area espressa da un numero intero. Qual è questa condizione?

RISPOSTE.

1. Vero.

2. Falso. Basti pensare alle rette parallele all'asse y.
3. No. La condizione è solo sufficiente. Essa, infatti, non è soddisfatta se i tre punti sono situati su una parallela all'asse y.
4. Vero.
5. La condizione è necessaria e sufficiente.
6. La condizione richiesta è $aa' = -1$. Si tratta di una condizione necessaria e sufficiente.
7. Falso. La pendenza è 1/2.
8. Falso. Se infatti $m'=2$, per cui la retta corrispondente ha equazione $y=1$, nessun valore di m dà luogo ad una retta perpendicolare ad essa. Invece, per ogni altro valore m' di m, cui corrisponde la retta di equazione $y=(m'-2)x+1$, effettivamente al valore m", tale che $m''-2=\frac{1}{2-m'}$ corrisponde la retta di equazione $y=(m''-2)x+1$ perpendicolare alla prima.
9. Sono le seguenti: $y=x$ ed $y=-x$. Si chiamano rispettivamente bisettrice del 1° e 3° quadrante e bisettrice del 2° e 4° quadrante.
10. La condizione richiesta è che sia pari il numero P dei punti aventi entrambe le coordinate intere e situati sul perimetro del poligono. Sei invitato a dimostrarlo.