Prerequisiti:
- Saper operare con le quattro operazioni fondamentali nell'insieme dei numeri interi.
- Conoscere la definizione di numero primo e numero composto. Conoscere e calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo di due o più numeri.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *trasformare frazioni in numeri decimali finiti o periodici e viceversa*
- *stabilire se una frazione dà luogo ad un numero decimale periodico o finito*
- *motivare l'ampliamento da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$*
- *operare in $\mathbb{Q}$*
- *ordinare un insieme di numeri razionali*
- *rappresentare i numeri razionali sulla retta dei numeri*
- *elaborare semplici espressioni numeriche con valori in $\mathbb{Q}$ utilizzando con consapevolezza le convenzioni relative all'ordine delle operazioni*
- *scrivere un numero decimale come somma di multipli di potenze di 10 ad esponente intero*
- *usare consapevolmente un idoneo software matematico per determinare il valore di un'espressione numerica*
- *utilizzare il linguaggio degli insiemi*
- *calcolare il valore di semplici espressioni letterali quando alle variabili si sostituiscono valori razionali*
- *risolvere semplici problemi tratti da vari ambiti*
- *verificare una congettura in casi particolari o produrre un controesempio per confutarla*

Numeri razionali

Unità 2

2.1 UNA RIFLESSIONE SUGLI INTERI

2.1.1 Riesaminiamo l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi: possiamo constatare che ha molte proprietà.

In particolare:
(1) L'insieme $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione.
(2) Vi è in $\mathbb{Z}$ un elemento neutro rispetto a ciascuna di tali operazioni: **0** rispetto all'addizione, **1** rispetto alla moltiplicazione.
(3) Per ogni numero $a \in \mathbb{Z}$ esiste in $\mathbb{Z}$ un numero x tale che $x+a=0$: questo numero è l'**opposto** di a, vale a dire $-a$.
Osserviamo che, mentre le proprietà (1) e (2) sussistono anche nell'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali, la (3) non vale in $\mathbb{N}$: è questa proprietà che rende $\mathbb{Z}$ chiuso anche rispetto alla sottrazione.

Ciò non di meno, anche in $\mathbb{Z}$ qualcosa rimane impossibile.

Per comprendere di cosa si tratti prova a sostituire alla lettera x che figura in ciascuna delle seguenti uguaglianze un numero intero che renda vera l'uguaglianza:

$$\text{(a)}\ \ 3x = 12\,; \quad \text{(b)}\ \ 3x = -10\,; \quad \text{(c)}\ \ -4x = 20\,; \quad \text{(d)}\ \ -5x = -13\,.$$

Capisci subito che, per quanto riguarda la (a) e la (c), esiste un siffatto x: 4 nella (a) e −5 nella (c). Invece, riguardo alla (b) e alla (d), per quanti tentativi si facciano, non si riesce a trovare un intero che renda vera l'uguaglianza.

In altri termini, dati due interi a, b, non sempre esiste un intero x che renda vera l'uguaglianza:

[1] $$a\,x = b\,.$$

Esattamente come in $\mathbb{N}$, quando l'intero x esiste si dice che b è ***divisibile*** per a.

2.1.2 A questo punto i matematici si sono posti la seguente domanda: dobbiamo accettare questa limitazione – in base alla quale a volte esiste un numero x che rende vera la [1] e a volte no – oppure proviamo a costruire un nuovo insieme, in cui questa questione possa trovare sempre soluzione e nello stesso tempo il nuovo insieme contenga un sottoinsieme che si comporti in tutto e per tutto come $\mathbb{Z}$?
Si capisce che hanno preferito la seconda alternativa.
Faremo vedere tra breve in qual modo la questione è stata affrontata e risolta, ma prima dobbiamo aprire una parentesi per soffermarci su alcune nozioni che conosci da tempo per una messa a punto.

2.2 LE FRAZIONI

2.2.1 Hai già avuto a che fare con le **frazioni** nei tuoi studi precedenti. Le hai conosciute molto probabilmente come "operatori" che, applicate ad una data grandezza (per esempio ad una lunghezza), riproducono una grandezza omogenea a quella data (nell'esempio: ancora una lunghezza).
Così, per fissare le idee, la frazione $\frac{2}{3}$ (*due terzi*) è l'operatore che, applicato alla lunghezza L, la divide in 3 parti uguali e di queste ne prende 2, riproducendo la lunghezza $\frac{2}{3}L$ (Fig. 1).
Analogamente per le frazioni $\frac{1}{2}$ (*un mezzo*), $\frac{3}{5}$ (*tre quinti*), $\frac{7}{5}$ (*sette quinti*), le quali, applicate alla lunghezza L, riproducono rispettivamente le lunghezze $\frac{1}{2}L$, $\frac{3}{5}L$, $\frac{7}{5}L$ (Fig. 2).

Naturalmente, invece di una lunghezza si può prendere un'altra qualsiasi grandezza: un'area, un volume, un intervallo di tempo, ecc.

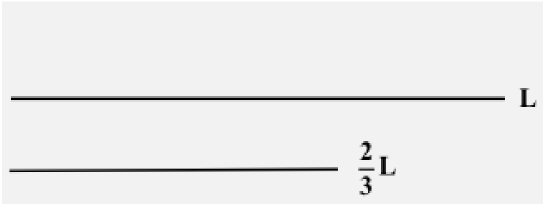


FIG. 1

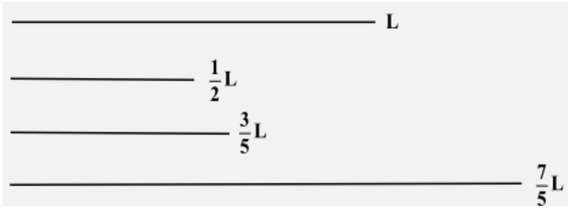


FIG. 2

Un esercizio per te. Dopo aver disegnato una lunghezza L in maniera conveniente, su carta quadrettata, costruisci le lunghezze:

$$\frac{1}{3}\text{L},\quad \frac{2}{3}\text{L},\quad \frac{3}{2}\text{L},\quad \frac{5}{4}\text{L},\quad \frac{6}{2}\text{L},\quad \frac{9}{3}\text{L},\quad \frac{5}{6}\text{L}.$$

Come sai certamente, i termini di una frazione si chiamano ***numeratore*** (il numero che sta al di sopra della linea di frazione e che si legge come "numero cardinale") e ***denominatore*** (quello che sta al di sotto e che si legge come "numero ordinale").
Il denominatore è sempre diverso da 0, poiché non ha senso "dividere una grandezza in 0 parti uguali". Per la verità non avrebbe senso neppure "dividere una grandezza in 1 parti uguali". In questo caso, tuttavia, conveniamo che la grandezza ottenuta, dividendola appunto in 1 parti uguali, sia la grandezza stessa.

Le frazioni si ripartiscono in *proprie* e *improprie*, a seconda della relazione che sussiste fra numeratore e denominatore. Precisamente [1]:

a) se il numeratore è minore del denominatore la frazione si dice ***propria***;
b) se il numeratore è maggiore o uguale al denominatore essa si dice ***impropria***.

Particolari frazioni improprie sono quelle frazioni in cui il numeratore è multiplo del denominatore: si denominano ***frazioni apparenti***.
Per esempio:

- la frazione $\frac{3}{5}$ è una frazione propria;
- la frazione $\frac{5}{3}$ è una frazione impropria;
- la frazione $\frac{15}{3}$ è una frazione (impropria) apparente;
- la frazione $\frac{5}{5}$ è una frazione (impropria) apparente.

Ti invitiamo a riconoscere quali delle seguenti frazioni sono proprie, quali improprie e quali apparenti:

$$\frac{4}{6}\quad \frac{5}{2}\quad \frac{10}{20}\quad \frac{12}{6}\quad \frac{6}{2}\quad \frac{150}{25}\quad \frac{7}{7}\quad \frac{123}{25}.$$

Scrivi poi altre tre frazioni proprie, tre improprie e tre apparenti.

Si considera poi una particolare categoria di frazioni, quelle aventi per numeratore il numero 1 e per denominatore un numero naturale maggiore di 1, come per esempio le seguenti:

$$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{5}\quad \ldots$$

Sono chiamate ***frazioni unitarie***.

[1] Altri autori propongono definizioni leggermente diverse per le frazioni improprie e apparenti.

Una rappresentazione grafica, in una modalità che probabilmente ti è familiare [2], visualizza la situazione (Fig. 3).

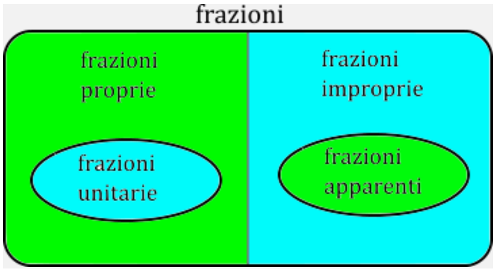


FIG. 3

2.2.2 Nel primo ciclo d'istruzione hai imparato molte altre cose sulle frazioni. Vediamole.

- Se due frazioni, applicate alla stessa grandezza, riproducono due grandezze uguali allora le due frazioni si dicono ***equivalenti***.

  Per esempio, le due frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$, applicate alla medesima lunghezza L, riproducono le lunghezze $\frac{2}{3}\text{L}$ e $\frac{4}{6}\text{L}$, uguali fra loro (Fig. 4), per cui le due frazioni sono equivalenti. Si scrive:

$$\frac{2}{3}\sim\frac{4}{6} \quad \text{oppure} \quad \frac{2}{3}\equiv\frac{4}{6}$$

  e si legge in ogni caso: «$\frac{2}{3}$ è equivalente a $\frac{4}{6}$».

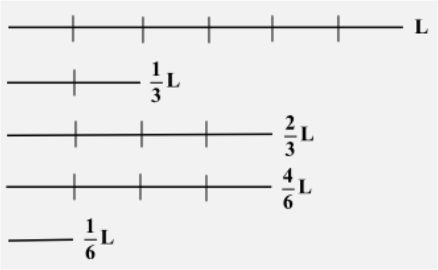


FIG. 4

Si può notare che i due prodotti, cosiddetti *incrociati*, 2×6 e 3×4, sono uguali.
Ora, questo fatto non è eccezionale, anzi si verifica ogni volta che due frazioni sono equivalenti e viene assunto come regola per stabilire appunto tale equivalenza. Precisamente:

$$\textbf{Date due frazioni } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \textbf{ e } \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}\textbf{, risulta } \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\sim\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \textbf{ se e solo se } \mathbf{ad}=\mathbf{bc}\,.$$

Ti mettiamo alla prova.

a) Ripartisci in raggruppamenti le seguenti frazioni, mettendo nello stesso raggruppamento quelle che sono equivalenti fra di loro:

$$\frac{3}{6} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{15}{36} \quad \frac{9}{15} \quad \frac{9}{5} \quad \frac{125}{50} \quad \frac{27}{15} \quad \frac{45}{30} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{250}{100} \quad \frac{30}{45} \quad \frac{12}{24} \quad \frac{15}{6}.$$

b) Tra le seguenti equivalenze una è falsa. Trovala:

---

[2] In ogni caso, la modalità diventa chiara dopo lo studio dell'Unità 9: Logica, prime nozioni.

$$\frac{7}{2} \equiv \frac{21}{6} \qquad \frac{4}{5} \equiv \frac{4+1}{5+1} \qquad \frac{3}{4} \equiv \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} \qquad \frac{12}{18} \equiv \frac{12:3}{18:3}.$$

♦ Vale la **PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI**:

- **Moltiplicando numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da 0, si ottiene una frazione equivalente a quella data.**
- **Dividendo numeratore e denominatore di una frazione per un loro divisore comune, si ottiene una frazione equivalente a quella data.**

In simboli:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a\,m}{b\,m} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \sim \frac{a:m}{b:m}$$

dove $a \in \mathbb{N}$ e $b, m \in \mathbb{N}_0$ e, nella seconda equivalenza, m è un divisore comune di a e b.

♦ Di solito, fra più frazioni equivalenti, se ne considera una “privilegiata”: quella i cui termini sono numeri primi fra loro: una tale frazione si dice **ridotta ai minimi termini** (o **irriducibile**).
Per esempio, fra le frazioni equivalenti:

$$\frac{6}{8} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{24}{32} \quad \frac{12}{16} \quad \frac{150}{200}$$

quella irriducibile è $3/4$. Le altre possono ricondursi ad essa applicando la proprietà invariantiva.

Sei invitato a trasformare ognuna delle seguenti frazioni nella frazione equivalente irriducibile:

$$\frac{48}{18} \quad \frac{275}{125} \quad \frac{64}{60} \quad \frac{104}{108} \quad \frac{160}{320}.$$

♦ La proprietà invariantiva consente pure di **trasformare una data frazione in un’altra equivalente avente denominatore assegnato**.
Bisogna, però, che il nuovo denominatore sia multiplo del denominatore della frazione data o di quella irriducibile equivalente ad essa.
Per esempio, si può trasformare la frazione $\frac{5}{7}$ in quella equivalente avente denominatore 21, poiché 21 è multiplo di 7 (secondo il numero 3). Si ha precisamente: $\frac{5}{7} \sim \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} \sim \frac{15}{21}$.
Non è invece possibile trasformare la frazione in un’altra equivalente avente come denominatore 22, poiché 22 non è multiplo di 7.
È ancora possibile trasformare la frazione $\frac{8}{6}$ in un’altra equivalente avente 9 come denominatore, poiché 9 è multiplo del denominatore della frazione irriducibile $\frac{4}{3}$, equivalente a quella data. Si ha per la precisione: $\frac{8}{6} \sim \frac{4}{3} \sim \frac{12}{9}$.

Sei invitato a completare le seguenti equivalenze:

$$\frac{3}{5} \sim \frac{}{24} \qquad \frac{12}{16} \sim \frac{}{24} \qquad \frac{25}{30} \sim \frac{}{144}.$$

♦ Si può operare con le frazioni sommandole e moltiplicandole, nel rispetto di alcune regole.
Precisamente:

- Ai fini del calcolo della somma, occorre che le frazioni abbiano lo stesso denominatore, per cui, se non ce l’hanno, per prima cosa si riducono ad un denominatore comune, che di solito è il minimo comune multiplo dei denominatori ed è chiamato ***minimo comune denominatore***. A

questo punto:
La frazione "somma" di due frazioni (aventi lo stesso denominatore) è la frazione avente lo stesso denominatore e per numeratore la somma dei numeratori.
Esempi:

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=\frac{3+7}{5}=\frac{10}{5}=2\,, \qquad \frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{4}{6}+\frac{9}{6}=\frac{13}{6}\,.$$

- **La frazione prodotto di due frazioni è la frazione avente al numeratore il prodotto dei numeratori e al denominatore il prodotto dei denominatori**.
Esempi:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{11}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 11}=\frac{44}{33}\,, \qquad \frac{6}{5}\cdot\frac{10}{9}=\frac{6\cdot 10}{5\cdot 9}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}=\frac{4}{3}\,.$$

Ti proponiamo per esercizio di eseguire le seguenti operazioni:

$$\frac{3}{8}+\frac{7}{8}\,,\quad \frac{3}{5}+\frac{1}{2}\,,\quad \frac{2}{3}+1\,; \qquad \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{2}\,,\quad \frac{3}{8}\cdot\frac{20}{9}\,,\quad \frac{3}{7}\cdot 3\,.$$

Ti proponiamo inoltre di trovare tre frazioni unitarie, aventi denominatori diversi tra loro, la cui somma è il numero 1

Fin qui abbiamo detto cose che dovrebbero essere servite a consolidare nozioni che già possiedi fin dal 1° ciclo d'istruzione. Adesso proviamo ad ampliare ed approfondire queste conoscenze.

2.3 I NUMERI RAZIONALI

2.3.1 Le frazioni esaminate nel precedente paragrafo hanno come termini – numeratore e denominatore – dei numeri naturali. Le medesime considerazioni si possono fare se quei termini sono invece numeri interi. Anche se, così facendo, la frazione – la nuova frazione – non sembra avere un qualche interessante significato. Ma non curiamoci di quest'aspetto e occupiamoci della *rappresentazione grafica* dell'insieme delle frazioni.

Per far questo prendiamo due rette graduate Z' e Z", perpendicolari in un punto O e tali che il punto unità dell'una abbia da O la stessa distanza che ha da O il punto unità dell'altra (Fig. 5).

Per rappresentare una frazione, per esempio la frazione $\frac{3}{2}$, si traccia dal punto della retta Z' di ascissa 3 la parallela alla retta Z" e dal punto di ascissa 2 della retta Z" la parallela alla retta Z': il punto in cui queste due rette s'incontrano è l'immagine della frazione considerata.

Se si costruisce il punto immagine della frazione $\frac{6}{4}$, si trova che è diverso dal punto immagine della frazione $\frac{3}{2}$. Per questa ragione **non** diciamo che la frazione $\frac{3}{2}$ è uguale alla frazione $\frac{6}{4}$. E, di fatto, abbiamo definito *equivalenti* queste due frazioni.

Ripetendo la costruzione suddetta per tutte le frazioni $\frac{a}{b}$ (cosa che ovviamente si può soltanto immaginare di fare ma non fare realmente), si ottiene un "reticolo" i cui nodi sono appunto le loro immagini.

Si dimostra (cosa che però non facciamo) che l'insieme delle frazioni può essere ripartito in sottoinsiemi, ciascuno formato da frazioni equivalenti fra loro, aventi le seguenti caratteristiche:

- gli elementi di uno stesso sottoinsieme sono frazioni i cui punti immagine sono allineati con O;
- due qualsiasi sottoinsiemi non hanno frazioni comuni;
- una qualsiasi frazione appartiene ad un sottoinsieme e ad uno soltanto.

Per esempio, alcuni di questi sottoinsiemi sono i seguenti:

$$\left\{\frac{1}{1},\frac{-1}{-1},\frac{2}{2},\frac{-2}{-2},\frac{3}{3},\frac{-3}{-3},\ldots\right\},\quad \left\{\frac{-2}{1},\frac{2}{-1},\frac{-4}{2},\frac{4}{-2},\frac{-6}{3},\frac{6}{-3},\ldots\right\},\quad \left\{\frac{3}{2},\frac{-3}{-2},\frac{6}{4},\frac{-6}{-4},\frac{9}{6},\frac{-9}{-6},\ldots\right\}.$$

Ciascuno dei suddetti sottoinsiemi si chiama ***numero* razionale**.

Dunque: **Un numero razionale è un insieme di frazioni equivalenti tra loro.**

L'insieme dei numeri razionali si indica di solito col simbolo $\mathbb{Q}$ o anche con **Q**.

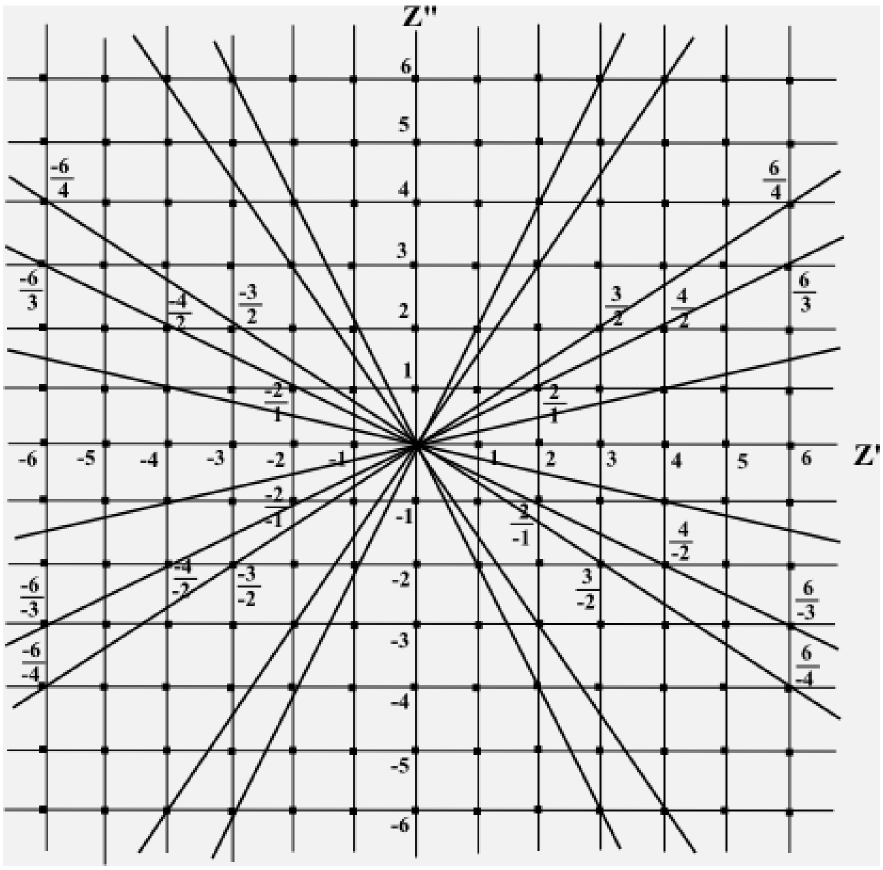


FIG: 5

2.3.2 La precedente definizione di numero razionale può suscitare qualche legittima perplessità, originata soprattutto dal seguente interrogativo: come si fa ad operare con enti, che sono insiemi di oggetti, come se fossero numeri?

In realtà, la risposta non è complicata: **Siccome due frazioni appartenenti allo stesso numero razionale sono equivalenti, noi operiamo con i numeri razionali servendoci di una qualunque delle loro frazioni equivalenti, anzi di quella che di volta in volta ci fa più comodo o è la più semplice; e questa, come già detto, quasi sempre è la frazione irriducibile.**

In particolare, per frazioni come $\frac{4}{9}$ e $\frac{-4}{-9}$, che sono evidentemente equivalenti, si preferisce assumere $\frac{4}{9}$ come rappresentante privilegiata del numero razionale corrispondente. Ugualmente, per frazioni come $\frac{-4}{9}$ e $\frac{4}{-9}$, pure equivalenti, si preferisce assumere $\frac{-4}{9}$ come rappresentante del numero razionale corrispondente, che anzi per comodità è scritto nella seguente maniera: $-\frac{4}{9}$.

Possiamo dunque dire che, a parte qualche piccola differenza, operiamo con i numeri razionali come operiamo con le frazioni.

L'unica cosa che cambia è che, considerando ad esempio $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ come frazioni, dobbiamo scrivere $\frac{2}{3}\sim\frac{4}{6}$; se li consideriamo come numeri razionali dobbiamo scrivere $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, dal momento che le due frazioni individuano lo stesso identico numero razionale.

Dovremmo introdurre una qualche notazione simbolica per differenziare le due situazioni: basterebbe indicare, per esempio, con la scrittura $\left[\frac{a}{b}\right]$ il numero razionale individuato dalla frazione $\frac{a}{b}$. Ma ci sembra che questa notazione non procuri alcun vantaggio pratico. Anzi, ci pare proprio che finisca per confondere le idee. Per questo preferiamo rinunziarvi, pur nella consapevolezza di generare qualche equivoco.

Crediamo, in ogni modo, che dalla situazione si capirà, di volta in volta, se $\frac{a}{b}$ sta per " frazione $\frac{a}{b}$ " o se sta per " numero razionale $\frac{a}{b}$ ".

2.3.3 Soffermiamoci adesso sulle **operazioni coi numeri razionali**.

- Prima di tutto osserviamo che:

  Ogni numero intero può essere considerato come un numero razionale rappresentato da una frazione avente per denominatore 1 e per numeratore il numero stesso.

  Cioè, per ogni numero intero a, risulta:

  $$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{1}}.$$

  In particolare: $0=\frac{0}{1},\ 1=\frac{1}{1}$.

  Per questo l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi può essere considerato una parte dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Ossia:

  $$\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$$

  che, come nella analoga relazione di $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Z}$, si legge: « $\mathbb{Z}$ è incluso in $\mathbb{Q}$ ».

  L'insieme $\mathbb{Q}$ privato dello 0 si indica col simbolo $\mathbb{Q}_0$ o anche con $\mathbf{Q_0}$.

- **L'insieme dei numeri razionali è chiuso rispetto all'operazione di addizione ed è chiuso rispetto a quella di moltiplicazione**.

  Esempi:

  $$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}, \qquad \frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{6}-\frac{15}{6}=-\frac{11}{6}, \qquad -2+\frac{3}{4}=-\frac{8}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{5}{4},$$

  $$-\frac{5}{6}-\frac{1}{9}=-\frac{15}{18}-\frac{2}{18}=-\frac{17}{18}, \qquad \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{15}=\frac{3\cdot4}{5\cdot15}=\frac{1\cdot4}{5\cdot5}=\frac{4}{25}, \qquad \frac{6}{5}\left(-\frac{10}{9}\right)=-\frac{2\cdot2}{1\cdot3}=-\frac{4}{3}.$$

  Per l'addizione e la moltiplicazione valgono le seguenti proprietà, analoghe a quelle enunciate a suo tempo a proposito dei numeri naturali: *commutativa, associativa, esistenza dell'elemento neutro* (0 per l'addizione, 1 per la moltiplicazione); inoltre *la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione*.

ESERCIZIO. Esegui le seguenti operazioni:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{3} \qquad \frac{3}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+(-3) \qquad \left(-\frac{3}{2}\right)+5+\frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{3}\cdot\frac{18}{7} \qquad \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{15}{8}\right) \qquad 3\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{5} \qquad \frac{3}{4}\cdot(-2)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right).$$

- **L'insieme dei numeri razionali è chiuso rispetto alla sottrazione**.
  È facile rendersene conto. Basta ragionare e operare come in $\mathbb{Z}$. Ci chiediamo allora se, dati numeri razionali $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, esiste un razionale x tale che $\frac{c}{d}+x=\frac{a}{b}$. Si trova facilmente che questo numero esiste ed è $-\frac{c}{d}$, chiamato ***opposto*** di $\frac{c}{d}$. Dunque la differenza di due numeri razionali è la somma del primo con l'opposto del secondo.

Esegui, per esercizio, le seguenti operazioni:

$$\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad -\frac{3}{5}-\left(-\frac{7}{5}\right) \qquad \frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}.$$

- L'insieme dei numeri razionali non è chiuso rispetto alla divisione poiché la divisione per 0 non ha significato. Ma se dall'insieme $\mathbb{Q}$ si esclude 0, l'insieme rimanente, vale a dire $\mathbb{Q}_0$, **è chiuso anche rispetto alla divisione**.
  Per spiegare questo fatto, cominciamo a definire ***reciproco*** del numero $\frac{a}{b}$ non nullo, il numero che si ottiene da esso scambiando reciprocamente numeratore e denominatore; cioè il numero $\frac{b}{a}$. Si vede facilmente che risulta:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Ebbene, definito – come nell'insieme dei numeri naturali – *quoto* del numero $\frac{a}{b}$ per il numero $\frac{c}{d}$ il numero x tale che $x\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, si dimostra che risulta:

$$x=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Di fatto, da $x\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ segue: $\left(x\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$,

da cui, per la proprietà associativa di "·", si ottiene: $x\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$;

da qui, tenendo presente che $\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}=1$ e che $x\cdot1=x$, si ricava: $x=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Pertanto:

$$\mathbf{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}.$$

Per esempio:

$$\frac{3}{5}:\frac{4}{3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{20}, \qquad 3:\frac{6}{7}=3\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{2}.$$

In particolare osserviamo che, quali che siano i numeri interi a, b, con $b\neq0$, risulta:

$$a:b=\frac{a}{1}:\frac{b}{1}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.$$

Pertanto:

Il quoto di due numeri interi qualsiasi a, b nell'ordine, con b≠0, è il numero razionale $\frac{a}{b}$.

Per esempio:

$$3:(-2)=-\frac{3}{2}\,,\qquad (-5):(-10)=\frac{-5}{-10}=\frac{1}{2}\,.$$

Più in generale, la scrittura

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d},$$

per analogia con quanto ora detto, si può mettere nella forma seguente:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\,.\ \text{Cosicché: } \frac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}{\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\cdot\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}\,.$$

Per esempio: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}$.

Il fatto che ogni numero razionale q non nullo ammetta il reciproco $1/q$ fa sì che esista un numero razionale che sostituito ad x renda vera l'uguaglianza bx=a, dove a, b sono numeri razionali con b≠0. Basta, infatti, sostituire ad x il numero a/b.

Trova così soluzione la questione che avevamo assunto come punto di partenza in 2.1.1.

- Si definisce potenza di un numero razionale a con esponente n, dove n∈ℕ, il numero razionale, che si indica con $\mathbf{a^n}$, tale che:

$\mathbf{a^0=1}$ qualunque sia a≠0;

$\mathbf{a^1=a}$ qualunque sia a;

$\mathbf{a^n}=\underbrace{\mathbf{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}}_{\text{n fattori}}$ se n>1, qualunque sia a.

Cosicché, per esempio:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^0=1\,,\qquad \left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{4}\,,\qquad \left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{27}{9}\,.$$

In sostanza, se n>1 si ha:

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}}=\frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}\,.$$

Alla scrittura 0^0, come in ℕ, non si attribuisce alcun significato.

Per l'elevamento a potenza valgono le stesse proprietà formali valevoli sia in ℕ sia in ℤ e che non ci sembra il caso di ripetere qui.

Ne vediamo soltanto qualche esempio:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}\,,\quad \left(\frac{5}{4}\right)^6:\left(\frac{5}{4}\right)^4=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}\,,\quad \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^6=\frac{729}{64}\,,$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2=\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{8}{3}\right)^2=\left(\frac{6}{1}\right)^2=36\,,\quad \left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{6}{5}\right)^3=\left(\frac{4}{5}:\frac{6}{5}\right)^3=\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\,.$$

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Esegui le seguenti operazioni:

$\frac{3}{7}:\frac{2}{7},\ (-1):\frac{4}{5},\ \ \frac{3}{5}:2,\ \ 4:\left(-\frac{2}{7}\right);\qquad \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}},\ \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{5}{3}},\ \frac{-\frac{6}{7}}{9},\ \frac{3}{\frac{4}{5}}.$

$\frac{7}{3}-\frac{5}{3},\ \ \frac{4}{5}-\frac{2}{6},\ \ 3-\frac{2}{6},\ \ \frac{11}{3}-2;\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{4}{5}\right)^2,\ \left(\frac{3}{4}\right)^3.$

2. Determina, se e quando esiste, un numero razionale che, sostituito ad x, renda vera la seguente uguaglianza:

1) $2x=3$; 2) $2=3x$; 3) $x:4=0$; 4) $4:x=0$.

3. Quanto vale la metà di 8^8 ?

[A] 4^8. [B] 8^4. [C] 2^{16}. [D] 2^{23}.

Una sola alternativa è corretta. Individuala e fornisci una spiegazione esauriente della tua scelta.

2.3.4 Adesso soffermiamoci su alcune definizioni e proprietà dei numeri razionali, in particolare sull'ordine che può essere stabilito in tale insieme, non prima di aver ribadito che, ai fini della rappresentazione di un numero razionale, **la frazione $\frac{a}{b}$ che assumeremo come suo rappresentante è tale che il suo denominatore b è positivo**.

- Un numero razionale $\frac{a}{b}$ (si ricorda che $b>0$) si dice *positivo* se $a>0$ e *negativo* se $a<0$. Se $a=0$ il numero è *zero* e non è considerato né positivo né negativo.

  In particolare sono positivi i numeri: $\frac{2}{3},\frac{7}{5},\frac{3}{10}$; sono negativi i numeri: $\frac{-2}{3},\frac{-7}{5},\frac{-3}{10}$. Questi ultimi, come già accennato, si preferisce scriverli nel modo seguente: $-\frac{2}{3},-\frac{7}{5},-\frac{3}{10}$.

  L'insieme dei numeri razionali ***positivi*** è indicato a volte col simbolo $\mathbb{Q}_0^+$; quello dei razionali ***negativi*** col simbolo $\mathbb{Q}_0^-$. Se all'insieme $\mathbb{Q}_0^+$ si aggiunge l'elemento 0, si ottiene l'insieme dei numeri razionali ***non negativi***: si indica con $\mathbb{Q}^+$. Analogamente, se all'insieme $\mathbb{Q}_0^-$ si aggiunge lo 0, si ottiene l'insieme dei numeri razionali ***non positivi***: si indica con $\mathbb{Q}^-$.

  Nota bene. L'aver definito positivo o negativo un numero razionale nella maniera suddetta non ci dice ancora nulla riguardo al modo di confrontare i numeri. In altri termini non abbiamo elementi, per esempio, per concludere che un numero positivo sia maggiore di 0 e uno negativo minore di 0. Cosa che invece vogliamo stabilire. Lo faremo fra breve.

- Si chiama **valore assoluto** di un numero razionale $\frac{a}{b}$ $(b>0)$, e si indica con $\left|\frac{a}{b}\right|$, il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{|a|}{b}$.

  In particolare, per esempio: $\left|\frac{4}{5}\right|=\frac{4}{5},\ \left|-\frac{4}{5}\right|=\frac{4}{5}$.

- Due qualsiasi numeri razionali, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, si possono confrontare per stabilire se sono uguali o diversi. Precisamente:

Dati due qualsiasi numeri razionali $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \text{se e solo se}\ ad=bc.$$

Naturalmente $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ se e solo se $ad \neq bc$.

- Più complesso risulta introdurre un criterio per stabilire se un numero razionale è maggiore o minore di un altro. Questo criterio deve essere tale da conservare ovviamente le proprietà sussistenti nell'insieme degli interi. Ora una di queste proprietà assicura che, se a, b sono interi, allora $a>b$ se e solo se $a-b$ è un numero positivo e $a<b$ se e solo se $a-b$ è un numero negativo. Ebbene, estendiamo questo medesimo criterio ai razionali. Cosicché:

Dati due qualsiasi numeri razionali $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$:
- $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ se e solo se $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ è un numero positivo;
- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se e solo se $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ è un numero negativo.

Vale per entrambe le relazioni "$<$" (*minore*) e "$>$" (*maggiore*) la proprietà transitiva.
Da qui discendono alcune conseguenze che possono essere dimostrate senza eccessive difficoltà, ma che noi ci limitiamo ad enunciare:

- **Dati i numeri razionali $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, risulta $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ se e solo se $ad>bc$ e risulta $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se e solo se $ad<bc$**.

  Per esempio: $\frac{3}{5} > \frac{2}{3}$ dal momento che $3 \cdot 3 < 5 \cdot 2$; $\frac{1}{2} > \frac{3}{7}$ poiché $1 \cdot 7 > 2 \cdot 3$.
- **Ogni numero positivo è maggiore di 0 e ogni numero negativo è minore di 0**.

  Per esempio: $0<+3$, $0<+\frac{1}{3}$, $0>-\frac{5}{4}$, $0>-10$.
- **Ogni numero positivo è maggiore di ciascun numero negativo**.

  Per esempio: $+1>-4$, $+\frac{7}{3}>-\frac{9}{2}$, $+2>-\frac{7}{3}$.
- **Di due numeri positivi è maggiore quello che ha maggior valore assoluto**.

  Per esempio: $+2>+1$, $+\frac{3}{2}>+\frac{2}{3}$, $+\frac{3}{5}>+\frac{2}{7}$.
- **Di due numeri negativi è maggiore quello che ha minor valore assoluto**.

  Per esempio: $-1>-3$, $-\frac{2}{3}>-\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{7}>-\frac{3}{5}$.

Un esercizio per te. Disponi in ordine crescente i seguenti numeri:

(a) $-\frac{1}{3}$, -3, 0, 1, $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{5}$, $\frac{7}{3}$; (b) 2, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, -1, $-\frac{4}{3}$, $\frac{3}{5}$;

(c) $\frac{3}{2}$, $-\frac{12}{7}$, 3, $-\frac{6}{5}$, $\frac{13}{12}$; (d) $-\frac{5}{3}$, $\frac{3}{7}$, $-\frac{4}{3}$, $\frac{6}{7}$.

♦ IMPORTANTE. Quando si moltiplica un numero razionale positivo a per un intero z maggiore di 1 si ottiene un razionale az maggiore di a. Ciò in conformità all'idea di moltiplicazione come "somma ripetuta".

Esempio: $\frac{3}{5} \cdot 3 > \frac{3}{5}$.

Questo continua a succedere se si moltiplica un razionale positivo a per un razionale b maggiore di 1, anche se adesso il prodotto non può più essere concepito come "somma ripetuta".

Esempio: $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} > \frac{4}{5}$.

Se invece si moltiplica un razionale a per un razionale positivo b minore di 1, si ottiene un razionale minore di a.

Esempio: $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.

Un discorso simile vale per le potenze di un razionale positivo con esponente un numero naturale maggiore di 1: quando si eleva ad esponente maggiore di 1 un numero razionale maggiore di 1, si ottiene una potenza maggiore di quella di partenza. Se invece la base è un razionale positivo minore di 1, elevandola ad un esponente maggiore di 1, si ottiene una potenza minore di quella di partenza.

Esempi: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{3}{2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 < \frac{2}{3}$.

2.3.5 Anche i numeri razionali, come i naturali e gli interi, possono essere rappresentati sulla **retta dei numeri**.

Naturalmente una rappresentazione "giusta" deve conservare quella già esistente nell'insieme dei numeri interi e rispettare l'ordine evidenziato dalle precedenti proprietà. Per questo basta assumere come verso progressivo, cioè come verso in cui cresce il valore dei numeri, quello che va dai numeri negativi ai positivi, evidenziato con una retta "frecciata" r (Fig. 6).

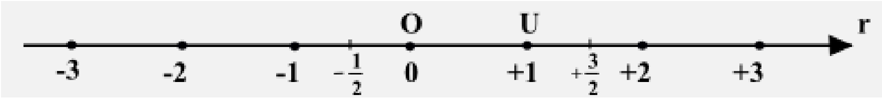


FIG. 6

Per quanto concerne le distanze, bisogna rispettare alcune regole. In particolare:

Una volta associati ai numeri **0** ed **1** rispettivamente i punti **O** ed **U**:

- ad ogni numero intero z, con z≠1, si associa il punto P di r ottenuto riportando un numero di volte pari a |z|, a partire da O, il segmento OU, spostandosi nel verso della freccia o in quello opposto a seconda che sia z>0 o z<0;
- ad ogni numero razionale $\frac{m}{n}$ (n>0), si associa il punto P di r ottenuto riportando |m| volte, a partire da O, il segmento ricavato dividendo OU in n parti uguali, e spostandosi nel verso della freccia o in quello opposto a seconda che sia m>0 o m<0.

Come nel caso dei numeri naturali, si continua a dire che il numero razionale è l'***ascissa*** del punto P che gli corrisponde.

I punti della retta numerica, che hanno come ascisse dei numeri razionali, si chiamano ***punti razionali***.

Dunque, ad ogni numero razionale corrisponde un punto sulla retta numerica. È vero l'inverso? Lasciamo per il momento in sospeso l'interrogativo. Ci ritorneremo nella prossima unità.

ESERCIZIO. Disponi su una retta graduata i punti di ascisse:

$$-\frac{3}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{15}{7} \quad -\frac{7}{3} \quad -\frac{14}{9} \quad -\frac{5}{7} \quad \frac{7}{3} .$$

2.3.6 Vogliamo adesso evidenziare **una differenza fondamentale** fra gli insiemi ℤ e ℚ.

Di ogni numero intero siamo in grado di dire qual è il successivo. Così, per esempio, il successivo di 4 è 5, quello di 982 è 983, quello di -7 è -6, quello del generico intero z è $z+1$.
Non altrettanto avviene per i numeri razionali. Se, infatti, consideriamo uno qualsiasi di tali numeri, per esempio $1/3$, non esiste alcun numero che si possa considerare il suo immediato successivo, per quanto prossimo ad esso. Qualunque numero, infatti, si possa pensare "molto vicino" ad esso, ne esiste almeno un altro "più vicino". Questo perché vale la seguente proprietà:

- **Presi due qualsiasi numeri razionali, diversi fra loro, ne esiste sempre almeno un altro compreso fra essi**.

Per esempio, la semisomma di due numeri è compresa fra i numeri stessi. Se infatti prendiamo i numeri $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, la loro semisomma è:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{2}\ ;$$

e risulta: $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Per controllarlo basta sostituire le tre frazioni con altrettante equivalenti, aventi però lo stesso denominatore, per esempio 6; le frazioni diventano allora: $\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6}$ ed è evidente che esse sono disposte in ordine crescente, cioè: $\frac{2}{6}<\frac{3}{6}<\frac{4}{6}$.
Se poi si considerano le frazioni equivalenti a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ di denominatore più grande, per esempio 60, si vede subito che tra $\frac{1}{3}=\frac{20}{60}$ e $\frac{2}{3}=\frac{40}{60}$ sono comprese molte altre frazioni, come, tanto per indicarne alcune: $\frac{23}{60},\frac{31}{60},\frac{47}{60}$.
Il fatto che, dati due numeri razionali qualsiasi a, b (con $a<b$), sia sempre possibile trovare un numero razionale c tale che risulti $a<c<b$, si esprime dicendo che **l'insieme dei numeri razionali è *denso*** (rispetto alla relazione "è minore"). Ma rimane sempre in sospeso l'interrogativo posto sopra, ovvero se ad ogni punto della retta numerica corrisponde un numero razionale.

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1) Trova 4 numeri razionali compresi fra i due di ciascuna delle seguenti coppie di numeri e, per ogni raggruppamento ottenuto, disponi i sei numeri in ordine crescente e rappresentali sulla retta numerica:
$$\text{a) } 1,\ 2\ ; \qquad \text{b) } 2\ ,\ \frac{1}{2}\ ; \qquad \text{c) } \frac{2}{3},\ \frac{1}{2}\ ; \qquad \text{d) } \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\ .$$
2) Verifica, almeno in tre casi particolari, che sono diversi i numeri: $\frac{A}{B}$ e $\frac{A+M}{B+M}$, dove A, B, M sono numeri naturali qualsiasi, purché $B\neq 0$, $M\neq 0$.
3) Considerati i due numeri $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$, verifica almeno in tre casi particolari che il numero $\frac{A+C}{B+D}$ è compreso fra essi.
4) Giulio ha vinto una discreta somma al "Gratta e Vinci". Decide di tenerne per sé 1/3 e di regalare 1/2 della parte rimanente al figlio Marco e ciò che resta al figlio Alberto. A chi va la parte maggiore della vincita?
[A] A Giulio. [B] A Marco.
[C] Ad Alberto. [D] A nessuno poiché la somma è divisa in parti uguali.
5) Giulio, dovendo partire per un viaggio di piacere con la moglie e i suoi due figli, decide di prelevare in banca la somma che reputa necessaria. Di questa somma tiene per sé solamente la terza parte, mentre

affida 1/8 della parte rimanente a ciascuno dei due figli e consegna il resto alla moglie. Quale frazione della somma prelevata va alla moglie?

$$[A]\ \frac{1}{8}\,. \quad [B]\ \frac{1}{4}\,. \quad [C]\ \frac{1}{3}\,. \quad [D]\ \frac{1}{2}\,.$$

2.4 FRAZIONI E NUMERI DECIMALI

2.4.1 Anche se in futuro non lo diremo esplicitamente, per le considerazioni che facciamo in questo paragrafo è sufficiente riferirsi ai numeri razionali positivi.

Abbiamo detto che il numero razionale a/b è uguale al quoto tra i due numeri interi a, b, naturalmente con b≠0. Se la frazione a/b non è apparente, cioè se il numeratore non è multiplo del denominatore, allora la *divisione intera* di a per b conduce, come noto, ad un quoziente q e ad un resto r minore di b.

Ma tu conosci certamente anche i *numeri decimali* e sai che la divisione può essere continuata, dando luogo ad un quoziente espresso da un numero decimale: si parla, in questo caso, di *divisione decimale* (anziché intera) di a per b ed il quoziente decimale ottenuto è un altro modo di rappresentare il numero razionale a/b.

In particolare, per le frazioni che hanno al denominatore il numero 10 o una sua potenza con esponente un numero naturale (e dette ***frazioni decimali***), sai che si ha, ad esempio:

$$\frac{37}{10}=3{,}7 \qquad \frac{3}{100}=0{,}03 \qquad \frac{207}{1000}=0{,}207\,.$$

Vale a dire che ogni frazione decimale genera un ***numero decimale finito***.

Il problema che vogliamo ora affrontare il seguente:

La divisione decimale di due numeri interi ha sempre termine?

Vale a dire:

Una frazione genera sempre un numero decimale finito?

Consideriamo, per esempio, la divisione 87 : 24. Si ha:

87	24
150	3,625
60	
120	
0	

pertanto:

$$87 : 24 \;=\; \mathbf{3{,}625};$$

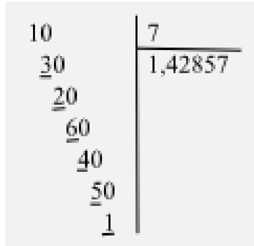
oppure, mettendo il punto al posto della virgola, come a volte usa fare, specialmente in alcuni software matematici:

$$87 : 24 \;=\; \mathbf{3.625}\,.$$

Nello schema di divisione abbiamo sottolineato i resti parziali via via ottenuti: 15, 6, 12, 0.

Ad un certo momento abbiamo ottenuto come resto 0, perciò la divisione è terminata ed il quoziente ottenuto, cioè 3,625, è il *quoziente decimale esatto*.

Eseguiamo ora la divisione 10 : 7, sottolineando di nuovo i resti parziali via via ottenuti:



Una volta ottenuto il resto 1, si impongono alcune considerazioni. Il resto della divisione deve essere minore del divisore 7 ed abbiamo già ottenuto, prescindendo dall'ordine, i resti 1, 2, 3, 4, 5, 6. Il prossimo passo è decisivo: o troviamo resto 0 e la divisione ha termine o ritroviamo uno dei resti precedenti e la divisione non potrà avere mai termine, giacché si ripeteranno le situazioni già incontrate. Otterremo in questo modo, nel quoziente, la riproduzione periodica di un gruppo costituito da una o più cifre decimali. Nel nostro esempio, proseguendo la divisione, otteniamo:

$$10 : 7 = 1\,,428571\;428571\;428571\;\dots .$$

In questo caso, dunque, il quoziente decimale è costituito da un allineamento di cifre decimali illimitato e periodico, nel senso che il gruppo di cifre $\mathbf{428571}$ (che si chiama ***periodo***) si ripete senza fine e senza che tra un gruppo e l'altro vi siano altre cifre.

Le divisioni decimali fra numeri naturali, pertanto, possono dar luogo o a **numeri decimali finiti** o a **numeri decimali illimitati periodici**.

A volte le cifre del periodo sono precedute da altre, che non si ripetono più, come in questo caso:

$$145 : 44 = 3\,,29\;54\;54\;54\;\dots .$$

Un numero periodico, come per esempio il precedente, si scrive in uno di questi modi:

$$\mathbf{3,29\overline{54}}\quad \text{oppure}\quad \mathbf{3,29(54)}$$

con le cifre del periodo soprassegnate oppure racchiuse dentro parentesi tonde.

Il numero formato dalle cifre che precedono la virgola costituisce la ***parte intera***; quello formato dalle cifre che seguono la virgola si chiama ***parte decimale*** (o ***mantissa***).

Spesso la parte intera di un numero decimale è indicata premettendo E o INT al numero, che viene racchiuso entro parentesi. Per esempio:

$$\mathrm{E}(2{,}47)=2 \quad \text{oppure:}\quad \mathrm{INT}(2{,}47)=2.$$

Nel caso di un numero decimale periodico, se esistono cifre decimali che precedono il periodo, esse costituiscono il cosiddetto ***antiperiodo*** ed il numero decimale si dice **periodico misto**; se tali cifre non esistono ed il periodo inizia subito dopo la virgola, il numero decimale si dice **periodico semplice**.

NOTA. Il primo matematico che introdusse il punto per separare la parte intera dalla parte decimale di un numero decimale fu lo scozzese **Nepero** (**John Napier**, 1550-1617). Il criterio si diffuse subito nel mondo anglosassone mentre nel resto del continente europeo fu usata la virgola.
I due criteri sussistono ancora oggigiorno, benché l'uso del punto sia più raro.

2.4.2 Dati due numeri naturali a, b, con b≠0, consideriamo la frazione irriducibile a/b o, se non è irriducibile, la frazione equivalente ad essa ma ridotta ai minimi termini.

Esiste una **REGOLA** che permette di prevedere se la frazione <u>irriducibile</u> a/b genera un numero decimale finito o un numero decimale periodico semplice o, infine, un numero decimale periodico misto.
Anzitutto bisogna scomporre in fattori primi il denominatore della frazione (irriducibile). Allora:

- **se il denominatore contiene <u>soltanto</u> i fattori primi 2 e/o 5, la frazione genera un numero decimale finito;**
- **se il denominatore non contiene né il fattore 2 né il fattore 5, la frazione genera un numero decimale periodico semplice;**
- **negli altri casi la frazione genera un numero decimale periodico misto.**

Non forniamo la dimostrazione di questa regola, invitandoti però a verificarla eseguendo almeno una divisione di ciascun tipo.

Nel primo caso, nondimeno, l'idea di una possibile dimostrazione vogliamo darla. Si tratta, in realtà, di capire che, se il denominatore della frazione irriducibile, scomposto in fattori primi, contiene soltanto i fattori 2 e/o 5, allora tale denominatore si può far diventare uguale ad una potenza di 10, moltiplicandolo per un conveniente fattore. E perciò la frazione diventa una frazione decimale che, come detto sopra, genera sempre un numero decimale finito. Qualche esempio, per spiegare meglio:

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times 2}{5\times 2}=\frac{6}{10}=0,6\ ;\quad \frac{13}{20}=\frac{13\times 5}{20\times 5}=\frac{65}{100}=0,65\ ;\quad \frac{127}{125}=\frac{127\times 8}{125\times 8}=\frac{1016}{1000}=1,016\ .$$

Un paio di esercizi per te.

1. Dapprima stabilisci, senza eseguire la divisione, che specie di numero decimale genera ciascuna delle seguenti frazioni e poi verifica eseguendo la divisione (lo puoi fare anche mediante una calcolatrice):
$$\frac{3}{7}\quad \frac{2}{5}\quad \frac{27}{6}\quad \frac{35}{28}\quad \frac{3}{14}\quad \frac{75}{45}\quad \frac{75}{30}\quad \frac{264}{55}\quad \frac{372}{42}\ .$$
2. Scrivi in forma decimale i seguenti numeri:
$$2+\frac{3}{4},\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\quad \frac{4}{3}-\frac{3}{5}.$$

2.4.3 Abbiamo visto che le frazioni danno luogo a numeri decimali, che possono essere finiti o periodici. Sorge un interrogativo:

Se scriviamo un numero decimale a nostro piacimento, esiste una frazione che lo generi?

La risposta è affermativa e la frazione si chiama appunto **frazione generatrice** del dato numero decimale. Anche adesso enunciamo le **REGOLE** per determinare la frazione generatrice di un numero decimale senza dimostrarle.

- **La frazione generatrice di un numero decimale finito ha per numeratore il numero scritto senza la virgola e per denominatore il numero 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato.**

Per esempio: $2,56=\frac{256}{100}=\frac{64}{25};\quad 3,5=\frac{35}{10}=\frac{7}{2}\ ;\quad 0,125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}\ .$

- **La frazione generatrice di un numero decimale periodico ha per numeratore la differenza fra il numero formato dalla parte intera seguita dall'antiperiodo e dal periodo ed il numero formato dalla parte intera seguita dall'antiperiodo e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.**

Per esempio: $0,\overline{45}=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}\ ;\ 0,2\overline{3}=\frac{23-2}{90}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}\ ;\ 2,3\overline{5}=\frac{235-23}{90}=\frac{212}{90}=\frac{106}{45}\ .$

Ti proponiamo, per esercizio, di trovare le frazioni generatrici dei seguenti numeri decimali:

$$1,25\quad 2,0\overline{2}\quad 3,\overline{12}\quad 0,0\overline{5}\quad 2,2\overline{4}\quad 1,02\quad 0,0031\quad 0,\overline{27}\quad 0,\overline{21}\quad 3,02\overline{1}\ .$$

2.4.4 Vale il seguente teorema [3].

♦ TEOREMA. **Non esiste alcuna frazione che generi un numero decimale periodico con periodo 9**.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che sia vero il contrario di ciò che vogliamo dimostrare. Ossia ammettiamo che esista una frazione, di numeratore a e di denominatore b, in grado di generare un numero decimale periodico con periodo 9. Allora, da un certo punto in poi, le cifre decimali del quoziente di a per b saranno tutte uguali a 9 ed i relativi resti parziali saranno uguali ad uno stesso numero r, con $r<b$. Da questo punto in poi, continuando la divisione, ossia moltiplicando il resto r per 10 e dividendo per b, si troverà ancora 9 come quoziente ed r come resto. Questo significa che $r\cdot 10=b\cdot 9+r$, ossia: $r\cdot 9=b\cdot 9$ e dunque $r=b$. Il che è assurdo dal momento che r è minore di b.
Dunque, l'ipotesi ammessa – vale a dire che esista una frazione capace di generare un numero decimale periodico con periodo 9 – conduce ad una contraddizione. Essa pertanto deve essere scartata. Cosicché una siffatta frazione non esiste. Come volevasi dimostrare.

Non possiamo pensare, dunque, di ottenere un numero decimale periodico con periodo 9, dividendo due numeri naturali. Non sembra insensato, tuttavia, considerare scritture come queste:

$$0,\overline{9} \quad 2,\overline{9} \quad 0,1\overline{9} \quad 2,3\overline{9}\,.$$

Cosa accadrà se applichiamo ad esse la regola per ottenere la frazione generatrice di un numero decimale periodico? Proviamo:

$$0,\overline{9}=\frac{9}{9}=1;\ \ 2,\overline{9}=\frac{29-2}{9}=\frac{27}{9}=3;\ \ 0,1\overline{9}=\frac{19-1}{90}=\frac{18}{90}=0{,}2;\ \ 2,3\overline{9}=\frac{239-23}{90}=\frac{216}{90}=2{,}4\,.$$

Accettiamo, allora, la seguente convenzione:

Un numero decimale periodico con periodo 9 è uguale:
- al numero naturale che si ottiene aumentando di 1 la parte intera se il numero è periodico semplice;
- al numero decimale finito che si ottiene facendo seguire alla parte intera l'antiperiodo aumentato di 1 se il numero è periodico misto.

Così, per esempio: $1,\overline{9}=2$; $12,0\overline{9}=12{,}1$; $10,42\overline{9}=10{,}43$.

In base a questa convenzione, prova a trasformare i seguenti numeri decimali periodici con periodo 9 in numeri decimali finiti:

$$3,\overline{9} \quad 2,8\overline{9} \quad 1,0\overline{9} \quad 2,5\overline{9}\,.$$

Nel seguito degli studi [4], la convenzione precedente troverà una spiegazione abbastanza esauriente, ma al momento dobbiamo accettarla sulla fiducia.

2.4.5 Dopo aver osservato che si può scrivere:

$$0 = 0{,}000\ldots\,,$$

possiamo concludere questo discorso sui numeri decimali, facendo notare che:
- ogni numero razionale può mettersi sotto forma di numero decimale periodico o, come anche si dice, sotto forma di ***allineamento decimale illimitato periodico***;
- ogni allineamento decimale illimitato periodico è un numero razionale.

[3] La dimostrazione del teorema è condotta seguendo il cosiddetto ragionamento per assurdo. Se si incontrassero difficoltà a comprenderla si può rinviarne lo studio ad un momento successivo.
[4] Cfr.: Unità 59: Successioni e progressioni, N° 59.2.7

Un esercizio per te. Disponi in ordine crescente i seguenti numeri:
1) $3{,}12 \quad 3,\overline{12} \quad 3{,}1\overline{2} \quad 3,\overline{121}$. 2) $0{,}3 \quad 0,\overline{3} \quad 0{,}33 \quad 0{,}333$. 3) $1{,}231 \quad 1{,}23\overline{1} \quad 1{,}2\overline{31} \quad 1,\overline{231}$.

2.4.6 Nella pratica quotidiana è assai raro che si operi con numeri aventi molte cifre decimali. Si opera più spesso con loro approssimazioni, vale a dire con numeri decimali finiti, arrestati alla 1^a o alla 2^a o alla 3^a cifra decimale o addirittura con numeri interi.
Anche gli strumenti di calcolo automatico (calcolatrici, PC, ...) operano con numeri decimali finiti; magari con molte cifre decimali, ma pur sempre numeri decimali finiti.
Sui valori approssimati ritorneremo in un'altra unità (5)**, per un discorso più approfondito.**

2.4.7 Concludiamo questo paragrafo richiamando un argomento, quello delle **PERCENTUALI**, che in fondo dovresti conoscere fin dal 1° ciclo d'istruzione, ma che non è male ripassare.
Detto che il quoto di numeri razionali a, b (con $b\neq0$) si chiama anche ***rapporto*** dei due numeri a, b, e che i due rapporti uguali a:b e c:d si dice che formano la ***proporzione***:

$$a : b = c : d,$$

consideriamo il seguente problema.

- PROBLEMA: Un lavoratore dipendente percepisce uno stipendio mensile di € 1680 e spende € 740 per l'affitto della casa. Quanto spende in affitto su ogni 100 euro di stipendio?
  RISOLUZIONE: Se la somma spesa in affitto su ogni 100 euro di stipendio è provvisoriamente indicata con x, si tratta di stabilire per quale valore di x il rapporto $\frac{x}{100}$ è uguale al rapporto $\frac{740}{1680}$; in altre parole di determinare quale valore, scelto in $\mathbb{Q}^+$, occorre sostituire ad x affinché sia vera la seguente proporzione:

  $$\frac{x}{100}=\frac{740}{1680} .$$

  Per una nota proprietà delle frazioni, deve essere:

  $$x\cdot1680=100\cdot740;$$

  quindi x è il numero che bisogna moltiplicare per 1680 per ottenere $100 \cdot 740$; esso è allora:

  $$x=\frac{100\cdot740}{1680}\approx44 .$$

  Il simbolo "≈" si legge "all'incirca uguale" ed indica che il risultato è un valore approssimato.
  Il lavoratore spende, dunque, in affitto, circa $\frac{44}{100}$ del suo stipendio.
  Siccome $\frac{44}{100}$, ossia 0,44 si scrive anche in questo modo: 44% , che si legge: «44 *per cento*», possiamo concludere che il lavoratore spende circa il 44% del suo stipendio in affitto.
  Su questo modo di scrivere le "*percentuali*" ancora un esempio.
  Dire il 16% di 78.000 è come dire $\frac{16}{100}\cdot78.000$, ovvero 12.480. Appunto perché: $16\%=\frac{16}{100}=0{,}16$.

Terminiamo con una storiella. Un'azienda, alla fine dell'anno, constata con dispiacere che ha avuto il 5% delle perdite, rispetto al valore iniziale del capitale, che era di 2 milioni di euro. Ma alla fine dell'anno successivo nota con soddisfazione che, rispetto all'anno precedente, ha avuto il 5% d'incremento. «Allora siamo ritornati al capitale di due anni fa!», conclude raggiante il responsabile. Ma ha subito una delusione perché, fatti i conti, si accorge che la somma in cassa è inferiore a quella che sperava. Cos'è successo?
Il responsabile dell'azienda si era illuso perché ha una conoscenza un po' lacunosa delle percentuali.

[5] Cfr.: Unità 4: Approssimazioni.

Alla fine del primo anno, infatti, la somma iniziale di 2 milioni di euro, dopo una perdita del 5%, diventa:

$$2.000.000-\frac{5}{100}\ 2.000.000 = 2.000.000-100.000 = 1.900.000\ (€).$$

Se alla fine del secondo anno c'è un incremento del 5%, la somma in cassa è ora:

$$1.900.000+\frac{5}{100}\ 1.900.000 = 1.900.000+95.000 = 1.995.000\ (€).$$

Nei due anni, pertanto, l'azienda ha complessivamente perduto 5.000 euro, pari allo 0,25% del capitale iniziale.

ESERCIZI.

1. Un signore deposita in banca € 5000 al tasso annuo dell'1,5% (vale a dire che ogni 100 euro gli danno, alla fine dell'anno, un frutto di € 1,5). Quanto interesse gli ha fruttato il deposito alla fine dell'anno? [**R.** € 75]
2. Un vestito, che in origine costava € 250, ti viene offerto in liquidazione con uno sconto del 35%. Quanto lo pagheresti se decidessi di comprarlo? [**R.** € 162,5]
3. Due negozi distinti offrono della mercanzia esattamente uguale ma a condizioni diverse: il negozio A la offre a € 370 con uno sconto del 25%; il negozio B la offre a € 420 con uno sconto del 30%. In quale negozio conviene acquistare?
4. In occasione delle ultime elezioni, nella sezione elettorale dove è iscritto a votare il sig. Bianchi, si sono registrati i seguenti esiti:
   - elettori (cioè iscritti a votare): N. 480
   - votanti: N. 459
   - voti validamente espressi: N. 441
   - schede bianche: N. 10
   - schede nulle: N. 8

   a) Quali sono state le percentuali dei voti validi sul numero dei votanti e su quello degli elettori?
   b) Qual è stata la percentuale di coloro che non hanno espresso un voto valido sul totale degli elettori?
   c) Quali sono state le percentuali delle schede bianche e delle schede nulle sul numero dei votanti?
5. Quell'anno, a fine luglio, un tipo di pane costava 2,74 €/kg mentre all'inizio di settembre costava 2,96 €/kg. In che percentuale è aumentato quel tipo di pane?
6. Per ciascuna delle figure sottostanti (Fig. 7) indica la percentuale della parte colorata rispetto all'intera figura.

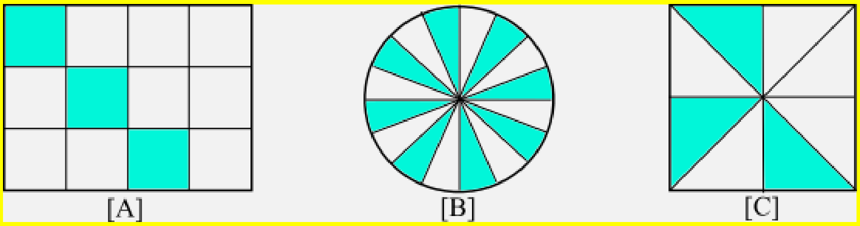


FIG. 7

7. Si sa che il prezzo di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle due operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
   [Tratto dall'esame di Stato 2007, indirizzo scientifico, sessione ordinaria]

2.5 POTENZE CON ESPONENTE IN $\mathbb{Z}$

2.5.1 La scrittura $\mathbf{a^n}$, dove a è un qualunque numero razionale non nullo ed n è un qualsiasi numero naturale, rappresenta, come si sa, ancora un numero razionale.
Consideriamo ora il seguente numero:

$$\frac{5^2}{5^6}.$$

È evidente che si ha:

$$\frac{5^2}{5^6}=\frac{5^2}{5^2\cdot 5^4}=\frac{1}{5^4}.$$

D'altra parte, se ammettiamo che le regole dell'elevamento a potenza continuino a valere anche in presenza di esponenti negativi, deve essere:

$$\frac{5^2}{5^6}=5^{2-4}=5^{-4}.$$

Dobbiamo, dunque, ammettere che sia:

$$\frac{1}{5^4}=5^{-4}.$$

In realtà, si pone per definizione:

$$\mathbf{\frac{1}{a^n}=a^{-n}}\ .$$

Ha così senso parlare di potenza con base in $\mathbb{Q}_0$ ed esponente in $\mathbb{Z}$.

Esempi: $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$.

ESERCIZI.

1. Esegui le seguenti operazioni:

$$-\frac{2^{-2}}{5}\qquad\left(+\frac{2}{5}\right)^{-2}\qquad\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}\qquad\left(+\frac{2}{5}\right)^{-3}.$$

2. Indica la cifra che occupa il 3° posto dopo la virgola in ciascuno dei seguenti numeri:

$$2{,}354\cdot 10^{-1}\qquad 0{,}0234\cdot 10^{-2}\qquad 1{,}0035\cdot 10^{-3}$$

3. Prova a sostituire al posto della lettera x, che figura in ognuna delle seguenti uguaglianze, un numero intero, se esiste, che la renda soddisfatta:

$$x^3=8\qquad x^2=\frac{1}{9}\qquad x^{-4}=\frac{1}{16}\qquad x^{-1}=\frac{1}{3}\qquad x^2=3$$

$$2^x=8\qquad 3^x=\frac{1}{9}\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{16}\qquad \left(\frac{1}{5}\right)^x=25\qquad 2^x=3$$

4. Qual è il valore semplificato della potenza $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$?

[A] $\frac{1}{4}$. [B] [4]. [C] $-\frac{1}{4}$. [D] -4.

2.5.2 Per le potenze di un numero relativo con esponente in $\mathbb{Z}$ valgono tutte le proprietà delle potenze con esponente in $\mathbb{N}$, che ti invitiamo a rivedere e verificare in qualche caso particolare.

2.5.3 L'introduzione delle potenze con esponente negativo ci dà la possibilità di riprendere e completare una questione alla quale abbiamo fugacemente accennato nella precedente unità.

Si tratta precisamente della rappresentazione di un numero decimale come somma di multipli di potenze di 10 (***rappresentazione polinomiale del numero***).

Abbiamo visto, a suo tempo, come un numero intero (nel senso che non ha una parte decimale) scritto nel sistema decimale di numerazione, possa essere rappresentato in forma polinomiale, cioè come somma di multipli di potenze di 10 con esponente naturale.

Per esempio: $2568=2\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+8$.

Se però il numero ha una parte decimale, le potenze di 10 con esponente naturale non sono più sufficienti. Ci soccorrono in tal caso le potenze con esponente intero.

Per esempio, avendosi: $397{,}463=397+\frac{4}{10}+\frac{6}{100}+\frac{3}{1000}$, si capisce subito che possiamo scrivere:

$$397{,}463=3\cdot 10^2+9\cdot 10+7+4\cdot 10^{-1}+6\cdot 10^{-2}+3\cdot 10^{-3}.$$

Ti proponiamo per esercizio di rappresentare in forma polinomiale (ossia di scrivere come somma di multipli di potenze di 10) i seguenti numeri:

$2{,}55 \qquad 31{,}05 \qquad 0{,}234 \qquad 2507{,}204 \qquad 0{,}0034$

2.6 ESPRESSIONI NUMERICHE E LETTERALI CON VALORI IN $\mathbb{Q}$

2.6.1 Per le espressioni numeriche e letterali con valori in $\mathbb{Q}$ valgono le medesime considerazioni e convenzioni fatte a proposito delle espressioni con valori in $\mathbb{Z}$.

Qui ci limitiamo, pertanto, a fornire qualche esempio ed a proporti alcuni esercizi che ti consentiranno di consolidare e affinare la tua abilità di calcolo.

- ESERCIZIO RISOLTO 1. Calcolare il valore della seguente espressione:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left[\left(0,\overline{2}+\frac{1}{9}\right)^2\cdot 6-0{,}5^3:\frac{1}{4}\right].$$

RISOLUZIONE. Detto per comodità v il valore dell'espressione, si ha:

$$\mathrm{v}=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)^2\cdot 6-\left(\frac{5}{10}\right)^3:\frac{1}{4}\right]=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{9}\cdot 6-\frac{1}{8}\cdot 4\right]=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4-3}{6}=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{5}+\frac{1}{12}=\frac{36+5}{60}=\frac{41}{60}.$$

- ESERCIZI DA RISOLVERE. Calcola i valori delle seguenti espressioni numeriche:

1. $\left[2-\left(\frac{3}{7}:\frac{4}{5}-\frac{1}{28}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\right]:\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$ [**R.** $7/8$]	**2.** $1+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}:\left[\left(1-\frac{1}{2}\right):\frac{5}{2}:\frac{3}{4}\right]$ [**R.** $31/10$]
3. $\left[\left(3-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{15}+\frac{2}{3}\right]:\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}:\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{7}{12}$ [**R.** $4/7$]	**4.** $\overline{(1,\overline{3}-1{,}3)\cdot 4{,}5+4,\overline{5}}$ [**R.** $4{,}70\overline{5}$]
5. $\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2$ [**R.** $5/16$]	**6.** $\frac{2,\overline{3}}{1,\overline{3}}+1{,}75-3{,}5$ [**R.** 0]

7. $\frac{3}{\frac{9}{5}}:\frac{\frac{4}{5}}{2}+\left(5:3-\frac{1}{2}\right)$ [**R.** $16/3$]	**8.** $\frac{\frac{7}{2}}{\frac{21}{8}}+\frac{5}{6}+\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}$ [**R.** $23/6$]
9. $\left\{\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}:\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)^3\right]:\frac{3}{7}\right\}^2:\left\{\frac{3}{4}+\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\right\}$ [**R.** $3/11$]	**10.** $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+0{,}5}}$ [**R.** $8/5$]
11. $\left\{\frac{2}{5}+\frac{3}{2}:\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]^2\cdot\frac{4}{9}\right\}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}:\frac{2}{5}$	**12.** $(3+0{,}5)(3-0{,}5)+(2+0{,}\overline{3})(2-0{,}\overline{3})$
13. $\left(5+\frac{5}{4}\right)\left(\frac{6}{5}-1\right)^2:\left(2-\frac{4}{3}\right)^3+\frac{4}{9}$	**14.** $\frac{1{,}6:(2+1{,}\overline{3})(3-0{,}\overline{6})}{(2-0{,}4)^2}:0{,}5+1$

- ESERCIZIO RISOLTO 2. Calcolare il valore della seguente espressione numerica:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2:\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-2^2+(-1)^{-4}(-2)^{-2}.$$

RISOLUZIONE. Detto per comodità v il valore dell'espressione, con passaggi successivi si ha:

$$v=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{5}-4+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-4+\frac{1}{4}=\frac{20+12-240+15}{60}=-\frac{193}{60}.$$

- ESERCIZI DA RISOLVERE.

I) Calcola i valori delle seguenti espressioni:

ESPRESSIONE	Risultato
1. $(3+5-7-1+2-3+11):(2-3)$	-10
2. $[18:4-2:(15-3-8)](-2)+5$	-3
3. $\{15-[7-8:(13-5+2)-4]:(-1)+3\}:5-1$	$76/25$
4. $\{20:5+(4-2\cdot3)^{-1}+4:[3-2\cdot(5-3-1)^3]:4\}^{-2}$	$4/81$
5. $\{12-4\,[3+4(5-2\cdot4)^{-1}]^{-2}\}^{-1}$	$25/264$
6. $-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\cdot\left\{\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}:\left[3-2\cdot\left(5-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\right\}^{-1}$	$-\frac{7}{15}$
7. $\left[2-\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]:\left(-3+\frac{7}{5}\right)$	$-\frac{7}{8}$
8. $\left\{8-2\cdot\left[5-\frac{1}{2}:\left(\frac{3}{2}+1\right)\right]\right\}:\left\{\left(\frac{3}{5}-3:\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\frac{5}{3}-1\right\}^{-1}$	$\frac{16}{3}$
9. $\left[\frac{\left(3-\frac{7}{3}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}\right]^2:\left(2-\frac{4}{3}\right)^{-2}$	$\frac{16}{81}$

10. $\left(1-\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right)^{-2}:\left(1+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)^{2}:\left(2-\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\frac{1}{16}$
11. $\left(2-\frac{1}{3}\right):\left\{\left(1-\frac{5}{8}\right)+\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{7}{4}\right)\left(-1+\frac{6}{19}\right)+\left(1-\frac{3}{10}\right)\right]\left(\frac{7}{18}-\frac{2}{3}\right)\right\}$	!?
12. $\left\{\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{2}-2,\bar{3}\right]:\left(4+\frac{8}{3}\right)+\left(-2^{3}+3^{2}+11\right)^{-1}\right\}:\left(1,\bar{2}-0,\bar{2}\right)$	0
13. $\left(\left(\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}-0{,}75\right)\right):\left(\frac{3}{8}+1{,}5\right)$	$\frac{22}{75}$
14. $\left(\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\right)^{-1}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{9}{10}\right)\right)^{-2}:\left(\frac{3}{8}-2{,}5+0,\bar{6}\right)$	$-\frac{6}{35}$
15. $\left(1,\bar{3}+0,\bar{6}-2,\bar{6}\right)^{2}\left(1-1,\bar{6}\right)^{3}:\left(2-2,\bar{6}\right)^{4}$	$-0,\bar{6}$
16. $\dfrac{2-\frac{2}{3}}{2+\frac{2}{3}}+\dfrac{3+\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}}-\dfrac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}$	$\frac{11}{10}$
17. $\left(2-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)^{4}:\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{5}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$	1
18. $\left\{3-\frac{2}{3}\cdot\left[\left(\frac{3}{5}-1\right)\cdot\frac{5}{2}+2\right]:\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right\}:\left(-\frac{8}{3}\right)+\frac{1}{2}$	-1
19. $\left(\left(4-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)-\left(2+\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\right)^{-2}$	!?
20. $\left(\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right):\left(\frac{5}{12}-\left(2-\frac{1}{3}\right):\left(3-\frac{1}{2}\right)\right)^{-2}+1\right):\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+1\right)$	$\frac{4}{5}$
21. $\left(\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right)^{-2}+\left(\dfrac{2-\frac{5}{2}}{2+\frac{5}{2}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{5}{2}\right)^{2}$	$-\frac{11}{4}$
22. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{40}\right):\left(3-\frac{1}{2}\right)^{2}\left(2+\frac{4}{3}\right)^{2}}{\left(2-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{7}\right):\left(3-\frac{4}{3}\right)}-\left(\frac{5}{3}\right)^{2}$	0
23. $\dfrac{\left(2-\frac{1}{2}\right)^{2}-3\cdot\left(4-\frac{7}{3}\right)+2}{\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^{2}}:\left[\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right]^{3}$	$-\frac{27}{8}$

24. $\dfrac{\left[\frac{9}{4}-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)-\left(4+\frac{2}{3}\right)\right]^2\left[\left(-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{4}\right]}{\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)+2\right]^2}$	$\frac{1}{2}$
25. $\left(\dfrac{2}{3-\frac{1}{2}}:\dfrac{2-\frac{1}{3}}{3}-\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{4}{3}}:\dfrac{2+\frac{1}{2}}{5-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)$	$-\frac{3}{2}$

II) Per ciascuna delle seguenti espressioni letterali calcola il valore corrispondente a quelli assegnati alle lettere e indicati a fianco di essa.

ESPRESSIONE	Valori da sostituire alle lettere
1. $(3a-2)^2-2(a+1)$	$a=1/2$
2. $(x-2)(2x+1)+(2x-1)(x+2)$	$x=-3/2$
3. $(x-2)(x^2+2x+4)-(x-2)^2(x-1)$	$x=1/2$
4. $(2p+q)(2p-q)-(p+2q)^2$	$p=1/2,\ q=-1$
5. $(a+2b)(2a+b)-(a-b)(2a-b)$	$a=-2,\ b=3/2$
6. $\left(\frac{a}{2}+b\right)^2-\left(a+\frac{b}{2}\right)(2a-b)$	$a=2,\ b=\frac{1}{3}$
7. $\left(\frac{1}{4}x^2-y^2\right)\left(\frac{1}{2}x-y\right)+\left(\frac{1}{4}x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{2}x+y\right)$	$x=-1,\ y=-\frac{3}{2}$
8. $2\left(a-\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)+\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2$	$a=-\frac{3}{4},\ b=-\frac{2}{3}$

2.6.2 Quando si fa uso di una calcolatrice o, in genere, di uno strumento di calcolo automatico per determinare il valore di un’espressione numerica, i dati non possono essere inseriti scrivendo i vari numeri su più “linee”, come facciamo con carta e penna, ma vanno immessi come sequenza lineare (si parla, per questo, di ***linearizzazione***). Per farlo occorre prestare molta attenzione, soprattutto nell’uso delle parentesi, se non si vogliono commettere errori.

Ci spieghiamo con un esempio, banale sul piano pratico ma efficace per comprendere di cosa stiamo parlando. Se, dunque, voglio immettere nella calcolatrice l’espressione $\frac{4+2}{3-1}$ e scrivo senza riflettere, è possibile che vada ad immettere la seguente successione di dati: $4+2/3-1$, commettendo così un grave errore. La sequenza corretta da inserire è infatti questa: $(4+2)/(3-1)$.

Ci si può render conto subito dell’errore commesso: basta osservare che il valore dell’espressione considerata è 3, che è ancora il valore di $(4+2)/(3-1)$ ma non è quello di $4+2/3-1$ che è invece $11/3$.

ESERCIZIO. Scrivi in sequenza lineare le seguenti espressioni e controlla la correttezza dell’operazione servendoti di una calcolatrice. Devi ricordare che le uniche parentesi che la calcolatrice riconosce sono le parentesi tonde.

1) $\dfrac{2-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}-1}$. 2) $\dfrac{\left(3-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}+1\right)+\frac{3}{2}}{2-\frac{1}{3}}$. 3) $\left(\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right)^{-2}+\left(\dfrac{2-\frac{5}{2}}{2+\frac{5}{2}}\right)^{-1}+\left(1-\frac{5}{2}\right)^2$.

4) $\left(3-\frac{2}{3}\cdot\left(\left(\frac{3}{5}-1\right)\cdot\frac{5}{2}+2\right):\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}\right):\left(-\frac{8}{3}\right)+\frac{1}{2}$.   5) $\left[2-\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]:\left(-3+\frac{7}{5}\right)$.

VERIFICHE [6]

1. Due delle seguenti affermazioni sono vere e due sono false. Individua le une e le altre.
- Di due frazioni positive aventi lo stesso denominatore è maggiore quella che ha il numeratore maggiore.
- Di due frazioni positive aventi lo stesso denominatore è maggiore quella che ha il numeratore minore.
- Di due frazioni positive aventi lo stesso numeratore è maggiore quella che ha il denominatore maggiore.
- Di due frazioni positive aventi lo stesso numeratore è maggiore quella che ha il denominatore minore.

2. Di ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o se è falsa:

a) Esiste $x\in\mathbb{Q}$ tale che $3 : x = 0$.

b) Esiste $x\in\mathbb{Q}$ tale che $4\,x = 1$.

c) Per ogni $x\in\mathbb{Q}_0$ si ha $x>\frac{x}{2}$.

d) Risulta: $53000 = 5.3\cdot10^3$.

e) Quali che siano $a,b\in\mathbb{N}_0$, con $a>b$, risulta: $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$.

f) 0,75 litri di vino costano € 3,6. Di conseguenza 1 litro di vino costa € 4,8.

g) Il 30% del 70% di un numero A è uguale al 21% di A .

h) Il prodotto di due numeri razionali, entrambi minori di 1, è un numero maggiore di 1.

i) Il prodotto di un numero razionale positivo a per un numero razionale positivo b è un numero razionale c maggiore di a.

j) Quella volta 1 euro equivaleva a 1,59 dollari, per cui 25 dollari equivalevano a 15,73 euro.

3. Riguardo a ciascuna delle seguenti questioni è corretta un'alternativa ed una soltanto. Individuala e darne una spiegazione esauriente.

a) Il seguente numero è compreso fra 1 e 2:

A) $\frac{2}{5}$;   B) $\frac{5}{2}$;   C) $\frac{3}{2}$;   D) $\frac{2}{3}$;   E) $\frac{3}{4}$.

b) La seguente uguaglianza è falsa:

A) $\frac{3}{2}=\frac{3\cdot2}{2\cdot2}$;   B) $\frac{36}{24}=\frac{36:6}{24:6}$;   C) $\frac{9}{5}=\frac{9:2}{5:2}$;   D) $\frac{3}{4}=\frac{3^2}{4^2}$;   E) $\frac{6}{3}=\frac{6+2}{3+1}$.

c) Il numero $\frac{127}{63}$ è compreso tra:

A) 0 e 1;   B) 1 e 2;   C) 2 e 3;   D) 3 e 4;   E) 4 e 5.

d) La frazione $\frac{16}{6}$ può essere trasformata in un'altra equivalente avente denominatore uguale a:

A) 4;   B) 8;   C) 9;   D) 10;   E) 16.

e) A) $0,\overline{8}+0,\overline{3}=1,\overline{1}$;   B) $1,\overline{2}+2,\overline{1}=3,\overline{3}$;   C) $4,\overline{7}+7,\overline{4}=12,\overline{11}$;   D) $5,\overline{6}+6,\overline{5}=12,\overline{11}$.

---

[6] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

f) Il 18% di 750 è:

A) 41,67; B) 13500; C) 135; D) 2,4; E) un valore diverso dai precedenti.

g) La frazione 124/250 è un modo diverso di rappresentare il numero:

A) 49,6 % ; B) 4,96 % ; C) 0,496 % ; D) 496 % ; E) 2,02 % .

h) La metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è:

$$\text{A) } \left(\frac{1}{4}\right)^{50}; \quad \text{B) } \left(\frac{1}{2}\right)^{25}; \quad \text{C) } \left(\frac{1}{2}\right)^{51}; \quad \text{D) } \left(\frac{1}{2}\right)^{49}; \quad \text{E) } \left(\frac{1}{4}\right)^{25}.$$

[Quest'ultimo quesito h) è tratto da INVALSI – Servizio nazionale di valutazione 2010-11]

4. Considerata la frazione a/b, si indichi con q ed r rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione di a per b. Esprimere la frazione mediante q ed r, sapendo che:

1) a=25, b=3; 2) a=37, b=5; 3) a=54, b=7.

$\left[\textbf{R.}\ 1)\ \frac{25}{3}=8+\frac{1}{3}\ ;...\right]$

5. ® Dato un numero decimale A, si ricorda che E(A) indica la parte intera di A.
Dimostra che le seguenti uguaglianze:

E(A+B) = E(A) + E(B) , E(AB) = E(A) · E(B)

non valgono sempre (cioè non sono vere quali che siano i numeri decimali A,B).

6. PROBLEMA RISOLTO**.** Si pone il problema di stabilire quale dei due numeri:

$$10^{18} \text{ e } 18^{10}$$

è il maggiore senza usare strumenti di calcolo automatico. Lo stesso problema si pone per i numeri:

a) 10^{12} e 12^{10} ; b) 100^{120} e 120^{100} .

Come pensi di risolvere questi problemi?

[Questione con altissimo coefficiente di difficoltà]

RISOLUZIONE. Ci occupiamo soltanto del confronto dei numeri 10^{18} e 18^{10} giacché per le altre coppie di numeri si tratta di fare dei tentativi analoghi. Per tale confronto è sufficiente stabilire se la frazione $\frac{10^{18}}{18^{10}}$ è minore di 1 o maggiore di 1. Ora si ha:

$$\frac{10^{18}}{18^{10}}=\left(\frac{10^9}{18^5}\right)^2.$$

D'altronde:

$$\frac{10^9}{18^5}=\frac{(2\cdot5)^9}{\left(2\cdot3^2\right)^3}=\frac{2^9\cdot5^9}{2^5\cdot3^{10}}=\frac{2^4\cdot5^9}{3^{10}}=2^4\cdot\frac{5\cdot5^9}{5\cdot3^{10}}=\frac{2^4}{5}\cdot\frac{5^{10}}{3^{10}}=\frac{16}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{10}$$

e poiché $\frac{16}{5}>1$ e $\frac{5}{3}>1$, possiamo concludere che $\frac{16}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{10}>1$ e, di conseguenza: $10^{18}>18^{10}$.
In effetti, mediante un idoneo software matematico, si trova il seguente risultato:

$$\frac{10^{18}}{18^{10}}\approx 2{,}8\cdot10^5.$$

7. Tra le seguenti proposizioni ve ne sono di vere e di false. Individua le une e le altre, fornendo esaurienti spiegazioni delle risposte:

1) Il doppio di un numero relativo è concorde col numero.
2) Il quadrato di un numero relativo è concorde col numero.
3) L'opposto di un numero relativo è negativo.
4) Il quoziente fra due numeri discordi è negativo.

5) Il quoziente fra due numeri concordi è concorde con essi.
6) Se il numero relativo a è maggiore del numero relativo b allora $a^2 > b^2$.
7) Se il numero razionale positivo a è maggiore del razionale positivo b allora ab>a.

8. Scrivi come somma di multipli di potenze di 10 (con esponenti positivi e/o negativi) i seguenti numeri:

11,11; 0,01; 101,101.

9. ® Ricordando che con la scrittura E(x) si indica la parte intera del numero x, i numeri interi positivi n, minori di 1.000, tali che:

$$E\left(\frac{n}{2}\right)+E\left(\frac{n}{3}\right)=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}$$

sono esattamente:

[A] 58 ; [B] 115 ; [C] 166 ; [D] 193.

Una sola alternativa è corretta: individuala e fornisci un'esauriente spiegazione della scelta operata.

10. Risolvi le seguenti questioni:

a) Se un litro di benzina costa € 1,845, quanti litri di benzina compri con 50 euro?
b) Sapendo che gli spaghetti sono venduti a 1,54 €/kg, quanti chilogrammi di spaghetti si possono comprare con 10 euro? [**R**. circa 6,5 kg]
c) Poiché un chilogrammo equivale a 2,205 libbre, a quanti grammi equivale una libbra?
d) Poiché un gallone equivale a 3,785 litri, a quanti galloni equivale un litro?
e) Poiché una yarda equivale a 0,914 metri, a quante yarde equivale un chilometro?
f) Quella volta il prezzo dell'oro era di 1.238,50 dollari l'oncia. Quanti euro occorrevano per 1 g di oro?
[N.B.: 1 euro equivaleva allora a 1.261,10 dollari. Tieni poi presente che 1 oncia equivale a 28,35 g]
g) Tenendo presente che un pollice equivale a 2,54 cm:
1) quanto misura la diagonale dello schermo rettangolare di un televisore di 17 pollici?
2) di quanti pollici è un televisore il cui schermo rettangolare ha una diagonale di 50,8 cm?
[N.B.: dire che un televisore ha, per esempio, 17 pollici significa dire che la diagonale del suo schermo è appunto di 17 pollici.]

11. Al giornalaio sono arrivate le 50 copie della famosa rivista. Queste copie, disposte in pila l'una sopra l'altra, raggiungono un'altezza di 40 cm. Appena esposte, sono vendute 7 copie della rivista. Quant'è alta adesso la pila delle riviste rimaste? [**R**. 34,4 cm]

12. Quella volta (17 aprile 2006) il petrolio greggio era venduto a 71,40 dollari al barile ed un euro era quotato 1,2269 dollari. Tenendo presente che un barile equivale a 159 litri, quanti euro costava allora un litro di greggio? Considerato che quel giorno alcuni rivenditori italiani facevano pagare la benzina 1,3205 euro al litro, di quanto, in percentuale, era l'aumento nel passaggio dal greggio alla benzina?
Qualche tempo dopo (7 luglio 2008) il petrolio greggio era venduto a 144 dollari al barile ed un euro era quotato 1,5646 dollari. Quali incrementi percentuali hanno subito il petrolio ed il rapporto euro/dollaro fra le due date? [**R**. 0,3660 euro/litro; circa 261%; ...]

13. È stato monitorato il comportamento della "moneta A" rispetto alla "moneta B" nell'arco di 2 anni. Sia nel 1° che nel 2° anno la moneta A si è svalutata dell'1% rispetto alla moneta B. Di quanto la moneta A si è svalutata complessivamente?

[A] 2%. [B] 1,5%. [C] 2,01%. [D] 1,99%.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

14. È stato monitorato il comportamento della "moneta A" rispetto alla "moneta B" nell'arco di 2 anni. Nel 1° anno la moneta A si è svalutata dell'1% rispetto alla moneta B, mentre nel 2° anno si è rivalutata dell'1%. Qual è il valore della moneta A rispetto alla moneta B alla fine del 2° anno?

[A] Lo stesso di quello che aveva all'inizio dl 1° anno. [B] Si è svalutata dello 0,01%.

[C] Si è rivalutata dello 0,01%. [D] Si è svalutata dello 0,02%.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

15. PROBLEMA RISOLTO**.** Sul tavolo ci sono 5 sacchetti contenenti ciascuno 100 monete da 0,1 euro: in 4 sacchetti ci sono monete buone, in un sacchetto tutte le monete sono false ed ognuna di esse ha un peso pari a 99/100 del peso conosciuto di una moneta buona. C'è a disposizione una bilancia di precisione. Il professore fa questa domanda agli studenti: *Qual è il minimo numero di pesate che occorre fare per scoprire il sacchetto con le monete false*?

- «*Cinque pesate* – risponde pronto Paolo –. *Bisogna, infatti, pesare ognuno dei 5 sacchetti e prendere quello che pesa di meno*».
- «*Ma no, bastano 4 pesate* – ribatte Giacomo –. *Dopo 4 pesate, infatti, ho già scoperto il sacchetto incriminato o, se tutti e quattro hanno lo stesso peso, quello che rimane è il sacchetto cercato*».
- «*In realtà, se si ragiona bene, basta una sola pesata*», interviene Piero, il genio matematico della classe.

Piero ha effettivamente ragione. Sapresti fare il ragionamento giusto?

RISOLUZIONE. Basta numerare i sacchetti con i numeri da 1 a 5 e, prese n monete dal sacchetto che ha il contrassegno "n" (1 moneta dal sacchetto "1", 2 dal sacchetto "2", e così via), pesare le 1+2+3+4+5=15 monete. Se il peso di una moneta buona è p, il peso delle 15 monete sarà $\frac{99}{100}$m di p, dove m è un numero uguale ad 1 o 2 o 3 o 4 o 5. Il sacchetto che porta il corrispondente numero di m è quello delle monete false.

Il gioco può essere riproposto con un numero di sacchetti diverso da 5, purché il numero di monete contenute in ogni sacchetto sia non minore del numero dei sacchetti.

16. La terza parte di un cerchio è stata colorata in rosso. La metà della parte rimanente è stata colorata in verde. Della nuova parte rimanente, la quarta parte è stata colorata in giallo. Scrivi l'espressione numerica che sintetizza i calcoli che bisogna fare per calcolare quanta parte del cerchio non è stata colorata. Calcola poi quant'è effettivamente questa parte. [**R.** ...; 1/4]

17. Un vecchio patriarca ha 60 nipoti, la metà dei quali ha meno di 10 anni. Un quinto dell'altra metà ha un'età compresa fra i 10 e i 20 anni. Dei nipoti che rimangono, un quarto ha tra i 20 e i 30 anni e un terzo ha fra i 30 e i 40 anni. Scrivi l'espressione numerica che sintetizza le operazioni che permettono di calcolare quanti nipoti hanno più di 40 anni. Calcola poi quanti di fatto sono questi nipoti.

$$\left[\mathbf{R.}\ \left\{1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\cdot 60;\ldots\right]$$

18. Il gelataio di via del Corso constatò tutto felice che in seguito ad un'improvvisa ondata di calore afoso che aveva colpito la città, la vendita dei gelati era passata da circa 90 gelati al giorno a circa 150 gelati al giorno. In quale percentuale era aumentata la vendita dei gelati? [**R.** circa 66,7%]

19. La signora Rosa Bianchi si reca al supermercato con la lista della spesa:

- 2 filette di pane, al costo di 1,37 euro ciascuna;
- 2 scatole di pomodori pelati, al costo di 0,99 euro a scatola;
- 8 etti di carne, al costo di 17,40 €/kg;
- una confezione di 6 bottiglie di acqua minerale, al costo di 0,46 euro a bottiglia;
- 1 kg di pere e 2 kg di mele, entrambe al costo di 2,08 €/kg.

Alla cassa paga con una banconota da € 50 ed esibisce un buono sconto di € 2,5. Scrivi l'espressione numerica che sintetizza alla lettera la differenza fra i 50 euro e il dettaglio della spesa sostenuta, compreso però il buono sconto. Calcola quindi tale differenza. [**R.** ...; € 24,86]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che due numeri primi, comunque scelti purché diversi, sono primi tra loro?
2. È vero che due numeri primi tra loro, comunque scelti, sono numeri primi?
3. È vero che, di due frazioni aventi lo stesso numeratore, è maggiore quella che ha denominatore minore?
4. È vero che moltiplicando il numeratore e il denominatore di una frazione per uno stesso numero non nullo si ottiene una frazione equivalente a quella data?
5. È vero che sommando uno stesso numero al numeratore e al denominatore di una frazione si ottiene una frazione equivalente a quella data?
6. È vero che moltiplicando un numero razionale positivo a per un numero razionale positivo diverso da 1 si ottiene un numero maggiore di a?
7. Si considerino le due seguenti uguaglianze:
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}\ ;\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d},$$
dove a, b, c, d sono interi qualsiasi con $b\neq0$, $d\neq0$. Qual è il valore di verità di ciascuna di esse?
8. È corretto affermare che il rapporto tra un intero a e un intero b non nullo è un numero razionale?
9. Sia a un qualsiasi numero razionale positivo diverso da 1; sia b un qualsiasi numero naturale maggiore di 1. È vero che $a^b>a$?
10. È vero che, siccome $29>3$, allora $0,29>0,3$?
11. Tra i due insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ uno è denso e l'altro no. Qual è quello denso? Perché?
12. Cos'è una frazione decimale?
13. Qual è la condizione affinché la frazione a/b generi un numero decimale periodico? Quando il periodo è semplice? Quando è misto?
14. È vera la seguente uguaglianza: $203,302=2\cdot10^2+3+3\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-3}$?
15. È vero che il prodotto $136\times0,75$ indica il 75% di 136?
16. Ho speso 8,5 euro per acquistare 450 g di formaggio. Quanto costa un chilogrammo di quel formaggio?
17. Un vestito, che costava € 450, durante la stagione dei ribassi risulta scontato del 23%. È esatto affermare che adesso il vestito costa $450\times0,77$ euro ?
18. È vero che la frazione a/b si può mettere nella forma q+r, dove q ed r sono nell'ordine il quoziente ed il resto della divisione di a per b?

RISPOSTE.

1. Sì. Infatti il loro massimo comune divisore è 1.
2. No. Per esempio i numeri 21 e 10 sono primi tra loro ma nessuno di essi è primo.
3. Sì. In effetti, considerate le due frazioni $\frac{a}{m}$ e $\frac{a}{n}$, se $n>m$ risulta $an>am$ e quindi la prima frazione è maggiore della seconda.
4. Sì: è precisamente la proprietà invariantiva delle frazioni.

5. No. Per esempio: $\frac{3}{2} \neq \frac{3+1}{2+1}$.

6. No. Per esempio: $3 \cdot \frac{1}{2} < 3$. Lo stesso accade ogni volta che il numero per cui si moltiplica è minore di 1.

7. La prima è falsa, la seconda è vera.

8. Sì. Il rapporto è proprio il numero razionale a/b.

9. No. Per esempio: $0,1^2 < 0,1$. Lo stesso accade ogni volta che $a < 1$.

10. No. Infatti 0,3 è uguale a 3/10 ovvero 30/100, mentre 0,29 vale 29/100. In realtà, nel passaggio da 29 a 0,29 si divide per 100, mentre nel passaggio da 3 a 0,3 si divide per 10.

11. L'insieme denso è $\mathbb{Q}$ poiché fra due qualsiasi numeri razionali è sempre possibile inserire almeno un altro numero razionale. Cosa che invece non è vera per l'insieme $\mathbb{Z}$: fra gli interi 2 e 3, per esempio, non è possibile inserire alcun intero.

12. Una frazione decimale è una frazione avente per denominatore una potenza di 10, con esponente naturale. Essa genera sempre un numero decimale finito.

13. La frazione genera un numero decimale periodico quando, supposta irriducibile, il denominatore b, scomposto in fattori primi, presenta fattori diversi da 2 e da 5. Precisamente: se b presenta **solo** fattori diversi da 2 e da 5, il periodo è semplice; se presenta fattori diversi da 2 e da 5 **assieme** ad almeno uno dei fattori 2 e 5, il periodo è misto.

14. Sì.

15. Sì. In realtà $136 \times 0,75$; 75% di 136; $136 \times \frac{75}{100}$ sono modi diversi di indicare la stessa quantità.

16. Siccome 450 g = 0,45 kg, la spesa x per 1 kg di formaggio è tale che deve sussistere la seguente proporzione:

$$x : 1 = 8,5 : 0,45 \quad \text{per cui} \quad x = \frac{8,5}{0,45} \approx 18,90 \ (€/\text{kg}).$$

17. Sì. In effetti il costo scontato del vestito è $450 - 450 \times 0,23 = 450 \times (1 - 0,23) = 450 \times 0,77$ (€).

18. No. La forma corretta in cui può mettersi la frazione $\frac{a}{b}$ è: $q + \frac{r}{b}$. Essa segue dall'uguaglianza $a = bq + r$, dividendo entrambi i membri per b.