L’unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le tecniche di calcolo algebrico numerico e letterale.
- Rappresentare punti e rette in un piano cartesiano.
- Conoscere i concetti fondamentali della geometria piana.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l’unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare, dimostrare e applicare i principi di equivalenza per la risoluzione delle equazioni*
- *scrivere un algoritmo idoneo a risolvere un’equazione di 1° grado in una incognita*
- *interpretare graficamente la soluzione di un’equazione di primo grado in una incognita*
- *impostare e risolvere, per via grafica o algebrica, problemi che si traducono in equazioni di 1° grado*
- *utilizzare il linguaggio degli insiemi e della logica*
- *distinguere tra verifica e dimostrazione*
- *descrivere con proprietà il metodo di falsa posizione degli Egizi*

Equazioni di 1° grado
Unità 20

20.1 EQUAZIONI: GENERALITÀ

20.1.1 La questione n. 25 del Papiro di Rhind [1] propone e risolve il seguente problema:

« Trovare un numero che sommato con la sua metà dia 16 ».

Gli antichi Egizi procedevano grossomodo in questa maniera: «Se 2 fosse il numero cercato, sarebbe 2 più la metà di 2 uguale a 3. Si cerca allora per quale numero bisogna moltiplicare 3 per avere 16; per lo stesso numero bisogna moltiplicare 2 per avere il numero cercato. Allora si divide 16 per 3 e si ottiene 16/3. Dunque il numero cercato è 2 per 16/3, vale a dire 32/3». In effetti:

$$\frac{32}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}=\frac{48}{3}=16.$$

Il problema n. 24 è dello stesso tipo:

« Trovare un numero che sommato con un settimo di esso dia 19 ».

Anche qui si attribuisce al numero un valore presumibilmente falso, cioè un valore che non risolve la questione (per esempio 7). Su questo valore si eseguono le operazioni implicite nella questione in esame, vale a dire: $7+\frac{1}{7}\cdot 7$. Il risultato di queste operazioni (che è 8) è confrontato con il risultato desiderato (che è 19). Siccome 19 si ottiene moltiplicando 8 per $\frac{19}{8}$, allora si deve moltiplicare anche 7 per $\frac{19}{8}$ al fine di ottenere il numero cercato; ossia:

$$7\cdot\frac{19}{8}=\frac{133}{8}.$$

Questo metodo di risoluzione degli Egizi è oggi noto come **metodo di falsa posizione**.

20.1.2 Durante gli anni della scuola secondaria di 1° grado hai verosimilmente imparato a risolvere questioni come le precedenti con il cosiddetto "metodo dei bastoncini". A titolo di esempio e per ogni evenienza, lo proponiamo per la risoluzione del primo problema, lasciando a te quella del secondo con lo stesso metodo.
Si tratta di supporre che il numero cercato sia rappresentato da un bastoncino (schematizzato in figura 1 con il segmento AB). Dopo averlo suddiviso in due parti uguali, AM ed MB, gli si aggiunge il segmento BC lungo la metà di esso: si ottiene così il bastoncino AC, la cui lunghezza è uguale a quella del bastoncino dato più la metà di esso, lunghezza che è uguale a 16. Di modo che ognuna delle tre parti uguali che compongono il bastoncino AC è lunga 16/3 e, di conseguenza, il bastoncino cercato (e quindi il numero cercato) è lungo $2\cdot\frac{16}{3}$ vale a dire $\frac{32}{3}$.

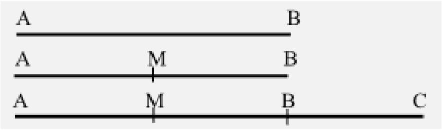

FIG. 1

20.1.3 Dagli esempi precedenti si capisce quali difficoltà s'incontrino quando si devono risolvere questioni appena più complicate di quelle suddette. A rendere ancora più difficile questa operazione, almeno per quanto riguarda gli Antichi, si aggiungeva poi il fatto che essi non possedevano il nostro agile sistema simbolico ed erano costretti ad esprimere tutto a parole.
A titolo di semplice curiosità citiamo un'altra questione, che dovette sicuramente mettere in crisi molti

[1] Il **Papiro di Rhind**, che risale circa al 1650 a.C., contiene 87 problemi che testimoniano delle conoscenze della civiltà egizia in campo matematico.

esperti e che, secondo Metrodoro di Bisanzio [(2)], sembra figurasse come una sorta di epitaffio sulla tomba di Diofanto [(3)]:

«*Questa tomba, che rinchiude Diofanto, dice quanto egli ha vissuto. Egli trascorse nell'infanzia 1/6 della sua vita e 1/12 per ricoprirsi della peluria dell'adolescenza. Ancora 1/7 ne trascorse prima di sposarsi e dopo 5 anni di matrimonio ebbe un figlio che visse la metà degli anni di suo padre. Egli morì 4 anni dopo la morte del figlio*».

Non proviamo neppure a risolvere il problema per tentativi.

20.1.4 Proviamo, invece, per questa questione come per le altre, un procedimento che utilizza le cognizioni matematiche che fin qui hai apprese, compreso l'uso del simbolismo algebrico.

- Cominciamo dalla prima delle questioni introdotte sopra, la questione 25 del Papiro di Rhind.
  Indichiamo con x il numero incognito. La sua metà è chiaramente $x/2$. Siccome il numero (cioè x), sommato con questa metà (cioè x/2), deve dare 16, allora deve risultare:

  [1] $$x+\frac{x}{2}=16.$$

  Otteniamo una proposizione aperta, il cui insieme di base possiamo supporre che sia l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Noi avremo risolto il problema se saremo in grado di determinare quale numero bisogna sostituire alla x affinché la [1] diventi una proposizione vera.

  Per il conseguimento di questo scopo elaboriamo opportunamente la [1] fino ad isolare la variabile x. Per comodità decidiamo di chiamare "1° membro" la quantità che sta prima del segno "=" e "2° membro" quella che sta dopo. Anzitutto, una volta osservato che $x+\frac{x}{2}=\frac{3}{2}x$, la [1] diventa: $\frac{3}{2}x=16$.

  A questo punto, se moltiplichiamo il 1° membro di quest'uguaglianza per $\frac{2}{3}$, esso diventa $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x$, cioè x, e così lo scopo di isolare la variabile x sarebbe raggiunto. Ma si capisce che, se moltiplichiamo solo un membro dell'uguaglianza per un dato numero (diverso da 1), l'uguaglianza non sussiste più. Se vogliamo che si conservi, dobbiamo moltiplicare anche l'altro membro per lo stesso numero. Dunque, in seguito a questa operazione, la proposizione aperta [1] diventa: $x=\frac{2}{3}\cdot 16$, ossia: $x=\frac{32}{3}$.

  Sembra pertanto di poter concludere che $32/3$ sia il numero cercato. Come, in effetti, avevano trovato anche gli Egizi con il metodo di falsa posizione.
- La seconda questione (questione 24 del Papiro di Rhind), indicando ancora con x il numero incognito, si traduce nello schema seguente:

  [2] $$x+\frac{1}{7}x=19.$$

  Si tratta di nuovo di una proposizione aperta, il cui insieme di base è l'insieme $\mathbb{Q}$.

  Ti invitiamo a tentare di trovare quale numero bisogna sostituire ad x nella [2] per trasformarla in una proposizione vera.
- In merito al 3° problema, indichiamo con x gli anni vissuti da Diofanto. Questi x anni, stando all'epitaffio, sono così distribuiti:
  - $\frac{1}{6}x$: anni dell'infanzia;
  - $\frac{1}{12}x$: anni dell'adolescenza;
  - $\frac{1}{7}x$: anni compresi tra la fine dell'adolescenza e il matrimonio;

---

2 **Metrodoro** di Bisanzio, grammatico e aritmetico vissuto fra il V e il VI sec. d.C.

3 **Diofanto** di Alessandria, matematico vissuto nel III sec. d.C.: fece interessanti scoperte in campo algebrico ed è considerato da alcuni il fondatore dell'algebra.

- 5 : anni di matrimonio prima della nascita del figlio;
- $\frac{1}{2}$ x : anni vissuti dal figlio di Diofanto;
- 4 : ultimi anni vissuti da Diofanto dopo la morte del figlio.

Dunque deve risultare:

[3] $$x = \frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4.$$

Di nuovo otteniamo una proposizione aperta, il cui insieme di base, questa volta, è l'insieme ℕ dei numeri naturali. È, infatti, in quest'insieme che possiamo supporre di prendere il numero degli anni vissuti da Diofanto.

La ricerca di un numero che, sostituito alla x nella [3], renda questa proposizione una proposizione vera, in questa circostanza è più complicata che non nelle prime due. Proviamo ugualmente. Osserviamo anzitutto che si ha:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4 = \frac{25}{28}x+9;$$

per cui la [3] può essere scritta più semplicemente in questo modo:

[4] $$x = \frac{25}{28}x+9.$$

La proposizione è certamente più semplice di quella originaria. Il nostro scopo è sempre quello di isolare la x. Come possiamo fare?

S'intuisce che, se dal 2° membro della [4] sottraiamo il monomio $\frac{25}{28}x$, questo membro diventa uguale a 9. Ma, affinché l'uguaglianza espressa dalla [4] continui a sussistere, sembra sensato affermare che detto monomio debba essere sottratto pure dal 1° membro. Cosicché la [4] diventa: $x-\frac{25}{28}x=9$; da qui, dopo aver osservato che $x-\frac{25}{28}x=\frac{3}{28}x$, si ha: $\frac{3}{28}x=9$; e quindi, moltiplicando entrambi i membri per $\frac{28}{3}$, siccome $\frac{3}{28}\cdot\frac{28}{3}=1$, segue: $x=9\cdot\frac{28}{3}$, cioè $x=84$.

Diofanto visse dunque 84 anni.

20.1.5 Le proposizioni aperte [1], [2], [3], [4], tutte nella variabile x, si dicono più propriamente ***equazioni***. In questo caso la variabile (o indeterminata) si dice comunemente ***incognita***. In generale:

Una **equazione** (nell'incognita x) è una proposizione aperta del tipo:

[5] $$A(x)=B(x)\ ,$$

dove A(x) e B(x) sono espressioni nella variabile x.

I valori da attribuire all'incognita possono essere presi soltanto nel cosiddetto ***insieme di base***, che deve essere prestabilito.

L'espressione che precede il segno "=" di uguaglianza si dice ***primo membro*** dell'equazione, quella che lo segue si dice ***secondo membro***.

I valori che, scelti in un prestabilito insieme di base (che, salvo avviso contrario, supponiamo essere l'insieme ℝ dei numeri reali) e attribuiti all'incognita x, rendono vera la proposizione aperta [5], si dice che ***soddisfano all'equazione*** che essa rappresenta: si chiamano ***soluzioni*** (o ***radici***) dell'equazione.

Risolvere un'equazione significa trovare le sue eventuali soluzioni.

Con riferimento all'equazione [1], il numero 32/3 è soluzione dell'equazione. Infatti, come del resto abbiamo già fatto notare: $\frac{32}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}=16$.

Con riferimento all'equazione [2], il numero 133/8 è soluzione dell'equazione. Infatti:

$$\frac{133}{8}+\frac{1}{7}\cdot\frac{133}{8}=19$$

Con riferimento alle equazioni [3] e [4], il numero 84 è soluzione di ciascuna di esse. Cosa che puoi controllare da te.

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Per ciascuna delle seguenti equazioni stabilisci se e quali dei numeri indicati a fianco sono soluzioni e quali non lo sono:

a) $x^3-x=0\,;\quad \{-1,0,1\}$.
b) $\frac{1}{x}=0\,;\quad \left\{-\frac{1}{2},0,3\right\}$.
c) $x^2-3x-4=0\,;\quad \left\{-\frac{3}{2},-1,-4\right\}$.
d) $x^3-1=(x-1)^3;\quad \{0,1,2\}$.
e) $\frac{1}{3}x=\frac{x}{x-1}\,;\quad \{0,1,4\}$.
f) $\frac{x}{x+2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x-1}{x}\,;\quad \{-2,0,1\}$.

2. Le seguenti equazioni nell'incognita x si risolvono in maniera elementare, con un po' di riflessione e di buon senso. A fianco di ogni equazione è indicato l'insieme in cui vanno cercate le soluzioni.

a) $x-3=2$, in $\mathbb{N}$.
b) $2x-1=2$, in $\mathbb{N}$.
c) $-3x=6$, in $\mathbb{Z}$.
d) $4x=-2$, in $\mathbb{N}$.
e) $3x=0$, in $\mathbb{Q}$.
f) $2x-1=2$, in $\mathbb{Q}$.
g) $-5x=7$, in $\mathbb{Q}$.
h) $x^2+2=x^2+1$, in $\mathbb{R}$.

20.1.6 Quando affermiamo che un certo numero è "soluzione" di una data equazione non intendiamo dire che quel numero è l'unica soluzione dell'equazione, ma semplicemente che è UNA soluzione dell'equazione. Potrebbe capitare, infatti, che un'equazione abbia più di una soluzione; come potrebbe capitare pure che non abbia soluzioni.

Per renderci conto di questo fatto consideriamo alcuni problemi, che possono apparire banali ma che sono utili allo scopo che ci prefiggiamo.

- PROBLEMA 1. Trovare un numero reale che, diviso per se stesso, dia come quoziente 2.

RISOLUZIONE. Poiché ogni numero (non nullo) diviso per se stesso dà come quoziente 1, possiamo subito concludere che il problema non ha soluzione.

Vogliamo arrivarci, però, con lo stesso procedimento seguito prima per altre situazioni.
Allora, indicato con x il numero cercato, deve essere:

[6] $$\frac{x}{x}=2\,.$$

Osserviamo, per prima cosa, che l'espressione al 1° membro ha senso soltanto se $x\neq0$, in quanto la divisione per 0 non è ammessa. Ma se $x\neq0$, l'espressione x/x vale in ogni caso 1; per cui non potrà mai essere $x/x=2$. Pertanto l'equazione e, di conseguenza, il problema che in essa si traduce non hanno soluzione alcuna.

***Un'equazione che non ammette soluzione si dice* IMPOSSIBILE.**

- PROBLEMA 2. Trovare un numero reale che, diviso per se stesso, dia come quoziente 1.

RISOLUZIONE. Adesso, per le stesse ragioni spiegate sopra, possiamo rispondere che il problema ha infinite soluzioni: tutti i numeri reali diversi da zero.

Ma anche adesso vogliamo arrivarci con un procedimento formale.

Impostando allora come nel problema precedente, si tratta di risolvere l'equazione:

[7] $$\frac{x}{x}=1\,.$$

Come spiegato sopra, questa proposizione è vera per ogni $x \in \mathbb{R}_0$. Dunque l'equazione (e con essa il problema) ha infinite soluzioni.

***Un'equazione avente infinite soluzioni si dice* INDETERMINATA.**

***Un'equazione avente, invece, un numero finito di soluzioni si dice* DETERMINATA.**

Fin qui abbiamo mostrato un esempio di equazione indeterminata, la [7], ed un esempio di equazione impossibile, la [6]. Delle equazioni [1], [2], [3], [4] possiamo solo dire, almeno fino a questo momento, che non sono impossibili, in quanto di ciascuna di esse abbiamo trovato UNA soluzione. Siamo autorizzati a sostenere che esse non ammettono altre soluzioni?

A dire il vero, la risposta è SÌ, ma per il momento accantoniamo la spiegazione. La daremo più avanti.

Prima ti proponiamo alcuni esercizi, per metterti alla prova.

Dopo aver tradotto in equazioni i seguenti problemi, prova a risolverli. Se non ci riesci, ritorna su di essi dopo aver studiato il paragrafo 20.4.

1. Trova un numero razionale che, sommato con la sua terza parte, dia 15. [**R.** 45/4]
2. Trova un numero intero che, sommato con la sua metà, dia 8. [**R.** Impossibile]
3. Trova un numero razionale tale che, sottraendogli i suoi due terzi, si ottenga 9. [**R**. 27]
4. Trova un numero intero tale che il suo quadrato sia il numero stesso. [**R.** 0, 1]
5. Sia x un numero intero. Qual è il suo successivo? Trova il numero x sapendo che, sottraendolo dal suo successivo, si ottiene 1. [**R.** Indeterminato]
6. L'angolo al vertice di un triangolo isoscele misura 60°. Determina le ampiezze degli angoli alla base. [**R.** 60°, 60°]
7. In un triangolo scaleno l'angolo più piccolo è la metà di quello intermedio ed è la terza parte di quello più grande. Trova le misure degli angoli del triangolo. [**R.** 30°, 60°, 90°]
8. In un triangolo rettangolo un angolo acuto è i due terzi dell'altro. Determina le misure di questi due angoli. [**R.** 36°, 54°]
9. In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è la metà di ciascuno degli angoli alla base. Determina le misure dei tre angoli. [**R.** 72°, 72°, 36°]
10. Sul segmento AB, lungo 25 cm, determina un punto P in modo che risulti: AP–PB=12 cm. [**R.** AP = 18,5 cm]
11. Sul segmento AB, lungo 20 cm, determina un punto P in modo che la somma dei perimetri del quadrato costruito su AP e del triangolo equilatero costruito su PB sia uguale a 70 cm. [**R.** 10 cm, 10 cm]
12. Determina le dimensioni di un rettangolo di perimetro 70 cm, sapendo che l'una è i tre quarti dell'altra. [**R.** 15 cm, 20 cm]
13. Spiega perché non esiste alcun triangolo con questi dati: perimetro di 180 cm; un lato di lunghezza tripla di un altro; la differenza tra le misure di questi due lati è 60 cm . [**R.** Ricorda che in ogni triangolo ciascun lato è minore della somma ...]
14. Una filetta di pane pesa 550 g e costa € 1,33. Quanto costa 1 kg di pane?
15. Giulio ha ottenuto i seguenti voti negli ultimi 4 compiti di matematica: 5-7-4-7. Quale voto dovrebbe ottenere nel 5° ed ultimo compito per avere 6 di media?
16. Il cappotto che Piero ha comprato nella stagione degli sconti gli è costato € 680. Sapendo che lo sconto praticatogli dal rivenditore è stato del 20%, qual era il prezzo originario del cappotto? [**R.** € 850]
17. Una bottiglia di vino da tre quarti di litro costa € 1,56, ma il vino costa € 1,26 in più del vuoto. Quanto costa un litro di quel vino? [**R.** € 1,88]
18. Un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?

19. La fattura dell'idraulico, comprensiva dell'IVA (imposta sul valore aggiunto) al 21%, è di € 544,5. Calcolare l'IVA. [**R.** € 94,5]

20. Un minerale contiene lo 0,001% di oro. Quante tonnellate di quel minerale bisogna estrarre per ricavare 50 g di oro?

20.2 IDENTITÀ

20.2.1 Nel seguente gioco bisogna immaginare che ci sia un "conduttore" che si rivolge ad una o più persone, dicendo:

Pensa un numero, raddoppia, aggiungi 10, dividi il totale per 2, togli il numero pensato.
Qual è il numero che rimane?

Sorpresa! A tutte le persone, che quasi certamente hanno pensato numeri diversi, rimane lo stesso numero: per l'esattezza 5. Come mai?
La cosa, per la verità, può apparire sorprendente solo a chi ignora l'algebra. In realtà, la spiegazione è semplice, al limite della banalità.
Illustriamo il programma di calcolo che il problema impone e, nel seguirlo, facciamo riferimento ad un generico x come numero pensato:

pensa un numero	:	x
raddoppia	:	$2x$
aggiungi 10	:	$2x+10$
dividi per 2	:	$\frac{2x+10}{2}$
togli il numero pensato	:	$\frac{2x+10}{2}-x$

Ora, con riferimento all'ultima espressione ottenuta, elaborandola si ottiene:

$$\frac{2x+10}{2}-x=x+5-x=5\,.$$

Questo significa che l'espressione:

$$\frac{2x+10}{2}-x$$

assume sempre il valore 5, cioè la metà del numero 10 che il conduttore ha suggerito di aggiungere, qualunque sia x. Ecco perché alle persone che hanno partecipato al gioco rimane lo stesso numero 5, pur avendo pensato numeri x presumibilmente diversi.

Naturalmente, se, invece di 10, fosse stato ordinato di aggiungere 12 o 14 o ... , cosa sarebbe rimasto?
Si può generalizzare?

20.2.2 Facciamo osservare che la relazione:

[8] $$\frac{2x+10}{2}-x=5$$

è ancora una proposizione aperta, avente come insieme di base l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Più esattamente essa è una proposizione vera per ogni $x\in\mathbb{R}$. Si chiama anche **identità**. In generale:

Se A(x) e B(x) sono due espressioni letterali nella variabile x (ma le variabili potrebbero essere più d'una e indicate differentemente), la proposizione aperta A(x)=B(x) si dice **identità** se risulta vera per tutti i valori che si possono attribuire alla variabile x, che figura nelle due espressioni, presi ovviamente nello stesso insieme di base, che, salvo avviso contrario è considerato l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Per dimostrare che la proposizione aperta A(x)=B(x) è di fatto un'identità, si può procedere in tre modi pressoché equivalenti:

- si elabora A(x) fino a trasformarla in B(x);
- si elabora B(x) fino a trasformarla in A(x);
- si elabora sia A(x) sia B(x) fino a trasformare entrambe le espressioni in una medesima espressione C(x).

S'intende che, di volta in volta, si sceglie il modo più opportuno.

20.2.3 ESEMPI.

- Alcune identità elementari, espressioni simboliche di proprietà dei numeri reali, sono le seguenti:

  $a+0=a$, $\quad a\cdot 1=a$,
  $a+b=b+a$, $\quad a\,b=b\,a$,
  $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\quad (a\,b)\,c=a\,(b\,c)$,
  $(a+b)\,c=a\,c+b\,c$.
- Un altro gruppo di identità è quello che, a suo tempo, abbiamo denominato **PRODOTTI NOTEVOLI**.
- La seguente proposizione aperta:

$$\frac{2x+10}{2}-x=5$$

  è un'identità ma per provarlo si richiede, come abbiamo già fatto, una dimostrazione.
- UN ESERCIZIO. Stabilire se è un'identità o un'equazione la seguente proposizione aperta dove $x\in\mathbb{R}$:

$$(x+1)^2-2x=(x-1)^2+(2x+1).$$

RISOLUZIONE. Elaboriamo il 1° membro:

$$(x+1)^2-2x=x^2+2x+1-2x=x^2+1\,.$$

Elaboriamo il 2° membro:

$$(x-1)^2+(2x+1)=x^2-2x+1+2x+1=x^2+2\,.$$

È evidente che è $x^2+1\neq x^2+2$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Dobbiamo concludere che la proposizione proposta non solo non è un'identità ma addirittura è un'equazione impossibile, cioè è una proposizione falsa per ogni x reale.

- ESERCIZI DA RISOLVERE.

1. Dopo aver dimostrato che le seguenti proposizioni aperte sono identità, per ciascuna di esse scrivere il programma di istruzioni che permette di indovinare un numero:

$$\text{a)}\ \frac{(5x+15)\cdot 2}{10}-x=3. \qquad \text{b)}\ \frac{(x+1)\cdot 2+6}{2}-x=4.$$

2. Scrivere in forma simbolica la somma dei quadrati di tre numeri consecutivi, comunque scelti, diminuita del triplo del quadrato del numero intermedio. Dimostrare, quindi, che è sempre uguale a 2.
3. Dimostrare che il quadrato di un numero naturale è uguale al prodotto, aumentato di 1, del numero precedente e di quello successivo.
4. Dimostrare che le seguenti proposizioni aperte sono delle identità:
   a) $(x+2)(x-2)^2=(x^2-4)(x-2)$. b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)$.
   c) $(a+1)^2+(a-2)=a(a+3)-1$. d) $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x+1)+2x(x-1)$.
   e) $(3x-2)-(x^2+x+1)=(2-x)(x-1)-(1+x)$.
   f) $(x^2-xy-2y^2)(x+2y)-(x^2+y^2)(x-2y)=y(3x+y)(x-2y)$.

g) $(x-2a)^2(x+2a) - (x+2a)(x^2+ax-2a^2) = a(x+2a)(6a-5x)$.

5. Stabilire quali delle seguenti proposizioni aperte sono identità e quali sono invece equazioni:

a) $(x+2)^2 - (x+1)^2 - 2(x-1) = 5$. [**R.** Identità]

b) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 - \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-1)$. [**R.** Equazione]

c) $(x+1)(x+3) - (x+2)^2 = x-1$. [**R.** Equazione]

d) $(x+2)^2 - (x+2)(x-2) + (x-2)^2 = x^2+1$. [**R.** Equazione]

e) $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$. [**R.** Identità]

f) $(x-1)(x^4-1) + (x+1)^2(x-1)^3 = 2(x-1)^5$.

g) $(x^2-1)(x^3-x^2+x1) = (x-1)^2(x^3+x^2+x+1)$.

h) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)(x+2)^2 - \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2(x+2) = \left(\frac{1}{2}x-1\right)(x+2)\left(\frac{1}{2}x+3\right)$.

i) $(2-x)^3 - (3-2x)(2-x)^2 = (x-2)^2(x-1) + 1$.

j) $(x+2)^3 - (x-2)^3 - 12x^2 = 16$.

20.3 EQUAZIONI EQUIVALENTI

20.3.1 Tra le equazioni del tipo: $A(x)=B(x)$ ci interessano particolarmente quelle in cui $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi nella variabile x: si dicono **equazioni razionali intere**.
Sono proprio di questo tipo le equazioni [1], [2], [3], [4], già considerate.

20.3.2 Nel paragrafo 20.1, in particolare nella risoluzione delle equazioni [1], [2], [3], [4], abbiamo fatto ricorso ad alcuni artifici che, in quella circostanza, ci sembrarono del tutto legittimi.
Ora abbiamo la possibilità di chiarire le ragioni che stanno alla base di quei procedimenti.
Ma prima dobbiamo formulare qualche definizione.

Due equazioni si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Se le due equazioni sono $A(x)=B(x)$ e $C(x)=D(x)$, per indicare che sono equivalenti si scrive:

$$A(x)=B(x) \leftrightarrow C(x)=D(x).$$

Per esempio, consideriamo le due equazioni:

$$(1)\ \ x-1 = 2\,, \qquad (2)\ \ 2x = 6\,,$$

da risolvere nell'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali.
Riguardo alla prima si capisce facilmente che il numero 3 la soddisfa, mentre per ogni altro numero naturale a risulta $a-1\neq2$. Dunque il numero 3 è l'unica soluzione dell'equazione (1).
Anche riguardo all'equazione (2) è evidente che il numero 3 la soddisfa, mentre per ogni altro numero naturale a risulta $2a\neq6$. Dunque il numero 3 è l'unica soluzione dell'equazione (2).
Pertanto le due equazioni sono equivalenti.

Consideriamo adesso queste altre equazioni:

$$(a)\ \ x = 1\,, \qquad (b)\ \ x^2 = 1\,,$$

da risolvere nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi.
La prima è sicuramente soddisfatta dal numero 1, mentre per ogni altro numero intero n risulta ovviamente $n\neq1$. Dunque il numero 1 è l'unica soluzione dell'equazione (a).
La seconda equazione risulta soddisfatta, oltre che dal numero 1, anche dal numero -1; infatti $1^2=1$ e $(-1)^2=1$. Per ogni altro numero intero n è, invece, $n^2\neq1$. Ne consegue che i numeri 1 e -1 sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione (b). Pertanto le due equazioni non sono equivalenti.

Facciamo notare che le stesse equazioni sarebbero, al contrario, equivalenti se, invece che nell'insieme $\mathbb{Z}$, fossero risolte nell'insieme $\mathbb{N}$. Il che fa capire come sia importante precisare l'insieme in cui l'equazione è risolta, vale a dire l'insieme di base della proposizione aperta con cui l'equazione si identifica.

20.3.3 Da un'equazione assegnata è possibile ottenerne un'altra, ad essa equivalente, ricorrendo a due regole, chiamate **principi di equivalenza**.

♦ **PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA.** Se ad entrambi i membri di un'equazione si addiziona uno stesso numero o, più in generale, una stessa espressione, che non perda di significato per alcuna delle soluzioni dell'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

DIMOSTRAZIONE. Considerata un'equazione $A(x)=B(x)$ nell'incognita x, da risolvere nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, sia $M(x)$ una qualsiasi espressione algebrica nella variabile x, che non perda di significato quando alla variabile x si sostituisce una qualunque delle eventuali soluzioni dell'equazione data. Ci proponiamo di dimostrare che l'equazione $A(x)=B(x)$ è equivalente all'equazione $A(x)+M(x)=B(x)+M(x)$.
Chiamato S' l'insieme delle soluzioni della prima equazione ed S" l'insieme delle soluzioni della seconda, bisogna provare che S'=S". Per questo occorre far vedere che:

$$\forall\alpha\in S',\, \alpha\in S'' \quad \text{e} \quad \forall\alpha\in S'',\, \alpha\in S'.$$

Ora, per ogni $\alpha\in S'$, risulta $A(\alpha)=B(\alpha)$. Da qui, sommando ad entrambi i membri dell'uguaglianza lo stesso numero $M(\alpha)$, si ottiene $A(\alpha)+M(\alpha)=B(\alpha)+M(\alpha)$. Dunque $\alpha\in S''$.
Viceversa, per ogni $\alpha\in S''$, risulta $A(\alpha)+M(\alpha)=B(\alpha)+M(\alpha)$. Da qui, sottraendo da entrambi i membri dell'uguaglianza lo stesso numero $M(\alpha)$ e semplificando, segue $A(\alpha)=B(\alpha)$. Pertanto $\alpha\in S'$.
In conclusione le due equazioni sono equivalenti. [c.v.d.]

Questo principio ha due ***corollari***:

- **È possibile trasportare un termine da un membro all'altro di un'equazione purché lo si cambi di segno.**
- **È possibile sopprimere uno stesso termine nei due membri di un'equazione.**

Se si fa questo, infatti, è come se ad entrambi i membri dell'equazione fosse addizionato l'opposto di quel termine. Per esempio:

$$2x-5=7 \leftrightarrow (2x-5)+5=7+5 \leftrightarrow 2x=12\,.$$

$$3x+5x-2=x+3x \leftrightarrow (3x+5x-2)-3x=(x+3x)-3x \leftrightarrow 5x-2=x\,.$$

♦ **SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA.** Se entrambi i membri di un'equazione sono moltiplicati per uno stesso numero non nullo o, più in generale, per una stessa espressione che non si annulli né perda di significato per alcuna delle soluzioni dell'equazione data, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

DIMOSTRAZIONE. Considerata un'equazione $A(x)=B(x)$ nell'incognita x, da risolvere nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, sia m un qualsiasi numero reale non nullo. Dimostriamo che l'equazione $A(x)=B(x)$ è equivalente all'equazione $m\cdot A(x)=m\cdot B(x)$.
Chiamato S' l'insieme delle soluzioni della prima equazione ed S" l'insieme delle soluzioni della seconda, bisogna provare che S'=S". Per questo, come nel primo principio, occorre far vedere che:

$$\forall\alpha\in S',\, \alpha\in S'' \quad \text{e} \quad \forall\alpha\in S'',\, \alpha\in S'.$$

Ora, per ogni $\alpha\in S'$, risulta $A(\alpha)=B(\alpha)$. Da qui, moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per lo stesso numero m, segue $m\cdot A(\alpha)=m\cdot B(\alpha)$. Dunque $\alpha\in S''$.
Viceversa, per ogni $\alpha\in S''$, risulta $m\cdot A(\alpha)=m\cdot B(\alpha)$. Da qui, dividendo per lo stesso numero m entrambi i membri dell'uguaglianza e semplificando, segue $A(\alpha)=B(\alpha)$. Pertanto $\alpha\in S'$.

In definitiva le due equazioni sono equivalenti. [c.v.d.]

Naturalmente, può essere in particolare $m=M(\alpha)$, dove $M(\alpha)$ è il valore che assume un'espressione $M(x)$, quando ad x si sostituisce una soluzione α dell'equazione assegnata, a condizione che, per questo valore α, $M(x)$ non si annulli né perda di significato.

Anche di questo principio c'è un ***corollario***:

- **Se si cambiano di segno tutti i termini di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente.**

Questo equivale, infatti, a moltiplicare entrambi i membri per -1.

20.3.4 Il secondo principio è particolarmente utile quando l'equazione è razionale intera con coefficienti frazionari. In questo caso l'equazione può essere trasformata in un'equazione equivalente con coefficienti interi: basta moltiplicare i suoi due membri per il m.c.m. dei denominatori dei coefficienti.

Per esempio, l'equazione:

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}-2x\,,$$

da risolvere nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali, dopo aver moltiplicato i suoi membri per il m.c.m. dei denominatori dei coefficienti, che è 6, e dopo aver semplificato diventa:

$$3x+4x=8-12\,x\,.$$

Da qui, … continua da solo fino a giungere alla soluzione.

Sei invitato a risolvere nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali le seguenti equazioni razionali intere:

a) $2x-5x=7-3x$; b) $x=x+2$; c) $\frac{3}{2}x-5=3-\frac{2}{3}x$; d) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=x+1$.

20.4 EQUAZIONI DI 1° GRADO

20.4.1 Ricorrendo ai principi di equivalenza, ogni equazione razionale intera che, per fissare le idee, supponiamo nell'incognita x (ma questa potrebbe essere anche un'altra variabile: y, z, t, u, …) può essere trasformata in un'equazione equivalente di questo tipo:

$$P(x)=0\,,$$

dove $P(x)$ è un polinomio in x, con coefficienti reali.

Questa forma dell'equazione si chiama ***forma normale*** (o ***tipica*** o ***canonica***) dell'equazione.

In particolare, se il polinomio $P(x)$ è di 1° grado, l'equazione assume la seguente *forma normale*:

[9] $$\mathbf{a\,x+b=0}\,,$$

con $a\neq0$. Si chiama **equazione di 1° grado** nell'incognita x.

ESERCIZI DA RISOLVERE. Ricorrendo ai principi di equivalenza, riduci le seguenti equazioni alla forma: $P(x)=0$, dove $P(x)$ è un polinomio in x con coefficienti interi, nel quale il coefficiente del termine di grado più elevato sia positivo. Specifica quali di esse sono equazioni di 1° grado e quali non lo sono:

1. $2\,x+1=3\,x-2$. [**R.** $x-3=0$]
2. $(x-2)^2-2(x+1)=1-(x+2)^2$. [**R.** $2x^2-2x+5=0$]
3. $(x-1)^2(x+1)^2=2\,x-1$. [**R.** $x^4-2x^2-2x+2=0$]
4. $x(x+2)^2-2x(x-1)=(x+1)(x-1)$.
5. $(2x+1)x-1=x-2(x+1)^2$.
6. $\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}x\left(x-\frac{1}{2}\right)$. [**R.** $x-6=0$]

7. $2x\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}x=x\left(2x+\frac{1}{2}\right)$. [**R.** $x=0$]

8. $\frac{2}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}x$. [**R.** $216x^2-164x+9=0$]

9. $\frac{3}{2}x\left(x-\frac{2}{3}\right)=2-\frac{1}{2}x(x+1)$.

10. $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2-2\left(1-\frac{x}{3}\right)=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

20.4.2 Sull'equazione di 1° grado, scritta nella forma normale [9], vogliamo fare adesso un discorso più generale di quelli che abbiamo fatto in precedenza, riferiti sempre a casi particolari.

Premettiamo che ne ricerchiamo le eventuali soluzioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei reali.

Abbiamo detto sopra che deve essere $a\neq 0$, ma nelle considerazioni che faremo supporremo che possa essere anche $a=0$.

- Se $a=0$ l'equazione [9] diventa: $0x+b=0$ e bisogna distinguere due ulteriori possibilità: $b=0$ oppure $b\neq 0$.
  - se $b=0$ l'equazione diventa: $0x=0$ ed è evidente che risulta essere soddisfatta da ogni x reale: l'equazione è allora ***indeterminata***.
  - se $b\neq 0$, apparendo ovvio che l'espressione al primo membro è diversa da 0 per ogni $x\in\mathbb{R}$, l'uguaglianza espressa dalla [9] non può sussistere per alcun x reale: l'equazione è ***impossibile***.
- Supponiamo adesso $a\neq 0$. Una soluzione dell'equazione, ottenuta trasportando b al secondo membro della [9], naturalmente col segno cambiato, e dividendo entrambi i membri dell'equazione per a, è chiaramente $-\frac{b}{a}$. Chiamata ora, per comodità, x' questa soluzione (quindi $ax'+b=0$ o anche $ax'=-b$) dimostriamo che essa è unica.

  Supposto, per questo, che esista un'altra soluzione della [9], poniamo x'', deve risultare pure $ax''+b=0$ o anche $ax''=-b$.

  Sicché:

  $ax'=-b$ e $ax''=-b$ → [per la proprietà transitiva dell'uguaglianza]

  $ax' = ax''$ → [per la proprietà di regolarità di "·" in $\mathbb{R}$]

  $\frac{1}{a}(ax') = \frac{1}{a}(ax'')$ → [per la proprietà associativa di "·" in $\mathbb{R}$]

  $\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)x' = \left(\frac{1}{a}\cdot a\right)x''$ → [per la proprietà di "1" rispetto a " · "]

  $x' = x''$.

  Effettivamente la soluzione è unica. In conclusione:

  Ogni equazione $ax+b=0$, con $a\in\mathbb{R}_0$ e $b\in\mathbb{R}$, ammette una ed una sola soluzione in $\mathbb{R}$: questa è espressa dal numero $-\frac{b}{a}$.

  In sintesi, sempre con riferimento all'equazione $a x + b = 0$:

SE $a=0$ ALLORA $\begin{cases}\text{SE } b=0 \text{ ALLORA l'equazione è indeterminata}\\ \text{SE } b\neq 0 \text{ ALLORA l'equazione è impossibile}\end{cases}$

SE $a\neq 0$ ALLORA l'equazione è determinata con la sola soluzione $x=-\frac{b}{a}$.

A questo punto, ritornando sulle equazioni [1], [2] e [3], di cui abbiamo già parlato nel paragrafo 20.1, possiamo concludere che le soluzioni trovate a suo tempo, ancorché con artifici, non solo sono quelle effettive, ma sono le sole soluzioni di quelle equazioni. Di fatto:

- $x+\frac{x}{2}=16 \leftrightarrow 2x+x=32 \leftrightarrow 3x=32 \leftrightarrow x=\frac{32}{3}$.
- $x+\frac{x}{7}=19 \leftrightarrow 7x+x=133 \leftrightarrow 8x=133 \leftrightarrow x=\frac{133}{8}$.
- $x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4 \leftrightarrow x=\frac{75}{84}x+9 \leftrightarrow 84x=75x+9\cdot 84 \leftrightarrow 9x=9\cdot 84 \leftrightarrow x=84$.

Il procedimento non cambia se l'equazione è più complicata di quelle precedenti, relativamente semplici. Vediamo un esempio.

- ESERCIZIO.

Risolvere la seguente equazione: $(x+2)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2x-\frac{1}{2}$.

RISOLUZIONE.

Eseguiamo dapprima le operazioni indicate:	$x^2+4x+4-2x+1=x^2-x+\frac{1}{4}+2x-\frac{1}{2}$
operiamo tutte le possibili semplificazioni, trasportando quindi i termini rimasti al 1° membro:	$x+5-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=0$
infine, dopo qualche altro semplice passaggio, otteniamo la soluzione cercata.	$x=-\frac{21}{4}$

20.4.3 ESERCIZI DA RISOLVERE.

Applicando i principi di equivalenza, risolvere in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni razionali intere nell'incognita x:

1. $\frac{x-2}{4}-\frac{x}{2}=\frac{x+2}{2}-\frac{x}{4}$. [**R.** $x=-3$]
2. $\frac{3x-1}{3}-\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{5}{6}=0$. [**R.** indeterminata]
3. $2x(x-1)^2-3x=2(x+1)^3-10x(x-2)$. [**R.** $x=-2/27$]
4. $(x+1)^3-x(x-1)^2=(5x-1)(x+2)$. [**R.** $x=3/7$]
5. $(x-1)^2(x+1)+(x+1)^2(x-1)=2(x-1)(x^2+x+1)$. [**R.** $x=1$]
6. $(x+2)^3-(x+1)^3=3(x-1)^2$. [**R.** $x=-4/15$]
7. $(2x-3)^2-2x(x-1)=2(x-2)(x-3)-3$. [**R.** indeterminata]
8. $\frac{1}{2}x-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\left(2-\frac{1}{2}x\right)$. $\left[\mathbf{R.}\ x=\frac{1}{2}\right]$
9. $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2-1=x(1+4x)+\frac{1}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=-\frac{5}{12}\right]$
10. $(x-1)^2-2x=(x-2)(x+2)-4(x+1)$. [**R.** impossibile]
11. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=(2x+1)(2x-1)+2x$. [**R.** indeterminata]
12. $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{3}-\frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2}{2}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2}{\frac{6}{5}}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=-\frac{5}{2}\right]$
13. $\frac{\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3x-\frac{1}{3}}{2}=0$. $\left[\mathbf{R.}\ x=-\frac{7}{48}\right]$

20.4.4 La soluzione dell'equazione ax+b=0, quando a≠0, ha un'interpretazione geometrica semplice ma interessante. A questo riguardo bisogna associare all'espressione ax+b la funzione y=ax+b che, come si sa, è rappresentata da una retta r (Fig. 2) in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy). Orbene:

La soluzione $-\frac{b}{a}$ dell'equazione ax+b=0, con a≠0, è l'ascissa del punto A della retta r di ordinata 0: si chiama anche "**zero**" della funzione ax+b.

Di fatto, per trovare quell'ascissa, bisogna porre y=0 nell'equazione y=ax+b della retta r; in pratica bisogna risolvere, per l'appunto, l'equazione ax+b=0.

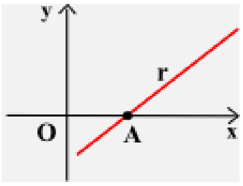

FIG. 2

Ti proponiamo qualche esercizio:

1. Uno solo dei grafici sottostanti rappresenta la retta di equazione y=2−2x. Individuarlo e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

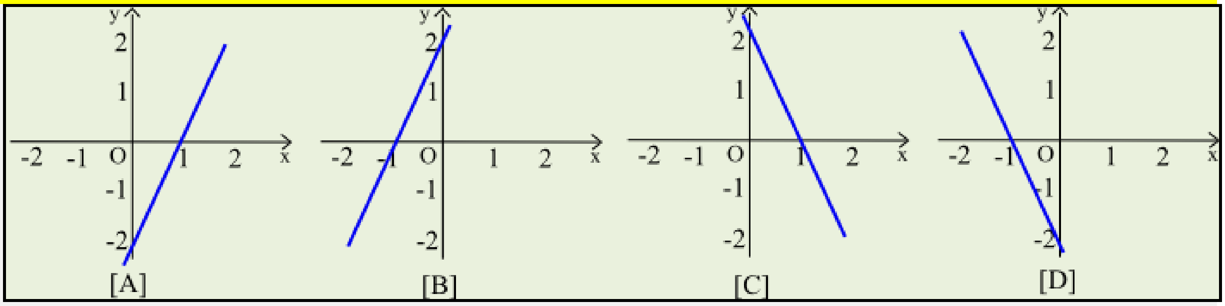

FIG. 3

2. Trovare per quale valore del parametro k l'equazione 2x+3k=0 ammette come zero il numero 3/2.

3. Trovare per quale valore del parametro k la retta r interseca l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano (Oxy) nel punto A di ascissa x_A, sapendo che:

a) $r \equiv y=kx+2,\ x_A=1;$ b) $r \equiv y=2x+k,\ x_A=3/2.$

20.4.5 La discussione relativa alla risoluzione dell'equazione ax+b=0 mostra che si possono presentare situazioni diverse a seconda dei valori che si attribuiscono alle lettere a, b che figurano in essa.

L'equazione ax+b=0 e tutte quelle in cui, oltre all'incognita, figurano anche dei coefficienti letterali, assieme ad eventuali coefficienti numerici, si chiamano **equazioni letterali**.

Per contro, quelle in cui i coefficienti sono solo numeri, si chiamano **equazioni numeriche**.

Ricordiamo che, nelle equazioni letterali, le lettere diverse dall'incognita, che di volta in volta va precisata, si chiamano ***parametri***. Si considerano come valori costanti, ai quali possono però essere attribuiti valori qualsiasi scelti nell'insieme ℝ (o in un eventuale altro insieme).

Consideriamo, per esempio, la seguente relazione:

$$A=\frac{1}{2}(B+b)h\,,$$

che fornisce l'area A di un trapezio di basi B e b e di altezza h.

Se l'incognita è A, la precedente relazione, supposta come equazione in A, fornisce già la soluzione.
Se, invece, l'incognita è h, dalla precedente relazione, supposta questa volta come equazione in h, si trova la seguente soluzione:

$$h=\frac{2A}{B+b}\ .$$

Se, infine, l'incognita è B (per ragioni di simmetria, il discorso è analogo se essa è b), dalla relazione considerata, supposta come equazione in B, si ottiene la seguente soluzione:

$$B=\frac{2A}{h}-b\ .$$

In tutte le situazioni descritte, i parametri A, B, b, h sono numeri reali positivi.

Ti proponiamo la risoluzione di alcuni esercizi e problemi.

1. In ognuna delle seguenti relazioni esprimi ogni lettera che vi figura per mezzo di quelle che rimangono:

$$A=\frac{1}{2}b\,h\ ;\quad A=\frac{1}{2}d'd''\ ;\quad V=R\,i\ ;\quad I=C\,i\,t\ ;\quad p\,V=n\,R\,T\ ;\quad s=v\,t+b\ ;\quad M=C\,(1+i\,t)\ .$$

2. Si sa che $y=3x-6$. Spiegare quale delle seguenti relazioni esprime x in funzione di y.

[A] $x=\frac{y}{3}+6$. [B] $x=6-\frac{y}{3}$. [C] $x=\frac{y}{3}+2$. [D] $x=2-\frac{y}{3}$.

3. Considerata l'equazione $ax=b$, dove a, b sono numeri reali qualsiasi, avviene che:

[A] essa ammette sempre la soluzione $\frac{b}{a}$; [B] essa ammette sempre la soluzione $\frac{a}{b}$;
[C] essa non ammette mai la soluzione 0; [D] le tre affermazioni precedenti sono tutte false.

Una sola alternativa è corretta: individuala e fornisci una spiegazione esauriente della scelta effettuata.

4. Un poligono, rappresentato in un piano cartesiano ortogonale, ha area 36. Sul suo perimetro sono situali 24 punti, le cui coordinate sono entrambe numeri interi. Quanti punti, le cui coordinate sono entrambe numeri interi, risultano all'interno del poligono? [25]
[N.B.: Rivedere esercizio N° 16 in U19 – Rette nel piano cartesiano]

5. In un sistema di numerazione posizionale di base ignota compare la seguente uguaglianza: $4\times5=32$. Qual è la base di tale sistema?

6. Metrodoro di Bisanzio racconta che l'oratore ateniese Democare, nipote di Demostene, visse un quarto della sua vita prima di diventare giovane; visse il periodo della giovinezza per un quinto della sua vita e un terzo lo visse da uomo maturo; morì dopo altri 13 anni. Quanto visse Democare secondo Metrodoro? [**R.** 60 anni]

7. Il signor Rossi si lamenta con l'imprenditore edile per l'elevato peso dell'IVA (Imposta sul Valore Aggiunto) pari ad € 1239. Sapendo che l'IVA grava nella misura del 21% del costo del lavoro eseguito, quale somma il signor Rossi deve pagare all'imprenditore? [**R.** € 7139]

8. La *mezzadria*, abolita in Italia nel 1974, era un contratto tra un proprietario terriero e un contadino (detto appunto *mezzadro*), con il quale i due soggetti dividevano a metà prodotti e utili di un'azienda agricola. In realtà al mezzadro Giovanni il proprietario terriero Filippo praticava una modalità più punitiva. Filippo pretendeva infatti il 60% dei prodotti dell'azienda. Cosicché quella volta Giovanni potette conservare per sé solamente 293,6 litri dell'olio prodotto. Quale fu la produzione complessiva di olio? [**R.** 734 litri]

9. La squadra del Borgorosso partecipa ad un torneo di calcio a 18 squadre con partite di andata e ritorno. Alla fine del torneo il Borgorosso ha vinto 2 partite in più di quelle che ha pareggiate ed ha perso 8 partite. Quanti punti ha totalizzato il Borgorosso se in ogni partita corrispondono 3 punti alla vittoria, 1 punto al pareggio e 0 punti alla sconfitta? [**R.** 54]

10. Calcolare l'età di Pietro, sapendo che questa età è uguale alla differenza fra il quadruplo dell'età che avrà fra 4 anni e il quadruplo dell'età che aveva 4 anni fa. [**R.** 32]

11. Oggi Vittorio ha 35 anni e la sua età è 5 volte quella di suo figlio Guido. Spiegare perché l'età di Vittorio un giorno potrà essere il doppio di quella di Guido ma non potrà mai essere 6 volte quella di Guido.

12. Nell'anno 2015 Giulio ha 45 anni di età ed il figlio Mario nel ha 13. Esiste un anno in cui l'età di Giulio è 5 volte quella di Mario? [**R.** Sì, esiste ed è l'anno …]

13. Per eseguire un determinato lavoro in 12 giorni occorrono 15 operai. a) Quanti operai occorrono per farlo in 10 giorni? b) In quanti giorni 20 operai portano a termine lo stesso lavoro? [**R.** a) 18; b) 9]

14. Per arare una determinata area in 3 giorni e mezzo occorrono 4 trattori. a) Quanti trattori occorrono per farlo in un solo giorno? b) Quanti giorni se opera un solo trattore? [**R.** a) 14; b) 14]

15. Nel trapezio rettangolo ABCD le basi AB e DC sono lunghe rispettivamente 4L e 3L, essendo L una lunghezza assegnata. Sapendo che l'altezza AD è uguale alla somma delle basi e indicato con E il punto di AD equidistante dagli estremi del lato obliquo BC, calcolare il perimetro e l'area del triangolo EBC. [**R.** $5L\left(2+\sqrt{2}\right)$; $12{,}5L^2$]

16. Dimostrare che, mentre esiste uno ed un solo numero naturale N di tre cifre, scritto nel consueto sistema di numerazione decimale, tale che il suo doppio sia uguale al numero complessivo delle cifre dei numeri naturali che non superano N, non esiste alcun numero naturale di due cifre che abbia quella proprietà.

[**R.** Di numeri che non superano N, nel caso che abbia tre cifre, ce ne sono 10 di una sola cifra (i numeri da 0 a 9), 90 di due cifre (da 10 a 99), N−99 di tre cifre (da 100 ad N); pertanto il numero complessivo delle cifre di questi numeri è … . Si ha: $2N=3N-108$, da cui … , mentre … .]

20.4.6 La risoluzione delle equazioni letterali non differisce sostanzialmente da quella delle equazioni numeriche. Tuttavia, ogni volta che si risolve un'equazione letterale, è necessario fare delle considerazioni sui valori che si possono attribuire ai parametri, in quanto per alcuni di tali valori l'equazione potrebbe essere indeterminata, per altri impossibile, per altri ancora determinata.

Considerazioni di tipo generale non se ne possono fare. Possiamo soltanto descrivere qualche situazione particolare con degli esempi.

- ESERCIZIO 1. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione in x:
$$a\,x+b=b\,x+a\,,$$
dove a, b sono numeri reali qualsiasi.

RISOLUZIONE. Si ha:
$$a\,x+b=b\,x+a \;\leftrightarrow\; a\,x-b\,x=a-b \;\leftrightarrow\; (a-b)\,x=a-b\,.$$
Ora, se $a-b=0$, cioè se $a=b$, l'equazione è indeterminata, diventando $0\,x=0$.

Se, invece, $a-b\neq 0$, cioè se $a\neq b$, l'equazione ha la soluzione 1.

- ESERCIZIO 2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione in x:
$$a\,x-2=x+1\,,$$
dove a è un qualsiasi numero reale.

RISOLUZIONE. Si ha:
$$a\,x-2=x+1 \;\leftrightarrow\; a\,x-x=3 \;\leftrightarrow\; (a-1)\,x=3\,.$$
Ora, se $a-1=0$, cioè se $a=1$, l'equazione è impossibile, poiché diventa $0\,x=3$.

Se, invece, $a-1\neq 0$, cioè se $a\neq 1$, allora l'equazione ha la soluzione:

$$x=\frac{3}{a-1}\ .$$

- ESERCIZI DA RISOLVERE. Risolvere in ℝ le seguenti equazioni letterali razionali intere nell'incognita x:

1. $2x-3a=0\ ;\qquad \frac{1}{2}x+a=0\ ;\qquad \frac{1}{3}x-2a=\frac{1}{3}a\ .$
2. $\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a\ ;\qquad \frac{1}{2}a-\frac{1}{3}x=\frac{1}{4}a\ ;\qquad 2x-\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}x\ .$
3. $\frac{\frac{1}{2}x-a}{2}=\frac{1}{3}a\ ;\qquad \frac{2x-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}}=a-1\ ;\qquad \frac{a-\frac{2}{3}x}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{x}+3\ .$
4. $\frac{x+a}{2}-\frac{2x-a}{3}=\frac{a}{2}\ .$ [R. $x=2a$]
5. $\frac{\frac{1}{2}x-a}{\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}a-x}{\frac{1}{3}}=a\ .$ [R. $x=a$]
6. $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}a}{2}-\frac{\frac{1}{2}a-2x}{3}=\frac{a-2x}{\frac{3}{2}}\ .$ $\left[\text{R. } x=\frac{13}{28}a\right]$
7. $a\,x=1.$ [R. $a=0$: equazione impossibile, $a\neq0$: ...]
8. $a\,x=\frac{1}{2}x+2\ .$ $\left[\text{R. } a=\frac{1}{2}\text{:equazione impossibile, } a\neq\frac{1}{2}\text{:...}\right]$
9. $x\left(\frac{1}{2}a-1\right)=a\,x-x\ .$ [R. $a=0$:equazione indeterminata, $a\neq0$:$x=0$]
10. $(x-a)^2-(x+2a)^2=0\ .$ $\left[\text{R. } a=0\text{: equazione indeterminata, } a\neq0\text{: } x=-\frac{a}{2}\right]$
11. $\frac{1}{2}x\left(x-\frac{1}{2}a\right)-2a\left(\frac{1}{2}x-a\right)=\frac{1}{2}(x-a)(x+a)\ .$ [R. $a=0$:..., $a\neq0$:$x=2a$]

20.4.7 Adesso che sai risolvere le equazioni di 1° grado ed inoltre hai più dimestichezza con il calcolo algebrico, possiamo ritornare su due questioni lasciate in sospeso nello studio delle precedenti unità.

- **FRAZIONE GENERATRICE DI UN NUMERO DECIMALE PERIODICO**. La prima questione riguarda la frazione generatrice di un numero decimale periodico. Per capire come si giustifichino le relative formule ci riferiamo a casi particolari, ma si capisce subito che il procedimento è estensibile ad una qualsiasi situazione. Questo procedimento prevede dapprima la costruzione della frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice con parte intera nulla, poi utilizza il risultato trovato per determinare la frazione generatrice di un qualunque altro numero decimale periodico.

Dato allora, per esempio, il numero $0{,}\overline{5}$ poniamolo uguale ad x. Dunque: $x=0{,}\overline{5}$, ossia: $x=0{,}5555\ldots$; per cui, moltiplicando entrambi i membri per 10 (poiché il periodo ha una sola cifra; altrimenti si moltiplica, a seconda dei casi, per 100, per 1000, ...), si ottiene:

$10x=5{,}5555\ldots$, o anche: $10x=5+0{,}\overline{5}$, e perciò: $10x=5+x$, da cui segue: $x=5/9$.

La regola è giustificata.

Sia ora: $x=0{,}2\overline{3}$. Allora: $10x=2+0{,}\overline{3}$ e perciò:

$$10x=2+\frac{3}{9}\ \text{ o anche } 10x=\frac{2\cdot(10-1)+3}{9}\text{, ossia: } x=\frac{23-2}{9}.$$

Anche adesso la regola è giustificata.

Prendiamo infine: $x=2{,}13\overline{54}$. Allora: $100\,x=213+0{,}\overline{54}$ e perciò: $100\,x=213+\frac{54}{99}$, da cui segue:

$$100\,x=\frac{213\cdot(100-1)+54}{99},\ \text{ossia: } x=\frac{21354-213}{9900}.$$

Ed anche in questo caso la regola è giustificata.

Si può far notare che, se il numero periodico fosse $0,\overline{9}$, è noto che non esiste alcuna frazione che lo genera. Se, tuttavia, si pone $x=0{,}\overline{9}$ e si ragiona come sopra, si trova $x=1$. Conclusione che giustifica la convenzione nota: $0{,}\overline{9}=1$.

- **FORMULA DI ERONE**. La seconda questione concerne la dimostrazione della celebre formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi, del quale siano note le lunghezze dei lati. Per la precisione, se tali lunghezze sono $a,\ b,\ c$ ed, inoltre, indichiamo con p il semiperimetro del triangolo, la sua area A è espressa dalla seguente formula:

$$\mathbf{A\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento al triangolo ABC (Fig. 4) i cui lati $BC,\ AC,\ AB$ misurano rispettivamente a, b, c, sia H il piede dell'altezza condotta per A. Poniamo $\overline{BH}=x$, per cui $\overline{HC}=a-x$.

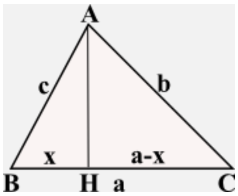

FIG. 4

In virtù del teorema di Pitagora applicato dapprima al triangolo rettangolo AHB e poi ad AHC, si ha:

$$\overline{AH}^2=c^2-x^2,\quad \overline{AH}^2=b^2-(a-x)^2\ ;$$

per cui:

$$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2.$$

Da qui, dopo aver semplificato e risolto, si ottiene:

$$x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}.$$

Di conseguenza:

$$\overline{AH}^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a^2}\{4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2\}=\frac{1}{4a^2}\{2ac+(a^2-b^2+c^2)\}\{2ac-(a^2-b^2+c^2)\}=$$

$$=\frac{1}{4a^2}\{(a+c)^2-b^2\}\{b^2-(a-c)^2\}=\frac{1}{4a^2}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).$$

Posto, ora: $a+b+c=2p$, si ha evidentemente:

$$a+b+c-2a=2p-2a,\ \text{da cui: } b+c-a=2(p-a);\quad a+b+c-2b=2p-2b,\ \text{da cui: } a+c-b=2(p-b);$$

$$a+b+c-2c=2p-2c,\ \text{da cui: } a+b-c=2(p-c).$$

Pertanto: $\overline{AH}^2=\frac{1}{4a^2}\,2p\cdot2(p-a)\cdot2(p-b)\cdot2(p-c)=\frac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$.

E quindi: $\overline{AH}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

In definitiva, come si voleva dimostrare, l'area A del triangolo è:

$$A = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH} = \frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

20.5 APPROFONDIMENTI

20.5.1 In questo paragrafo ci proponiamo di approfondire lo studio delle equazioni, soprattutto alla luce di quanto hai appreso a suo tempo riguardo alle frazioni algebriche.
Incominciamo con un esercizio risolto.

- ESERCIZIO RISOLTO. Risolvere in ℝ la seguente equazione nell'incognita x:

$$\frac{2x}{a+b} - \frac{x}{a-b} = \frac{1}{a^2-b^2}$$

dove a, b sono numeri reali qualsiasi.
RISOLUZIONE. Consideriamo il m.c.m. dei denominatori $a-b$, $a+b$, a^2-b^2; esso è $(a-b)(a+b)$. Affinché l'equazione assegnata non perda di significato deve essere $a-b\neq 0$, cioè $a\neq b$, e inoltre $a+b\neq 0$, cioè $a\neq -b$. Sotto queste condizioni, moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per il m.c.m. trovato.
Quando si esegue quest'operazione si dice che **si libera dal denominatore**.
Otteniamo:

$$2x(a-b) - x(a+b) = 1\,,$$

e da qui, dopo qualche semplificazione, segue:

$$(a-3b)\,x = 1\,.$$

Ora, se $a-3b\neq 0$, cioè se $a\neq 3b$, l'equazione ha la soluzione:

$$x = \frac{1}{a-3b}\,.$$

Se, invece, $a=3b$, allora essa diventa $0x=1$ e quindi è impossibile.

- ESERCIZI DA RISOLVERE. Risolvere in ℝ le seguenti equazioni nell'incognita x:

1. $\frac{x}{a+1} + \frac{x}{a-1} = \frac{2a}{a^2-1}$. [**R.** $a\in\mathbb{R}-\{-1,+1\}$: $a=0\to\cdots$, $a\neq 0\to\cdots$]
2. $\frac{x-a}{a+1} + \frac{2a}{a^2-1} = \frac{1-x}{a+1}$. $\left[\mathbf{R.}\ a\in\mathbb{R}-\{-1,+1\}: x = \frac{a^2+2a-1}{2(a-1)}\right]$
3. $\frac{x-4}{a+4} - \frac{x+4}{a-4} + \frac{8a}{a^2-16} = 0$. [**R.** $a\in\mathbb{R}-\{-4,+4\}$: $x=0$]
4. $\frac{x+2a}{a^2-2a+1} + \frac{ax}{a-1} = x$. [**R.** $a\in\mathbb{R}-\{1\}$: $a=0\to$ eq. indeterminata, $a\neq 0\to\cdots$]
5. $\frac{x+a}{a-b} - \frac{x-b}{a+b} = 0$. [**R.** $a\neq\pm b$: $b=0\to$ eq. impossibile, $b\neq 0\to\cdots$]
6. $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$. [**R.** $a,b\in\mathbb{R}_0$: $b=-a\to$ eq. indeterminata, $b\neq -a\to x=a+b$]
7. $\frac{x-2a}{a} + \frac{x-2b}{b} = \frac{a^2-b^2}{2ab} - 4$. [**R.** $a,b\in\mathbb{R}_0$: $b=-a\to$ eq. indeterminata, $b\neq -a\to\cdots$]
8. $\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-b}{a+b} = \frac{x}{a^2-b^2}$. $\left[\mathbf{R.}\ b\neq\pm a: a=\frac{1}{2}\to \text{eq. impossibile}, a\neq\frac{1}{2}\to x=\frac{a^2+b^2}{1-2a}\ldots\right]$
9. $\frac{2x}{a^2-2ab+b^2} = \frac{x-a}{a^2-ab} - \frac{x-b}{ab-b^2}$. [**R.** $a,b\in\mathbb{R}_0$, purché $b\neq a$, ...]

20.5.2 Nelle precedenti equazioni, quantunque figurino lettere al denominatore di frazioni algebriche, l'incognita però non vi figura mai. È, invece, interessante occuparsi proprio di quelle equazioni in cui

l'incognita è presente nel denominatore di qualche frazione algebrica: tali equazioni si chiamano ***equazioni razionali fratte***. Per la loro risoluzione fa comodo il secondo principio di equivalenza, poiché permette di trasformare un'equazione siffatta in un'equazione razionale intera. Basta infatti moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per il m.c.m. dei denominatori delle frazioni algebriche che figurano in essa; cioè basta *liberare dal denominatore*. Detto per inciso, il m.c.m. dei denominatori è spesso chiamato ***minimo comune denominatore*** (mcd).
Per esempio:

$$\frac{x+1}{x}-2=\frac{3}{2} \rightarrow 2(x+1)-4x=3x\,.$$

Hai certamente notato che non abbiamo messo il segno "$\leftrightarrow$" di doppia implicazione fra le due equazioni suddette, ma quello di implicazione semplice "$\rightarrow$". Il fatto è che, quando si libera un'equazione dal denominatore e questo contiene l'incognita, si presenta una complicazione.
Per comprendere di che cosa si tratti, prendiamo quest'equazione:

$$\frac{2x}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}\,.$$

Liberando dal denominatore si ottiene quest'altra equazione:

$$2\,x=x-1+2\,,$$

che dovrebbe essere equivalente alla prima. Ora, però, risolvendo la seconda equazione, si trova: $x=1$; ma questo valore, sostituito al posto di x nella prima, fa perdere di significato alle due frazioni che vi figurano, perciò dobbiamo concludere che "1" non è soluzione dell'equazione assegnata.

Ecco allora come bisogna procedere quando si risolve un'**equazione razionale fratta**:
- si libera l'equazione dal denominatore;
- si risolve l'equazione razionale intera che così si ottiene;
- si assumono come soluzioni della prima equazione le soluzioni della seconda, a condizione che soddisfino all'equazione assegnata.

20.5.3 Vediamo alcuni esempi.

- ESERCIZIO RISOLTO 1. Risolvere in $\mathbb{Q}$ la seguente equazione nell'incognita x:

$$\frac{2}{x^2-x}+\frac{3}{x}-\frac{2}{x-1}=0.$$

RISOLUZIONE. Dopo aver calcolato che il m.c.d. è x^2-x, liberiamo dal denominatore; otteniamo la seguente equazione razionale intera: $2+3\,(x-1)-2\,x=0$.
Si trova subito che la sua unica soluzione è 1. Ma siccome essa fa perdere di significato a qualche termine dell'equazione data (due termini esattamente), non si può accettare come soluzione dell'equazione assegnata, che pertanto è impossibile.

- ESERCIZIO RISOLTO 2. Risolvere in $\mathbb{Q}$ la seguente equazione nell'incognita x:

$$\frac{x^2}{x^2-16}=\frac{x}{x+4}-\frac{4}{x-4}.$$

RISOLUZIONE. Osservato che il m.c.d. è x^2-16, liberiamo dal denominatore: $x^2=x\,(x-4)-4\,(x+4)$.
Dopo alcune elaborazioni e relative semplificazioni, si ottiene: $8\,x=-16$, e da qui: $x=-2$.
Siccome il numero -2 non fa perdere di significato a nessuno dei termini dell'equazione assegnata, questa ha per l'appunto la soluzione -2.

- ESERCIZIO RISOLTO 3. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione in x, dove a è un parametro reale:

$$\frac{1}{x+a}=\frac{2}{x-a},$$

RISOLUZIONE. Dopo aver liberato dal denominatore, l'equazione diventa: $x-a=2\,(x+a)$;
da cui segue: $x-a=2\,x+2\,a$, e quindi: $x=-3\,a$.
Ora, per questo valore di x, il primo membro dell'equazione assegnata diventa:

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)_{x=-3a}=\frac{1}{-3a+a}=-\frac{1}{2a},$$

ed il 2° membro diventa:

$$\left(\frac{2}{x-a}\right)_{x=-3a}=\frac{2}{-3a-a}=-\frac{1}{2a}.$$

Dunque, per $a=0$ l'equazione non ha soluzione, mentre per $a\neq0$ essa ammette la soluzione $-3a$.

- ESERCIZIO RISOLTO 4. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione in x, dove a è un parametro reale:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{a}{x-a}=1,$$

RISOLUZIONE. Dopo aver liberato dal denominatore l'equazione diventa:

$$x\,(x-a)+a\,(x+1)=(x+1)(x-a).$$

Da qui, dopo aver eseguito le operazioni e condotto l'equazione alla forma normale, questa diventa:

$$(1-a)\,x=2\,a.$$

Allora se $a=1$, quest'equazione è impossibile; se invece $a\neq1$, ammette la sola soluzione:

$$x=\frac{2a}{1-a}\,.$$

Ora, per questo valore di x, il primo membro dell'equazione data diventa:

$$\left(\frac{x}{x+1}+\frac{a}{x-a}\right)_{x=\frac{2a}{1-a}}=\frac{\frac{2a}{1-a}}{\frac{2a}{1-a}+1}+\frac{a}{\frac{2a}{1-a}-a};$$

semplifichiamo quest'espressione, ricordando che stiamo supponendo $a\neq1$; essa diventa:

$$\frac{2a}{1-a}\cdot\frac{1-a}{2a+1-a}+a\cdot\frac{1-a}{2a-a+a^2}\text{ , ovvero: }\frac{2a}{a+1}+\frac{1-a}{a+1}\text{ , o ancora: }\frac{a+1}{a+1}.$$

Ora, se $a=-1$ l'espressione perde di significato, se invece $a\neq-1$ essa diventa uguale ad 1.
Pertanto l'equazione assegnata:

- per $a=1$ e per $a=-1$ è impossibile;
- per a diverso da 1 e da -1 ammette la soluzione $x=\frac{2a}{1-a}$.

Che l'equazione sia impossibile per $a=-1$ si può controllare direttamente. Essa infatti, per questo valore di a, diventa:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{-1}{x+1}=1;$$

liberando dal denominatore, si ottiene:

$$x-1=x+1\,,$$

equazione che è chiaramente impossibile dal momento che non esiste alcun numero che dia lo stesso risultato aggiungendo o togliendo ad esso il numero 1. Del resto quest'equazione si può scrivere anche così: $0x=2$ ed è manifestamente impossibile.

- ESERCIZI DA RISOLVERE. Risolvere in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni razionali fratte nell'incognita x:

1. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}=0.$ [R. impossibile]

2. $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{10x}{x^2-4}=\frac{2x+1}{x-2}$. [**R.** indeterminata]
3. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x+1}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=\frac{5}{4}\right]$
4. $\frac{2x+1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x-2}=\frac{x-1}{x^2-3x}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=\frac{2}{7}\right]$
5. $\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^2+3x+2}=0$. [**R.** $x=-4$]
6. $\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2-3x+2}=0$. [**R.** $x=3$]
7. $\frac{x-1}{x^2-4}-\frac{x+2}{2x^2-5x+2}=\frac{x-2}{2x^2+3x-2}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=-\frac{7}{3}\right]$
8. $\frac{x^2-3x}{x^2-3x+2}+\frac{3}{x^2-x-2}=1$. [**R.** $x=5$]
9. $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-\frac{4x^2}{x^3-3x^2+3x-1}=1$. [**R.** $x=0$]
10. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=1-\frac{x^2+8x}{4-x^2}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=\frac{3}{2}\right]$

Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni letterali razionali fratte nell'indeterminata x, tenendo presente che le lettere che vi figurano sono parametri reali:

11. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x-2a}{a}$. $\left[\mathbf{R.}\ a\neq0\text{: } x=-\frac{a}{2}\right]$
12. $\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}=\frac{2x^2}{x^2-a^2}$. [**R.** $a=0$: eq. indeterminata, $a\neq0$: eq. impossibile]
13. $\frac{x-a}{x+a}-\frac{x+a}{x-a}+\frac{2ax+4x^2}{x^2-a^2}=0$. $\left[\mathbf{R.}\ a=0\text{:…; } a\neq0\text{: } x=0,\ x=\frac{a}{2}\right]$
14. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{4a^2}{x^2-a^2}$. [**R.** $a=0$:…; $a\neq0$:…]
15. $\frac{1}{x-2a}+\frac{2}{x+2a}=\frac{a}{x^2-4a^2}$ [**R.** $a=0$: eq. impossibile; $a\neq0$: $x=a$]

VERIFICHE [4]

Ricordando che $|a|=b \rightarrow a=\pm b$, essendo a, b numeri reali, risolvere in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni nell'indeterminata x (nn. 1-9):

1. $\left|x+\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ \text{due soluzioni: } x'=0,\ x''=-\frac{4}{3}\right]$

2. $|x|-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. [**R.** due soluzioni: $x'=2$, $x''=-2$]

3. $\left|2x-\frac{4}{5}\right|-1=\frac{1}{5}$. $\left[\mathbf{R.}\ \text{due soluzioni: } x'=1,\ x''=-\frac{1}{5}\right]$

[4] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella “Integrazione 2”, file “Matematica – Integrazione 2, unità 1-27”, pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

4. $\dfrac{\frac{1}{2}\,|x-1|}{2} - 3 = \dfrac{1}{2}$. [**R.** due soluzioni: x'=15, x"=–13]

5. $\dfrac{\frac{2}{3}\,|2x-3|}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$. [**R.** due soluzioni: $x' = \frac{21}{16}$, $x'' = \frac{27}{16}$]

6. $\frac{3}{4}\left|\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$. [**R.** due soluzioni: $x' = -\frac{2}{27}$, $x'' = \frac{14}{27}$]

7. $|x+1| = x+1$; $|x| + 1 = x$.

8. $\frac{1}{3}\left|x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = 0$; $\frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{2}x\right| - 2 = 0$.

9. $\dfrac{\left|2x - \frac{3}{2}\right|}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$; $2\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right| = \frac{3}{2}$.

Risolvere in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni nell'indeterminata x (nn. 10-15):

10. $\frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-2)(x+2) = \dfrac{\frac{1}{3}x(3-x)}{2}$.

11. $(x-2)^3 - x(x-1)^2 = \left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 2x\right)$.

12. $\dfrac{\frac{1}{2}(x-2)}{\frac{2}{3}} + \dfrac{x}{\frac{3}{2} - 1} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x}{\frac{2}{3}}$.

13. $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - \left(2 - \frac{1}{2}x\right)\left(1 + \frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}(5x^2 - 7) = 0$.

14. $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x(3-2x)$.

15. $\left(\frac{3}{2}x + 2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2 - \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}(3x+2)(3x-2)$.

Tenendo presente la legge dell'annullamento del prodotto, risolvere in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni in x di grado superiore al 1° (nn. 16-22):

16. $x(x-1) = 0$. [**R.** 2 soluzioni: $x_1=0$, $x_2=1$]

17. $(x+2)(2x-1) = 0$. [**R.** 2 soluzioni: $x_1=-2$, $x_2=1/2$]

18. $x(x-1)(x-2) = 0$. [**R.** 3 soluzioni: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$]

19. $x^2 - 1 = 0$. [**R.** 2 soluzioni: $x_1=-1$, $x_2=1$]

20. $x^2 - 2x + 1 = 0$. [**R.** 1 soluzione contata due volte: x=1]

21. $x^2 - 3x = 0$; $4x^2 - 1 = 0$; $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

22. $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x^2 - x - 12 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Determinare per quali valori del parametro k (k∈ℚ) le seguenti equazioni in x hanno le soluzioni indicate a fianco (nn. 23-29) [Attenzione! Occorre riflettere sul fatto che, appena si sostituisce all'incognita x un determinato valore, si ottiene un'equazione che questa volta ha k come incognita]:

23. $kx - k + 1 = 0$, $x = 1$. [**R.** nessun valore di k]

24. $(k-1)x + k = 0$, $x = 0$. [**R.** k=0]

25. $(2k-1)x + k - 1 = 0$, $x = -1$. [**R.** k=0]

26. $(2k+3)x + 2k - 1 = 0,\ \ x = \frac{1}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ k=-\frac{1}{6}\right]$

27. $3x - 2k + 1 = 0$, $x = k$. [**R.** k= –1]

28. $(k+2)x - k^2 + 1 = 0,\ \ x = k$. $\left[\mathbf{R.}\ k=-\frac{1}{2}\right]$

29. $(k-1)x - 2k^2 + \frac{1}{2}k + 2 = 0,\qquad x = 2k$. $\left[\mathbf{R.}\ k=\frac{4}{3}\right]$

Risolvere in ℚ le seguenti equazioni razionali fratte nell'indeterminata x (nn. 30-38):

30. $\dfrac{\frac{3}{2}}{2x^2 - x} + \dfrac{\frac{1}{2}}{2x-1} = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{4x^2 - 1}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=-\frac{3}{8}\right]$

31. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=\frac{3}{2}\right]$

32. $\dfrac{2}{x^2-3x+2} + \dfrac{3}{x^2-x} = \dfrac{3}{x^2+2x} + \dfrac{2}{x^2-4}$. $\left[\mathbf{R.}\ x=\frac{6}{5}\right]$

33. $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{2}{x-1} = 1$.

34. $\dfrac{2x-1}{x^2-1} + \dfrac{x+1}{x-1} = 3$.

35. $\dfrac{x-1}{x-\frac{1}{2}} - \dfrac{x+1}{x+\frac{1}{2}} = \dfrac{2x+3}{4x^2-1}$.

36. $\dfrac{2x-\frac{1}{2}}{x+1} - \dfrac{2x+\frac{1}{2}}{x+2} = \dfrac{\frac{1}{2}x - 3}{x^2+3x+2}$.

37. $\dfrac{\frac{2}{3}x - 1}{x^2+2x-3} + \dfrac{\frac{1}{2}x + 2}{x-1} = \dfrac{\frac{1}{2}x - 1}{x+3}$.

38. $\dfrac{2x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{3}} = \dfrac{2x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{3}}$.

Risolvere in ℝ le seguenti equazioni letterali razionali fratte nell'indeterminata x, tenendo presente che le lettere che vi figurano sono parametri reali (nn. 39-43):

39. $\dfrac{a}{a-1}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{1}{x}$. [**R.** $a\in\mathbb{R}-\{0,1\}$: $x=1$]

40. $\dfrac{x-2k}{x-k} - \dfrac{x}{x+k} + \dfrac{x-k}{x+k} + \dfrac{x+k}{x-k} = \dfrac{2x^2}{x^2-k^2}$. [**R.** $k\in\mathbb{R}$: eq. indeterminata]

41. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{a-1} = \dfrac{a+1}{ax-x}$. [**R.** $a\in\mathbb{R}-\{1\}$: $a=3\to$eq. impossibile, $a\neq3\to x=3-a$]

42. $\dfrac{x-2a}{x} + x = \dfrac{ax+2}{a} - a$. $\left[\mathbf{R.}\ a\in\mathbb{R}_0\text{: } a\in\{-2,1\}\to\text{eq. impossibile, } a\notin\{-2,1\}\to x=\frac{2a^2}{a^2+a-2}\right]$

43. $\dfrac{4+2k}{4x^2-k^2} + \dfrac{2-k}{2x+k} = \dfrac{4+k}{2x-k}$ $\left[\mathbf{R.}\ k\in\mathbb{R}\text{: } k=-1\to\text{eq. impossibile, } k\neq-1\to x=\frac{1-k}{1+k}\right]$

Questioni varie:

44. Sommando ad un numero la sua metà e la sua terza parte si ottiene 33. Trovare il numero. [**R.** 18]
45. In una classe di 24 alunni le ragazze sono i $3/5$ dei ragazzi. Stabilire quante sono le une e quanti gli altri. [**R.** $9, 15$]
46. Un automobilista deve percorrere una certa distanza. Nel primo giorno di viaggio ne percorre la terza parte e nel secondo giorno i $2/3$ del cammino restante; nel terzo giorno infine percorre gli ultimi 220 km. Calcolare quant'è la distanza complessiva. [**R.** 990 km]
47. Trovare due numeri naturali sapendo che la loro somma è 54 e che il quoziente e il resto della divisione del maggiore di essi per il minore sono rispettivamente 12 e 2. [**R.** $50, 4$]
48. In un circo equestre, fra bipedi e quadrupedi vi sono 50 animali. Stabilire quanti sono i bipedi e quanti i quadrupedi, se si contano complessivamente 170 zampe. [**R.** $15, 35$]
49. Al mercato una massaia spende metà del denaro che possiede per comprare della carne, $1/3$ di tale denaro per comprare della frutta e $1/7$ della stessa somma per comprare della verdura. Calcolare quanti soldi ha la massaia sapendo che dopo aver fatto la spesa le rimangono 50 centesimi di Euro. [**R.** € 21]
50. La metà degli animali di una fattoria sono galline, la decima parte sono capre e la quarta parte sono conigli. Inoltre vi sono mucche in numero pari alla metà di quello delle capre, 3 gatti e un cane. Calcolare quante zampe si contano nella fattoria. [**R.** 120]
51. Alcuni amici, come ogni sabato, anche questo sabato si recano in pizzeria e ordinano ciascuno una pizza ed una bibita: pagano 8 euro a testa. Anche il sabato successivo ripetono il rito, ma Mario ha comunicato che arriverà in ritardo. Decidono di fare la stessa ordinazione del sabato precedente, ordinando anche per Mario. Questi però telefona che non potrà più venire. Gli amici provvedono a consumare loro l'ordinazione di Mario: alla fine pagano 10 euro a testa. Quanti sono gli amici di Mario? [**R.** 4]
52. A Policrate, tiranno di Samo nel VI sec. a.C., che gli domandava il numero dei suoi allievi, Pitagora rispose: «La metà studia le scienze matematiche; i fenomeni naturali costituiscono l'oggetto dei lavori di un quarto; la settima parte si esercita al silenzio e alla meditazione. Vi sono inoltre tre donne». Quanti erano gli allievi di Pitagora? [**R.** 28]
53. Brahmagupta, matematico indiano vissuto nel VII sec. d.C., formulò il seguente problema, che sei chiamato a risolvere: «Se quattro volte la dodicesima parte della somma tra uno e l'incognita, aumentato di otto è uguale all'incognita aumentata di uno, dimmi il valore dell'incognita». [**R.** 11]
54. Il seguente problema, che sei invitato a risolvere, fu formulato da Bhaskara, matematico indiano vissuto nel XII sec. d.C.: «Un quinto di uno sciame di api si posa su un fiore di Kadamba, un terzo su un fiore di Silindha. Tre volte la differenza tra i due numeri volò sui fiori di un Kutujan e rimase solo un'ape che si librò qua e là per l'aria ugualmente attirata dal gradevole profumo di un Gelsomino e di un Pandamus. Dimmi tu ora, donna affascinante, qual era il numero delle api». [**R.** 15]
55. Il padrone di un'officina meccanica promette ad un suo operaio, per il lavoro di un anno, un compenso di € 3000 ed una macchina usata. Ma dopo 8 mesi lo licenzia e gli dà la macchina e € 1500. Quant'è stata valutata la macchina? [**R.** € 1500]
56. Alla prova orale di un concorso sono stati ammessi i 56 candidati che hanno superato due prove di selezione. Sapendo che la prima prova è stata superata dal 35% dei partecipanti al concorso e la seconda dalla metà dei candidati che hanno superato la prima prova, quanti erano i candidati che hanno partecipato alla prima prova? [**R.** 320]

57. Questa è la storia, davvero singolare, di un ladro piuttosto sfortunato. Egli, dopo aver scassinato una gioielleria, s'imbatté a sua volta dapprima in un ladro che gli portò via la metà più uno dei gioielli rubati e successivamente in un altro ladro che lo derubò della metà più uno dei gioielli rimastigli. Tanto che il tapino rimase con un solo gioiello. Quanti gioielli aveva egli rubato? [**R.** 10]

58. Dire se esiste una lunghezza s tale che le lunghezze seguenti siano quelle dei lati di un triangolo equilatero:

a) $2s-3,\ 3s+2,\ s-8$. b) $4s-2,\ 6s-5,\ 2s+1$. c) $3s+4,\ 4s-2,\ 5s+1$.

[**R.** a) NO poiché … ; b) SÌ, s=3/2 ; c) NO]

59. La base maggiore e l'altezza di un trapezio rettangolo sono lunghe rispettivamente 8a e 4a, dove a è una lunghezza data. Sapendo che l'area del trapezio è $26a^2$, determinarne il perimetro. [**R.** 22a]

60. Considerato il triangolo ABC, per il punto medio M del lato AB si conduca la parallela al lato AC fino a secare in N il lato BC; si conduca quindi per N la parallela al lato AB fino a secare in P il lato AC. Ammesso che il quadrilatero AMNP abbia perimetro 20 cm e supposto che i lati AC e BC del triangolo misurino rispettivamente 7 cm e 10 cm, trovare il perimetro del triangolo stesso. I dati assegnati sono tutti necessari? [**R.** 30 cm. NO: infatti la misura di AC è inutile giacché …]

61. Si considerino le seguenti lunghezze, espresse in cm: $2a+6,\ 3a-5,\ 5a-9$. Ammesso che, nell'ordine scritto, siano le misure di tre lati consecutivi di un rettangolo, calcolare l'area di questo rettangolo. [**R.** 160 cm²]

62. La base minore di un trapezio isoscele è i $3/5$ della base maggiore e l'altezza del trapezio è lunga $3r/2$, dove r è una lunghezza data. Sapendo che l'area del trapezio è $12\ r^2$, calcolarne il perimetro. [**R.** 26r]

63. Il lato di un quadrato misura 8 cm. Determinare una lunghezza x tale che, aumentando di x le lunghezze di due lati opposti del quadrato e diminuendo di x le lunghezze degli altri due lati, si ottenga un rettangolo avente: a) lo stesso perimetro del quadrato; b) perimetro doppio di quello del quadrato.

[**R.** Nel caso a) il problema è indeterminato: esso, infatti, è risolto da una qualunque lunghezza x, purché però x non superi … . Nel caso b) il problema è impossibile]

64. Determinare, se esistono, i valori interi della variabile x per i quali il polinomio x^2-x-1 assume valore 1. [**R.** $x=-1,\ x=2$]

65. Trovare per quale valore del parametro a la seguente equazione in x ha la soluzione 1/2:

$$\frac{x+2}{2}-\frac{x-1}{3}=a.$$ [**R.** $a=17/12$]

66. Si consideri la seguente equazione in x con valori in $\mathbb{Q}$:

$$a\,x=b\,,\quad \text{con } a,b\in\mathbb{Q}.$$

Scrivere l'algoritmo che la risolve, prendendo in esame tutti i possibili casi.

67. Determinare i valori del parametro a per i quali la seguente equazione in x è impossibile in $\mathbb{Q}$:

$$\frac{x+2a}{x-3a}+\frac{x-2}{x+3}=2.$$ [**R.** $a=1,\ a=0,\ a=-1$]

68. Trovare la relazione che lega i parametri a, b nel caso in cui la seguente equazione in x è impossibile in $\mathbb{Q}$:

$$\frac{x-a}{x+b}-\frac{a-b}{a+b}=1.$$ [**R.** $a-b=0,\ a+b=0$]

69. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), sono assegnate le rette:

(a) $y=(2m-1)\,x+m$, (b) $y=2\,(m+1)\,x-1$,

dove m è un parametro reale. Di ciascuna delle seguenti proposizioni stabilire se è vera o falsa, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta:

A) Esiste un valore di m cui corrispondono una retta delle (a) ed una retta delle (b) che risultino parallele.
B) Per ogni retta scelta fra le (a) esiste una retta ad essa parallela fra le (b).
C) Per ogni retta scelta fra le (b) esiste una retta ad essa parallela fra le (a).

70. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), sono assegnate le rette:

$$\text{(a)}\ \ y = (2m-1)\,x + m, \qquad \text{(b)}\ \ y = 3\,(m+1)\,x - 1,$$

dove m è un parametro reale. Di ciascuna delle seguenti proposizioni stabilire se è vera o falsa, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta:
A) Non esiste alcun valore di m cui corrispondono una retta delle (a) e una retta delle (b) che risultino parallele.
B) Per ogni retta scelta fra le (a) esiste una retta ad essa parallela fra le (b).
C) Per ogni retta scelta fra le (b) esiste una retta ad essa parallela fra le (a).

71. I due numeri reali x ed y sono tali che: $(x+y)^2+(x-y)^2=2$. È vero che $xy=2$?

72. Un quadrato Q, il cui lato ha una lunghezza assegnata L, ruota di 45° intorno al suo centro, formando il quadrato Q'. a) Che figura geometrica è la parte comune ai due quadrati Q e Q'? b) Calcolare il perimetro e l'area di tale figura. $\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ldots;\ \text{b)}\ 8L\left(\sqrt{2}-1\right),\, 2L^2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

73. ® Con riferimento al "quadrato magico" rappresentato, utilizzando soltanto i numeri 10, 14 e un terzo numero da determinare, riempire le 7 caselle vuote in modo che rimanga invariata la somma dei tre numeri situati su ogni riga, su ogni colonna e su ogni diagonale.

10		14

74. Un'urna contiene palline bianche e palline nere. Non se ne conosce la composizione, ma si sa che il numero delle palline bianche supera di una unità quello delle palline nere. Si estraggono a caso due palline, senza reinserimento. Sapendo che la probabilità che siano entrambe bianche è $4/15$, calcolare una plausibile composizione dell'urna. Calcolare inoltre la probabilità che le due palline estratte siano entrambe nere. [**R.** 8 palline bianche, …]

75. PROBLEMA RISOLTO. Si consideri il polinomio $P(a)=a^2+8a$, dove a è un numero naturale diverso da zero. È evidente che $P(1)$ è il quadrato di un numero naturale (quadrato perfetto). Dimostrare che per nessun altro valore di a il polinomio assume come valore un quadrato perfetto.

RISOLUZIONE. Il polinomio a^2+8a assume il valore 9 per $a=1$ e quindi è un quadrato perfetto. Se esiste qualche altro valore di a per cui il polinomio diventa un quadrato perfetto, deve essere intanto $a^2+8a>a^2$, per cui deve esistere un naturale n, diverso da zero, tale che: $a^2+8a=(a+n)^2$. Da qui, dopo qualche semplice elaborazione, segue: $a=\frac{n^2}{8-2n}$. Il valore di n che rende nullo il denominatore $8-2n$ è evidentemente da scartare poiché per tale valore, a perde di significato: questo valore è $n=4$. Sono pure da scartare i valori di a per cui quel denominatore diventa negativo poiché fanno assumere ad a un valore negativo: questi valori sono quelli per cui si ha $n>4$. Gli unici valori sui quali ha senso indagare sono: $n=1,\ n=2,\ n=3$. Per $n=2$ si ha $a=1$, valore accettabile. Invece, per $n=1$ e per $n=3$ si ottengono valori di a che non sono numeri naturali (nell'ordine: $a=1/6,\ a=9/2$) e perciò sono da scartare. L'unico valore di a per cui $P(a)$ è un quadrato perfetto è $a=1$.

76. PROBLEMA RISOLTO. Una conduttura d'acqua riempie una cisterna in un giorno; una seconda conduttura la riempie in due giorni, una terza in tre giorni e una quarta in quattro giorni. Quanto impiegano le quattro condutture a riempire la cisterna se vi versano acqua contemporaneamente?

RISOLUZIONE. Calcoliamo per prima cosa quante cisterne riempiono le quattro condutture in un giorno: la prima evidentemente ne riempie 1, la seconda $1/2$, la terza $1/3$ e la quarta $1/4$. Dunque, in un giorno, le quattro condutture riempiono complessivamente $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$ cisterne. Se indichiamo con x il numero di giorni impiegati dalle quattro condutture a riempire una cisterna, si ha allora: $\frac{25}{12}x=1$, da cui segue: $x=\frac{12}{25}$ giorni. Vale a dire: $x = 11$ ore 31 minuti 12 secondi.

Nota Bene. Il problema è riportato da Metrodoro di Bisanzio (grammatico, V-VI sec. d.C.). A quell'epoca doveva essere risolto senza disporre di alcun simbolismo.

77. ® Il seguente problema ha origini nella matematica indiana. Ma, mentre gli Indiani lo risolvevano senza disporre di alcun simbolismo, tu prova a farlo con i mezzi di cui disponi.
«Un ricco signore lascia dei gioielli in eredità ai suoi figli. Precisamente: al primogenito lascia 1 gioiello più $1/10$ della parte rimanente; al secondo nato lascia 2 gioielli più $1/10$ di quelli rimanenti; al terzo nato lascia 3 gioielli più $1/10$ della parte restante; e così via fino all'ultimo nato. Dopo che è stata compiuta la spartizione i vari figli constatano che hanno ricevuto in eredità esattamente lo stesso numero di gioielli. Quanti sono i gioielli? Quanti i figli?» [**R.** 81 gioielli, 9 figli]

78. Il sig. Mario, imprenditore, è felice perché ultimamente gli affari sono andati più che bene. Chiama nel suo ufficio i suoi più diretti collaboratori – Aldo, Giovanni e Giacomo – e mostrando loro un sacchetto, esordisce dicendo che vuol fare loro regalo dei diamanti contenuti in esso. E continua così: «A te Aldo do la metà dei diamanti più mezzo diamante; a te Giovanni do la metà dei diamanti rimasti più mezzo diamante; a te Giacomo do la metà dei diamanti rimasti più un diamante. E così ho svuotato il sacchetto». a) Quanti sono i diamanti contenuti nel sacchetto? b) Quanti diamanti ha avuto in regalo ciascun collaboratore. c) Quanti diamanti il sig. Mario ha dovuto spezzare? [**R.** a) 11; b) ... ; c) 0]

79. ® LABORATORIO DI MATEMATICA. Un automobilista va dalla città A alla città B tenendo una media di 60 km/h.

a) Supposto che faccia il viaggio di ritorno alla media di 90 km/h, qual è la sua velocità media sull'intero percorso di andata e ritorno?

b) Quale velocità media dovrebbe tenere sul percorso di ritorno da B ad A affinché la sua velocità media sull'intero percorso sia di 120 km/h?

Discutine in classe con i tuoi compagni e, se necessario, chiedete aiuto al professore.

80. ® LABORATORIO DI MATEMATICA. Il numero 135 è il più piccolo numero di tre cifre tale che: $135=1^1+3^2+5^3$. Verificarlo e verificare, inoltre, che tra i numeri di 3 cifre solo altri tre hanno la stessa caratteristica.
Come pensi di risolvere la questione? Discutine in classe con i tuoi compagni e, se necessario, chiedete aiuto al professore.

81. LABORATORIO DI MATEMATICA. Considera le seguenti equazioni:

$$\text{a) } 2x+1=5; \qquad \text{b) } x+\frac{2}{3}x=20.$$

Per ciascuna di esse inventa un problema che l'abbia come equazione risolvente.

82. Un'urna contiene n palline rosse ed altrettante palline nere. Sono estratte casualmente 2 palline, senza reinserimento. Per quale valore di n la probabilità che le due palline estratte abbiano lo stesso colore è uguale a quella che abbiano colore diverso?

83. Un'urna contiene palline bianche e palline nere, entrambe in numero pari, ma le palline bianche sono 2 in più di quelle nere. Si estraggono 3 palline a caso, senza rimetterle nell'urna. Quante palline bianche e quante nere vi devono essere nell'urna affinché la probabilità che le 3 palline estratte siano 2 bianche e una nera sia esattamente il triplo della probabilità che siano tutte bianche?

84. In un'urna vi sono delle palline bianche e altrettante palline nere. È estratta una pallina bianca e la si accantona. Si sa che, adesso, è uguale ad $1/7$ la probabilità di estrarre due palline bianche, una di seguito all'altra, senza reinserimento. Trovare quante palline erano inizialmente nell'urna. [**R.** 8]

85. In quell'elezione gli allibratori attribuivano l'80% di vittoria al candidato favorito. a) A quanto era stata fissata la quota della scommessa sulla vittoria del candidato favorito? b) Scommettendo € 100 sulla vittoria del candidato favorito quant'era il guadagno in caso di vincita? [**R.** a) 1 a 4; b) € 25]

86. ® Fabio è titolare di un negozio di generi alimentari. Si trova in un momento di ristrettezze economiche ed ha bisogno immediato di € 5000 per concludere un affare importante. Non potendo far di meglio, decide di rivolgersi ad un usuraio, il quale è sì disposto a concedergli il prestito, ma a condizione di ricevere € 7500 alla scadenza di 30 giorni a partire dall'indomani. Fabio fa un po' di conti e, confidando negli incassi dei giorni seguenti, valuta che mettendo da parte, a cominciare dall'indomani, una certa somma S e aumentandola ogni giorno di 5 euro, allo scadere dei 30 giorni disporrà della somma necessaria a rimborsare l'usuraio. Quanto vale S? [**R.** € 177,5]

87. ® Visitando il blog della sua amica Maria, Giulio osserva che i visitatori sono invitati a dare il loro parere sul blog con un voto. Un messaggio indica la media aggiornata dei voti. A Giulio piace molto il blog e decide di dare come voto la media aumentata di un punto. Dopo la sua valutazione, la pagina internet si aggiorna automaticamente. Giulio constata che la media è aumentata di $0{,}02$ punti. Si chiede allora quante persone hanno votato prima di lui. Calcolate il numero di utenti che hanno votato il blog di Maria prima di Giulio. [**R.** 49 - Tratto dal sito web *matematicasenzafrontiere.it,* 2008]

88. ® In classe arriva Mario, un nuovo studente. Ha un'altezza che supera di 6 cm l'altezza media degli studenti della classe e, dopo il suo arrivo, l'altezza media aumenta di 2 mm. Quanti alunni vi sono nella classe prima dell'arrivo di Mario? [**R.** 29]

89. Paolo è già stato interrogato 4 volte in matematica e la media aritmetica dei voti da lui ottenuti è 5. In una 5ª interrogazione ottiene un bel 7. Si può dire che finalmente la media dei voti da lui ottenuti è 6? Se sì, spiega perché. Se no, calcola la nuova media.

90. Disputando il campionato italiano di calcio, la Roma ha vinto il doppio delle partite perse, mentre il numero delle sconfitte è stato uguale a quello dei pareggi. Si sa che ad ogni vittoria corrispondono 3 punti, ad ogni pareggio 1 punto e ad ogni sconfitta 0 punti. Dei seguenti punteggi:

$$[A]\ 33,\quad [B]\ 34,\quad [C]\ 35,\quad [D]\ 36,$$

uno solamente può essere stato conseguito dalla Roma. Dopo averlo individuato, trovare quante sono state le partite disputate. [**R.** 20]

91. Il lato del quadrato ABCD è lungo 14 cm. Internamente ad esso si prendano i due punti E ed F in modo che il quadrilatero AECF sia un parallelogrammo la cui area sia metà di quella del quadrato. La distanza di E dal lato AD misura 5cm. Calcolare: a) la distanza di E dal lato AB; b) il perimetro del parallelogrammo AECF; c) la misura della sua diagonale EF. $\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } 12\text{ cm; b) } 2\left(13+\sqrt{85}\right)\text{cm; c) ...}\right]$

92. In un gruppo di giovani, 20 giocano a calcio e 10 a pallavolo mentre alcuni praticano entrambi gli sport. Si sa che è il 20% la probabilità di scegliere a caso un giovane del gruppo che pratichi entrambi gli sport. Di quanti giovani è composto il gruppo? [**R.** 25]

93. In un'urna ci sono n palline bianche ed n+2 palline nere. Si estraggono a caso due palline, una di seguito all'altra, senza reinserimento. Si considerino quindi i seguenti eventi:

- le due palline estratte sono entrambe nere;
- la prima pallina estratta è bianca e la seconda è nera.

a) È più probabile il primo o il secondo evento? Oppure non è possibile stabilirlo? b) Posto che il primo evento abbia probabilità 1/3, qual è la probabilità che le due palline estratte siano entrambe bianche? [**R.** a)…; b) $2/15$]

94. Un produttore di vino vende all'ingrosso l'80% del vino prodotto e al dettaglio il restante 20%, facendosi pagare ogni litro di quest'ultimo una volta e mezza quello venduto all'ingrosso. Posto che il ricavo complessivo sia di € 110.000, quale somma proviene dalla vendita all'ingrosso? Quale dalla vendita al dettaglio? [**R.** € 80.000, € 30.000]

95. Antonio e Carmelo si accordano sul seguente gioco: Antonio dà a Carmelo tante figurine dei calciatori quante già ne possiede Carmelo in quel momento. Quest'ultimo però restituisce 9 figurine ad Antonio. E l'operazione è ripetuta più volte, ma già alla terza volta il povero Carmelo si ritrova con una sola figurina. Quante ne possedeva all'inizio del gioco? [**R.** 8]

96. ® Alcuni gettoni sono disposti su n righe ed altrettante colonne in modo da formare una sorta di quadrato. I gettoni sono di due colori diversi, rosso e giallo, e sono distribuiti in due regioni, i rossi da una parte e i gialli dall'altra, separate da una corda parallela ad uno dei lati del quadrato. Si sa che i gettoni gialli sono 39 in più di quelli rossi.

a) Calcolare il numero complessivo di gettoni, sapendo che questo numero è inferiore a 500.

b) Presi a caso due dei gettoni in questione, è più probabile che siano di colore diverso o dello stesso colore?

[Questione ad alto coefficiente di difficoltà. **R.** a) 169; b) è più probabile che siano dello stesso colore]

97. ® Al veglione di San Silvestro partecipano uomini e donne e il numero di queste ultime è una volta e mezza quello degli uomini. Si sa che Carlo balla con 9 donne, Piero con 10, Guido con 11 e, così via, fino a Giacomo che balla con tutte le donne presenti. Quanti uomini partecipano al veglione? Quante donne?

[Questione mutuata da Yakov Perelman, *Algebra ricreativa*, RBA Italia, 2008. **R.** 16 uomini, 24 donne]

98. Siano $a,\ b,\ c$ tre qualsiasi numeri interi dispari consecutivi o pari consecutivi. Esprimere in funzione di b:

$$1)\ a+b+c; \quad 2)\ a^2+b^2+c^2; \quad 3)\ a^3+b^3+c^3-$$

[**R.** In ogni caso: 1) 3b ; 2) $3b^2+8$; 3) $3b^3+24b$]

99. Siano i polinomi: $P(x)=ax+b$ e $Q(x)=P\big(P(x)\big)$. Dimostrare che le equazioni:

$$P(x)=x \quad e \quad Q(x)=x$$

ammettono la medesima soluzione reale, quali che siano i parametri reali a, b purché $a\neq1$.

100. In un'urna ci sono palline di tre colori diversi: 4 palline sono nere, i 3/5 del totale delle palline sono bianche, 1/3 di quel totale sono rosse. Si estraggono a caso 2 palline. Calcolare la probabilità che siano: a) dello stesso colore; b) di colore diverso. [**R.** a) 7/15; b) …]

101. In un sacchetto sono contenute palline di due colori diversi: bianco e nero. Le palline bianche sono in numero doppio rispetto alle nere. Si estraggono due palline a caso e la probabilità che siano dello stesso colore è $8/15$.

a) Qual è la probabilità che le due palline estratte siano di colore diverso?

b) Quante palline sono contenute nel sacchetto?

[**R.** a) … ; b) 21]

102. Si lanciano tre monete "Testa-Croce", le cui facce hanno probabilità diverse di uscire. Precisamente: in una, la probabilità che esca "Testa" è il doppio di quella che esca "Croce"; in un'altra, è il triplo; nell'ultima è il quadruplo. Calcolare la probabilità che, nel lancio delle tre monete, esca:

a) almeno una "Croce", b) al più una "Testa". [**R.** a) 60 %; b) ≈ 16,67 %]

103. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il parallelogramma OPQR in cui P(3,0) e Q(2,2).

a) Determinare, utilizzando un idoneo software matematico, i vertici di un quadrilatero convesso ABCD tale che P sia il punto medio del lato DA, Q quello del lato AB, R del lato BC ed O del lato CD.

b) Se il quadrilatero assegnato OPQR non fosse un parallelogramma, ma un quadrilatero generico, esisterebbe ancora un quadrilatero convesso ABCD con le caratteristiche suddette?

[**R.** a) Si suggerisce di esprimere le coordinate dei vertici B, C, D in funzione delle coordinate (x,y) di A. Si osservi poi, magari con l'ausilio di una figura, che, attribuendo ad x, y valori convenienti e procedendo per tentativi, si possono trovare diversi quadrilateri che soddisfano alle condizioni poste. In particolare, due di essi sono quelli che hanno i seguenti vertici: $(4,1),\ (0,3),\ (-2,1), (2,-1)$; $\left(\frac{7}{2},1\right),\ \left(\frac{1}{2},3\right),\ \left(-\frac{5}{2},1\right),\ \left(\frac{5}{2},-1\right)$. b)...]

104. I lati AB e AD e la diagonale BD del parallelogramma ABCD hanno lunghezze rispettivamente 21, 10 e 17 rispetto alla stessa unità di misura. Dopo aver riferito il piano del parallelogramma ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), trovare le coordinate dei vertici del parallelogramma medesimo e la lunghezza della diagonale AC. [**R.** ... ; $\sqrt{793}$]

105. In un'urna vi sono 2 palline: una bianca e una nera; in una seconda urna vi sono 3 palline: due bianche e una nera; in una terza urna vi sono delle palline, che possono essere bianche o nere, ma in numero non superiore a 5. Si scommette sull'estrazione di una pallina bianca e la cosa può avvenire in due modi: 1) si sceglie a caso una delle tre urne e da essa, sempre a caso, si estrae una pallina; 2) si versano tutte le palline in una medesima urna e da questa si estrae una pallina a caso. Determinare l'esatta composizione della terza urna, sapendo che le due strategie 1) e 2) portano alla medesima probabilità di estrarre una pallina bianca. Qual è questa probabilità?

[**R.** Indicati con k il numero di palline contenute nella terza urna $(k\leq 5)$ e con x quello delle palline bianche, si trova: $x=\frac{k(7k-19)}{6(2k-5)}$, per cui...
2 soluzioni: 3 palline di cui 1 B e 2 N, prob.$=\frac{1}{2}$; 4 palline di cui 2 B e 2 N, prob.$=\frac{5}{9}$]

106. Durante la fase finale del campionato mondiale di calcio, le squadre A, B, C, D, che giocavano nello stesso girone a 4 squadre, hanno ottenuto i risultati riassunti nella tabella sottostante che però risulta incompleta. È richiesto di completarla. Si ricorda che alla vittoria corrispondono 3 punti, al pareggio 1 punto ed alla sconfitta 0 punti.

Squadra	Punti	Partite giocate	Vittorie	Sconfitte	Pareggi	Goal fatti	Goal subiti
A	7	3					3
B	6	3				3	3
C	3	3				2	4
D		3				3	5

107. Un uomo dà la sesta parte dei suoi dobloni e 4 dobloni in più ad un primo povero. Ad un secondo povero dà la sesta parte dei dobloni che gli rimangono e 8 dobloni in più. Dà ad un terzo povero la sesta parte dei dobloni che gli rimangono e 12 dobloni in più. E, così via, dando sempre la sesta parte dei dobloni che gli rimangono, aumentando ogni volta di 4 unità il numero dei dobloni in più, fino a distribuire tutti i dobloni che possiede. Sapendo che tutti i poveri beneficati si ritrovano ad avere lo stesso numero di dobloni, calcolare quanti dobloni ha distribuito il benefattore e quanti sono i poveri beneficati. [**R.** 120; 5]

[NOTA BENE. Questo problema compare in un testo del matematico francese Pierre Hérigone (1580-1643), pubblicato nel 1642, al fine di mostrare come l'algebra simbolica, che a quell'epoca si stava rapidamente affermando, permetteva di risolvere problemi che, per altre vie, si sarebbero rivelati difficili.]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Come si definisce un'equazione in un'incognita?

2. È corretto affermare che la seguente relazione è un'equazione di 1° grado?

$$(x-1)^2-5\,(x-1)=(x+1)\,(x-1).$$

3. Un'equazione di 1° grado in un'incognita quando si dice determinata, quando indeterminata, quando impossibile? In tutti e tre i casi qual è la sua forma normale?

4. Le tre grandezze V, R, i sono legate dalla relazione $R=V/i$. È corretto affermare che si ha: $i=V/R$?

5. È vero che la seguente equazione nell'incognita k risulta determinata solo se $x\neq 1$?

$$k\,x=k+x.$$

6. Per quali valori di x la seguente equazione nell'incognita k risulta determinata?

$$(2\,k-1)\,x=k+k.$$

7. Considerata la relazione:

$$P\,(x-3)=2\,x-r,$$

dove i parametri P, x, r possono assumere qualsiasi valore reale, scegliere la "V" per affermare che la seguente proposizione <u>è certamente</u> vera e la "F" per affermare che <u>può essere</u> invece falsa:

1) Se $r=6$ e $x\neq 3$ allora $P=2$. [V] [F]

2) Se $2x=r$ allora $P=0$. [V] [F]

3) Se $P=0$ e $x\neq 0$ allora $r=3$. [V] [F]

4) Se $P\neq 2$ allora $x=\dfrac{3P-r}{P-2}$. [V] [F]

8. È vero che la seguente equazione in x è indeterminata?

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x-1}\ .$$

9. Posto $P(z)=az+1$, dove a è un parametro reale non nullo, per quale valore di x risulta $P\big(P(x)\big)=P(x)$?

10. Luca deve a Giorgio una certa somma. Decide di dargli 288 €, pari al 60% dell'intera somma. Quanto deve dargli ancora?

11. Per un lavoro da eseguire nella tua abitazione il muratore chiede un certo compenso più l'IVA (Imposta sul Valore Aggiunto). Se l'IVA fosse il 15% del compenso pattuito varrebbe € 111. Quanto vale se è invece il 21% di tale compenso?

12. Dopo aver disputato un certo numero di partite del campionato italiano di calcio, il Torino ha ottenuto lo stesso numero di vittorie, di sconfitte e di pareggi. Si sa che ad ogni vittoria sono assegnati 3 punti, ad ogni pareggio 1 punto e ad ogni sconfitta 0 punti. Dei seguenti numeri:

$$12,\ \ 15,\ \ 18,\ \ 21,$$

uno soltanto indica il punteggio realizzato dal Torino. Quale? Quante partite ha giocato il Torino?

13. Si consideri la frazione algebrica $\frac{x-2}{2x-1}$, dove x è un numero razionale. Dimostrare che essa è uguale ad un numero intero positivo per infiniti valori di x e trovare una formula che esprima tutti questi valori.

14. In quella sezione elettorale si verificò un'astensione del 40% degli elettori. Risultò poi che il 50% dei votanti si espresse a favore del candidato A ed il 25% a favore del candidato B, mentre si contarono 61 schede bianche e 32 schede nulle. Quanti erano gli elettori iscritti in quella sezione? Quanti furono i votanti? Quanti voti andarono al candidato A?

RISPOSTE.

1. Un'equazione in un'incognita è una proposizione aperta del tipo $A(x)=B(x)$, dove $A(x)$ e $B(x)$ sono espressioni nella variabile x.

2. No, almeno fino a quando l'equazione non sarà stata ridotta alla forma normale. Nella fattispecie questa è: $3x-7=0$, ed è effettivamente un'equazione di 1° grado. Ma questo lo possiamo affermare solo adesso.

3. Un'equazione di 1° grado in un'incognita si dice determinata, indeterminata o impossibile a seconda che ammetta nell'ordine una (ed una sola) soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione. La sua forma normale è $ax=b$, con:

- $a\neq0$, se l'equazione è determinata;
- $a=0$ e $b=0$, se l'equazione è indeterminata;
- $a=0$ e $b\neq0$ se l'equazione è impossibile.

4. Sì. Dalla medesima relazione si ricava pure: $V=Ri$.

5. Sì. Infatti per $x\neq1$ ammette la soluzione $k=\frac{x}{x-1}$, mentre per $x=1$ è impossibile.

Questo quesito ed i due successivi dovrebbero far riflettere sui vari ruoli delle lettere che figurano in una medesima equazione.

6. Per $x\neq\frac{1}{2}$. Infatti, dopo qualche semplice elaborazione, l'equazione diventa $(2x-1)k=x$ e solo per $x\neq\frac{1}{2}$ risulta determinata ed ha come soluzione $k=\frac{x}{2x-1}$.

7. Risposte corrette: 1) V; 2) F; 3) F; 4) V.

8. No. L'equazione è impossibile.

9. Osserviamo anzitutto che è: $P(x)=ax+1$ e $P\big(P(x)\big)=a(ax+1)+1=a^2x+a+1$. Deve, dunque, essere soddisfatta la seguente equazione in x: $a^2x+a+1=ax+1$. Si trova facilmente che se $a=1$ l'equazione è impossibile, se invece $a\neq1$ l'equazione ha la soluzione $x=\frac{1}{1-a}$.

10. Indicata con x l'intera somma, l'equazione che risolve il problema è la seguente: $\frac{60}{100}\,x=288$, da cui segue $x=480$ (€). Luca deve pertanto a Giorgio ancora $480-288=192$ (€).

11. Se x è il compenso, l'IVA al 15% sarebbe $\frac{15}{100}x$, per cui dovrebbe risultare $\frac{15}{100}x=111$. Da qui segue $x=\frac{100}{15}\cdot111$. L'IVA al 21% sarebbe quindi: $\frac{21}{100}x=\frac{21}{100}\cdot\frac{100}{15}\cdot111=\frac{7}{5}\cdot111=155{,}4$ (€).

12. Se n indica il numero di vittorie ottenute dal Torino, che è uguale al numero di pareggi, il punteggio realizzato è $3n+n=4n$. Tale punteggio deve essere quindi un multiplo di 4. Tra i numeri assegnati solo 12 ha questa caratteristica. Quindi, dovendo essere $4n=12$, il Torino ha ottenuto 3 vittorie ed altrettanti pareggi e sconfitte, vale a dire che ha disputato 9 partite.

13. Affinché la frazione sia uguale ad un numero intero positivo k è necessario e sufficiente che risulti: $x-2=k(2x-1)$, da cui, risolvendo rispetto ad x, si ottiene: $x=\frac{2-k}{1-2k}$, dove k è ovviamente un qualsiasi numero intero positivo. È la formula cercata.

14. Si può risolvere indicando con x il numero degli elettori, per cui il numero dei votanti è $x-0{,}4x$ e da qui, procedendo passo dopo passo, si giunge all'equazione risolvente: $3x=93\cdot 20$.
Ma si può procedere anche constatando che la somma delle schede bianche e delle schede nulle, cioè 93, è il 25% del numero di votanti, che perciò è 372.
Con entrambi i procedimenti la continuazione è banale.

LETTURA

Perché problemi enunciati a parole? (5)

… il più importante compito dell'istruzione matematica nelle scuole secondarie è di insegnare l'impostazione delle equazioni per risolvere problemi enunciati a parole. …
Risolvendo un problema enunciato a parole con l'impostare equazioni, lo studente *traduce* una situazione reale in termini matematici: egli ha una opportunità di sperimentare che i concetti matematici possono essere riferiti alla realtà, ma che tali riferimenti devono essere accuratamente elaborati. Questa è la prima opportunità offerta dal curriculum per questa esperienza basilare. Questa prima opportunità può anche essere l'ultima per uno studente che non userà la matematica nella sua professione. Tuttavia ingegneri e scienziati che useranno la matematica per professione, l'useranno soprattutto per tradurre situazioni reali in concetti matematici. In effetti un ingegnere fa più denaro di un matematico e quindi può assumere un matematico per risolvere i suoi problemi matematici; perciò al futuro ingegnere non occorre studiare matematica per *risolvere* i problemi. Ma c'è un compito per il quale l'ingegnere non può affidarsi completamente al matematico: l'ingegnere deve conoscere abbastanza matematica per *impostare* i suoi problemi in forma matematica. E così il futuro ingegnere, quando impara nella scuola secondaria ad impostare equazioni per risolvere "problemi enunciati a parole" ha un primo assaggio dell'uso professionale principale della matematica ed ha un'opportunità per acquisire questa attitudine essenziale.

[5] Tratto da: George Polya, *La scoperta matematica*, vol. 1, Milano, Feltrinelli, ed. 1982, pagg. 66-67.