Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le tecniche di calcolo algebrico numerico e letterale.
- Rappresentare punti e rette in un piano cartesiano.
- Conoscere i concetti fondamentali della geometria piana.
- Saper risolvere equazioni e disequazioni di 1° grado.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *interpretare un sistema lineare di due equazioni in due incognite in un piano cartesiano*
- *risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite*
- *scrivere un algoritmo idoneo a risolvere un siffatto sistema*
- *impostare e risolvere problemi, tratti da vari ambiti disciplinari, per mezzo di sistemi lineari*
- *rappresentare analiticamente un semipiano*
- *risolvere per via grafica problemi che si descrivono mediante funzioni*
- *interpretare un sistema lineare di disequazioni in due incognite in un piano cartesiano*
- *risolvere semplici problemi di programmazione lineare*

Rette e sistemi lineari

Unità 22

22.1 INTERSEZIONE DI DUE RETTE

22.1.1 Sei alle prese con il seguente problema:
«Il doppio delle figurine che ha Paolo aumentato del numero delle figurine possedute da Piero fa un totale di 8 figurine. Quante figurine ha ciascuno dei due amici?»
Puoi procedere per tentativi. In questo caso potrebbero avere successo, ma se il totale delle figurine fosse un numero "abbastanza grande", tale procedimento potrebbe non funzionare. Cerchiamo allora di procedere con "stile matematico". Incominciamo ad indicare con x il numero delle figurine di Paolo e con y quello di Piero. In base ai dati del problema, deve essere: $2x+y=8$.
Otteniamo quella che si chiama un'equazione in due incognite. Per risolverla, attribuiamo valori arbitrari ad x, scegliendoli ovviamente nell'insieme dei numeri interi positivi (supponiamo che entrambi gli amici abbiano delle figurine), ma in modo che 2x risulti minore di 8. Troviamo quindi i corrispondenti valori assunti da y, tenendo presente che in generale si ha: $y=8-2x$. Costruiamo un'apposita tabella (Tab. 1).

x	1	2	3
$y=8-2x$	6	4	2

TAB. 1

Pertanto si possono presentare più casi:
1) numero delle figurine di Paolo = 1, numero delle figurine di Piero = 6;
2) numero delle figurine di Paolo = 2, numero delle figurine di Piero = 4;
3) numero delle figurine di Paolo = 3, numero delle figurine di Piero = 2.

Detto in altre parole, il problema è risolto dalle seguenti coppie ordinate di numeri interi (la prima componente della coppia si riferisce al numero delle figurine di Paolo, la seconda a quello di Piero):
$$(1,6),\ \ (2,4),\ \ (3,2).$$
Ti proponiamo di risolvere, per esercizio, quest'altro problema:
«Il numero delle figurine che ha Paolo aumentato del triplo delle figurine possedute da Piero fa un totale di 14 figurine. Quante figurine ha ciascuno dei due amici?»
A conti fatti, dovresti trovare le seguenti coppie ordinate di numeri interi (dove la prima componente della coppia si riferisce sempre al numero delle figurine di Paolo, la seconda a quello di Piero):
$$(11,1),\ (8,2),\ (5,3),\ (2,4).$$
Supponi adesso di voler risolvere questo nuovo problema:
«Il doppio delle figurine che ha Paolo aumentato del numero delle figurine possedute da Piero fa un totale di 8 figurine, mentre il numero delle figurine che ha Paolo aumentato del triplo delle figurine possedute da Piero fa un totale di 14 figurine. Quante figurine ha ciascuno dei due amici?»
Ebbene, indicando con x il numero delle figurine di Paolo e con y quello di Piero, deve risultare contemporaneamente:
$$2\,x+y=8 \quad \text{e} \quad x+3\,y=14.$$
Si tratta di stabilire se c'è una coppia ordinata di numeri interi positivi che soddisfi ad entrambe le equazioni ed eventualmente qual è questa coppia. Controllando tra le coppie che soddisfano alle due equazioni e che abbiamo trovato risolvendo i due esercizi precedenti, si vede subito che una coppia che soddisfa ad entrambe le equazioni c'è ed è esattamente la coppia $(2,\,4)$. La risoluzione del problema è pertanto la seguente: Paolo ha 2 figurine e Piero ne ha 4.
È interessante la rappresentazione grafica delle soluzioni delle due equazioni in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) (Fig. 1 – i pallini verdi indicano le soluzioni della prima equazione, i pallini blu quelle della se-

conda). Si constata facilmente che la coppia $(2, 4)$ è soluzione comune alle due equazioni.

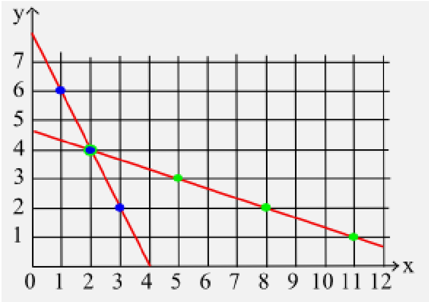

FIG. 1

Ti proponiamo per esercizio di risolvere i seguenti problemi, fornendo anche l'interpretazione grafica:

1. Trovare due numeri interi positivi, sapendo che la loro somma è 5 e la somma del primo di essi col doppio del secondo è 7. [**R.** $(3, 2)$]
2. Trovare due numeri interi positivi, sapendo che la somma del primo col triplo del secondo è 8 e la somma del secondo col doppio del primo è 5. [**R.** nessuna soluzione]
3. Alla fine di quel campionato di calcio, dopo aver disputato 38 partite, l'Inter realizzò 58 punti, ottenuti con un numero di vittorie maggiore di quello dei pareggi, il numero dei quali fu a sua volta la metà di quello delle sconfitte. Si sa che ad ogni vittoria sono assegnati 3 punti, ad ogni pareggio 1 punto e ad ogni sconfitta 0 punti. Quante vittorie, pareggi e sconfitte fece registrare l'Inter? [**R.** 17 vittorie, 7 pareggi, 14 sconfitte]
4. Due numeri interi positivi, diversi fra loro, sono tali che la loro somma è uguale alla metà del loro prodotto. Quali sono i due numeri? [**R.** 3, 6]
5. Trovare quante e quali coppie di numeri interi positivi, la cui somma è 196, hanno il numero 28 come massimo comune divisore. [**R.** 3 coppie: …]
6. Trovare quante e quali coppie di numeri interi positivi (x,y) soddisfano alla seguente equazione:
$$3x + 10y = 180.$$
[**R**. Conviene porre 3x=10t e ragionare sulla nuova equazione ottenuta. Si constaterà che t deve essere un multiplo di 3 compreso fra 0 e 18, estremi esclusi. Si trovano 5 coppie: …]

Siamo stati in grado di risolvere i precedenti problemi perché ci siamo trovati ad operare nell'insieme degli interi positivi e le soluzioni di ogni equazione erano in numero finito. In questo modo, abbiamo potuto esplicitare tutte le soluzioni e inoltre abbiamo potuto controllare direttamente se le due equazioni avevano o no soluzioni comuni.

Le cose si complicano un po' se l'insieme in cui si opera è l'insieme dei razionali o addirittura quello dei reali oppure se le soluzioni sono in numero infinito. Ma anche in questo caso la matematica offre gli strumenti per giungere alle soluzioni. Andiamo a vedere come.

22.1.2 Ogni proposizione aperta del tipo A(x,y)=B(x,y) – dove A(x,y) e B(x,y) sono espressioni algebriche nelle variabili x, y – si chiama ***equazione algebrica in due incognite***.

Vogliamo occuparci delle equazioni in due incognite che, con i consueti passaggi algebrici, si possono ricondurre alla forma seguente:

$$\mathbf{ax + by + c = 0},$$

dove a, b, c sono numeri reali assegnati, purché a, b non contemporaneamente nulli, ed x, y sono le incognite.

Si chiamano **equazioni algebriche di 1° grado (**o anche **equazioni lineari) in due incognite**.
Consideriamo allora la seguente equazione di 1° grado nelle incognite x, y:

(a) $$x+y-2=0\ .$$

Attribuiamo ad x un valore scelto in $\mathbb{R}$, in maniera del tutto arbitraria, per esempio 3. Otteniamo la seguente equazione in y:

$$3+y-2=0\ ,$$

la quale, risolta, dà $y=-1$.
Diciamo che l'equazione (a) è soddisfatta dalla coppia ordinata (3,–1).
Ciò equivale ad affermare che, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), il punto $A(3,-1)$ appartiene alla retta r di equazione $x+y-2=0$.
Evidentemente la coppia precedente non è l'unica che soddisfa all'equazione (a): basti pensare che si può sostituire ad x un qualunque altro valore reale e ricavare il corrispondente valore di y, che è 2–x.
È chiaro, altresì, che non tutte le coppie ordinate di numeri reali soddisfano alla (a): basti pensare alle coppie $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, per non indicarne che alcune.
Per la precisione, l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali che soddisfano all'equazione (a) o, come anche si dice, l'insieme delle sue soluzioni in $\mathbb{R}^2$, è il seguente:

$$\{(x,y)\mid y=2-x,\ \forall x\in\mathbb{R}\}\ .$$

Quest'insieme, chiaramente, coincide con quello dei punti della retta r.

Adesso prova tu. Risolvi in $\mathbb{R}^2$ ciascuna delle seguenti equazioni in due incognite, determinando per ognuna di esse almeno 3 soluzioni particolari:

a) $x+y=1$. b) $2x-y-3=0$. c) $3x-2y=0$.
d) $2x+4y=3$. e) $x-4y-3=0$. f) $3x-y+4=0$.

[**R.** a) $\{(x,y)\mid y=1-x,\ \forall x\in\mathbb{R}\}$; b) $\{(x,y)\mid y=2x-3,\ \forall x\in\mathbb{R}\}$; **…**]

Un'equazione in due incognite (o in tre, in quattro, ...) si dice *equivalente* ad un'altra equazione nelle stesse incognite se l'insieme delle soluzioni della prima equazione è uguale a quello della seconda.
Per le equazioni in più incognite valgono – a parte ovvi adattamenti – gli stessi principi di equivalenza enunciati a proposito delle equazioni in un'incognita.
Non riteniamo necessario enunciarli qui di nuovo.

22.1.3 Consideriamo adesso le seguenti equazioni di 1° grado in x, y:

$$x+y-2=0\ ,\quad 2x-y-1=0\ .$$

Indicato con S' l'insieme delle soluzioni in $\mathbb{R}^2$ della prima equazione e con S" quello della seconda, si trova facilmente:

$$S'=\{(x,y)\mid y=2-x,\ \forall x\in\mathbb{R}\}\ ,\quad S''=\{(x,y)\mid y=2x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\}\ .$$

Ci chiediamo se l'insieme $S'\cap S''$ ha elementi o, detto in altre parole, se le due equazioni hanno soluzioni comuni; in altri termini, ricorrendo all'interpretazione geometrica, se le rette $r\equiv x+y-2=0$ ed $s\equiv 2x-y-1=0$ hanno punti comuni.

La figura 2, dove le due rette sono disegnate, mostra chiaramente che un tale punto esiste ed è unico: si tratta del punto A. Sai indicare le sue coordinate?

Ora, poiché il generico punto di r ha coordinate $(x,\,2-x)$ e quello di s ha coordinate $(x,\,2x-1)$, affinché questi punti coincidano deve esistere un valore di x per cui si ha:

$$2-x=2x-1\ ;$$

risolvendo quest'equazione in x, si ottiene: $x=1$.

Siccome per questo valore di x si trova (sia dall'equazione di r sia da quella di s): $y=1$, concludiamo che il punto A ha coordinate $(1{,}1)$. Cosa che certamente hai intuito osservando la medesima figura 2.
In definitiva le due equazioni assegnate hanno in comune la soluzione $(1,\,1)$.

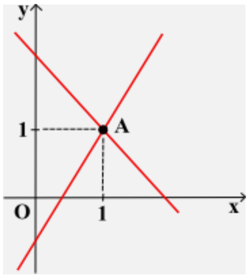

FIG. 2

22.1.4 In generale, quando si cercano le eventuali soluzioni comuni a due (o più) equazioni in due (o più) incognite si dice che si fa *sistema delle equazioni*.
Un sistema di equazioni non è altro che la congiunzione logica delle proposizioni aperte che esse esprimono.
Di solito il sistema – facendo riferimento al caso precedente – si indica nel modo seguente:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$$

Si dice ***soluzione*** del sistema ogni soluzione comune alle equazioni che lo compongono. La coppia ordinata $(1{,}1)$ è soluzione del sistema precedente.

Risolvere un sistema di equazioni significa trovare le sue soluzioni.

Un sistema di equazioni in più incognite con valori in un dato insieme J si dice ***equivalente*** ad un altro sistema nelle stesse incognite con valori pure in J se gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi coincidono.
Prescindendo, adesso, dalla rappresentazione grafica delle equazioni che formano il sistema, ma prendendo comunque spunto dal procedimento esposto nel paragrafo precedente, sintetizziamo la procedura che abbiamo seguito per risolvere il sistema medesimo:

- Inizialmente si suppone x assegnata e, da entrambe le equazioni, si ricava y:
$$y=2-x\,,\ \ y=2\,x-1\,.$$
- Imponendo che le x che figurano nelle due equazioni siano uguali e così pure le y, deve risultare:
$$2-x=2\,x-1\,.$$
- Risolta quest'equazione in x si trova:
$$x=1\,.$$
- Questo valore di x si sostituisce in una delle due equazioni del sistema e si trova il corrispondente valore di y:
$$y=1\,.$$
- In conclusione, la soluzione del sistema in $\mathbb{R}^2$ è la coppia di valori:
$$x=1\,,\ y=1\,.$$

Un procedimento risolutivo che si svolga nel modo sopraddetto è chiamato ***metodo di confronto***.

NOTA BENE. Il valore $y=1$ si può trovare, invece che con una sostituzione del valore $x=1$, già trovato, ancora con lo stesso procedimento con cui è stato trovato il valore di x. Basta esprimere x in funzione di y in entrambe le equazioni e si ha:

$$x=2-y\,,\quad x=\frac{y+1}{2}\;;$$

pertanto:

$$2-y=\frac{y+1}{2}\;;$$

da qui, risolvendo rispetto ad y, segue per l'appunto y=1.
Si tratta di un modo come un altro di complicarsi l'esistenza.

22.1.5 Oltre al metodo di confronto vi sono altri metodi di risoluzione di un sistema lineare. Ne descriviamo due, il *metodo di sostituzione* e il *metodo di riduzione*, sempre con riferimento al sistema:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$$

♦ ***Metodo di sostituzione***.

Poiché si vuole che le x, che compaiono nelle due equazioni, esprimano numeri uguali e così pure le y, calcoliamo in una di esse, per esempio nella prima, la variabile y in funzione di x:

$$y=2-x\,,$$

e sostituiamo l'espressione trovata nella seconda equazione al posto di y:

$$2x-(2-x)-1=0\,.$$

Risolta l'equazione in x così ottenuta, si trova:

$$x=1\,.$$

Questo valore di x, sostituito nell'equazione y=2–x, fornisce:

$$y=1\,.$$

La soluzione del sistema è, come prima, la coppia di valori:

$$x=1\,,\;\; y=1\,.$$

♦ ***Metodo di riduzione***.

Questo metodo è basato sulla seguente proprietà:

Se sono vere le uguaglianze:

$$A(x,y)=0 \;\text{ e }\; B(x,y)=0\,,$$

dove A(x,y), B(x,y) sono espressioni in x, y, sono vere pure le uguaglianze:

$$h\,A(x,y)=0 \;\text{ e }\; k\,B(x,y)=0\,,$$

dove h, k sono numeri reali non nulli e, di conseguenza, è vera pure l'uguaglianza:

$$h\,A(x,y)+k\,B(x,y)=0\,.$$

L'espressione $h\,A(x,y)+k\,B(x,y)$ si definisce ***combinazione lineare*** delle due espressioni A(x,y) e B(x,y). I numeri reali h, k si chiamano i suoi *coefficienti*.
Ora, sempre con riferimento al solito sistema, sommando membro a membro le due equazioni (in questo caso h=k=1), si ottiene: $3x-3=0$, da cui: $x=1$.
Questo valore, sostituito in una delle due equazioni del sistema, fornisce poi $y=1$.

NOTA BENE. Come nel caso del metodo di confronto, anche adesso il valore y=1 si può trovare con lo stesso procedimento con cui si è trovato x=1: basta moltiplicare entrambi i membri della prima equazione del sistema per 2 (h=2) ed entrambi i membri della seconda equazione per −1 (k=−1) e sommare membro a membro; si ottiene:

$$2\,(x+y-2)-(2\,x-y-1)=0\,,$$

da cui appunto segue y=1.
A volte questo procedimento si fa preferire all'altro, ma capita molto raramente.

22.1.6 Naturalmente, nessun metodo è in assoluto migliore degli altri. Se proprio si vuole o si deve scegliere, bisogna valutare di volta in volta e preferire quello più idoneo, che in genere è quello più economico, cioè quello che fa risparmiare tempo.
Se, però, si sa utilizzare un solo metodo – per esempio il metodo di sostituzione – va bene lo stesso.
Quando, poi, si risolve un sistema con il metodo di sostituzione, non è detto che si debba esprimere sempre y in funzione di x; potrebbe essere più conveniente esprimere x in funzione di y.
A parte il fatto che le incognite potrebbero essere indicate con altre lettere, come a-b, z-t, u-v, M-N, eccetera.

Ti proponiamo di risolvere per esercizio, con il metodo che preferisci, i seguenti sistemi di due equazioni in due incognite e di fornire un'interpretazione grafica dei sistemi stessi:

1. $\begin{cases}2x+1=0\\3y-2=0\end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ x=-\frac{1}{2},\, y=\frac{2}{3}\right]$
2. $\begin{cases}2a-3=0\\a+b+1=0\end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ a=\frac{3}{2},\, b=-\frac{5}{2}\right]$
3. $\begin{cases}2u+v=0\\u-2v=0\end{cases}$ $[\mathbf{R.}\ u=0,\, v=0]$
4. $\begin{cases}2X-3Y+1=0\\X-2Y-2=0\end{cases}$ $[\mathbf{R.}\ X=-8,\, Y=-5]$
5. $\begin{cases}3M+4N+5=0\\2M-3N+3=0\end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ M=-\frac{27}{17},\, N=-\frac{1}{17}\right]$
6. $\begin{cases}5A-7B-3=0\\7A-5B-9=0\end{cases}$ $[\mathbf{R.}\ A=2,\, B=1]$

22.1.7 Supponiamo, ora, che le due equazioni che formano il sistema siano rappresentate da *rette parallele*.

- Se le rette sono ***parallele in senso stretto***, come le seguenti (che sei invitato a rappresentare in un piano cartesiano):

$$y=\frac{1}{2}x+2\,,\quad y=\frac{1}{2}x+4\,,$$

e perciò non hanno punti comuni, ci si aspetta che il sistema delle due equazioni non abbia soluzione. Di fatto deve essere:

$$\frac{1}{2}x+2=\frac{1}{2}x+4\,,$$

ossia:

$$0\,x=2\,;$$

equazione che, come sai, è impossibile.

- Se le due rette sono coincidenti, come le seguenti (che sei ancora invitato a rappresentare graficamente):

$$y=x+\frac{1}{2}\,,\quad y=x+\frac{1}{2}\,,$$

e perciò hanno tutti i punti in comune, ci si aspetta che il sistema delle due equazioni abbia infinite soluzioni. Di fatto, dovendo essere:

$$x+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}\,,$$

ogni $x\in\mathbb{R}$ soddisfa a quest'equazione.
Questo, si badi bene, non significa che ogni $y\in\mathbb{R}$ può essere associato ad x in modo da avere una soluzione del sistema delle due equazioni, ma soltanto quei valori di y per i quali risulta:

$$y=x+\frac{1}{2}\,.$$

Insomma, in questo caso il sistema delle due equazioni ha infinite soluzioni espresse dalle coppie ordinate:

$$\left(x,\ \ x+\frac{1}{2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

22.1.8 Nei casi esaminati fin qui, i sistemi sono stati assegnati quasi sempre nella forma seguente:

[1] $$\begin{cases} a\,x+b\,y+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

detta **forma normale** (o **tipica**) di un **sistema lineare** di due equazioni in due incognite.
Questo però non accade sempre. Anzi, in genere non accade. In tal caso è preferibile, in via preliminare, ricondurre il sistema alla forma normale e poi scegliere il metodo di risoluzione, giudicato più conveniente (o quello che si conosce).
Per esempio, sia il sistema:

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y+2)^2=x^2+y^2+2 \\ 2(x+1)-3(y+2)-1=0 \end{cases}$$

La prima equazione può essere trasformata nella seguente equazione equivalente:

$$2\,x+4\,y+3=0\,;$$

la seconda può essere trasformata nella seguente equazione equivalente:

$$2\,x-3\,y-5=0\,.$$

Il sistema è, così, ridotto alla seguente forma normale:

$$\begin{cases} 2x+4y+3=0 \\ 2x-3y-5=0 \end{cases}$$

Può sorgere il legittimo dubbio se questo sistema sia equivalente a quello assegnato, cioè se abbia le stesse soluzioni di quello. In effetti i due sistemi sono equivalenti. E ciò è assicurato dal seguente principio:

♦ PRINCIPIO GENERALE DI EQUIVALENZA (DEI SISTEMI DI EQUAZIONI): Se ad una qualsiasi equazione di un sistema si sostituisce un'equazione equivalente, il sistema ottenuto è equivalente a quello dato.

22.2 SISTEMI LINEARI DI DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE

22.2.1 Le considerazioni svolte fin qui su particolari **sistemi lineari di due equazioni in due incognite** ci portano a concludere che si possono presentare tre casi:

- Il sistema ha una ed una sola soluzione: si dice **determinato**.
  In questo caso le rette che rappresentano le due equazioni sono ***secanti***: la coppia ordinata di numeri reali che rappresenta il loro punto comune è la soluzione del sistema.
- Il sistema non ha soluzioni: si dice **impossibile**.
  In questo caso le due rette sono ***parallele in senso stretto***.
- Il sistema ha infinite soluzioni: si dice **indeterminato**.
  In questo caso le due rette sono ***coincidenti***.

In realtà, queste conclusioni valgono in generale. Per dimostrarlo (1) ci riferiamo ad un generico sistema, scritto in forma normale:

[1] Chi non fosse interessato alla dimostrazione può andare direttamente al paragrafo n. 22.2.3.

[1] $$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

In esso le lettere x, y indicano le incognite, mentre a, b, c, a', b', c' rappresentano numeri reali dati.

Precisiamo subito che i coefficienti a, b si suppongono non contemporaneamente nulli, giacché se fosse a=b=0 la prima equazione si ridurrebbe all'uguaglianza c=0, che è sempre vera o sempre falsa a seconda che il numero c sia nullo o rispettivamente non nullo.
Analogamente si suppongono non contemporaneamente nulli i coefficienti a', b'.

- Supponiamo per prima cosa che almeno uno dei numeri b, b' sia nullo.
  - Se b=b'=0 (quindi a≠0 e a'≠0), il sistema assume questa forma:
  $$\begin{cases} a\,x + c = 0 \\ a'x + c' = 0 \end{cases}$$
  Siccome dalla prima equazione si ricava $x=-\frac{c}{a}$ e dalla seconda $x=-\frac{c'}{a'}$ si capisce che il sistema è impossibile o indeterminato a seconda che risulti rispettivamente:
  $$\frac{c}{a} \neq \frac{c'}{a'} \text{ oppure } \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}.$$
  D'altro canto, nel primo caso le equazioni sono rappresentate da due rette parallele in senso stretto, nel secondo da due rette coincidenti.
  - Se b=0 (quindi a≠0) e b'≠0, il sistema diventa questo:
  $$\begin{cases} a\,x + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$
  Dalla prima equazione si ricava: $x=-\frac{c}{a}$; sostituiamo questo valore di x nella seconda equazione: $a'\left(-\frac{c}{a}\right)+b'y+c'=0$; da qui segue: ab'y=ca'–c'a, e quindi (si ricorda che ab'≠0): $y=\frac{ca'-c'a}{ab'}$. Dunque il sistema ammette la seguente soluzione:
  $$x = -\frac{c}{a}\,,\ \ y = \frac{ca' - c'a}{ab'}\,.$$
  - Se b≠0 e b'=0 (quindi a'≠0), il sistema diventa il seguente:
  $$\begin{cases} a\,x + by + c = 0 \\ a'x + c' = 0 \end{cases}$$
  Ragionando come nel caso precedente, si trova che esso ammette la seguente soluzione:
  $$x = -\frac{c'}{a'}\,,\ \ y = \frac{ac' - a'c}{a'b}\,.$$
- Se almeno uno dei coefficienti a, a' è nullo, si ragiona come nel caso in cui almeno uno dei coefficienti b, b' è nullo e si giunge a risultati analoghi. Lasciamo a te l'analisi dettagliata di questo caso.
- Supponiamo infine che nessuno dei numeri a, a', b, b' sia nullo.
  Le equazioni del sistema [1] possono essere scritte in questa forma equivalente:
  $$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\,,\quad y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}\,.$$
  - Se $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ le rette che rappresentano le due equazioni hanno chiaramente pendenze disuguali e quindi si secano: il sistema è determinato.
  - Se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ le due rette sono parallele. Si distinguono due casi:
    1) se $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ le due rette sono coincidenti: il sistema è indeterminato;
    2) se $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$ le due rette sono parallele in senso stretto: il sistema è impossibile.

22.2.2 Approfondiamo la disamina dei casi relativi alla risoluzione del sistema [1].

- Nel caso in cui il sistema [1] è determinato, nel caso cioè che sia $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$, troviamo la sua soluzione. Eliminando la y fra le due equazioni, si ha la seguente equazione in x:
$$-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'} \; ;$$
da qui, dopo alcune elaborazioni, si ottiene:
$$(a\,b' - a'\,b)\,x = b\,c' - b'\,c$$
e quindi, osservando che $ab' \neq a'b$ e perciò $ab'-a'b \neq 0$:
$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} .$$
Di conseguenza, sostituendo questo valore di x in una delle due precedenti espressioni di y, per esempio nella prima, si ottiene:
$$y = -\frac{a}{b} \cdot \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} - \frac{c}{b} = \frac{(-abc' + ab'c) - (ab'c - a'bc)}{b(ab' - a'b)} = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b} .$$
Dunque la soluzione del sistema è la seguente:
[2] $$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} , \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b} .$$
- Nel caso in cui il sistema [1] è indeterminato, risulta chiaramente: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ e $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$; ossia:
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} .$$
Di conseguenza i tre numeri:
$$ab'-a'b, \;\; bc'-b'c, \;\; ca'-c'a$$
sono tutti e tre nulli.
- Nel caso, infine, in cui il sistema [1] è impossibile, risulta: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ e $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$; ossia:
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} .$$
Di conseguenza si ha:
$$ab'-a'b=0, \;\; bc'-b'c\neq 0 , \;\; ca'-c'a \neq 0 .$$

Si può osservare che i casi in cui uno dei numeri a, a', b, b' è nullo hanno in fondo conclusioni che si possono ritenere casi particolari delle precedenti. In effetti:

- Se $b=b'=0$ risulta:
$$ab'-a'b=0 \;\text{ e }\; \begin{cases} bc'-b'c=0 \;\text{ e }\; ca'-c'a=0 \;\; \text{(sistema indeterminato)} \\ bc'-b'c=0 \;\text{ e }\; ca'-c'a\neq 0 \;\; \text{(sistema impossibile)} \end{cases}$$
- Se $b=0$ (quindi $a\neq 0$) e $b'\neq 0$ risulta $ab'-a'b=a'b\neq 0$: il sistema è determinato e la sua soluzione è espressa dalle formule [2].
- Analogamente quando si ragiona sui coefficienti a, a'.

22.2.3 Tutte le precedenti considerazioni si possono riassumere in poche righe:

Ammesso di avere un **sistema lineare di due equazioni in due incognite** scritto nella forma normale:

[1] $$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

dove a, b, c, a', b', c' sono numeri reali assegnati, con a, b non contemporaneamente nulli ed a', b' non contemporaneamente nulli, considerati i numeri:

$$D = ab'-a'b, \quad D_x = bc'-b'c, \quad D_y = ca'-c'a\,,$$

detti **determinanti** del sistema, allora:

- se $D\neq 0$ il sistema è ***determinato*** e la sua soluzione è espressa dalle formule:

$$x = \frac{D_x}{D}\,, \quad y = \frac{D_y}{D}\,;$$

- se $D=0$ allora si può dimostrare che D_x e D_y sono o contemporaneamente nulli o contemporaneamente non nulli; ragion per cui si possono presentare due casi:
  - se $D_x=0$ e $D_y=0$ il sistema è ***indeterminato***;
  - se $D_x\neq 0$ e $D_y\neq 0$ il sistema è ***impossibile***.

Un sistema determinato si dice anche ***normale***; un sistema indeterminato o impossibile si dice pure ***non normale*** (o ***singolare***).

- ESERCIZI. Risolvere per valori reali i seguenti sistemi lineari di due equazioni in due incognite e fornire un'interpretazione grafica del risultato:

1. $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 3y + 2 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - 2 = 2x + 1 \\ 3y + 1 = 4y + 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{3}x + 2 \\ \frac{1}{5}y + \frac{1}{2} = y - \frac{2}{5} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \\ \frac{1}{3}\left(2y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(y - \frac{2}{3}\right) \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 0 \\ 2x - 6y + 1 = 0 \end{cases}$

[**R.** $x=1, y=1/2$]

6. $\begin{cases} 2x + 5y - 11 = 0 \\ 4x + y + 5 = 0 \end{cases}$

[**R.** $x=-2, y=3$]

7. $\begin{cases} 5x + 7y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

[**R.** $x=-7, y=5$]

8. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$

[**R.** Impossibile]

9. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 0 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$

[**R.** $x=2, y=1/2$]

10. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y = 1 \\ \frac{10}{3}x - 3y = 5 \end{cases}$

[**R.** Indeterminato]

11. $\begin{cases} \frac{3}{2}u - 4v = \frac{1}{4} \\ 2u - \frac{1}{3}v = \frac{1}{3} \end{cases}$

[**R.** $u=1/6, v=0$]

12. $\begin{cases} \frac{1}{5}a + \frac{3}{2}b + \frac{2}{5} = 0 \\ -a + \frac{1}{2}b + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$

[**R.** $a=1/2, b=-1/3$]

13. $\begin{cases} \dfrac{X+Y}{2} + \dfrac{2X-Y}{3} = 1 \\ \dfrac{X-Y}{3} - \dfrac{X+2Y}{2} = \dfrac{7}{6} \end{cases}$

[**R.** $X=1, Y=-1$]

14. $\begin{cases} \dfrac{2A-3B}{2} - (A-B) = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3A-2B}{2} + \dfrac{A+2B}{3} = 2 \end{cases}$

[**R.** $A=1, B=-1/2$]

15. $\begin{cases} \dfrac{x+y+1}{2}=\dfrac{2x-y-1}{3} \\ \dfrac{3x-2y}{3}=\dfrac{2x-3y+1}{2} \end{cases}$ [**R.** $x=8, y=3/5$]

16. $\begin{cases} \dfrac{x+2y-1}{3}=\dfrac{1}{3}x-y+1 \\ 2x-3y+\dfrac{18}{5}=0 \end{cases}$ [**R.** $x=-3/5, y=4/5$]

17. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{x+2y}{6} \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{6} \end{cases}$ [**R.** $x=-1/2, y=1$]

18. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-2(x-y)+\dfrac{3}{2}=0 \\ 2(x+y)-8(x-y)+3=0 \end{cases}$ [**R.** Impossibile]

19. $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$ con a, b parametri reali. $\left[\mathbf{R.}\ x=\dfrac{a+b}{2}, y=\dfrac{a-b}{2}\right]$

20. $\begin{cases} 2x-y=a+b \\ x-2y=a-b \end{cases}$ con a, b parametri reali. $\left[\mathbf{R.}\ x=\dfrac{a+3b}{3}, y=\dfrac{-a+3b}{3}\right]$

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-y=2a \\ x-\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{2}a \end{cases}$ dove a è un parametro reale.

22. $\begin{cases} 2x-\dfrac{1}{3}y=3a-b \\ \dfrac{1}{2}x-2y=a-\dfrac{1}{2}b \end{cases}$ con a, b parametri reali.

23. $\begin{cases} ax+by=2 \\ ax-by=1 \end{cases}$ con a, b parametri reali.

$\left[\mathbf{R.}\ a=0 \vee b=0 \rightarrow \text{sistema impossibile};\ a,b\in R_0 \rightarrow \left(x=\dfrac{3}{2a}, y=\dfrac{1}{2b}\right)\right]$

24. $\begin{cases} ax+by=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ con a, b parametri reali.

$\left[\mathbf{R.}\ a=-2b \rightarrow \text{sistema impossibile};\ a\neq-2b \rightarrow \left(x=\dfrac{2+b}{a+2b}, y=\dfrac{4-a}{a+2b}\right)\right]$

25. $\begin{cases} (k-1)x+2y-5=0 \\ 3x-y+2=0 \end{cases}$ dove k è un parametro reale.

$\left[\mathbf{R.}\ k=-5 \rightarrow \text{sistema impossibile};\ k\neq-5 \rightarrow \left(x=\dfrac{1}{k+5}, y=\dfrac{2k+13}{k+5}\right)\right]$

22.3 FASCI DI RETTE

22.3.1 Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), siano assegnate due rette, r_1 ed r_2, di equazioni rispettivamente:

$$ax+by+c=0 \quad \text{e} \quad a'x+b'y+c'=0 .$$

Indicato con k un parametro reale, anche l’equazione:

[3] $$(ax+by+c)+k\,(a'x+b'y+c')=0$$

rappresenta una retta. Le infinite rette che si ottengono facendo variare k in ℝ costituiscono il **fascio di rette** generato da r_1 e r_2. La [3] si chiama *equazione del fascio di rette*, mentre k è detto *parametro*

del fascio.
Osserviamo che per k=0 si ottiene la retta r_1 mentre per nessun valore di k si ottiene la retta r_2, Si può notare tuttavia che, dividendo entrambi i membri della [3] per k e facendo assumere a k un valore "infinitamente grande", il fattore $1/k$ tende a diventare uguale a zero e perciò la [3] tende a coincidere con l'equazione di r. Per questa ragione, pur con abuso di linguaggio, si dice che questa seconda equazione si ottiene dalla [3] per k uguale ad infinito.

22.3.2 Le due rette che generano il fascio possono essere incidenti o parallele (in senso stretto). Ebbene, a seconda dei casi, si hanno due tipi di fasci di rette.
1) Se le due rette sono incidenti ed hanno perciò un punto in comune, tutte le rette del fascio passano per quel punto (Fig. 3): il fascio di rette si dice ***fascio a centro***.
2) Se le due rette sono parallele (in senso stretto), tutte le rette sono parallele fra loro (Fig. 4): il fascio si dice ***fascio di rette parallele***.

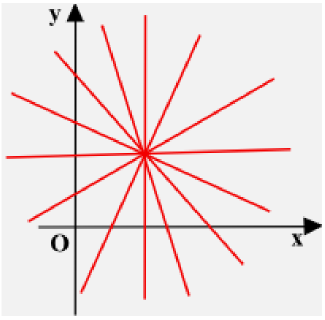

FIG. 3

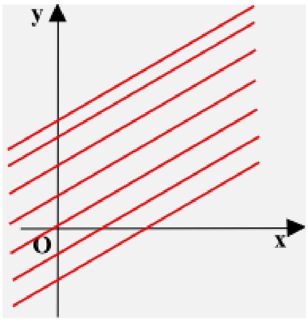

FIG. 4

A verifica di quanto detto poco sopra, ti proponiamo alcuni esercizi:
1. Studiare i fasci di rette generati dalle rette aventi le seguenti equazioni:
   a) $x=0\,,\ y=0.$ b) $4x+3y=0\,,\ 8x+3y+2=0.$
   c) $2x-1=0\,,\ 6x-2y+9=0.$ d) $3x-2y+4=0\,,\ 9x-6y+1=0.$
   e) $x-2=0\,,\ 2x+y-5=0.$ f) $3x+y=0,\ 2x+\frac{2}{3}y-1=0$
2. Tra le seguenti equazioni alcune rappresentano un fascio di rette parallele, altre un fascio di rette con centro.
   Quali sono le une? Quali le altre? Quando il fascio è con centro, determina il centro stesso.
   a) $2x+3y-a=0.$ b) $y=ax+2.$ c) $(m+1)x+2my-(m-1)=0.$
   d) $y=\frac{1}{2}x-k.$ e) $kx-2y+k=0.$ f) $(m-2)x-(2m-4)y+(m+1=0.$

22.4 RISOLUZIONE DI PROBLEMI

Di frequente si presentano problemi che si traducono formalmente in equazioni e disequazioni di 1° grado: qualche semplice esempio l'abbiamo già visto in passato.
Adesso vogliamo approfondire questo argomento, occupandoci di qualche problema un po' più complesso. Partiremo da alcuni problemi risolti, che faremo seguire da problemi di cui si propone la risoluzione.

- PROBLEMA RISOLTO 1. La somma di due numeri naturali è 15 e il doppio di uno di essi aumentato del triplo dell'altro è 36. Trovare i due numeri.

RISOLUZIONE. Questo problema, già risolto con l'introduzione di una sola incognita, può essere impostato anche introducendo due incognite, x ed y, una per ciascun numero. Allora si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y=15 \\ 2x+3y=36 \end{cases}$$

Esso, una volta risolto, dà: $x=9,\ y=6$.

- PROBLEMA RISOLTO 2. In un numero di due cifre la somma di queste è 4 e la cifra delle unità è il doppio di quella delle decine. Trovare il numero.

RISOLUZIONE. Se questo numero esiste, la sua forma è la seguente:

$$10\,x+y\,,$$

dove x è la cifra delle decine ed y è la cifra delle unità; cosicché x, y sono elementi dell'insieme:

$$I=\{n\in\mathbb{N}\ |\ 0\leq n\leq 9\},$$

con $x\neq 0$. I vincoli del problema conducono al seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y=2x \end{cases}$$

La sua soluzione è costituita dalla seguente coppia di numeri:

$$x=\frac{4}{3},\ \ y=\frac{8}{3}.$$

Siccome non appartengono all'insieme I, il problema risulta impossibile.

- PROBLEMA RISOLTO 3. L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo sono lunghi rispettivamente 10a e 6a, dove a è una lunghezza nota. Trovare la lunghezza della bisettrice del triangolo relativa all'angolo retto e le distanze, dai lati di tale angolo, del punto in cui detta bisettrice interseca l'ipotenusa.

RISOLUZIONE. Per la risoluzione di questo problema ci serviamo della geometria analitica.

Anzitutto, però, osserviamo che, chiamato ABC il triangolo, rettangolo in A, si ha: $\overline{AC}=6a,\ \overline{BC}=10a$. Per mezzo del teorema di Pitagora si trova subito: $\overline{AB}=8a$.

Riferiamo adesso il piano del triangolo (Fig. 5) ad un sistema di assi cartesiani (Oxy) in modo che O cada in A, la semiretta positiva delle x coincida con la semiretta avente origine in A e passante per B e la semiretta positiva delle y coincida con la semiretta di origine A passante per C.

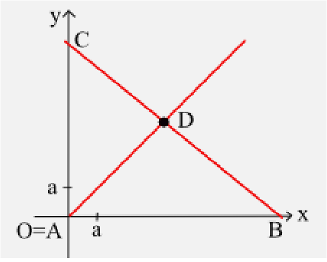

FIG. 5

Allora risulta: $B(8a,0),\ C(0,6a)$. Troviamo l'equazione della retta BC:

$$\frac{y-y_C}{x-x_C}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}\ \text{, ossia: }\ \frac{y-6a}{x}=\frac{-6a}{8a}\ \text{, da cui segue: } 3x+4y-24a=0.$$

Poiché la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$ è la retta di equazione $y=x$, determiniamo le coordinate del punto D, in cui essa interseca la retta BC, risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x+4y-24a=0 \\ y=x \end{cases}$$

Troviamo: $x_D = y_D = \frac{24}{7} a$.

Queste sono chiaramente anche le distanze di D dai lati dell'angolo retto.

• PROBLEMA RISOLTO 4. Un'impresa edile ha bisogno di certo materiale. Lo può acquistare da due ditte diverse alle seguenti condizioni:

- ditta D': prezzo unitario € 4 e spesa fissa di trasporto € 50;
- ditta D": prezzo unitario € 3,5 e spesa fissa di trasporto € 70.

Stabilire da quale ditta è più conveniente acquistare.

RISOLUZIONE. L'obiettivo è evidente: per ogni quantità di materiale da acquistare si deve scegliere la ditta che fa spendere di meno.

Cerchiamo di tradurre il problema in uno schema matematico. A questo riguardo chiamiamo x il numero delle unità di materiale da acquistare ed y la spesa, in euro, che bisogna sostenere. Si ottengono facilmente le seguenti relazioni:

- ditta D': $y = 4x + 50$,
- ditta D": $y = 3{,}5x + 70$.

Rappresentiamo le due funzioni in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) – che in questo caso è preferibile prendere non monometrico – osservando che si tratta di due rette, d' e d" (Fig. 6), le quali si secano nel punto H(40, 210).

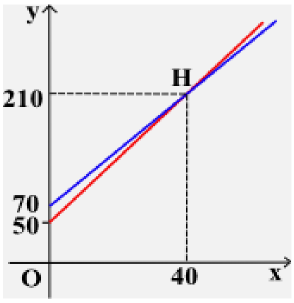

FIG. 6

Dalla rappresentazione grafica si rileva subito che:

- se $x = x_H$ l'ordinata del punto della retta d' è uguale a quella del punto della retta d";
- se $x < x_H$ le ordinate dei punti di d' sono minori di quelle di d";
- se $x > x_H$ le ordinate dei punti di d" sono minori di quelle di d'.

Come dire:

- se le unità x di materiale da acquistare sono 40 allora è indifferente acquistare da D' o da D";
- se sono meno di 40 è più conveniente acquistare da D';
- se sono più di 40 è più conveniente acquistare da D".

• PROBLEMI DA RISOLVERE.

1. Determinare una frazione sapendo che, se ai suoi termini si aggiunge 1, si ottiene una frazione equivalente a $2/3$ mentre, se lo si sottrae, si ottiene una frazione equivalente ad $1/2$. [**R.** $3/5$]
2. Se Giuseppe avesse 10 figurine in più, ne avrebbe un numero doppio di quelle di Mario. Ma se Mario ne avesse 20 in più, ne avrebbe tante quante ne ha Giuseppe. Stabilire quante figurine hanno Giuseppe e Mario. [**R.** 50, 30]
3. Nel cestino di Maria sono mescolate noci e nocciole: le prime in numero uguale ai 2/3 delle seconde. Pierino, dispettoso come al solito, porta via dal cestino di Maria 3 nocciole, cosicché adesso nel cesti-

no rimangono tante noci e altrettante nocciole. Quante noci e nocciole erano contenute in origine nel cestino di Maria? [**R**. 6 noci, 9 nocciole]

4. L'età del padre, che 2 anni fa era 4 volte quella del figlio, fra soli 3 anni si ridurrà a 3 volte l'età del figlio. Quali solo le età attuali di padre e figlio? [**R.** 42, 12]

5. Se in una classe i ragazzi fossero 3 in più, sarebbero il doppio del numero delle ragazze; se invece fossero 1 in meno, il loro numero sarebbe una volta e mezza quello delle ragazze. Quanti sono i ragazzi e quante le ragazze di quella classe? [**R.** 13, 8]

6. Se avessi 4 monete da 1 euro in più, ne avrei in numero doppio di quello delle monete da 2 euro; le monete da 2 euro, a loro volta, sarebbero la metà di quelle da 1 euro se avessi 2 monete da 1 euro in meno. Stabilire quante monete da 1 euro e quante da 2 euro possiedo. [**R.** Il problema è impossibile]

7. Un pacco di pasta da 1 kg costa quanto due pacchi da 500 g. Decido di comprare 3 pacchi da 1 kg e 5 pacchi da 500 g. Siccome mi piacciono i rompicapi, constato che avrei speso 1,80 euro in più se avessi comprato 5 pacchi da 500 g e 3 pacchi da 1 kg. Quanto costa un pacco di pasta da 1 kg? [**R**. € 0,90]

8. Dimostrare che, fra i numeri di due cifre, scritti nel consueto sistema di numerazione decimale, ne esiste uno ed uno soltanto uguale al doppio prodotto delle sue cifre. Tra gli stessi numeri, ne esiste qualcuno uguale al triplo prodotto delle sue cifre? [**R.** Nel primo caso solo 36, nel secondo 15 e 24]

9. Trovare due numeri naturali sapendo che la loro somma è 32 e che la differenza fra il maggiore e il minore è: a) il quadrato di un numero naturale; b) il cubo di un numero naturale.
. [**R**. a) 2 sol.: (18, 14), (24, 8); b) 1 sol.: (20, 12)]

10. Un gruppo di 9 persone va al cinema e spende complessivamente € 59,2 per il biglietto d'ingresso. Sapendo che gli adulti pagano € 8 a testa e che ciascun bambino fruisce della riduzione del 40%, stabilire quanti sono i bambini e quanti gli adulti. [**R.** 4 bambini e 5 adulti]

11. Una moneta da 2 euro ha un diametro di 25 mm mentre una da 1 euro ce l'ha di 22 mm. Disponendo in fila alcune di tali monete, una di seguito ed a contatto con l'altra, si copre una lunghezza di 1,079 m. Sapendo che il valore complessivo delle monete è 62 euro, quante sono tali monete? Quante quelle da 2 euro? Quante quelle da 1 euro? [**R**. Totale monete 47, …]

12. In un piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono assegnati i punti $A(a,0)$ e $B\left(0,-\frac{4}{3}a\right)$, dove a è un numero reale positivo. Detto C il punto simmetrico di O rispetto ad AB, calcolare l'area del quadrilatero OACB. Nel caso particolare in cui essa vale 3, determinare le coordinate del punto D in cui la retta $y=-x$ interseca AB e giustificare che D è equidistante dai lati del quadrilatero. [**R.** $\frac{4}{3}a^2$; ...]

13. L'altezza AH e la base BC del triangolo isoscele ABC misurano rispettivamente 6 cm e 4 cm. Riferito il piano del triangolo ad un conveniente sistema di assi cartesiani, scrivere le coordinate dei vertici del triangolo medesimo. Successivamente condurre una parallela alla base BC e, detti M ed N i punti in cui essa interseca i lati AB e AC, indicare con M' ed N' le proiezioni di M ed N su BC. Fra i rettangoli MNN'M' determinare il quadrato e la sua area. [**R.** Lato quadrato = 2,4 cm, …]

14. LABORATORIO DI MATEMATICA. Devi dimostrare che le altezze di un triangolo passano per uno stesso punto, che si chiama ***ortocentro***. Come pensi di procedere? Confrontati con i tuoi compagni e se sei in difficoltà chiedi aiuto al tuo professore. Risolvi poi il seguente problema:
Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati il vertice $A(1,3)$ e l'ortocentro $H(1,2)$ del triangolo OAB. Calcolare l'area del triangolo. [**R.** 21/2]

15. Una fabbrica produce lampadine elettriche. La produzione può avvenire con due procedimenti diversi:
P' : costo di produzione per ogni lampadina € 0,15, spesa fissa giornaliera € 20;
P" : costo di produzione per ogni lampadina € 0,18, spesa fissa giornaliera € 17,50.

Stabilire quale procedimento è il più conveniente per l'azienda.

16. Per il trasporto di una certa merce una ditta può scegliere tra due alternative:
A' : € 0,285 al chilometro più una spesa fissa di € 10;
A": € 0,26 al chilometro più una spesa fissa di € 12.
Stabilire qual è l'alternativa più conveniente per la ditta.

17. Dopo aver rappresentato in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) le rette di equazioni:

$$y=2x+1, \qquad y=3-2x,$$

utilizzare tale rappresentazione per risolvere la seguente disequazione:

$$2x+1>3-2x.$$

18. Si consideri la seguente frazione algebrica:

$$\frac{x}{x^2-2x-3}, \text{ con } x\neq -1 \text{ e } x\neq 3.$$

Dimostrare che esistono due numeri razionali a, b tali che risulti identicamente:

$$\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}.$$

22.5 SISTEMI LINEARI DI n>2 EQUAZIONI IN n INCOGNITE. UN CENNO

22.5.1 Se le incognite che figurano in un sistema di equazioni lineari sono due, del sistema si può fornire, come sappiamo, un'interpretazione geometrica nel piano. Ciò non è più possibile se le incognite sono più di due. Perciò, per la risoluzione di un sistema siffatto non aiuta l'interpretazione geometrica, per lo meno finché ci muoviamo nel piano.

Tuttavia, ricorrendo ai metodi di risoluzione validi nel caso di due incognite – segnatamente a quello di sostituzione – vedremo come si possa risolvere ugualmente un sistema lineare di n>2 equazioni in n incognite.

Ci occuperemo soltanto di casi semplici: 3 incognite, al massimo 4 in qualche situazione particolare.

- A titolo di esempio risolviamo il seguente sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-y+1=0 \\ 2y+z-2=0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione calcoliamo z in funzione di x, y:

$$z=-2x+3y$$

e sostituiamo l'espressione trovata nelle altre due equazioni (anzi, in questo caso, solo nella terza). Troviamo il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2y+(-2x+3y)-2=0 \end{cases}$$

Risolvendolo si trova: $x=-1,\ y=0$.

Sostituendo questi valori nell'espressione di z trovata sopra, si ottiene: $z=-2\cdot(-1)+3\cdot 0=2$.

Il sistema ammette dunque, come soluzione, la terna di valori: $x=-1,\ y=0,\ z=2$.

22.5.2 A parte la complessità dei calcoli, il procedimento precedente può essere seguito, di norma, in ogni altra situazione analoga. Naturalmente se il sistema fosse costituito da 4 equazioni in 4 incognite, dapprima ci si riconduce ad un sistema di 3 equazioni in 3 incognite e poi, una volta risolto questo, si trova la soluzione del sistema assegnato. Si capisce che ci vuole un po' di pazienza.

Alcuni problemi, in parte risolti in parte da risolvere, chiariranno meglio il concetto.

• PROBLEMA RISOLTO 1. In un numero di tre cifre, la somma di queste è 10 e la cifra delle centinaia aumentata di quella delle unità ha come totale la cifra delle decine; inoltre, se nel numero si scambiano di posto la cifra delle decine e quella delle unità, il numero che si ottiene è 47 volte la cifra delle decine del numero primitivo. Trovare il numero.

RISOLUZIONE. Il problema ha tre incognite legate da tre condizioni. Indichiamo con x, y, z rispettivamente la cifra delle unità, quella delle decine e quella delle centinaia del numero da determinare, per cui x, y, z sono elementi dell'insieme $I=\{n\in\mathbb{N} \mid 0\le n\le 9\}$, con $z\neq 0$. Il numero, se esiste, è:

$$100\,z+10\,y+x\,;$$

quello che si ottiene da esso, scambiando di posto la cifra delle decine e quella delle unità, è:

$$100\,z+10\,x+y\,.$$

Pertanto, tradotto il problema in uno schema algebrico, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+z=y \\ 100z+10x+y=47y \end{cases}$$

con $x,y,z\in I$ e $z\neq 0$.

Risolto il sistema, si trova: $x=3,\ y=5,\ z=2$. Pertanto il numero cercato è 253.

• PROBLEMA RISOLTO 2. In un ristorante, 14 persone consumano dei pasti e pagano complessivamente € 301. Tra di loro vi sono anche dei bambini, i quali pagano € 12 a pasto, mentre ogni adulto paga € 23 se non ha preso il cognac ed € 25 se l'ha preso.

Quanti sono i bambini e, tra gli adulti, quanti hanno preso il cognac e quanti non l'hanno preso?

RISOLUZIONE. Indichiamo con $x,\ y,\ z$ rispettivamente il numero dei bambini, quello degli adulti che hanno preso il cognac e quello degli adulti che non l'hanno preso. Dunque $x,y,z\in\mathbb{N}$, con $x\le 14,\ y\le 14,\ z\le 14$. Il problema è allora tradotto algebricamente nel seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=14 \\ 12x+23y+25z=301 \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema di due equazioni in tre incognite, esprimendo $y,\ z$ in funzione di x; cioè supponendo per un momento che x sia una quantità nota. Si trova:

$$y=\frac{49-13x}{2}\ ,\quad z=\frac{11x-21}{2}\ .$$

Se $x,\ y,\ z$ fossero numeri reali, il problema sarebbe indeterminato, avendo come soluzioni tutte le infinite terne di numeri:

$$x,\quad \frac{49-13x}{2}\ ,\quad \frac{11x-21}{2}\ .$$

Ma il nostro problema richiede che $x,\ y,\ z$ siano numeri naturali non superiori a 14. Ora di terne siffatte ce n'è una sola: $3,\ 5,\ 6$. La quale si ottiene per tentativi sostituendo, nella terna precedente, al valore di x via via i valori da 0 a 14 e calcolando i corrispondenti valori di y, z. Solo per $x=3$ si hanno valori di y, z compatibili con le condizioni poste. Per cui il problema ha questa sola soluzione: (3 bambini, 5 adulti senza cognac, 6 adulti con cognac).

22.5.3 PROBLEMI DA RISOLVERE.

1. Di tre numeri si sa che, sommando ciascuno di essi alla media aritmetica degli altri due, si ottengono i numeri 66, 71, 79. Calcolare i tre numeri.
2. Di tre segmenti si sa che sommando ciascuno di essi con la semisomma degli altri due, si ottengono le seguenti lunghezze, espresse in centimetri: 10, 11, 13. I tre segmenti possono costituire i lati di un triangolo?

3. ® Le tre piazze più importanti di una certa città sono disposte nei vertici A, B, C di un triangolo. Se si va dalla piazza A alla piazza B passando per C si percorrono 3,5 km; se si va da A a C passando per B si percorrono 2,3 km; se si va da B a C passando per A si percorrono 2,8 km. Determinare quanto distano tra loro le tre piazze. [**R.** 0,8 km, 1,5 km, 2 km]
4. Sommando a tre a tre in tutti i modi possibili le lunghezze dei lati di un quadrilatero, si ottengono le seguenti misure, espresse in cm: $90, 100, 110, 120$. Determinare quelle lunghezze. [**R.** 20 cm, 30 cm, 50 cm, 40 cm]
5. In un trapezio rettangolo la somma dei lati non paralleli è $9a$ e la differenza delle basi è $3a$, dove a è una lunghezza nota. Calcolare le lunghezze dei lati del trapezio e il suo perimetro sapendo che l'area è $14a^2$. [**R.** $2a, 5a, 5a, 4a$; …]
6. In un piano si fissino due punti distinti A e B ed una retta r strettamente parallela ad AB. Si sa che il punto A ha distanza nota a dal punto B e distanza nota b dalla retta r. Riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si scrivano le coordinate di A e quelle di B e l'equazione della retta r. Detto quindi C un generico punto di r, si trovino le coordinate dell'ortocentro del triangolo ABC in funzione delle coordinate di C.
7. Nel numero 321 la cifra delle decine è il doppio di quella delle unità e la cifra delle centinaia è pari alla somma delle altre due. Determinare tutti i numeri di tre cifre che hanno questa caratteristica.
8. Il numero 151 ha questa proprietà: rimane invariato se si scambia la cifra delle unità con quella delle centinaia, mentre, se lo scambio avviene tra la cifra delle unità e quella delle decine, il nuovo numero è minore di 36 rispetto a quello originario. Determinare tutti i numeri di tre cifre che godono di questa stessa proprietà.
9. Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), calcolare l'area del triangolo ABC sapendo che:

   a) $A(1,4), B(-1,0), C(3,-2)$. b) $A(2,2), B(-2,0), C(-1,-2)$.

   c) $A(-1,0), B(4,4), C(0,4)$. d) $A(-1,1), B(4,3), C(0,-2)$.

   [**R.** a) 10; b) 5; c) 8; d) 8,5]
10. Tre studenti universitari sostengono un esame di matematica: il punteggio complessivo da loro ottenuto è stato 72. Lo studente che ha conseguito il voto più basso è stato superato dagli altri due rispettivamente di 6 e 9 punti. Quale votazione ha ottenuto ciascuno dei tre studenti?
11. Alle ultime elezioni alla carica di sindaco parteciparono tre candidati: A, B, C. Dei 31832 voti validamente espressi il candidato A ne ottenne il doppio di B e 5428 in più di C. Quale fu la percentuale di voti ottenuti da A sul totale dei voti validi? [**R**. ≈46,8%]
12. Al primo turno delle ultime elezioni alla carica di sindaco parteciparono quattro candidati: A, B, C, D. Dei voti validamente espressi il candidato A ne ottenne il doppio di B, il triplo di C ed il sestuplo dei voti ottenuti da D. Sapendo che per essere eletto, evitando così di andare al ballottaggio, un candidato avrebbe dovuto riportare almeno il 50% dei voti validi più un voto, il candidato A ce l'ha fatta ad essere eletto al primo turno?
13. Tre numeri naturali, fra loro disuguali, sono tali che dividendo il maggiore per il numero intermedio si ottiene quoziente 4 e resto 1, mentre dividendolo per il minore si ottiene quoziente 8 e resto 5. Trovare i numeri più piccoli che soddisfano alle condizioni poste. [**R**. 37, 9, 4]

22.6 CENNI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE SISTEMI LINEARI DI n≥2 DISEQUAZIONI IN 2 INDETERMINATE

22.6.1 PROBLEMA. Un'azienda produce due articoli diversi, A' ed A''. Il primo articolo viene venduto a € 1,20 al pezzo, il secondo a € 0,90 al pezzo. Nell'arco di una giornata lavorativa l'azienda può produrre al più 400 pezzi dell'articolo A' e 600 di A" ma la produzione giornaliera complessiva non può superare gli 800 pezzi. Calcolare quanti pezzi di A' e quanti di A" l'azienda deve produrre ogni giorno per ottenere il massimo ricavo.

RISOLUZIONE. Siccome l'articolo A' procura all'azienda un ricavo maggiore di A", è evidente che conviene produrre il massimo numero consentito di pezzi di A', vale a dire 400 pezzi; i pezzi mancanti per giungere a quota 800, cioè ancora 400, saranno dell'articolo A".

Dunque la produzione che procura il massimo ricavo all'azienda è di 400 pezzi di A' e 400 pezzi di A". Il ricavo massimo è allora:

$$1{,}20\times 400 + 0{,}90\times 400 = 840\ (€).$$

Il procedimento precedente, molto intuitivo ed estremamente rapido, riguardo alla risoluzione di problemi di questo genere, purtroppo non può essere seguito che in circostanze eccezionali. Di solito occorrono procedimenti più sofisticati.

Per comprendere di che cosa si tratti, risolviamo lo stesso problema con uno di tali procedimenti, avente come scopo la traduzione del problema in un opportuno modello matematico.

A tal riguardo indichiamo con x ed y rispettivamente il numero dei pezzi di A' e quello dei pezzi di A" che l'azienda produce giornalmente. Per cui $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$.

Il ricavo medio giornaliero, espresso in euro, è allora:

$$1{,}20\,x + 0{,}90\,y\,.$$

Siccome il numero dei pezzi di A' prodotti nell'arco di una giornata lavorativa non può superare 400 e quello dei pezzi di A" non può superare 600, deve essere:

$$x \le 400,\quad y \le 600.$$

Inoltre:

$$x + y \le 800.$$

In definitiva, il modello matematico che traduce il problema è il seguente:

Rendere massima la quantità:

$$1{,}20\,x + 0{,}90\,y$$

sotto le seguenti condizioni:

$$x \le 400,\quad y \le 600,\quad x + y \le 800,$$

con $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$.

Di questo modello possiamo dare un'interessante interpretazione geometrica.

Nel piano(Fig. 7), riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

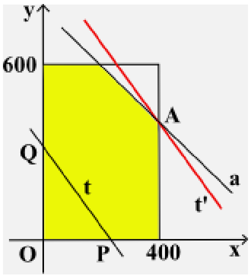

FIG. 7

- la disequazione $x\le 400$ (sottintendiamo qualunque sia $y\in\mathbb{R}$) è rappresentata dalle coppie ordinate (x,y) per cui appunto risulta $x\le 400$, vale a dire dal semipiano situato a sinistra della retta $x=400$, retta compresa (Fig. 7).

- la disequazione $y \leq 600$ è rappresentata dal semipiano situato al di sotto della retta $y=600$, retta compresa.
- la disequazione $x+y \leq 800$ è rappresentata dal semipiano avente per origine la retta a di equazione $x+y=800$, retta compresa, contenente il punto $(0{,}0)$ che con le sue coordinate soddisfa alla disequazione medesima.

Dunque le condizioni (dette anche ***vincoli***) del problema sono rappresentate graficamente dalla regione ombreggiata in figura 7, compreso il contorno, detta ***regione delle soluzioni ammissibili***; anzi, per la precisione, siccome x, y devono essere numeri naturali, dai punti di questa regione che hanno coordinate intere.
Poiché si tratta di rendere massima la quantità:

$$1{,}20\,x + 0{,}90\,y\,,$$

poniamo:

$$1{,}2\,x + 0{,}90\,y = k\,,\ \text{dove } k \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo un fascio di rette parallele aventi pendenza $-\frac{4}{3}$. La generica di esse, diciamo t, interseca l'asse x nel punto $P\left(\frac{k}{1{,}2}, 0\right)$ e l'asse y nel punto $Q\left(0, \frac{k}{0{,}9}\right)$.
Per un certo valore di k, che chiamiamo k', si ottiene la retta t' che passa per il vertice $A(400{,}400)$ del contorno della regione delle soluzioni ammissibili mentre per $k>k'$ la corrispondente retta t non interseca più quella regione.
Il valore k' è perciò proprio il massimo di $1{,}20\,x + 0{,}90\,y$. Esattamente esso è il seguente:

$$k' = 1{,}20\,x_A + 0{,}90\,y_A = 1{,}2 \times 400 + 0{,}90 \times 400 = 840\ (€)\,.$$

In conclusione: per ottenere il massimo ricavo giornaliero – pari a € 840 – l'azienda deve produrre 400 pezzi di A' e 400 di A".
Ovviamente il risultato è identico a quello ottenuto con l'altro procedimento.

22.6.2 Problemi come quello precedente vanno sotto il nome di **problemi di programmazione lineare**. Sono problemi con cui le aziende, che producono beni di consumo, hanno a che fare tutti i giorni. Ne proporremo alcuni, anche se qui il problema ci è servito come spunto per introdurre i sistemi lineari di $n \geq 2$ disequazioni in 2 indeterminate e per indicare un procedimento grafico atto a trovare la loro soluzione. La quale, come abbiamo visto, è rappresentata in genere dalle coordinate dei punti di una determinata regione del piano cartesiano, che può essere limitata, illimitata o anche vuota, ossia priva di punti (come dire, in quest'ultimo caso, che il sistema non ha soluzione).
In quest'altro esempio si richiede di risolvere il seguente sistema lineare di 4 disequazioni nelle indeterminate x, y:

$$\begin{cases} 2x+y \geq 1 \\ x+2y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La sua soluzione è costituita dal quadrilatero ABCD (Fig. 8), compreso il contorno, dove:

$$A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B(3{,}0), C\left(0, \frac{3}{2}\right), D(0{,}1).$$

Lasciamo a te la spiegazione di ciò.

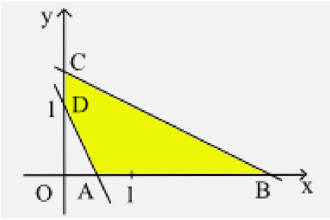

FIG. 8

- PROBLEMI DA RISOLVERE:

1. Rendere massima la funzione:

$$300\,x + 100\,y + 200\,z$$

sotto le condizioni seguenti ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$):

$$\begin{cases} x+2z=4 \\ 2x+3y \leq 18 \\ y+z \leq 5 \end{cases}$$

[**R.** Osserva che dall'equazione $x+2z=4$ si ricava $z=2-\frac{x}{2}$, per cui la funzione assegnata diventa ..., mentre le condizioni si modificano nelle seguenti: $0 \leq x \leq 4$, $y=0$, $2x+3y \leq 18$, $2y-x \leq 6$]

2. Rendere minima la funzione:

$$200\,x + 300\,y + 500\,z$$

sotto le condizioni seguenti ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$):

$$\begin{cases} x+2y+z=6 \\ 7x+2y+5z \geq 15 \\ y \geq 2z \end{cases}$$

3. La produzione di un certo manufatto può avvenire seguendo due procedimenti:

P': costo di produzione € 0,50 al pezzo,	P": costo di produzione € 0,45 al pezzo,
spesa fissa giornaliera € 20,	spesa fissa giornaliera € 23,
ogni pezzo viene venduto a € 1,20.	ogni pezzo viene venduto a € 1,20.

Stabilire quale procedimento procura all'azienda produttrice il maggior guadagno.

4. Un'azienda produce due manufatti, A e B.
Per il manufatto A, che poi rivende a € 1,75 al pezzo, spende € 0,35 al pezzo per l'acquisto di materie prime e lavorazione del prodotto e deve affrontare una spesa fissa giornaliera di € 300.
Per il manufatto B, che rivende a € 2 al pezzo, spende € 0,42 al pezzo per l'acquisto di materie prime e lavorazione del prodotto e deve sostenere una spesa fissa giornaliera di € 380.
Per impegni assunti l'azienda deve produrre giornalmente almeno 500 pezzi del manufatto A ma la produzione complessiva dei due manufatti non può superare le 900 unità ed il numero dei pezzi B non può superare la metà di quello dei pezzi A.
Determinare quale piano di produzione procura all'azienda il maggior guadagno giornaliero e calcolare quant'è questo guadagno. [**R.** 600 pezzi di A, 300 pezzi di B; € 634]

5. Un'azienda, per la produzione di due manufatti A e B, può utilizzare al massimo in una giornata 800 ore lavorative, disponendo di 2000 kg di materie prime.
Per ogni pezzo del manufatto A, che viene rivenduto con un guadagno netto di € 0,25 al pezzo, occorrono 3 ore di lavoro e 90 kg di materie prime.
Per ogni pezzo del manufatto B, che viene rivenduto con un guadagno netto di € 0,30 al pezzo, occorrono 3 ore e mezza di lavoro e 70 kg di materie prime.
Determinare qual è la produzione giornaliera che assicura all'azienda il maggior guadagno.
[**R.** Se x è il numero dei pezzi A che si producono giornalmente ed y quello dei pezzi B, si tratta di rendere massima la funzione $0{,}25\,x + 0{,}30\,y$ sotto le condizioni seguenti:

$$3\,x + 3{,}5\,y \leq 800\,,\;\; 90\,x + 70\,y \leq 2000\,,$$

naturalmente con $x \geq 0$ ed $y \geq 0$]

6. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), disegnare la regione dei punti le cui coordinate (x,y) soddisfano alla seguente condizione:

$$|\,x\,| + |\,y\,| \leq 1.$$

7. Nella figura sottostante (Fig. 9) è disegnato il quadrilatero ABCD. Scrivere il sistema di disequazioni che rappresentano tutti e soli i suoi punti, interni o appartenenti al contorno.

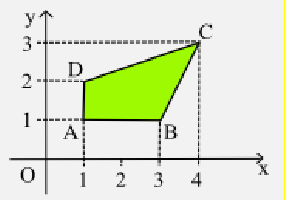

FIG. 9

LABORATORIO DI MATEMATICA

1. ® Problemi come quelli di trovare la procedura più conveniente o che produce il maggior guadagno o la minore perdita vanno sotto il nome di ***problemi di ottimizzazione***.
   Si tratta, in ultima analisi, di rendere massima o minima una certa funzione.
   Si possono far rientrare in questa fattispecie le due seguenti proprietà:
   - ♦ **PROPRIETÀ 1. Se due variabili reali positive hanno somma costante, il loro prodotto è massimo quando esse sono uguali.**
   - ♦ **PROPRIETÀ 2. Se due variabili reali positive hanno prodotto costante, la loro somma è minima quando esse sono uguali.**

   Prova a dimostrare le due proprietà. Ti suggeriamo di utilizzare le formule del quadrato della somma o della differenza di due numeri. Consultati coi tuoi compagni e, se proprio non ce la fai, chiedi lumi al tuo professore.
   Quindi cerca di risolvere i seguenti problemi:
   a. Fra i rettangoli di uguale perimetro determinare quello di area massima.
   b. Fra i rettangoli di uguale area determinare quello di perimetro minimo.
   c. Fra i parallelogrammi aventi perimetro 2p ed un angolo di 60° determinare quello di area massima e calcolare quest'area.
   d. Sapendo che il prodotto delle due variabili positive x, y è 1, determinare per quali valori di x ed y è minima la quantità 2x+3y. [**R.** Se xy=1 allora 6xy=6, per cui …]
   e. L'altezza AH e la base BC del triangolo isoscele ABC misurano rispettivamente 6 cm e 4 cm. Riferito il piano del triangolo ad un conveniente sistema di assi cartesiani, scrivere le coordinate dei vertici del triangolo medesimo. Successivamente condurre una parallela alla base BC e, detti M ed N i punti in cui essa interseca i lati AB e AC, indicare con M' ed N' le proiezioni di M ed N su BC. Fra i rettangoli MNN'M' determinare quello di area massima.
   f. Due variabili reali positive x, y hanno somma costante k.
      - Spiegare perché la somma x^2+y^2 non è costante.
      - Trovare il minimo valore di x^2+y^2.

      [**R**. Riguardo al 2° quesito si suggerisce di tener presente lo sviluppo del quadrato di un binomio]
2. I lati di un piccolo parco triangolare hanno le seguenti misure: 10 m, 10 m, 12 m.
   Il proprietario intende collocare nel parco un lampioncino che lo illumini totalmente, ma senza spreco. In quale posizione conviene collocare il lampione?
   E se le misure dei lati fossero le seguenti: 5 m, 12 m, 13 m ?
   Oppure le seguenti: 10 m, 10 m, 16 m ?

VERIFICHE [2]

1. Risolvere in $\mathbb{R}^2$ le seguenti equazioni in due indeterminate:

a) $x - 2y = 1$; b) $3x + 4y = 5$; c) $4x - 3y = 2$.

2. Risolvere in $\mathbb{R}^2$ i seguenti sistemi di equazioni in due incognite e fornirne un'interpretazione geometrica:

a) $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3y + 2 = 0 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{3}{2}A - 2B = \dfrac{1}{4} \\ 3A - \dfrac{1}{3}B = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{z+t}{2} + \dfrac{2z-t}{3} = 1 \\ \dfrac{z-t}{3} - \dfrac{z+2t}{2} = \dfrac{7}{6} \end{cases}$

3. In un gioco si richiede ad una persona di aggiungere 8 ad un numero e di dividere quindi il risultato per 4. Quella persona invece moltiplica il numero incognito per 4 e poi aggiunge 8; quindi dà come risposta 40. Dire quale risposta avrebbe dovuto dare quella persona se avesse proceduto correttamente. [**R**. 4]

4. ® Di un poligono convesso si sa che la media aritmetica delle ampiezze dei suoi angoli interni, espresse in gradi sessagesimali, è 144°. a) Quanti lati ha il poligono? b) Qual è la somma dei suoi angoli interni? [**R**. 10; 1440°]

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(-2,1)$ e $B(4,-3)$. Detto C il punto simmetrico di B rispetto all'asse x, trovare le equazioni della traslazione che muta A in C. La stessa traslazione muti B in D. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero convesso ABCD. [**R.** ... ; $x'=x+6$, $y'=y+2$; ... .]

6. Le misure dei lati di un triangolo, espresse in metri, sono rispettivamente 13, 20, 21. Dopo aver riferito il piano del triangolo ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, scrivere le coordinare dei vertici del triangolo e le equazioni dei suoi lati.

7. Un numero di tre cifre rimane invariato se la cifra delle unità viene scambiata con quella delle centinaia. Se invece lo scambio avviene tra la cifra delle unità e quella delle decine, il nuovo numero è inferiore di 18 rispetto a quello assegnato. Determinare questo numero sapendo che la somma delle sue cifre è 8. [**R.** 242]

8. Stabilire se, oltre al numero 242, altri numeri di tre cifre godono delle stesse proprietà di cui all'esercizio precedente, tranne l'ultima relativa alla somma delle cifre, sulla quale somma non si fa adesso alcuna ipotesi. [**R.** 131, 242, 353, 464, 575, 686, 797]

9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette a, b tali che:

1. $a \equiv 2x + y + 2 = 0$, $b \equiv x - 3y + 1 = 0$; 2. $a \equiv 2x + 3y - 6 = 0$, $b \equiv 3x - 2y + 6 = 0$;
3. $a \equiv x + y - 2 = 0$, $b \equiv 2x + 3y - 5 = 0$;

Trovare l'equazione della retta passante per il loro punto comune e per il punto $P(1,1)$.

[**R.** 1) $7x-14y+7=0$; 2) ... ; 3) ?]

---

[2] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

OSSERVAZIONE. Naturalmente si può trovare l'equazione richiesta determinando dapprima il punto C comune alle due rette a, b e successivamente trovare l'equazione della retta CP. Questo procedimento è lasciato a te. Noi, però, vogliamo proporti un procedimento alternativo, che utilizza i *fasci di rette*. Non c'è dubbio infatti che la retta cercata appartenga al fascio di rette individuato dalle rette a, b, la cui equazione è la seguente (con riferimento alle rette 1):
$(2x + y + 2) + k\,(x - 3y + 1) = 0.$
A questo punto basta imporre che le coordinate del punto P soddisfino a questa equazione, ossia:
$(2 \cdot 1 + 1 + 2) + k\,(1 - 3 \cdot 1 + 1) = 0.$
Risolvendo ora rispetto a k si ottiene k=5. Sostituendo questo valore nell'equazione del fascio e semplificando si trova l'equazione della retta cercata: 7x–14y+7=0.

10. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazioni:

$$2x - y + 3 = 0, \quad 3x + 2y - 5 = 0\,.$$

Trovare l'equazione della retta passante per il loro punto comune e:
a) passante per il punto (2,3); b) parallela all'asse x; c) parallela all'asse y;
d) parallela alla retta di equazione 3x–4y+1=0; e) perpendicolare a questa medesima retta.
[**R.** Vedi osservazione precedente. a) $2x-15y+41=0$; …]

11. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazione:

$$(m - 1)x + (2m + 3)y - (m + 2) = 0,$$

dove m è un parametro reale. Spiegare perché si tratta di un fascio di rette con centro e determinare le rette generatrici ed il centro del fascio.
[R. L'equazione può mettersi nella forma: ….; rette generatrici: $x+2y-1=0$, $x-3y+2=0$; …]

12. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), trovare le coordinate del punto B simmetrico di A rispetto alla retta r, sapendo che:
a) $A(1,0)$, $r \equiv y=2x$. b) $A(-1,2)$, $r \equiv x+y-2=0$.

13. PROBLEMA RISOLTO. Tizio dice a Caio: «Io ho il doppio dell'età che avevi tu quando io avevo l'età che tu hai adesso e quando tu avrai l'età che ora ho io fra tutti e due avremo 72 anni». Determinare le età attuali di Tizio e Caio.
RISOLUZIONE. Premettiamo che si tratta di un problema impegnativo. Indichiamo con x l'età attuale di Tizio e con y l'età attuale di Caio.
n anni fa l'età di Tizio era $x-n$ mentre quella di Caio era $y-n$. Pertanto, quando $y=x-n$ (cioè quando Tizio aveva l'età che ha Caio adesso) allora $x=2(y-n)$ (cioè Tizio ha adesso il doppio dell'età che aveva Caio n anni fa). Per cui, sostituendo in quest'ultima equazione $x-n$ al posto di y e semplificando, si ottiene la relazione: $x=4n$.
D'altro canto fra m anni l'età di Tizio sarà $x+m$ mentre quella di Caio sarà $y+m$. Pertanto, quando $x=y+m$ allora $(x+m)+(y+m)=72$, ossia: $2x+m=72$.
Sostituendo adesso in quest'ultima relazione 4n al posto di x si ottiene la relazione: $8n+m=72$, ossia:

$$n = 9 - \frac{m}{8}\,.$$

Teniamo presente che sia n sia m sono interi positivi, quindi m deve essere multiplo di 8, vale a dire m=8, m=16, m=24, … . Ora:
- per $m=8$ si ha $n=8$ e di conseguenza: $x=4·8=32$, $y=x-8=24$: soluzione accettabile in quanto quando Tizio aveva l'età che adesso ha Caio, vale a dire 8 anni fa, Caio aveva 16 anni;

- per $m=16$ si ha $n=7$ e di conseguenza: $x=4\cdot 7=28$, $y=x-16=12$: soluzione inaccettabile giacché quando Tizio aveva l'età che adesso ha Caio, vale a dire 16 anni fa, Caio non era ancora nato;
- ugualmente sono inaccettabili tutte le soluzioni che si ottengono attribuendo ad m valori maggiori di 16.

L'unica soluzione accettabile è pertanto $x=32$, $y=24$.

14. Le misure dei lati di un triangolo, espresse in cm, sono rispettivamente 13, 20, 21. Riferito il piano del triangolo ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, scrivere le coordinate dei vertici del triangolo medesimo e determinare quelle del suo baricentro, del suo ortocentro e del suo circocentro e verificare che questi tre punti sono allineati.

15. Ad un circo equestre, che vuole esibirsi in una certa città, l'ENEL, per il pagamento dell'energia elettrica, propone tre alternative:
A1: € 0,16 per kwh più una spesa fissa giornaliera di € 1;
A2: € 0,165 per kwh più una spesa fissa giornaliera di € 0,8;
A3: € 0,17 per kwh senza altre spese.
Stabilire qual è la tariffa più conveniente per il circo.

16. Un triangolo, rappresentato nel piano cartesiano ortogonale (Oxy), è assegnato mediante le equazioni dei suoi lati:

$$y=-2x+3,\quad y=x-1,\quad y=2x-1.$$

Trovare le equazioni degli assi del triangolo e verificare che s'intersecano in un punto (*circocentro* del triangolo). [**R.** $6x-12y+1=0$, $3x+3y-1=0$, …]

17. Un triangolo, rappresentato nel piano cartesiano ortogonale (Oxy), è assegnato mediante le coordinate dei suoi vertici:

$$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right),\quad \left(\frac{1}{7},-\frac{3}{7}\right),\quad \left(\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right).$$

Trovare le equazioni delle altezze del triangolo e verificare che s'intersecano in un punto (*ortocentro* del triangolo). [**R.** $4x+2y+3=0$, $7y+3=0$, …]

18. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il punto $A(4,-3)$. Sulla perpendicolare alla retta OA, condotta per il punto B(4,0), determinare un punto P in modo che il triangolo OAP sia rettangolo in P. $\left[\mathbf{R.}\ 2\ \text{sol.}: \ldots\ ,\ P''\left(\frac{28}{25},-\frac{96}{25}\right)\right]$

19. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il seguente sistema di disequazioni:

$$\text{A)}\ \begin{cases} 2x+4y\geq 3 \\ x+2y\leq 4 \end{cases}\qquad \text{B)}\ \begin{cases} 3x+2y\leq 6 \\ x\leq 2y \end{cases}\qquad \text{C)}\ \begin{cases} 2x+3y\leq 1 \\ 4x+6y\geq 3 \end{cases}\qquad \text{D)}\ \begin{cases} 2x+y\geq 2 \\ x+y\leq 2 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Quale figura geometrica rappresenta?

20. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), i punti (x,y), per i quali risulta:

$$2x+y\geq 12,\quad x+12y\geq 19,\quad x+y\leq 8,$$

individuano una regione limitata di piano. Calcolarne l'area.

21. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), i punti (x,y), per i quali risulta:

$$2|x|+3|x-y|\leq 5,$$

individuano una regione limitata di piano. Calcolarne l'area.

22. Un'azienda può utilizzare, per la produzione di due manufatti A e B, due macchine diverse, M' ed M": la prima per un massimo di 10 ore al giorno e la seconda per un massimo di 8 ore al giorno.
Per il manufatto A, che l'azienda vende con un guadagno netto di € 8 al pezzo, occorrono 5 ore di la-

voro della macchina M' e 3 della macchina M".

Per il manufatto B, che l'azienda vende con un guadagno netto di € 7 al pezzo, occorrono 3 ore di lavoro della macchina M' e 4 della macchina M".

Determinare qual è la produzione che giornalmente assicura all'azienda il massimo guadagno.

23. PROBLEMA RISOLTO. Sia ABC un triangolo e sia D un suo punto interno. Le tre rette, passanti ciascuna per il punto D e per uno dei vertici, intersecano i lati opposti a tali vertici nei punti E, F, G rispettivamente e dividono il triangolo in sei triangolini. Di quattro di questi sono note le aree. Precisamente si ha:

$$\mathrm{A}(\mathrm{ADG}) = 10\ \mathrm{m}^2;\ \mathrm{A}(\mathrm{BDE}) = 6\ \mathrm{m}^2;\ \mathrm{A}(\mathrm{CDE}) = 4\ \mathrm{m}^2;\ \mathrm{A}(\mathrm{CDF}) = 5\ \mathrm{m}^2.$$

Calcolare l'area del triangolo ABC.

RISOLUZIONE. Poniamo $\mathrm{A}(\mathrm{BDG}) = x\ (\mathrm{m}^2)$ e $\mathrm{A}(\mathrm{ADF}) = y\ (\mathrm{m}^2)$. Osserviamo (Fig. 10) che i due triangoli BDE e CDE, considerati sulle basi BE e CE, hanno la stessa altezza, per cui risulta:

$$\mathrm{A}(\mathrm{BDE}) : \mathrm{A}(\mathrm{CDE}) = \mathrm{BE} : \mathrm{CE}\,.$$

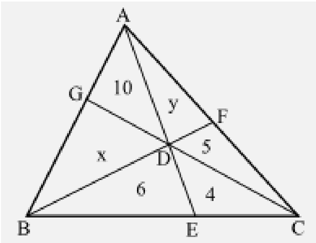

FIG. 10

Ugualmente per i triangoli BAE e CAE, considerati sulle basi BE e CE. Per cui risulta:

$$\mathrm{A}(\mathrm{BAE}) : \mathrm{A}(\mathrm{CAE}) = \mathrm{BE} : \mathrm{CE}\,.$$

Di conseguenza:

$$\mathrm{A}(\mathrm{BAE}) : \mathrm{A}(\mathrm{CAE}) = \mathrm{A}(\mathrm{BDE}) : \mathrm{A}(\mathrm{CDE})$$

ovvero, coinvolgendo le misure:

$$(10+x+6) : (y+5+4) = 6 : 4\,.$$

Analogamente si può ragionare su altre due coppie di triangoli, come ADF e CDF, da una parte, e ABF e CBF, dall'altra. Si ottiene la seguente equazione:

$$(x+10+y) : (6+4+5) = y : 5\,.$$

Basta, a questo punto, risolvere il sistema delle due equazioni precedenti. Si trova: x=20, y=15.

Pertanto l'area del triangolo ABC è la seguente:

$$\mathrm{A}(\mathrm{ABC}) = 10 + 20 + 6 + 4 + 5 + 15 = 60\ (\mathrm{m}^2).$$

24. Il sig. Rossi possiede un orto, che ha la forma di un rettangolo, le cui dimensioni sono l'una doppia dell'altra. Per ricavarne una regione a forma di "L", avente un'area di 291 m², il sig. Rossi è costretto a ritagliare una regione rettangolare, le cui dimensioni, rispetto al rettangolo originario, sono ridotte, la maggiore di 7 m e la minore di 3 m. Quant'è l'area originaria dell'orto? [**R.** 1152 m²]

25. Il sig. Bianchi possiede uno spiazzo di forma rettangolare che però non ha mai visto. Ne vorrebbe conoscere le dimensioni e le chiede al suo fattore. Questi, un emerito burlone con tendenze spiccate per la matematica, gli fornisce l'informazione sotto forma di indovinello.

Se le dimensioni dello spiazzo vengono aumentate entrambe di 2 m, l'area dello stesso aumenta di 60 m². Però, continua il fattore: a) se esse vengono ridotte entrambe di 2 m, l'area diminuisce di 52 m²; b) se vengono ridotte entrambe di 3 m, l'area diminuisce di 66 m²; c) se una dimensione viene ridotta di 3 m e l'altra di 2 m, l'area diminuisce di 62 m².

Ma, attenzione, aggiunge il fattore: una sola delle tre opzioni precedenti ti fornisce l'informazione corretta. Quali sono le dimensioni dello spiazzo? [**R.** 16 m, 12 m]

26. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2,1), B(1,3), C(3,3). Determinare le coordinate del punto D, simmetrico di A rispetto a BC e calcolare l'area del quadrilatero ABCD. [**R.** $D(2,5)$; …]

27. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(2,3) e B(7,6). Determinare il punto P dell'asse x per il quale risulti minimo il cammino per andare da A a B passando per P. [**R**. Bisogna tener presente il problema di Erone, per cui …]

28. Il cateto AB del triangolo rettangolo ABC è lungo il doppio del cateto AC. Chiamato M il punto medio di BC, siano H e K gli ortocentri dei triangoli MAB e MAC rispettivamente.

a) Dimostrare che gli angoli del triangolo MHK sono uguali a quelli del triangolo ABC.

b) Ammesso che il lato AB misuri 4 unità di misura, riferire il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy) e trovare le coordinate dei vertici dei triangoli ABC e MHK.

c) Calcolare l'area e il perimetro del triangolo MHK.

29. Quella tappa del Giro d'Italia si svolgeva in un circuito lungo 36 km con partenza ed arrivo nello stesso posto. Il circuito presentava tre tratti distinti: il primo tratto in salita, il secondo lungo il triplo del primo era pianeggiante, il terzo tratto lungo il doppio del primo in discesa. Il ciclista Gianni Pedivella percorse il primo tratto alla velocità media di 25 km/h, il secondo alla velocità media di 43 km/h ed il terzo alla velocità media di 66 km/h. Quanto tempo impiegò a percorrere l'intero circuito? Quanto tempo a percorrere i diversi tratti? [**R.** circa 50 minuti e 25 secondi; ...]

30. Un automobilista si era proposto di raggiungere la meta esattamente alle ore 18. Aveva calcolato che sarebbe giunto un'ora e mezza prima se avesse viaggiato alla velocità media di 120 km/h, mentre sarebbe giunto un'ora dopo se avesse viaggiato alla velocità media di 90 km/h. Calcolare:

a) a quale velocità media avrebbe dovuto viaggiare per raggiungere la meta alle ore 18;

b) a che ora doveva partire;

c) qual era la lunghezza del percorso.

[**R**. a) 100 km/h; b) 900 km; c) ore 9]

31. Tre automobilisti partono contemporaneamente da una medesima località e, seguendo lo stesso percorso, devono raggiungere la medesima destinazione. Il più veloce supera la velocità media del secondo di 16 km/h; questi, a sua volta, è più veloce del terzo di 20 km/h. Il secondo automobilista raggiunge la meta un'ora dopo che è arrivato il primo e 2 ore prima dell'arrivo del terzo. Calcolare le velocità medie tenute dai tre automobilisti e la lunghezza del percorso.

[**R**. Si suggerisce di porre con x la velocità del 2° automobilista e con y la lunghezza del percorso. Si ottiene: $x=80$ km/h, … ; $y=480$ km.]

32. Nella figura sottostante (Fig. 11) la regione ombreggiata evidenzia il trapezio OABC. Scrivere il sistema di disequazioni che rappresentano tale regione, contorno incluso.

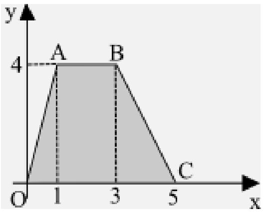

FIG. 11

33. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il triangolo di vertici

O(0,0), A(1,0), B(2,1). Scrivere il sistema di disequazioni che rappresentano tutti e soli i suoi punti, interni o appartenenti al contorno.

34. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il triangolo di vertici A(1,0), B(3,1), C(0,2). Scrivere il sistema di disequazioni che rappresentano tutti e soli i suoi punti, interni o appartenenti al contorno.

35. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato l'angolo orientato (a,b), dove a è la retta di equazione $x-2y-2=0$ ed y è la retta di equazione $x-y+1=0$. Scrivere il sistema di disequazioni che rappresentano la parte di piano del primo quadrante contenuta nell'angolo suddetto, compreso il contorno.

36. Trovare due numeri interi positivi tali che la differenza dei loro quadrati sia 37.

[**R.** Bisogna tener presente la fattorizzazione della differenza di due quadrati ed il fatto che 37 è un numero primo. I due numeri sono: 19 e 18]

37. PROBLEMA RISOLTO. Una miscela contiene il 50% di proteine, un'altra ne contiene il 35%. Utilizzando le due miscele se ne vuole ottenere una terza contenente il 41% di proteine. In quale rapporto devono mescolarsi le due miscele originarie? Se si vogliono ottenere 15 kg della nuova miscela, quali quantità bisogna prendere delle due miscele originarie?

RISOLUZIONE. Indichiamo con x la quantità della prima miscela e con y quella della seconda. Deve essere soddisfatta la seguente relazione: $(0{,}50x+0{,}35y)=0{,}41(x+y)$. Da qui segue: $3x=2y$ e perciò: $x/y=2/3$. Pertanto bisogna prendere 2 misure della prima miscela e 3 misure della seconda. Per ottenere 15 kg della nuova miscela deve risultare $x+y=15$ e perciò, associando a questa equazione l'equazione $3x=2y$ e risolvendo, a conti fatti si trova: $x = 6$ kg, $y = 9$ kg.

38. Una miscela contiene il 40% di proteine, un'altra ne contiene il 24%. Utilizzando le due miscele si vogliono ottenere 32 kg di una nuova miscela, contenente il 28% di proteine. Quali quantità delle due miscele originarie bisogna prendere? [**R.** 8 kg, 24 kg]

39. Una miscela contiene il 40% di proteine. Prendendo una misura di questa miscela e tre misure di una seconda miscela e mescolandole, si ottiene una terza miscela che contiene il 28% di proteine. Quale percentuale di proteine contiene la seconda miscela? [**R.** 24%]

40. Una miscela contiene il 45% di proteine. Prendendo 21 kg di tale miscela e 35 kg di una seconda miscela e mescolandole, si ottiene una nuova miscela contenente il 30% di proteine. Qual è la percentuale di proteine contenute nella seconda miscela? [**R.** 21%]

41. Un dato metallo costa 0,36 €/g; un secondo metallo costa 0,24 €/g. Se si fondono i due metalli in modo opportuno, se ne ottiene un terzo che costa 0,30 €/g. Calcolare quali quantità dei due metalli originari bisogna mescolare per ottenere 50 g del nuovo metallo. [**R.** 25 g di entrambi]

42. È data una lega metallica composta al 30% dal metallo A e al 70% dal metallo B. Un'altra lega metallica è composta al 25% dal metallo A e al 75% dal metallo B. Calcolare quanto della prima lega e quanto della seconda è necessario fondere per ottenere una terza lega costituita al 28% dal metallo A e al 72% dal metallo B.

[**R.** Si ottiene il sistema delle due equazioni seguenti:

$$\frac{30}{100}x+\frac{25}{100}y=\frac{28}{100}\,,\qquad \frac{70}{100}x+\frac{75}{100}y=\frac{72}{100}\,,$$

da cui segue: 60% della prima lega, 40% della seconda]

43. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il triangolo ABC, del quale si sa che $A(3,1)$, $B(5,2)$. Si sa inoltre che l'asse del lato AC ha equazione $x-2y+4=0$. Dire, dandone esauriente spiegazione analitica, se il triangolo ABC è: a) scaleno, isoscele o equilatero; b) acutangolo, rettangolo o ottusangolo.

44. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(4,2)$ e $B(2,4)$.

a) Trovare un punto P interno al segmento OA e un punto Q interno al segmento OB in modo che risulti $PA=QB=PQ$.

b) Calcolare la lunghezza dei segmenti uguali PA, QB, PQ.

$$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } P\left(\frac{4}{3}\left(5-\sqrt{10}\right),\ \frac{2}{3}\left(5-\sqrt{10}\right)\right), \ldots;\ \text{b) } \frac{2}{3}\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)\right]$$

45. Si tenta di disporre un certo numero di tessere uguali di forma quadrata su un quadrato più grande in modo da ricoprirlo esattamente. Il tentativo fallisce poiché avanzano 20 tessere. Si tenta con un quadrato ancora più grande, ma anche questo tentativo fallisce anche se questa volta di tessere ne avanza una soltanto per una copertura perfetta. Quante sono le tessere?

[**R.** Indicando con a il lato del primo quadrato e con n il numero delle tessere deve essere $n=a^2+20$. Parimenti, indicato con b il lato del secondo quadrato, deve essere $n=b^2+1$. Quindi … deve risultare $(b-a)(b+a)=19$. Siccome a, b sono interi positivi, allora … . n=101.]

46. Sono utilizzate piastrelle quadrate uguali per ricoprire un pavimento rettangolare il cui lato maggiore è 1,5 volte quello minore.

a) Sia sa che occorrono 76 piastrelle per ricoprire esattamente il bordo del pavimento. Quante piastrelle occorrono complessivamente per ricoprire il pavimento?

b) Ammesso che l'area del pavimento sia $24\ m^2$, qual è la misura del lato di ogni piastrella?

[**R.** a) 384; b) 25 cm]

47. I genitori di Paolo e Francesca lasciano ai loro bambini una stanza completamente libera per i loro giochi. I bambini decidono per questo gioco: Paolo si muove lungo il perimetro della stanza, descrivendo un rettangolo il cui lato maggiore supera di 1 m il minore e il cui perimetro è 14 m; Francesca fa avanti e indietro lungo una diagonale di tale rettangolo. Partono contemporaneamente dallo stesso vertice e si muovono entrambi con la velocità di $1\ m/s$. Calcolare:

a) dopo quanto tempo dalla partenza i due bambini si ritrovano esattamente e contemporaneamente nella stessa posizione di partenza;

b) quante volte Paolo ha percorso il perimetro del rettangolo;

c) quanti percorsi di andata e ritorno lungo la diagonale ha effettuato Francesca.

[**R.** a) 70 s; ...]

48. Una salone ha la forma di un trapezio isoscele, i cui lati uguali misurano 10 m, mentre le basi misurano 26 m e 14 m. Dopo aver riferito il piano del salone ad un sistema di assi cartesiani (Oxy) in modo che l'origine O sia il punto medio della base maggiore, l'asse x sia proprio questa base e il sistema sia orientato in modo che il trapezio sia situato nel semipiano $y\geq 0$, risolvere le seguenti questioni.

a) Trovare le coordinate dei vertici del trapezio.

b) Indicato con P(x,y) un generico punto interno al trapezio o appartenente al suo contorno, esprimere in funzione delle coordinate di P la somma S delle distanze di P dai lati del trapezio e verificare che S non dipende dall'ascissa x di P, salvo che per i vincoli.

c) Mario si trova nel salone e vuol posizionarsi in un punto per il quale è massima la somma S: dove deve posizionarsi?

[**R.** a)...; b) $S=\frac{144}{5}-\frac{6}{5}y$ con $0\leq y\leq 8,\ 4x+3y\leq 52,\ 4x-3y\geq -52$; c) In un qualsiasi punto della base maggiore]

49. Le facce di un dado sono numerate da 1 a 6, ma hanno probabilità diverse di uscire. Precisamente, indicata con p_k la probabilità che esca la faccia "k", si sa che:

$$p_1 = p_6\,,\;\; p_2 = p_5\,,\;\; p_3 = p_4\,,\;\; \text{inoltre:}\;\; p_1 = 2\,p_2 = 3\,p_3\,.$$

Calcolare la probabilità che, lanciando il dado per 2 volte, i due numeri usciti siano uguali e quella che siano diversi. [**R.** $\approx 20{,}24\,\%$; …]

50. Due condotte alimentano un serbatoio per l'approvvigionamento di acqua potabile. La prima condotta, da sola, riempirebbe il serbatoio in 80 minuti, la seconda in 120 minuti.

a) In quanto tempo le due condotte, agendo insieme, riempiono il serbatoio?

Le due condotte, agendo insieme, immettono nel serbatoio 1.000 litri d'acqua al minuto.

b) Quanti litri d'acqua può contenere il serbatoio?

c) Quanti litri d'acqua immette ogni minuto nel serbatoio ciascuna delle due condotte?

[**R.** a) 96 min: b)…; c) 1.200 l/min, 800 l/min]

51. Il titolare di un'azienda si appresta a pagare gli stipendi al personale. Questo personale è composto da 42 soggetti ripartiti in tre categorie: alla prima categoria appartengono i dirigenti, a ciascuno dei quali vanno € 3.200; alla seconda categoria appartengono gli impiegati di 1° livello, ciascuno dei quali percepisce € 2.100; la terza categoria infine è composta dagli impiegati di 2°, ognuno dei quali riceve € 1.700. Sapendo che il titolare versa complessivamente € 80.700 per gli stipendi del personale, calcolare da quanti soggetti è composta ciascuna delle tre categorie del personale. [**R.** 3, 12, 27]

52. Sia p(x) un generico polinomio di 1° grado nell'indeterminata x. Trovare il polinomio P(x) di 2° grado nell'indeterminata x tale che risulti: $P(1)=p(1)$, $P(2)=p(1)+p(2)$, $P(3)=p(1)+p(2)+p(3)$.

$\left[\textbf{R.}\;\text{Posto } p(x)=ax+b,\;\text{si trova: } P(x)=\frac{a}{2}x^2+\frac{a+2b}{2}x\right]$

53. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(5,1)$, $B(12,18)$, $C(-12,8)$. Dimostrare, trovandone le coordinate, che esiste un punto D equidistante dai punti O, A, B, C.

54. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati il punto $P\left(\frac{3}{2}\,,-\frac{1}{2}\right)$ e il triangolo OAB, i cui vertici A e B hanno coordinate nell'ordine (3,0) e (0,4).

a) Verificare che esiste un punto del piano equidistante dai punti P, O, A, B.

b) Trovare le coordinate dei punti L, H, K, proiezioni ortogonali del punto P sulle rette BC, CA, AB.

c) Verificare che i punti L, H, K sono allineati.

55. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(0,6a)$, $B(-4a,0)$, $C(4a,0)$, dove a è un numero reale positivo assegnato. Indicato con M il punto medio del segmento OA, sia P il piede della perpendicolare condotta da O su MC.

a) Verificare che il triangolo ABP è rettangolo.

b) Calcolare l'area del quadrilatero concavo APBC sapendo che l'area del triangolo ABP è 78 cm^2.

[**R.** a)…; b) 72 cm^2]

56. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il triangolo di vertici O(0,0), A(2,6), B(6,0). Si tracci una generica retta di equazione y=h (con 0<h<6), la quale intersechi i lati OA e BA del triangolo rispettivamente nei punti P e Q.

a) Trovare, in funzione di h, le coordinate dei punti P e Q.

b) Trovare, in funzione di h, le coordinate del punto R in cui s'intersecano le rette OQ e BP.

c) Verificare che il punto in cui la retta AR interseca il lato OB del triangolo non solo non dipende da h ma è esattamente il punto medio del lato OB.

$\left[\textbf{R.}\;\text{a) } P\left(\frac{h}{3},h\right), Q\left(6-\frac{2h}{3},h\right);\;\; \text{b) } R\left(\frac{4h-36}{h-12},\frac{6h}{12-h}\right);\;\; \text{c) ...}\right]$

57. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A, B, C e A', B', C', aventi le seguenti coordinate:

$$A(0,3),\ \ B\left(1,\frac{13}{4}\right),\ \ C(4,4); \qquad A'(0,2),\ \ B'(2,1),\ \ C'(4,0).$$

a) Verificare che i punti A, B, C sono allineati e ugualmente sono allineati i punti A', B', C'.

b) Trovare il punto P intersezione delle rette AB' e A'B, il punto Q intersezione delle rette AC' e A'C, il punto R intersezione delle rette BC' e B'C.

c) Verificare che i punti P, Q, R sono allineati.

[N.B.: I calcoli sono lunghi e noiosi ma non difficili. Si tratta di un caso particolare di una proprietà generale nota come *teorema di Pappo*, dal nome del geometra Pappo di Alessandria, III-IV sec. d.C.
L'enunciato del teorema è il seguente: *Siano A, B, C tre punti situati su una medesima retta e A', B', C' tre punti situati su un'altra retta. I punti P intersezione delle rette AB' e A'B, Q intersezione delle rette AC' e A'C, R intersezione delle rette BC' e B'C sono allineati*.
La rappresentazione grafica di questa proprietà (Fig. 12) ne fa cogliere meglio il significato]

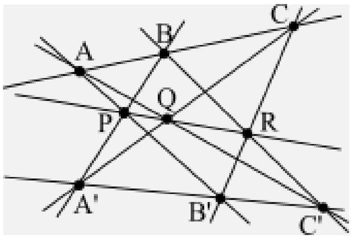

FIG. 12

58. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i triangoli ABC e A'B'C', i cui vertici hanno le seguenti coordinate:

$$A(1,1),\ \ B(2,3),\ \ C(1,5); \qquad A'\left(3,\frac{5}{3}\right), B'(5,3), C'(4,4)$$

e si corrispondono secondo la seguente tabella: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$. Verificare che:

a) le rette che uniscono vertici corrispondenti – vale a dire: AA', BB', CC' – hanno un punto in comune;

b) le rette dei lati corrispondenti - vale a dire: AB e A'B', BC e B'C', CA e C'A' – s'intersecano in punti allineati.

[N.B.: Calcoli lunghi e noiosi ma non concettualmente difficili. Si tratta di un caso particolare di una proprietà generale dei triangoli, nota come *teorema di Desargues*, dal nome del matematico francese Gérard Desargues, 1593-1662.
L'enunciato del teorema è il seguente: *Se le rette dei vertici corrispondenti di due triangoli concorrono in un punto allora le rette dei lati corrispondenti s'intersecano in punti allineati; e viceversa*.
La rappresentazione grafica di questa proprietà (Fig. 13) ne fa cogliere meglio il significato]

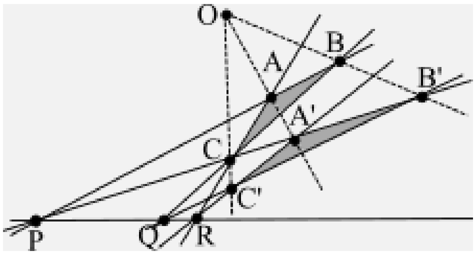

FIG. 13

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Si consideri la seguente equazione in due indeterminate: $2x-3y=1$. Quali sono le sue soluzioni nell'insieme $\mathbb{R}^2$? Trovare almeno due sue soluzioni intere.
2. Cosa s'intende per soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite?
3. Qual è l'interpretazione grafica di un sistema di due equazioni in due incognite?
4. Se un sistema di due equazioni in due incognite è impossibile, qual è l'interpretazione grafica del sistema?
5. Si consideri il sistema formato dalle due equazioni $kx-y=k$ e $x+ky=1$. Per quali valori del parametro reale k esso è determinato?
6. Si consideri il sistema formato dalle due equazioni $kx=1$ e $x-2y=k$. Per quali valori del parametro reale k esso è determinato, indeterminato o impossibile?
7. Per la ristrutturazione della stanza da bagno ho speso € 2560, inclusa l'IVA (imposta sul valore aggiunto). Precisamente ho speso € 1538 in più di quanto ho speso per la sola IVA. È corretto affermare che l'IVA ammonta a 2562–1538 euro, cioè a 924 euro?
8. Che cosa s'intende per fascio di rette a centro? Cosa per fascio di rette parallele?
9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazione: $2x+y+(m-1)=0$, dove m è un parametro reale. È vero che passano tutte per uno stesso punto?
10. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette di equazione: $2x+(m-1)y-1=0$, dove m è un parametro reale. È vero che passano tutte per uno stesso punto?
11. Determinare i due numeri reali a, b tali che risulti identicamente (cioè per ogni valore di x che non faccia perdere di significato alle espressioni coinvolte):
$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}\ .$$

RISPOSTE.

1. Le soluzioni cercate sono costituite da tutte le coppie ordinate (x, y), con $y=\frac{2x-1}{3}$, essendo x è un qualsiasi numero reale. Affinché le soluzioni (x,y) siano intere, è necessario anzitutto che $2x-1$ sia un multiplo di 3, vale a dire: $2x-1=3m$, dove m è un qualsiasi intero. In questo modo $y=m$. Per quanto concerne x, osservando che $x=\frac{3m+1}{2}$, esso risulta intero se e solo se $3m+1$ è pari e perciò se e solo se m è dispari. Per esempio: se $m=1$ si ottiene la soluzione $(2,1)$; se $m=3$ si ottiene la soluzione $(5,3)$; e così via. In generale tutte le soluzioni intere sono date dalla coppia ordinata $\left(\frac{3m+1}{2}, m\right)$, essendo m un qualsiasi numero intero dispari.
2. S'intende ogni coppia ordinata di valori che soddisfi a ciascuna delle due equazioni.
3. È il punto comune alle rette che rappresentano le due equazioni in un piano cartesiano.
4. Il sistema è rappresentato da due rette parallele in senso stretto.
5. Per ogni valore di k. Basta infatti osservare che il determinante D del sistema (formato dai coefficienti delle incognite) è k^2+1, che non si annulla per alcun valore di k.
6. Constatato che i determinanti del sistema sono: $D=-2k$, $D_x=-2$, $D_y=k^2-1$, il sistema è determinato per $k\neq0$, impossibile per $k=0$; non è mai indeterminato.

7. No, è sbagliato. Ragioniamo. Se x è la somma senza l'IVA e y è l'IVA, deve essere $x+y = €2562$ e $x-y = €1538$. Da qui segue il valore dell'IVA: $y = €462$. Cioè la metà esatta di quella ipotizzata.

8. Un fascio di rette con centro O è l'insieme delle rette passanti per O. Un fascio di rette parallele è l'insieme delle rette fra loro parallele.

9. No. Si tratta, infatti, di un fascio di rette parallele.

10. Sì, passano per il punto di coordinate $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$: lo si trova imponendo che l'equazione assegnata, considerata come equazione nell'incognita m, sia indeterminata. Oppure, in alternativa, considerato che si tratta di un fascio di rette, attribuendo ad m due valori particolari (per esempio: m=0 ed m=1) e risolvendo il sistema delle due equazioni che ne derivano.

11. Una volta constatato che è: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, liberando dal denominatore si ottiene la seguente equazione: $(a+b)x+(2a-b)=1$, la quale deve essere verificata identicamente. Il che accade se e solo se risulta contemporaneamente: $\{a+b=0, 2a-b=1\}$. Risolvendo il sistema di queste due equazioni nelle incognite a, b, si trova: $a=1/3, b=-1/3$.

A riprova di ciò sei invitato a verificare che risulta effettivamente:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{1}{3}}{x+2}.$$