L’unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

Prerequisiti:

- Conoscenza dei primi elementi di geometria piana (congruenza dei triangoli, poligoni, teoremi di Pitagora e di Euclide, aree dei poligoni, isometrie).

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l’unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *definire circonferenza e cerchio*
- *riconoscere quando due circonferenze sono congruenti*
- *riconoscere le parti di una circonferenza e di un cerchio*
- *riconoscere le mutue posizioni di una retta e una circonferenza e quelle di due circonferenze*
- *enunciare e dimostrare le proprietà degli angoli alla circonferenza e al centro*
- *dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia inscrivibile in un semicerchio è che sia rettangolo*
- *analizzare e risolvere problemi su circonferenza e cerchio*

Circonferenza e cerchio: definizioni e proprietà

Unità 23

23.1 DEFINIZIONI E PRIME PROPRIETÀ

23.1.1 Cominciamo con le definizioni di circonferenza e cerchio, figure che conosci fin dalla scuola primaria.

Si chiama **circonferenza** il luogo geometrico dei punti del piano che, da un punto assegnato C (detto ***centro*** della circonferenza), hanno la stessa distanza r (detta ***raggio*** della circonferenza).

Si chiama pure raggio di una circonferenza c di centro C ogni segmento CP (Fig. 1), dove P è un qualunque punto di c. Di volta in volta si capirà dal contesto se ci si riferisce al raggio inteso come "misura" o al raggio inteso come "segmento".

Riassumendo, in un piano α una circonferenza c di centro C e raggio r è l'insieme: $c=\{P\epsilon\alpha \mid \overline{CP}=r\}$.

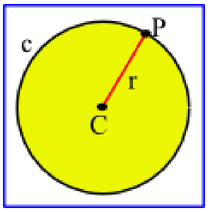

FIG. 1

Ogni circonferenza c di un piano α ripartisce l'insieme $\alpha-c$ in due sottoinsiemi: quello dei punti che dal centro hanno distanza minore del raggio e quello dei punti che hanno distanza maggiore. Il primo si dice insieme dei punti *interni* a c, il secondo insieme dei punti *esterni*.

L'insieme dei punti interni ad una circonferenza si dice anche **cerchio aperto**.
L'insieme formato dai punti di una circonferenza e dai punti interni ad essa si dice **cerchio chiuso** (o semplicemente **cerchio**).

Il centro e il raggio di una circonferenza si dicono rispettivamente *centro* e *raggio* del cerchio relativo (chiuso o aperto). Pertanto in un piano α un cerchio (chiuso) k e un cerchio aperto k', di centro C e raggio r, sono rispettivamente gli insiemi seguenti:

$$k=\{P\epsilon\alpha \mid \overline{CP}\leq r\}, \quad k'=\{P\epsilon\alpha \mid \overline{CP}<r\}.$$

AVVERTENZA.
A volte, e non solo nel linguaggio comune, si usa il termine "cerchio" per indicare la "circonferenza", ma il contesto fa capire se ci si riferisce alla circonferenza o al cerchio e non dovrebbero nascere equivoci. Altre volte il cerchio è denominato ***disco***.
La circonferenza è anche detta *frontiera* (o *contorno* o *bordo*) del cerchio che essa racchiude.

23.1.2 Vale il seguente teorema.

♦ **TEOREMA. Se due circonferenze hanno raggi uguali, esiste una traslazione che trasforma l'una nell'altra.**

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente far vedere che ogni punto di una circonferenza è il trasformato di un punto dell'altra mediante una traslazione. Chiamati allora C e C' rispettivamente i centri delle due circonferenze c e c' (Fig. 2) di raggi uguali, diciamo P' un generico punto della circonferenza c' e costruiamo il punto P in modo che risulti: $\overline{CP}=\overline{C'P'}$.
Siccome C'P' è il raggio della circonferenza c', che per ipotesi è uguale al raggio della circonferenza c,

allora CP è proprio il raggio di questa circonferenza. Ne discende che P è un punto di c. D'altra parte il quadrilatero CPP'C', avendo i lati opposti paralleli e congruenti, è un parallelogramma. Pertanto PP'≅CC'.
In conclusione, ogni punto P' della circonferenza c' è il trasformato di un punto P della circonferenza c mediante la traslazione che manda C in C'. [c.v.d.]

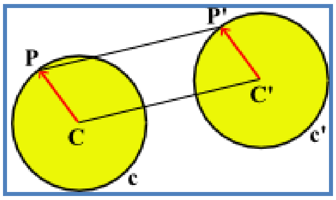

FIG. 2

Poiché ogni traslazione trasforma ogni figura in una figura congruente, possiamo concludere che:

Due circonferenze di ugual raggio sono congruenti.

Analogo discorso vale per due cerchi di ugual raggio.

23.1.3 Ogni segmento avente come estremi due punti di una circonferenza si dice ***corda*** della circonferenza (e del relativo cerchio) (Fig. 3).
Ogni corda passante per il centro della circonferenza si chiama ***diametro***. Pertanto:

Ogni diametro di una circonferenza è lungo il doppio del raggio.

Di conseguenza:

Tutti i diametri di una circonferenza hanno la stessa lunghezza.

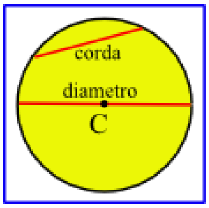

FIG. 3

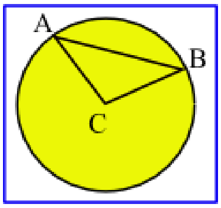

FIG. 4

♦ TEOREMA 1. **In ogni circonferenza la lunghezza del diametro è maggiore di quella di ogni altra corda.**

La dimostrazione è abbastanza elementare: basta considerare il triangolo CAB (Fig. 4) e ricordare le relazioni tra i suoi lati. La lasciamo a te.

♦ TEOREMA 2. **In ogni circonferenza la retta di un qualunque diametro è asse di simmetria per la circonferenza.**

Anche la dimostrazione di questo teorema è lasciata a te. Ti forniamo una traccia di dimostrazione.
Se s è una retta di un qualunque diametro (***retta diametrale***) di una circonferenza c, basta dimostrare che il simmetrico di un qualunque punto P di c rispetto alla retta s è un punto P' ancora di c.
Cosa se ne può desumere per le due parti in cui un diametro divide una circonferenza (e il relativo cerchio)? Evidentemente che sono congruenti.

Ciascuna delle due parti congruenti, in cui un diametro divide una circonferenza [rispettivamente: un cerchio], si chiama **semicirconferenza** [risp.: **semicerchio**].
Il centro e il raggio della circonferenza [risp.: cerchio] si chiamano pure *centro* e *raggio* della semicir-

conferenza [risp.: semicerchio], anche se, forse, la denominazione di "centro" è impropria, dal momento che certamente non si tratta di un centro di simmetria della figura (semicirconferenza o semicerchio che sia).

23.1.4 Ti proponiamo per esercizio di risolvere le seguenti questioni.

1. Dimostra che l'asse di una qualunque corda di una circonferenza passa per il centro di questa.
2. Dimostra che in una circonferenza il diametro perpendicolare ad una qualunque corda la biseca.
3. Dimostra che in una circonferenza corde congruenti hanno uguale distanza dal centro; e viceversa.
4. Dimostra che, se due corde congruenti di una medesima circonferenza hanno un estremo in comune, allora il diametro passante per quell'estremo biseca l'angolo formato da esse.
5. Dimostra che, se due corde congruenti di una circonferenza si secano, allora i segmenti dell'una sono congruenti a quelli dell'altra.
6. Dimostra che, se dagli estremi di un diametro di una circonferenza si conducono due corde parallele, gli estremi delle corde non appartenenti al diametro sono allineati col centro della circonferenza. Cosa si può concludere riguardo alle due corde?
7. Fra le corde di una circonferenza passanti per un suo punto interno, determina quella di minima lunghezza e quella di lunghezza massima. Come sono disposte le due corde?

23.2 CIRCONFERENZE PER UNO, DUE, TRE PUNTI

23.2.1 Si capisce facilmente che:

- **Per ogni punto del piano passano infinite circonferenze.**
  Sono tutte quelle che hanno il centro in un altro punto qualsiasi del piano e passano per il punto considerato (Fig. 5).

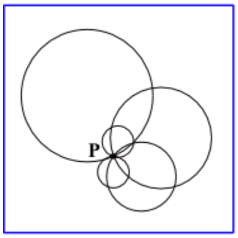

FIG. 5

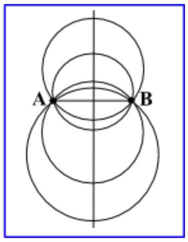

FIG. 6

- **Per due punti distinti del piano passano infinite circonferenze**.
  Sono tutte quelle che hanno il centro sull'asse del segmento avente per estremi i due punti A, B per i quali passano le circonferenze (Fig. 6).

  Tra le circonferenze passanti per due punti assegnati qual è quella di minimo raggio?
  Per tre punti distinti quante circonferenze passano? Prova a dare una risposta prima di continuare.

23.2.2 Vale il seguente teorema.

- TEOREMA. **Per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza. Per tre punti allineati non passa alcuna circonferenza.**

DIMOSTRAZIONE. Siano A, B, C tre punti non allineati (Fig. 7). Per dimostrare l'asserto basta provare che esiste uno ed un sol punto equidistante da essi. Ora, come sappiamo, un tale punto di fatto esiste: è il circocentro O del triangolo ABC, cioè il punto in cui si secano gli assi del triangolo. Se, invece, i tre punti sono allineati (Fig. 8), gli assi dei segmenti AB e BC (luoghi geometrici dei punti equidistanti dai loro estremi) sono paralleli in senso stretto e perciò non hanno punti comuni. Quindi non esiste alcun punto equidistante da A, B, C e di conseguenza non esiste alcuna circonferenza passante per questi punti. [c.v.d.]

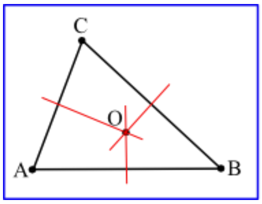

FIG. 7

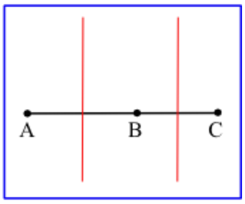

FIG. 8

23.2.3 Come conseguenza immediata del teorema precedente si hanno due corollari.

- ♦ COROLLARIO 1. **Due circonferenze distinte hanno al più due punti comuni.**
- ♦ COROLLARIO 2. **Su una qualsiasi circonferenza non esistono tre punti allineati.**

23.3 POSIZIONI RECIPROCHE DI UNA RETTA E DI UNA CIRCONFERENZA

Con considerazioni di geometria sintetica, che però ci esimiamo dal fare, oppure con considerazioni di geometria analitica, che svilupperemo più avanti (1), si possono dimostrare alcuni teoremi relativi alle reciproche posizioni di una retta e una circonferenza.

Qui ci limitiamo a fornirne gli enunciati, non prima di aver fatto notare come già sopra abbiamo visto che **una retta ed una circonferenza non possono avere più di due punti in comune**.

Ragion per cui, i casi possibili sono tre:

- nessun punto in comune fra una retta e una circonferenza,
- un solo punto in comune,
- due punti in comune.

In effetti, questi casi corrispondono a quelli che si hanno a seconda che la distanza d del centro della circonferenza dalla retta sia maggiore, uguale o minore del raggio r di k.

Ricordiamo che la distanza del centro O di k dalla retta t è il segmento perpendicolare OH condotto da O a t.

- 1° CASO. Se $d>r$ (Fig. 9), t non ha punti comuni con k.

Una retta ed una circonferenza che non hanno punti comuni si dicono ***esterne*** oppure si dice che *l'una è esterna l'altra*.

- 2° CASO. Se $d=r$ (Fig. 10), t ha uno ed un sol punto in comune con k.

Una retta ed una circonferenza che hanno in comune uno ed un sol punto si dicono ***tangenti*** (oppure si dice che *l'una è tangente all'altra* o anche che *l'una tocca l'altra*)

Il loro punto comune si chiama ***punto di tangenza*** (o ***di contatto***).

La tangente ad una circonferenza in un punto è la perpendicolare alla retta diametrale passante per quel punto.

- 3° CASO. Se $d<r$ (Fig. 11), t ha in comune con k due punti.

Una retta ed una circonferenza aventi due punti in comune si dicono ***secanti*** oppure si dice che *l'una*

---

[1] Cfr.: Unità 42: Circonferenza nel piano cartesiano, N° 42.2.

seca l'altra.

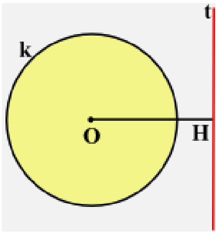

FIG. 9

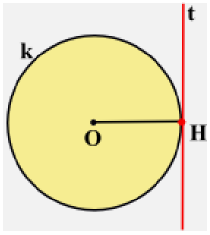

FIG. 10

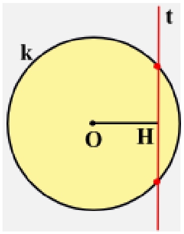

FIG. 11

23.4 MUTUE POSIZIONI DI DUE CIRCONFERENZE

Circa le reciproche posizioni di due circonferenze valgono le stesse considerazioni precedenti [2]. Anche adesso ci limitiamo agli enunciati dei teoremi.
Consideriamo due circonferenze k e k', di centri C e C' e di raggi r ed r' rispettivamente (supponiamo $r \geq r'$).

- Se $r-r'<CC'<r+r'$ (Fig. 12) le due circonferenze hanno due punti in comune: si dicono ***secanti***.
- Se $CC'=r-r'$ oppure $CC'=r+r'$ le due circonferenze hanno un sol punto in comune, chiamato *punto di contatto*: si dicono ***tangenti***.
  Nel primo caso (Fig. 13), i punti di k', fatta eccezione per il punto di contatto, sono tutti interni a k: le due circonferenze si dicono più precisamente ***tangenti internamente***.
  Nel secondo caso (Fig. 14), i punti di ognuna delle due circonferenze, fatta sempre eccezione per il punto di contatto, sono tutti esterni all'altra: le due circonferenze si dicono più propriamente ***tangenti esternamente***.

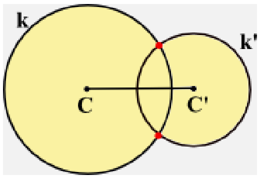

FIG.12

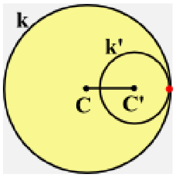

FIG.13

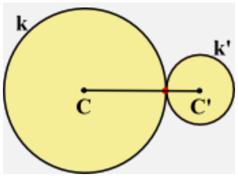

FIG.14

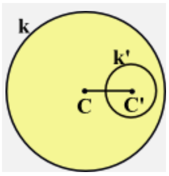

FIG.15

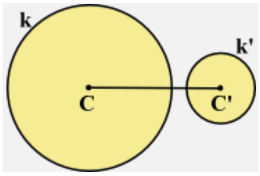

FIG.16

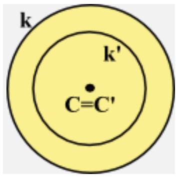

FIG.17

- Se $CC'<r-r'$ oppure $CC'>r+r'$ le due circonferenze non hanno punti comuni: si dicono ***non secanti***.
  Nel primo caso (Fig. 15), i punti di k' sono tutti interni a k e per questo **k' *si dice interna a* k**. Nel secondo caso (Fig. 16), i punti di ognuna delle due circonferenze sono tutti esterni all'altra ed esse si dicono, per l'appunto, ***esterne***.
  Un caso particolare di circonferenze l'una interna all'altra si ha quando i centri delle due circonferenze coincidono, essendo però disuguali i loro raggi (Fig. 17). In questo caso esse si dicono ***con-***

[2] Cfr.: Unità 42 succitata, N° 42.3.

centriche.

La parte di piano compresa fra due circonferenze concentriche si chiama **corona circolare**.

LABORATORIO DI MATEMATICA

1. ® Sono date due circonferenze, i cui centri distano 8 cm e i cui raggi misurano 2 cm e 4 cm.

- Servendoti di riga graduata e compasso, disegna una circonferenza di raggio 3 cm tangente alle due circonferenze date.
- Esiste una sola di tali circonferenze?
- Il raggio della circonferenza tangente alle due circonferenze assegnate può avere qualsiasi misura?

2. Servendoti di riga non graduata e compasso, disegna la bisettrice di un angolo assegnato.

Discuti in classe con i tuoi compagni di entrambi i problemi e, se occorre, chiedi l'aiuto del professore.

23.5 PARTI DELLA CIRCONFERENZA E DEL CERCHIO

23.5.1 Ogni corda divide un cerchio in due parti (Fig. 18), ciascuna delle quali si chiama **segmento circolare ad una base**. Lo si distingue dal **segmento circolare a due basi** che è la parte di cerchio compresa tra due corde parallele (Fig. 19).

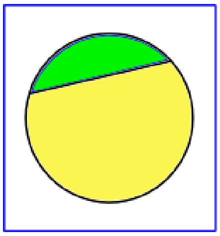

FIG. 18

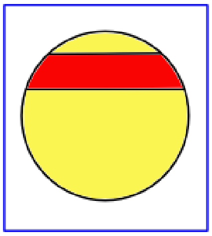

FIG. 19

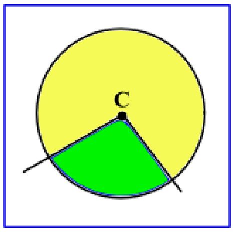

FIG. 20

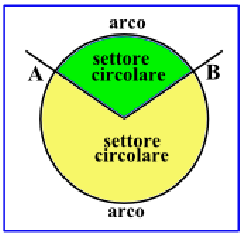

FIG. 21

23.5.2 Considerata una circonferenza k di centro C, ogni angolo (convesso o concavo) avente il centro in C (Fig. 20) si chiama **angolo al centro**. L'intersezione di un angolo al centro:

- con una circonferenza (Fig. 21) si dice **arco** (di circonferenza);
- con un cerchio (Fig. 21) si dice **settore circolare**.

L'angolo al centro che determina l'arco o il settore si chiama ***ampiezza*** dell'arco o del settore. Evidentemente, se l'angolo al centro è un angolo piatto allora l'arco di circonferenza è una semicirconferenza mentre il settore circolare è un semicerchio.

I punti A, B, in cui i lati dell'angolo al centro intersecano la circonferenza (Fig. 21), si dicono *estremi* dell'arco. Come in altre situazioni analoghe incontrate in passato (per esempio: i segmenti), si parla di *archi chiusi*, *aperti*, *semiaperti*.

23.5.3 Due archi, AB e CD, di una circonferenza di centro O (Fig. 22), corrispondenti ad angoli al centro, $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, congruenti, sono tali che, nella rotazione di ampiezza $A\hat{O}C$ intorno ad O, l'arco AB viene trasformato nell'arco CD. Pertanto due archi siffatti sono congruenti. Dunque:

Archi di una stessa circonferenza, corrispondenti ad angoli al centro congruenti, sono congruenti.

Considerato un arco AB di una circonferenza, si dice che esso ***sottende*** la corda AB.

Vale il seguente teorema di cui ti proponiamo la dimostrazione.

♦ TEOREMA. **In una circonferenza archi congruenti sottendono corde congruenti.**

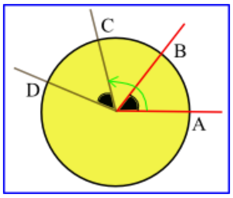

FIG. 22

23.5.4 Come puoi facilmente constatare, mentre ogni arco di una circonferenza sottende una sola corda, ogni corda è sottesa, invece, da due archi. Se la corda è il diametro, i due archi sono congruenti poiché entrambi semicirconferenze. Se invece la corda non è un diametro allora uno dei due archi corrisponde ad un angolo al centro convesso e l'altro ad un angolo concavo. Per analogia, nel primo caso l'arco si dice *convesso*, nel secondo *concavo*, quantunque entrambi gli archi siano figure concave [3].

Vale quest'altro teorema, la cui dimostrazione è pure lasciata a te; esso è, in sostanza, il teorema inverso del precedente.

- TEOREMA. **In una circonferenza due archi, entrambi convessi o entrambi concavi, sono congruenti se lo sono le corde sottese da essi.**

23.6 ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA E ANGOLI AL CENTRO

23.6.1 Ogni angolo convesso avente il vertice su una circonferenza ed i lati entrambi secanti la circonferenza (come l'angolo $A\widehat{V}B$ - Fig. 23) oppure uno secante e l'altro tangente (come l'angolo $A\widehat{V}B$ - Fig. 24) si chiama ***angolo alla circonferenza***.
Ogni angolo alla circonferenza e la circonferenza stessa s'intersecano secondo un arco di circonferenza: si dice che l'angolo alla circonferenza ***insiste*** su tale arco. Con riferimento alle figure 23 e 24, gli angoli $A\widehat{V}B$ insistono rispettivamente sugli archi $A\overset{\frown}{C}B$ e $V\overset{\frown}{C}B$.
Quando i lati sono entrambi secanti la circonferenza (Fig. 23) si dice pure che l'angolo alla circonferenza $A\widehat{V}B$ è ***inscritto*** nell'arco $A\overset{\frown}{V}B$.

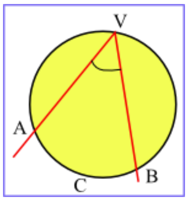

FIG. 23

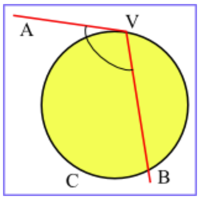

FIG. 24

Poiché, com'è noto, su ogni arco di circonferenza insiste pure uno ed un solo angolo al centro, possiamo concludere che:
Ad ogni angolo alla circonferenza è associato uno ed un solo angolo al centro.
È vera l'implicazione inversa?
Considerato un angolo alla circonferenza, l'angolo al centro che insiste sullo stesso arco si dice *corri-*

---

[3] Le definizioni generali di figura convessa e concava, che sono le seguenti: una figura geometrica si dice **convessa** se, presi due qualsiasi suoi punti, il segmento che li ha come estremi è tutto contenuto nella figura. Se, al contrario, esiste qualche segmento siffatto che non è contenuto interamente nella figura, questa si dice **concava**.

spondente all'angolo alla circonferenza.

♦ TEOREMA. **Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro.**
DIMOSTRAZIONE. Occorre distinguere tre casi, a seconda che il centro della circonferenza appartenga ad uno dei lati dell'angolo oppure sia interno all'angolo oppure infine esterno. E per ciascun caso bisogna distinguere due sottocasi, a seconda che i lati dell'angolo siano secanti la circonferenza oppure uno sia secante e l'altro tangente.

- 1° CASO. Il centro O della circonferenza appartiene al lato VB dell'angolo alla circonferenza $A\hat{V}B$.
  a) Se anche il lato VA seca la circonferenza (Fig. 25), si può subito stabilire che, essendo isoscele il triangolo OAV, sono congruenti i suoi angoli alla base $A\hat{V}O$ e $O\hat{A}V$. D'altronde l'angolo $A\hat{O}B$ è un angolo esterno del triangolo OAV e perciò la sua ampiezza è uguale alla somma delle ampiezze degli angoli $A\hat{V}O$ e $O\hat{A}V$. Di modo che $A\hat{O}B=2\ A\hat{V}O$, ossia: $A\hat{V}B=\frac{1}{2}\ A\hat{O}B$.

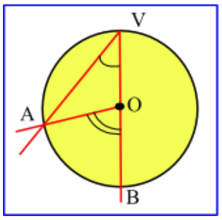

FIG. 25

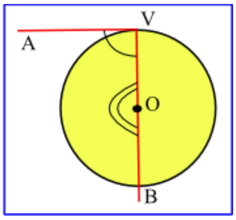

FIG. 26

  b) Se il lato VA è tangente alla circonferenza (Fig. 26), evidentemente è $A\hat{V}B=\frac{1}{2}\ V\hat{O}B$ poiché l'angolo $A\hat{V}B$ è retto e $V\hat{O}B$ è piatto.
- 2° CASO. Il centro O della circonferenza è interno all'angolo alla circonferenza $A\hat{V}B$.
  Sia che entrambi i lati dell'angolo siano secanti la circonferenza (Fig. 27) o che uno sia secante e l'altro tangente (Fig. 28) è possibile, una volta condotta la semiretta di origine V passante per O la quale intersechi ulteriormente in C la circonferenza, ricondursi al 1° caso. Infatti, dette α e β le ampiezze dell'angolo $A\hat{V}B$ e del corrispondente angolo al centro:
  a) con riferimento alla figura 27:
$$A\hat{V}C=\frac{1}{2}A\hat{O}C \text{ et } B\hat{V}C=\frac{1}{2}B\hat{O}C \ \rightarrow A\hat{V}C+B\hat{V}C=\frac{1}{2}\left(A\hat{O}C+B\hat{O}C\right) \ \rightarrow \ \alpha=\frac{1}{2}\beta\,;$$
  b) con riferimento alla figura 28:
$$A\hat{V}C=\frac{1}{2}V\hat{O}C \text{ et } B\hat{V}C=\frac{1}{2}B\hat{O}C \ \rightarrow A\hat{V}C+B\hat{V}C=\frac{1}{2}\left(V\hat{O}C+B\hat{O}C\right) \ \rightarrow \ \alpha=\frac{1}{2}\beta\,.$$

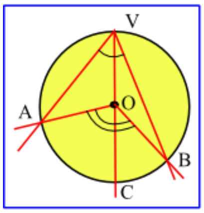

FIG. 27

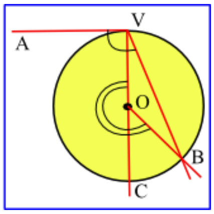

FIG. 28

- 3° CASO. Il centro O della circonferenza è esterno all'angolo alla circonferenza $\boldsymbol{A\hat{V}B}$.
  Ragionando come nel caso precedente si giunge alla medesima conclusione. Avvertiamo, tuttavia, che questa volta, invece di somme di angoli congruenti, bisognerà considerare delle differenze.

Lasciamo a te la dimostrazione.

23.6.3 Dal teorema precedente seguono due corollari molto importanti.

- COROLLARIO 1. **Gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su due archi congruenti sono congruenti.**
  L'ampiezza di ciascuno di essi è infatti la stessa perché è la metà della medesima ampiezza: quella dei corrispondenti angoli al centro che sono congruenti dal momento che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti.
- COROLLARIO 2. **Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.**
  Esso infatti è la metà del corrispondente angolo al centro che è piatto.

La scoperta che "un angolo inscritto in un semicerchio è un angolo retto" è attribuita a **Talete** di Mileto (vissuto all'incirca tra il 624 e il 548 a.C.) da Diogene Laerzio (III sec. d.C.), commentatore di opere filosofiche. Nel mondo anglosassone questa proprietà va sotto il nome di "teorema di Talete". In Italia il teorema di Talete è un'altra cosa, come vedremo più avanti.

23.7 PROPRIETÀ DEI TRIANGOLI

23.7.1 Incominciamo con una proprietà notevole dei **triangoli rettangoli**. Si tratta di una proprietà che è immediata conseguenza del precedente corollario 2. Precisamente:
Ogni triangolo avente un lato coincidente col diametro di una semicirconferenza e il terzo vertice sulla semicirconferenza (o, come anche si dice, ogni triangolo *inscritto* in una semicirconferenza) è un triangolo rettangolo (Fig. 29).

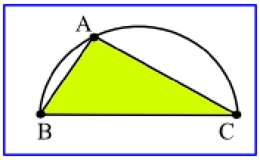

FIG. 29

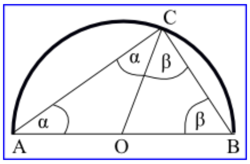

FIG. 30

Di questa proprietà si può fornire un'altra dimostrazione, non collegata alle proprietà degli angoli al centro ed alla circonferenza, ma dipendente dalla proprietà riguardante la somma degli angoli interni di un triangolo. La figura 30 aiuta a sviluppare questa dimostrazione, che lasciamo a te per esercizio.

Della proprietà del triangolo inscritto in un semicerchio vale anche l'inversa come mostra il seguente teorema.

- ♦ TEOREMA. **Dato un triangolo rettangolo, la semicirconferenza avente per diametro l'ipotenusa del triangolo e situata dalla stessa parte del vertice dell'angolo retto contiene tale vertice (o, come anche si dice, la semicirconferenza è *circoscritta* al triangolo).**

DIMOSTRAZIONE. Considerato il triangolo ABC, rettangolo in A (Fig. 31), costruiamo la semicirconferenza di diametro BC, situata dalla stessa parte di A.
Se essa non passasse per A intersecherebbe il segmento BA (Fig. 31a) o il suo prolungamento dalla parte di A (Fig. 31b) in un punto D. In entrambi i casi, l'angolo $B\widehat{D}C$, inscritto in una semicirconferenza, sarebbe retto. Di modo che da C si potrebbero condurre due rette perpendicolari alla retta AB: le rette CA e CD. Il che è manifestamente assurdo. Dunque A appartiene alla semicirconferenza. [c.v.d.]

Le due precedenti proprietà si possono riassumere nella seguente:

Condizione sufficiente e necessaria affinché un triangolo sia rettangolo è che sia inscrivibile in un semicerchio.

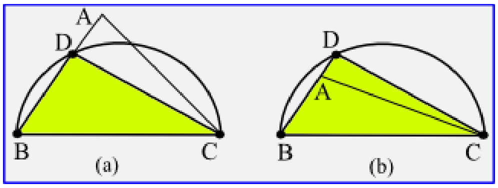

FIG. 31

23.7.2 Ti proponiamo, adesso, come applicazione della proprietà dei triangoli rettangoli, la dimostrazione di un importante teorema riguardante le tangenti ad una circonferenza condotte per un punto esterno ad essa.

♦ TEOREMA. Considerati una circonferenza k di centro C ed un punto P esterno ad essa e detti PA e PB i segmenti tangenti a k condotti per P, risulta che:

1. $PA \cong PB$; 2. $PC \perp AB$; 3. PC biseca $A\widehat{P}B$.

Ai fini della dimostrazione ti suggeriamo di considerare la circonferenza di diametro PC e, detti A, B i punti in cui essa interseca k, … continua tu .

E per concludere ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Sia AB un arco di circonferenza e sia M il suo punto medio. Dimostrare che il diametro della circonferenza, condotto per M, è perpendicolare alla corda AB nel suo punto medio.
2. I due triangoli ABC e ABD hanno uguali gli angoli opposti a loro lato comune AB e sono disposti dalla stessa parte rispetto a questo lato. Dimostrare che i punti A, B, C, D sono situati sulla medesima circonferenza (o, come anche si dice, sono *conciclici*).
3. Due circonferenze uguali sono secanti e sono A e B i loro punti comuni. Condotta per A una generica retta r, siano C e D gli ulteriori punti in cui essa interseca le due circonferenze. Si dica M il punto medio del segmento CD.
   a) Dimostrare che il triangolo ABM è rettangolo in M per ogni posizione di r.
   b) Cosa si può concludere circa il luogo geometrico descritto dal punto M al variare di r?
2. Sia una semicirconferenza di centro O e diametro AB e siano P un suo generico punto ed H la proiezione ortogonale di P su AB. H è situato fra A ed O. Si considerino le seguenti coppie di segmenti, di cui sono note le lunghezze:
   [A] AO, HO. [B] HO, HP. [C] HO, HB. [D] AB, OP.
   Una soltanto di esse NON permette di calcolare la lunghezza della corda AP. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
3. È assegnata una semicirconferenza di diametro AB. Si prendano su di essa i due punti C e D in modo che gli angoli $B\widehat{A}C$ e $C\widehat{A}D$ misurino entrambi 30°.
   a) Trovare le misure degli angoli interni del triangolo ACD.
   b) Calcolare il rapporto fra la corda CD e il diametro AB.
4. Un trapezio ha i lati tangenti ad una circonferenza. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro della circonferenza e gli estremi di un lato obliquo è rettangolo.
5. Quanti sono i triangoli rettangoli che hanno per ipotenusa un medesimo segmento AB assegnato?
   [A] 1. [B] 2. [C] 4. [D] Infiniti.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

6. Due vertici di un triangolo coincidono con gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio unitario mentre il terzo vertice è situato sulla circonferenza medesima. Trovare, dandone esauriente spiegazione, se tra le seguenti terne di numeri qualcuna può indicare le lunghezze dei lati del triangolo:

$$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(2,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\ \left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(2,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right).$$

23.7.3 Occupiamoci adesso dei **triangoli qualunque**. È noto che [4]:

- gli assi dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto equidistante dai vertici del triangolo;
- le bisettrici degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto equidistante dai lati del triangolo.

Il primo punto è chiamato *circocentro* poiché la circonferenza avente il centro in tale punto e raggio uguale alla distanza comune di esso dai vertici del triangolo contiene tali vertici (Fig. 32): si dice che la circonferenza è ***circoscritta*** al triangolo, il quale a sua volta si dice ***inscritto*** nella circonferenza.

Il secondo punto è chiamato incentro poiché la circonferenza avente centro in tale punto e raggio uguale alla distanza comune di esso dai lati del triangolo è tangente a tali lati (Fig. 33): si dice che la circonferenza è ***inscritta*** nel triangolo, il quale a sua volta si dice ***circoscritto*** alla circonferenza.

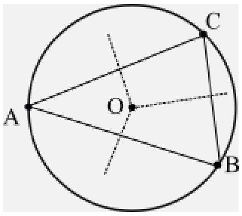

FIG. 32

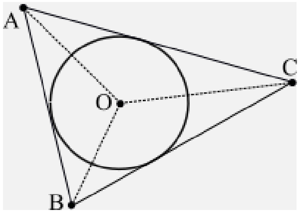

FIG. 33

VERIFICHE [5]

Problemi di dimostrazione (nn. 1-16):

1. Due circonferenze di centri O ed O’ sono secanti. Per uno dei due punti intersezione si conduca la parallela ad OO’ e si dicano A e B gli ulteriori punti comuni a questa retta ed a ciascuna delle due circonferenze. Si dimostri che AB = 2 OO’.
2. Considerato il diametro AB di una circonferenza C di centro O, si conducano le rette t_A e t_B tangenti a C in A e B rispettivamente e si conduca una terza tangente t a C in un suo altro punto qualsiasi, purché distinto dai due precedenti. Posto $t_A \cap t=\{M\}$ e $t_B \cap t=\{N\}$, si dimostri che il triangolo MON è rettangolo in O.
3. ® Considerata una semicirconferenza C di diametro AB e centro O, detta t la tangente ad essa in A e condotta per un suo generico punto M, distinto da A e da B, la retta s tangente a C, indicare con P l'intersezione di s con t, con Q l'intersezione di s con la perpendicolare ad AB per O e con R la proiezione

---

[4] Cfr.: Unità 16: Isometrie nel piano, N° 16.6, esercizi N° 4 e N° 6.

[5] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella “Integrazione 2”, file “Matematica – Integrazione 2, unità 1-27”, pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

ortogonale di P su OQ.

a) Dimostrare che i due triangoli PRQ ed OMQ sono congruenti qualunque sia M.

b) Indicato quindi con r il raggio di C, dimostrare che:
   - se AP > r, il quadrilatero OMRP è un trapezio isoscele;
   - se AP < r, il quadrilatero ORMP è un trapezio isoscele.

4. Due circonferenze, C e C', si secano in due punti A e B. Inoltre C' passa per il centro di C. Dimostrare che il punto intersezione delle rette tangenti a C in A e B appartiene a C'.

5. Considerate due circonferenze tangenti, internamente o esternamente, si conduca per il punto di contatto una secante comune e siano A e B gli ulteriori punti in cui essa interseca le due circonferenze. Dimostrare che le tangenti alle circonferenze nei relativi punti A, B sono parallele.

6. Considerata una circonferenza C, si conducano per un punto A esterno ad essa i segmenti tangenti AM e AN e, per un punto P appartenente al minore degli archi]MN[, la retta tangente a C. Questa intersechi AM ed AN nei punti R ed S rispettivamente. Si dimostri che, al variare di P sull'arco]MN[, il perimetro del triangolo ARS rimane costante.

7. Detto P un punto di una circonferenza di centro O, sia Q un qualsiasi altro punto della circonferenza, non allineato con O e P. Dopo aver giustificato che la bisettrice dell'angolo $O\widehat{P}Q$ interseca ulteriormente la circonferenza in un punto A, dimostrare che le rette PQ e OA sono parallele.

8. Considerato un triangolo ABC, si traccino le circonferenze C' e C" aventi i centri nei punti A e B rispettivamente ed entrambe passanti per C. Dopo aver spiegato perché C' e C" si secano in un altro punto D, si dimostri che la retta AB è l'asse del segmento CD.

9. Considerata una semicirconferenza di diametro AB, si chiami C un suo qualunque punto e sia H la proiezione di C su AB. Condotta per C la tangente t alla semicirconferenza, si dica K la proiezione di A su t. Si dimostri che i due triangoli AHC e AKC sono congruenti.

10. ® Due circonferenze sono tangenti internamente in un punto A. Condotta per A una secante comune, si dicano M ed N rispettivamente i punti in cui essa interseca ulteriormente la circonferenza esterna C e quella interna C'. Considerata poi la corda PQ di C tangente in N a C', si chiamino R l'ulteriore punto in cui AP interseca C' ed S quello in cui l'interseca AQ. Si dimostri che:

a) MN ∥ NR e MQ ∥ NS; b) PQ ∥ RS.

11. Considerato un triangolo ABC, siano C' e C" due circonferenze aventi i centri in A e in B rispettivamente e passanti entrambe per C. Dopo aver spiegato perché C' e C" s'intersecano in un altro punto D, dimostrare che il quadrilatero ACBD ha le diagonali perpendicolari ed è circoscrivibile ad una circonferenza C. Dimostrare inoltre che i centri di C', C", C sono allineati.

12. Il trapezio ABCD è tale che la base maggiore AB contiene il diametro di un semicerchio mentre gli altri tre lati sono tangenti alla semicirconferenza. Dimostrare che si ha: AB=AD+BC.

13. I due triangoli ABC ed ABD, entrambi rettangoli, sono collocati dalla stessa parte rispetto all'ipotenusa AB. Chiamati E il punto intersezione delle rette AC e BD ed F quello delle rette AD e BC, dimostrare che:
- i punti A, B, C, D si trovano su una circonferenza di centro O';
- i punti E, C, F, D si trovano su una circonferenza di centro O";
- la retta O'O" è l'asse del segmento CD.

14. Dimostrare che, considerato un qualsiasi triangolo rettangolo, il vertice dell'angolo retto ed i punti medi dei tre lati appartengono ad una medesima circonferenza. Giustificare inoltre che il raggio di tale circonferenza è la metà di quello della circonferenza circoscritta al triangolo. Provare infine che le due circonferenze sono tangenti internamente.

15. ® Il quadrilatero convesso ABCD, avente le diagonali perpendicolari, ha i vertici su una circonferenza di centro O. Detti M ed N rispettivamente i punti medi dei lati AD e BC, dimostrare che i triangoli AMO e CNO sono congruenti. Dopo aver esteso il ragionamento all'altra coppia di lati opposti AB e DC, dedurne che la distanza di O da un qualsiasi lato del quadrilatero è la metà della lunghezza del lato opposto a quello considerato.

[**R.** Spunti per la dimostrazione: $A\hat{O}M \cong A\hat{C}D$ poiché … ; $B\hat{D}C \cong O\hat{A}M$ perché complementari degli angoli congruenti …; d'altronde $B\hat{D}C \cong N\hat{O}C$ poiché … ; quindi $O\hat{A}M \cong N\hat{O}C$ e … ; infine …]

16. Si consideri la bisettrice AD del triangolo ABC.
a) Il triangolo ACD può risultare isoscele sulla base AD? E sulla base AB? Eventualmente sotto quali condizioni?
b) Indicato con M il punto medio del lato AC, il quadrilatero ABDM può essere un trapezio? Eventualmente sotto quali condizioni? Si tratta di un trapezio particolare?

Problemi di determinazione:

17. Devi costruire la bisettrice di un angolo convesso e disponi solamente di riga non graduata e compasso. Come pensi di fare?

18. PROBLEMA RISOLTO. Il quadrilatero convesso ABCD ha i vertici su una circonferenza (il quadrilatero si dice *ciclico*). Dimostrare che i suoi angoli opposti sono supplementari.
Sapendo, quindi, che gli angoli del quadrilatero con vertici in A e B misurano rispettivamente 30° e 75°, calcolare le misure degli angoli aventi i vertici in C e D.
Ammesso poi che AB sia un diametro del cerchio:
a) dimostrare che la retta AC biseca l'angolo $B\hat{A}D$;
b) dimostrare che il triangolo BCD è isoscele.
RISOLUZIONE. Indichiamo per comodità con a, b, c, d le ampiezze degli angoli interni del quadrilatero ABCD, aventi i vertici rispettivamente nei punti A, B, C, D.
Lasciamo a te il compito di far vedere che i suoi angoli opposti sono supplementari.
Siccome, allora, gli angoli in A e in C sono supplementari e così pure gli angoli in B e in D, risulta: $a+c=180°,\ b+d=180°$.
Per cui, essendo $a=30°$ e $b=75°$, si ha: $c = 150°,\ d = 105°$.
Se ora AB è un diametro del cerchio (Fig. 34), l'angolo $A\hat{D}B$ e l'angolo $A\hat{C}B$ sono retti. Di conseguenza: $B\hat{A}C=90°-A\hat{B}C=90°-75°=15°$ e pertanto anche $C\hat{A}D=15°$.
D'altra parte $B\hat{D}C=C\hat{A}D$, poiché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco CD, e $D\hat{B}C=B\hat{A}C$, perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC. Il triangolo CBD è dunque isoscele sulla base DB.

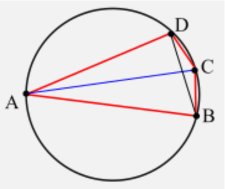

FIG. 34

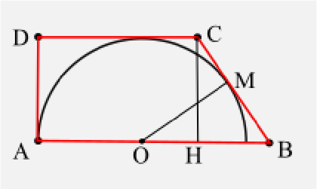

FIG. 35

19. PROBLEMA RISOLTO. Un trapezio rettangolo è tale che la sua base maggiore contiene il diametro di un semicerchio di raggio noto r, mentre gli altri suoi lati sono tangenti al semicerchio. Sapendo che il lato obliquo del trapezio è lungo $\frac{5}{4}$r, calcolarne il perimetro e l'area.

RISOLUZIONE. Considerato il trapezio ABCD, rettangolo in A e in D, diciamo O il centro del semicerchio, M il punto il cui il lato obliquo BC tocca la semicirconferenza ed H la proiezione ortogonale di C su AB (Fig. 35).

Il testo del problema fornisce i seguenti dati: $\overline{OM}=\overline{CH}=\overline{OA}=r$, $\overline{BC}=\frac{5}{4}r$.

I due triangoli CHB ed OMB sono congruenti perché triangoli rettangoli (in H e in M) con un angolo acuto in comune ($\widehat{B}$) e i cateti CH e OM congruenti. Dunque:

$$\overline{OB}=\overline{BC}=\frac{5}{4}r,\quad \overline{HB}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{CH}^2}=\frac{3}{4}r;$$

di conseguenza:

$$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=r+\frac{5}{4}r=\frac{9}{4}4;\quad \overline{DC}=\overline{AH}=\overline{AB}-\overline{HB}=\frac{9}{4}r-\frac{3}{4}r=\frac{3}{2}r.$$

In definitiva:

- $\text{perimetro}(ABCD)=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=\frac{9}{4}r+\frac{5}{4}r+\frac{3}{2}r+r=6r$;
- $\text{area}(ABCD)=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{DC}\right)\overline{AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}r+\frac{3}{2}r\right)r=\frac{15}{8}r^2.$

20. Un trapezio ha i vertici su un cerchio di raggio 5 cm (trapezio *ciclico*). Le basi del trapezio misurano 6 cm e 8 cm. Dopo aver dimostrato che il trapezio è isoscele, calcolarne l'area e il perimetro, supponendo che il trapezio contenga il centro del cerchio. $\left[\textbf{R.}\ 49\ \text{cm}^2,\ 2\left(7+5\sqrt{2}\right)\text{cm}\right]$

21. ® Due circonferenze, di diametri AB e AC lunghi rispettivamente $\frac{50}{3}$ cm e 6 cm, sono tangenti internamente nel punto A. Condotta la retta tangente in C alla circonferenza minore, sia DE la corda intercettata su di essa dalla circonferenza maggiore. Calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero ADBE. $\left[\textbf{R.}\ \frac{140}{3}\ \text{cm}, \frac{400}{3}\ \text{cm}^2\right]$

22. Un trapezio rettangolo ha i quattro lati tangenti ad un cerchio. a) Dimostrare che la somma delle basi è uguale alla somma degli altri due lati. b) Dimostrare inoltre che il triangolo avente come vertici il centro del cerchio e gli estremi del lato obliquo è un triangolo rettangolo. c) Posto poi che il centro del cerchio disti 5 cm e 12 cm dagli estremi del lato obliquo, calcolare il perimetro e l'area del trapezio. $\left[\textbf{R.}\ \frac{578}{13}\ \text{cm}, \frac{17340}{169}\text{cm}^2\right]$

23. Le basi di un trapezio isoscele, i cui lati sono tutti e quattro tangenti ad un cerchio, sono l'una 4 volte più lunga dell'altra e il perimetro del trapezio è 40 a, dove a è una lunghezza nota. a) Dimostrare che la somma delle basi è uguale alla somma degli altri due lati. b) Calcolare il raggio del cerchio e l'area del trapezio. [**R.** 4 a , 80 a^2]

24. Siano O e C i centri di due circonferenze di raggi r e 2r, tangenti esternamente. Una delle rette tangenti ad entrambe le circonferenze, ma non perpendicolare alla retta dei loro centri, tocca la circonferenza minore in A e la maggiore in B. Calcolare le lunghezze delle diagonali del quadrilatero ABCO.

25. Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa AC è lunga 25 a, dove a è una lunghezza data, ed il cateto AB è $4/3$ del cateto BC. Descritta la circonferenza di diametro AB, si dica D l'ulteriore punto in cui la retta AC la interseca e si chiami E il punto simmetrico di D rispetto ad AB. Si calcoli quindi il perimetro e l'area del quadrilatero AEBC.

26. ® I raggi OA e OB di una medesima circonferenza sono perpendicolari. Sul prolungamento di OA, dalla parte di A, si prenda un punto C tale che AC= $\frac{2}{3}$ OA e per C si conduca la tangente al minore degli archi AB della circonferenza considerata e si chiami D il punto in cui essa seca la retta OB. Sapendo che il segmento CD è lungo 50 a, dove a è una lunghezza assegnata, si trovi dapprima il raggio della circonferenza e successivamente il perimetro e l'area del quadrilatero ABDC. [R. 24 a , ...]

27. ® Un trapezio rettangolo è tale che la sua base maggiore contiene il diametro di un semicerchio, mentre gli altri lati sono tangenti ad esso. Le basi del trapezio sono lunghe 8 a e 4 a, dove a è una lunghezza data. La sua diagonale minore e i segmenti che ne congiungono il punto medio con gli estremi dell'altra diagonale dividono il trapezio in quattro triangoli: calcolare le loro aree. [R. $6a^2$, $3a^2$, ...]

28. PROBLEMA RISOLTO. Due circonferenze γ_1 e γ_2, di centri C_1 e C_2, sono l'una esterna all'altra e toccano nei punti A_1 e A_2 rispettivamente una medesima retta che le lascia dalla stessa parte rispetto ad essa. Indicati con B_1 e B_2 i punti in cui il segmento C_1C_2 interseca nell'ordine γ_1 e γ_2, si chiami D il punto in cui si secano le rette A_1B_1 e A_2B_2.

a) Dimostrare che il triangolo DA_1A_2 è rettangolo. b) Ammesso che i raggi delle circonferenze γ_1 e γ_2 siano rispettivamente 3a e 8a, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che la distanza dei loro centri sia 13a, calcolare il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo DA_1A_2.

RISOLUZIONE.

a) Con riferimento alla figura 36, conduciamo per D la perpendicolare alla retta C_1C_2 e diciamo E il punto in cui essa seca A_1A_2 ed F quello in cui seca C_1C_2.

Incominciamo a dimostrare che il triangolo EDA_1 è isoscele sulla base DA_1. Per questo è necessario dimostrare che gli angoli $E\widehat{A}_1D$ e $E\widehat{D}A_1$ sono congruenti. In effetti risulta: $C_1\widehat{A}_1B_1 \cong C_1\widehat{B}_1A_1$ perché si tratta di angoli alla base del triangolo isoscele $C_1A_1B_1$; $C_1\widehat{B}_1A_1 \cong D\widehat{B}_1F$ perché angoli opposti al vertice. Di conseguenza: $C_1\widehat{A}_1B_1 \cong D\widehat{B}_1F$.

Si desume che gli angoli $E\widehat{A}_1D$ e $E\widehat{D}A_1$ sono congruenti perché complementari di angoli congruenti.

In modo analogo si dimostra che anche il triangolo EDA_2 è isoscele sulla base DA_2.

In conclusione, i segmenti EA_1, ED, EA_2 sono congruenti, perciò il punto E risulta essere il centro della circonferenza passante per i tre punti A_1, D, A_2. Il triangolo DA_1A_2 è, pertanto, inscritto nella semicirconferenza di diametro A_1A_2 e, per questa ragione, è rettangolo in D.

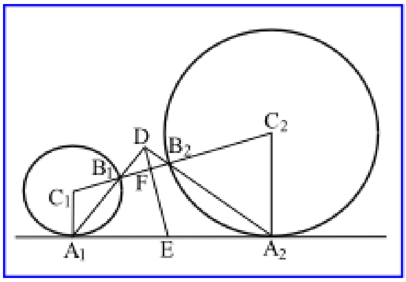

FIG. 36

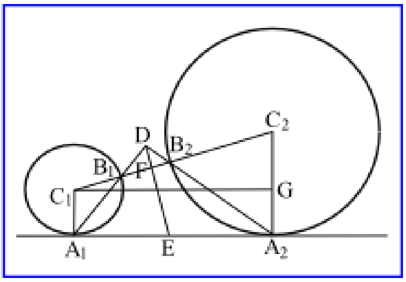

FIG. 37

b) Il raggio cercato è la metà del segmento A_1A_2 . Ora, tracciata per C_1 la parallela alla retta A_1A_2 fino ad incontrare in G il raggio C_2A_2 (Fig. 37), si ha evidentemente che il quadrilatero $A_1A_2GC_1$ è un rettangolo e, inoltre: $\overline{GC_2}=5a$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo C_1GC_2, si trova $\overline{C_1G}=12a$. Quindi anche $\overline{A_1A_2}=12a$. Di conseguenza, il raggio cercato è 6a.

29. Tre corde di una medesima circonferenza sono lunghe 6 cm, 8 cm e 10 cm. I corrispondenti angoli al centro hanno ampiezze rispettivamente α, β, α+β. a) Le tre corde possono essere assunte come lati di un triangolo? b) I dati sono sufficienti a calcolare il raggio del cerchio?

30. Considerata una semicirconferenza di centro O e diametro AB, sul prolungamento di AB, dalla parte di B, si prenda un punto C e, condotta per esso la retta tangente alla semicirconferenza, si chiami T il punto di contatto. Si sa che il triangolo TAC è isoscele.

a) Dimostrare che il triangolo TOB è equilatero.

b) Calcolare le ampiezze degli angoli del triangolo TAC.

c) Ammesso che il diametro della semicirconferenza misuri 4 cm, calcolare il perimetro e l'area del triangolo TAC.

31. PROBLEMA RISOLTO. In un triangolo equilatero sono inscritte tre circonferenze, i cui raggi hanno la stessa misura di 2 cm, in modo che ciascuna sia tangente a due lati del triangolo ed alle altre due circonferenze. Calcolare il perimetro e l'area del triangolo.

RISOLUZIONE. Questo problema può essere risolto molto facilmente se si individua la strada giusta o, in caso contrario, è molto difficile, ad un livello di difficoltà addirittura insormontabile.

Una strada giusta consiste nel concepire un lato del triangolo come somma di tre segmenti: i due esterni, uguali tra loro, sono ciascuno il cateto di un triangolo rettangolo avente un angolo di 30° e di cui si conosce il cateto (2 cm) opposto per l'appunto a quest'angolo; il segmento intermedio è lungo invece quanto il segmento che unisce i centri di due cerchi (4 cm).

La continuazione è banale e conduce al seguente risultato: $12\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm, $8\left(3+2\sqrt{3}\right)$ cm^2.

32. ® Piero e Massimo sono due bravi ciclisti che fanno una gara ad inseguimento su una pista circolare lunga 500 m. Partono, come d'uso, da due posizioni diametralmente opposte. Piero viaggia alla velocità costante di 65 km/h e Massimo alla velocità costante di 62 km/h. Quanti metri di pista dista Piero da Massimo 6 secondi prima di doppiarlo? [**R.** 5 m]

33. I vertici della base maggiore di un trapezio coincidono con gli estremi del diametro di una semicirconferenza di raggio unitario, mentre gli altri due vertici sono situati sulla semicirconferenza medesima (si dice che *il trapezio è inscritto nella semicirconferenza*). Calcolare l'area e il perimetro del trapezio sapendo che la sua altezza è lunga 4/5.

$$\left[\mathbf{R.}\ \frac{32}{25};\ \frac{4}{5}\left(4+\sqrt{5}\right)\right]$$

34. I cateti AB e AC del triangolo rettangolo ABC misurano rispettivamente 10 cm e 24 cm. Chiamato M il punto medio dell'ipotenusa, siano P e Q nell'ordine i punti in cui il segmento AM tocca la circonferenza inscritta nel triangolo MAB e quella inscritta nel triangolo MAC. Calcolare le misure delle parti in cui i punti P, Q dividono il segmento AM. [**R.** 5 cm, 7 cm, 1 cm]

35. Per il punto P, esterno alla circonferenza γ di centro O, condurre i segmenti PA e PB tangenti a γ e sia PA=8 cm. Tracciare quindi una generica corda RS del triangolo PAB, tangente a γ in un punto interno dell'arco AB.

a) Quanto vale il perimetro del triangolo PRS?

[A] 16 cm. [B] 18 cm. [C] 20 cm. [D] Dati insufficienti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

b) Dopo aver spiegato perché i dati sono insufficienti per il calcolo dell'area del quadrilatero OAPB, introdurre arbitrariamente un altro dato (uno solamente) che permetta questo calcolo ed eseguirlo.

36. Nella figura sottostante (Fig. 38) sono disegnate, all'interno di un quadrato, cinque circonferenze uguali: una ha lo stesso centro del quadrato ed è tangente alle altre quattro, ciascuna delle quali è a sua volta tangente a due lati del quadrato. Calcolare il rapporto fra il lato del quadrato e il raggio delle circonferenze. [**R.** $2\left(1+\sqrt{2}\right)$]

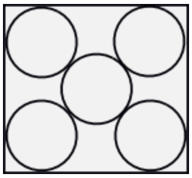

FIG. 38

37. Su una circonferenza di centro O sono situati tre punti A, B, C in modo che il punto A e la retta BC siano disposte da parti opposte rispetto ad O, la retta AO sia perpendicolare alla retta BC e l'angolo $O\widehat{B}C$ misuri 30°.

a) Trovare le misure degli angoli interni del quadrilatero concavo ABOC.

b) Calcolare il perimetro e l'area di questo quadrilatero sapendo che il raggio della circonferenza misura 2 cm.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)} \ldots;\ \text{b)}\ 4\left(1+\sqrt{3}\right)\text{cm},\ 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2\right]$

38. Siano r ed s due rette parallele in senso stretto. Siano poi due circonferenze C' e C": la prima tangente alla retta r in A ed alla retta s in B; la seconda tangente alla retta r in C e tangente esternamente in T alla prima circonferenza. Il raggio di C" sia il doppio di quello di C'. Indicati con H e K rispettivamente i centri delle circonferenze C' e C", sia $12a^2\sqrt{2}$ l'area del quadrilatero ACKH, essendo a una lunghezza nota. Calcolare: a) la distanza delle due rette r, s; b) le distanze del punto B e del punto C dalla retta HK; c) le aree delle due parti in cui la retta t, tangente in T alle due circonferenze, divide il quadrilatero ACHK. $\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ 4a;\ \text{b)}\ \frac{4}{3}a\sqrt{2}, \frac{8}{3}a\sqrt{2};\ \text{c)}\ 4a^2\sqrt{2}, \ldots\right]$

39. Siano k' e k" due circonferenze secanti di centri A e B rispettivamente e raggi uguali ad AB. Siano poi C uno dei due punti comuni alle due circonferenze e D un punto preso, esternamente alla circonferenza k', su quella delle due semicirconferenze in cui k" è divisa dalla retta AB e situata dalla stessa parte di C.

a) Dimostrare che il triangolo ABC è equilatero.

b) Determinare la misura dell'angolo $A\widehat{D}C$.

c) Determinare la misura dell'angolo convesso $B\widehat{E}C$, essendo E il punto il cui il segmento AD interseca il minore degli archi BC della circonferenza k'.

d) Dimostrare che $C\widehat{B}E = \frac{1}{4} C\widehat{B}D$.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ldots;\ \text{b)}\ 30°;\ \text{c)}\ 150°;\ \text{d) Si constata che } C\widehat{B}E = \frac{1}{2}C\widehat{A}D \text{ e } C\widehat{A}D = \frac{1}{2}C\widehat{B}D\text{, per cui}\ldots\right]$

40. Sia ABC un triangolo rettangolo in A e siano a, b, c le lunghezze rispettivamente dei lati BC, CA, AB. Indicati con p il semiperimetro del triangolo, con S la sua area e con r il raggio del cerchio in esso inscritto, dimostrare che si ha:

a) $r = \frac{S}{p}$; b) $r = \frac{b+c-a}{2}$; c) $S = p(p-a)$; d) $S = (p-b)(p-c)$.

e) Indicato inoltre con O il centro del cerchio, dimostrare che la misura dell'angolo convesso $B\widehat{O}C$ è un invariante al variare del triangolo, purché rimanga rettangolo, calcolandone il valore.

[**R.** a)…; b) Elaborare opportunamente la prima formula dopo aver moltiplicato numeratore e denominatore per b+c–a; c) bisogna tener presente che p–a=… ; d) … ; e) 135°]

41. I cateti di un triangolo rettangolo misurano 3 cm e 4 cm.

a) Calcolare il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo.

b) Il punto in cui questa circonferenza tocca l'ipotenusa del triangolo la divide in due parti: verificare che il rettangolo che ha come lati queste parti è equivalente al triangolo.

42. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il triangolo ABC in cui $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(4,3)$.

a) Calcolare le lunghezze dei raggi R e r dei cerchi rispettivamente circoscritto e inscritto nel triangolo.

b) Trovare le coordinate del circocentro D del triangolo.

c) Calcolare le distanze DH, DK, DL del punto D rispettivamente dai lati AB, BC, CA del triangolo.

d) Verificare che risulta:

$$\mathrm{DH}+\mathrm{DK}+\mathrm{DL}=\mathrm{R}+\mathrm{r},$$

dove le distanze al primo membro devono essere considerate positive se sono interne, totalmente o parzialmente, al triangolo e negative se sono completamente esterne ad esso.

[NOTA BENE: La relazione in questione è in realtà una proprietà comune a tutti i triangoli]

$\left[\mathbf{R}.\ \text{a)}\ \mathrm{R}=\frac{10}{3}\sqrt{13},\ \ \mathrm{r}=\frac{7-\sqrt{13}}{6}\ ;\ \text{b)}\ \mathrm{D}\left(1,\frac{17}{6}\right)\ ;\ \text{c)}\ \mathrm{DH}=\frac{17}{6},\ \ \mathrm{DK}=\frac{2}{3}\sqrt{13},\ \ \mathrm{DL}=\frac{5}{3}\ ;\ \text{d)}\ \ldots\right]$

43. Nel triangolo rettangolo ABC i cateti CA e CB sono lunghi rispettivamente a e b.

a) Calcolare le lunghezze dei raggi R e r dei cerchi circoscritto e inscritto nel triangolo.

b) Calcolare le distanze DH, DK, DL del circocentro D del triangolo dai lati AB, BC, CA.

c) Verificare che risulta:

$$\mathrm{DH}+\mathrm{DK}+\mathrm{DL}=\mathrm{R}+\mathrm{r},$$

[NOTA BENE: Si tratta evidentemente della medesima proprietà enunciata nel punto d) del precedente esercizio N° 42, riferita al caso particolare del triangolo rettangolo. In questo caso particolare se ne propone una dimostrazione]

44. I vertici del quadrilatero convesso ABCD sono situati su una medesima circonferenza (quadrilatero *ciclico*). Siano r_1 ed r_2 i raggi dei cerchi inscritti nei due triangoli in cui la diagonale AC divide il quadrilatero e siano r_3 ed r_4 i raggi dei cerchi inscritti nei due triangoli in cui lo divide la diagonale BD. Dimostrare che si ha: $r_1+r_2=r_3+r_4$. [Si tratta di una proprietà nota come *teorema giapponese per i quadrilateri ciclici*].

[Si suggerisce di applicare la proprietà d) enunciata nell'esercizio N° 42]

45. I vertici del quadrilatero convesso ABCD sono situati su una medesima circonferenza (quadrilatero *ciclico*), inoltre le sue diagonali AC e BD sono perpendicolari e s'incontrano nel punto H. La perpendicolare condotta per H al lato BC incontra il lato AD in M e il lato BC in N. Dimostrare che M è il punto medio del lato AD.

[Questa proprietà è presente nel *Brahmasphuta Siddhanta*, opera del matematico indiano Brahmagupta, VII sec. d.C., e per questo è citata a volte come "teorema di Brahmagupta". Per la sua dimostrazione basta ragionare sulla figura a fianco (Fig. 39)]

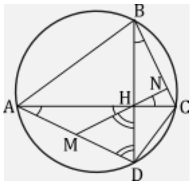

FIG. 39

46. È dato un triangolo rettangolo e isoscele, la cui ipotenusa misura 2 m. Qual è la misura della distanza dei centri delle circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo?

[A] ≈ 51 cm. [B] ≈ 41 cm. [C] ≈ 31 cm. [D] Dati insufficienti.

47. Considerato un qualsiasi triangolo rettangolo ABC, si traccino le due circonferenze aventi per diametri i suoi cateti AC e BC.

a) Dimostrare che le due circonferenza s'intersecano, oltre che nel vertice C dell'angolo retto del triangolo, in un punto D dell'ipotenusa.

b) Sapendo che i segmenti AD e BD sono lunghi rispettivamente 5,4 cm e 9,6 cm, calcolare le misure dei raggi delle due circonferenze.

[**R.** 4,5 cm; 6 cm]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Quale differenza c'è fra circonferenza e cerchio?
2. È vero che tre punti distinti, comunque scelti, individuano una ed una sola circonferenza?
3. Quale condizione deve essere soddisfatta affinché una retta ed una circonferenza siano tangenti?
4. Quale condizione deve essere soddisfatta affinché due circonferenze siano tangenti?
5. Come si definisce un settore circolare?
6. È vero che ad ogni angolo alla circonferenza corrisponde uno ed un solo angolo al centro?
7. È vero che ad ogni angolo al centro corrisponde uno ed un solo angolo alla circonferenza?
8. È vero che ogni triangolo inscritto in una circonferenza è rettangolo?
9. È vero che i segmenti tangenti ad una circonferenza, condotti per uno stesso punto, sono congruenti?
10. Nel triangolo rettangolo ABC, BC è l'ipotenusa e l'angolo in B misura 40°. Chiamato O il centro del cerchio inscritto nel triangolo, quali sono le misure degli angoli interni dei triangoli OAB, OBC, OCA?

RISPOSTE.

1. La circonferenza è una linea, il cerchio una superficie.
2. No. Solo se i tre punti non sono allineati, giacché se lo fossero non individuerebbero alcuna circonferenza.
3. La distanza della retta dal centro della circonferenza deve essere uguale al raggio della circonferenza.
4. La distanza dei centri delle due circonferenze deve essere uguale alla differenza dei loro raggi (tangenti internamente) o alla somma dei raggi (tangenti esternamente).
5. Un settore circolare è l'intersezione di un cerchio con un suo angolo al centro.
6. Sì.
7. No. Ne corrispondono infiniti.
8. No. Ogni triangolo, infatti, può essere inscritto in una circonferenza, ma affinché sia rettangolo deve potersi inscrivere in una semicirconferenza.
9. Sì, lo sono.
10. Occorre tener presente che OA, OB, OC sono bisettrici degli angoli interni del triangolo ABC. Sicché le misure deli angoli del triangolo OAB sono: 45°, 20°, 115°; e così via per gli altri triangoli.

COMPLEMENTI: CERCHI EX-INSCRITTI AD UN TRIANGOLO [6]

1. È dato il triangolo ABC: ogni cerchio tangente ad un suo lato ed ai prolungamenti degli altri due si dice **cerchio ex-inscritto al triangolo** o anche **excerchio del triangolo**. Evidentemente esistono tre cerchi ex-inscritti ad ogni triangolo.

[6] Argomento opzionale.

Sono interessanti le relazioni che legano i raggi di questi cerchi alle lunghezze dei lati del triangolo. Precisamente, considerato il triangolo ABC e chiamate a, b, c, le lunghezze dei sui lati BC, CA, AB nell'ordine, risulta:

[1] $$R_a = \frac{S}{p-a}\,, \quad R_b = \frac{S}{p-b}\,, \quad R_c = \frac{S}{p-c}\,,$$

dove R_a è il raggio dell'excerchio tangente al lato BC (lungo a); similmente R_b e R_c; mentre S è l'area del triangolo e p il suo semiperimetro.
Ci soffermiamo sulla dimostrazione della sola prima relazione, dal momento che la dimostrazione delle altre è simile.
Sia allora il triangolo ABC (Fig. 40). Disegniamo l'excerchio tangente al lato BC. Chiamiamo O il suo centro ed L, M, N i punti di contatto con le rette dei lati del triangolo.

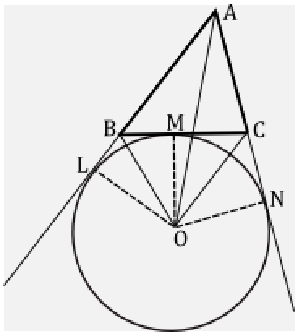

FIG. 40

Dall'esame della figura si desume immediatamente che si ha:

area triangolo ABC = area triangolo ABO + area triangolo AOC – area triangolo BOC

o anche:

$$S = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{OL} + \frac{1}{2}\,\overline{CA}\cdot\overline{ON} - \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{OM}$$

ossia:

$$S = \frac{1}{2}cR_a + \frac{1}{2}bR_a - \frac{1}{2}aR_a\,, \qquad \text{da cui segue :} \qquad S = \frac{1}{2}(c+b-a)\,R_a\,.$$

D'altro canto, essendo $2p=a+b+c$, è pure: $2p-2a=b+c-a$ e perciò: $\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a$. Di conseguenza:

$$S = (p-a)\,R_a\,,$$

da cui segue la formula da dimostrare.

2. Vogliamo adesso mostrare, ma solo a titolo di curiosità, una formula che lega l'area S di un triangolo ai raggi R del cerchio in esso inscritto ed ai raggi R_a, R_b, R_c dei cerchi ex-inscritti. La formula è la seguente:

$$S = \sqrt{R\cdot R_a\cdot R_b\cdot R_c}\,.$$

Ai fini della sua dimostrazione basta ricordare che, oltre alle tre formule [1], si ha pure: $R=S/p$. Risulta pertanto:

$$R\cdot R_a\cdot R_b\cdot R_c = \frac{S}{p}\cdot\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}\,.$$

D'altra parte, in virtù della formula di Erone, si ha: $p(p-a)(p-b)(p-c)=S^2$. Cosicché, dopo aver sostituito e semplificato, segue: $S^2=R\cdot R_a\cdot R_b\cdot R_c$ e da qui discende subito la formula cercata.