Prerequisiti:
- Conoscere e utilizzare le tecniche di calcolo algebrico numerico e letterale.
- Risoluzione consapevole di equazioni, disequazioni e sistemi di 1° grado.

Per i Licei non scientifici lo studio di questa unità è previsto nel 2° biennio; per tutte le altre scuole nel 1° biennio

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *risolvere un'equazione di 2° grado in un'incognita*
- *scrivere un algoritmo idoneo a risolvere un'equazione di 2° grado in un'incognita*
- *costruire un'equazione di 2° grado di cui si conoscono le radici*
- *riconoscere natura e segno delle radici di un'equazione di 2° grado senza risolvere l'equazione*
- *risolvere semplici equazioni irrazionali quadratiche*
- *risolvere un sistema di 2° grado di due o più equazioni in altrettante incognite*
- *impostare e risolvere problemi di 2° grado tratti da ambiti disciplinari diversi*
- *esporre con proprietà la storia della risoluzione delle equazioni di 2° grado*

Equazioni, sistemi e problemi di 2° grado

Unità 24

24.1 EQUAZIONI DI 2° GRADO IN UN'INCOGNITA

24.1.1 Presumibilmente hai incontrato nello studio delle unità precedenti equazioni del tipo $ax^2+bx+c=0$, che hai dovuto accantonare poiché non avevi gli elementi necessari per la loro risoluzione. È giunto il momento di occuparci di queste equazioni. Ma prima procediamo con alcune considerazioni preliminari, atte a riprodurre situazioni analoghe a quelle suddette, nell'eventualità che non abbia avuto l'occasione di incontrarle.

- PROBLEMA 1. *Determinare due numeri naturali la cui somma sia 157 ed il cui prodotto sia 6132.*

Per la sua risoluzione tralasciamo i procedimenti basati su tentativi, che pure non sono da scartare, e occupiamoci invece di un procedimento più razionale.

Indichiamo allora con x uno dei due numeri; l'altro è $157-x$ e il loro prodotto è $x(157-x)$. Dovendo questo essere uguale a 6132, deve risultare: $x(157-x)=6132$; ossia, dopo alcuni semplici passaggi:

[1] $$x^2-157\,x+6132=0.$$

L'equazione ottenuta è dello stesso tipo di quelle che hai dovuto accantonare. Prova a risolverla cercando di mettere il trinomio al primo membro della [1] nella forma $a(x+b)^2+c$, dove $a,\ b,\ c$ sono numeri reali opportuni. Ma se ugualmente non riesci a risolvere l'equazione, rinunciaci per il momento e procedi oltre.

- PROBLEMA 2. *La base minore e il lato obliquo di un trapezio rettangolo sono lunghi rispettivamente* $2a$ *e* $5a$*, dove* a *è una lunghezza assegnata. Sapendo che la base maggiore è il doppio dell'altezza, calcolare il perimetro e l'area del trapezio.*

Con riferimento alla figura a fianco (Fig. 1), si ha: $\overline{DC}=2a$, $\overline{BC}=5a$, $AB=2AD$. Posto $\overline{AD}=x$, con $x>0$, deve risultare $\overline{AB}=2x$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo CEB, rettangolo in E, risulta: $\overline{CE}^2+\overline{EB}^2=\overline{BC}^2$, e poiché $\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=2x-2a$, si trova la seguente equazione risolvente: $x^2+(2x-2a)^2=(5a)^2$; ossia, dopo semplici manipolazioni:

[2] $$5\,x^2-8\,a\,x-21\,a^2=0.$$

Di nuovo ti trovi di fronte ad un'equazione che non sai risolvere, ma puoi procedere come prima.

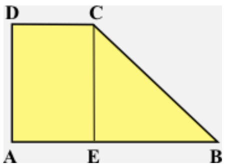

FIG. 1

- PROBLEMA 3. *Una classe mista è formata da 24 alunni, dei quali le ragazze sono in numero maggiore. Tre ragazze si chiamano Lucia e due ragazzi Roberto. Si deve sorteggiare una delegazione costituita da un ragazzo e da una ragazza. Calcolare da quanti ragazzi e ragazze è formata la classe, sapendo che è 1/18 la probabilità che la delegazione comprenda una Lucia e un Roberto.*

Indichiamo con x il numero dei ragazzi; deve essere evidentemente $2\le x\le 21$, con $x\in\mathbb{N}$. Il numero delle ragazze è $24-x$. Per i dati del problema deve essere anche $24-x>x$, vale a dire $x<12$.

La probabilità che la delegazione contenga una Lucia è: $p(L)=\frac{3}{24-x}$, quella che contenga un Roberto è $p(R)=\frac{2}{x}$. La probabilità che contenga una Lucia ed un Roberto è $p(L\wedge R)=\frac{3}{24-x}\cdot\frac{2}{x}$. Affinché questa probabilità sia $\frac{1}{18}$ deve risultare:

$$\frac{6}{x(24-x)}=\frac{1}{18}\,.$$

Ossia, dopo alcune semplificazioni:

[3] $$x^2-24\,x+108=0.$$

Per la terza volta ti trovi di fronte ad un'equazione che non sai risolvere. Vale ancora quanto già detto sopra.

Tre problemi, oltre a quelli da te eventualmente incontrati in precedenza, tratti da ambiti completamente differenti, conducono allo stesso modello matematico; cioè alla risoluzione di un'equazione del tipo:

$$a\,x^2+b\,x+c=0\,,$$

dove i coefficienti a, b, c sono numeri reali assegnati.

Ci pare, pertanto, utile imparare a risolvere il modello astratto nella sua forma generale, per poterlo poi applicare alle particolari situazioni che di volta in volta si presentano, comprese le tre dalle quali siamo partiti.

24.1.2 Ogni equazione del tipo:

[4] $$\mathbf{a\,x^2+b\,x+c=0},$$

dove $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$, si chiama **equazione di 2° grado nell'incognita x**.

Anzi la [4] è la cosiddetta **forma normale** (o **tipica**) di un'equazione di 2° grado in x.

Le equazioni [1], [2], [3] sono chiaramente particolari equazioni di 2° grado in x, in forma normale.

Ovviamente, se l'equazione non è ridotta alla forma normale, si può ricondurvela utilizzando lo stesso procedimento appreso a suo tempo a proposito delle equazioni di 1° grado. In sostanza come abbiamo fatto nei tre esempi precedenti.

Ci proponiamo adesso di risolvere la [4] nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Si tratta di trasformare opportunamente il trinomio di 2° grado in x, ax^2+bx+c, in modo che l'incognita figuri nel quadrato di un binomio e, nello stesso tempo, l'equazione trasformata sia equivalente a quella data. E questo si può fare sempre. In effetti, si ha:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Sicché, ricordando che $a\neq 0$, i valori x reali che soddisfano l'equazione $a\,x^2+b\,x+c=0$ sono tali che risulta:

[5] $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Si possono presentare tre situazioni, a seconda del segno del numero reale:

$$\boldsymbol{\Delta=b^2-4ac,}$$

che per questo si chiama ***discriminante*** dell'equazione [4] (perché appunto *discrimina*, cioè permette di distinguere). Precisamente:

- Se $\Delta<0$, non esiste alcun $x\in\mathbb{R}$ che soddisfi alla [5] e, di conseguenza, alla [4]: l'equazione [4] è *impossibile*.
- Se $\Delta=0$, la [5] e, di conseguenza, la [4] ammettono le soluzioni fornite dalle seguenti equazioni identiche: $x+\frac{b}{2a}=0,\ x+\frac{b}{2a}=0$, ossia la soluzione:
$$x=-\frac{b}{2a}$$
contata due volte. Si dice pure che la [4] ammette *due soluzioni* (o *radici*) *coincidenti*.
- Se $\Delta>0$, la [5] – supponendo $a>0$ (situazione alla quale ci si può sempre ricondurre) – ammette le due soluzioni fornite dalle due seguenti equazioni:
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
e, di conseguenza, la [4] ammette *due soluzioni* (o *radici*) *distinte*, espresse dalla seguente formula:
[6] $$\mathbf{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$
detta **formula risolvente dell'equazione di 2° grado**.

24.1.3 Notiamo che la formula [6] si può applicare anche quando $\Delta=0$. Si ha, infatti:

$$x=\frac{-b\pm 0}{2a}\ \text{ ossia }\ x=-\frac{b}{2a}\text{, contata due volte.}$$

Così come si può applicare anche quando $c=0$ (*equazione spuria*) o $b=0$ (*equazione pura*), anche se in questi casi è preferibile seguire una strada che non coinvolga la formula risolvente. Compito che lasciamo a chi legge. Ad ogni buon conto, utilizzando questa formula:

- nel caso dell'equazione spuria (c=0) si ha:

$$x=\frac{-b\pm b}{2a}=\begin{cases}0\\-b/a\end{cases}$$

  vale a dire che l'equazione ammette sempre e comunque due soluzioni reali, di cui una uguale a 0 e l'altra uguale a $-b/a$.
- nel secondo caso (b=0) si ha:

$$x=\pm\frac{\sqrt{-4ac}}{2a}\ \text{ossia}\ x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

  vale a dire che l'equazione ammette due radici reali e opposte se a, c sono discordi e invece non ammette radici reali se sono concordi.

In sintesi, considerata **l'equazione di 2° grado** in x:

$$\mathbf{a\,x^2+b\,x+c=0},$$

dove a, b, c sono numeri reali con a≠0, indicato il suo discriminante con:

$$\mathbf{\Delta=b^2-4ac}\ ,$$

si presentano le seguenti situazioni:

- se $\mathbf{\Delta>0}$ l'equazione ammette due radici reali e distinte date dalla formula:

$$\mathbf{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\ ;$$

- se $\mathbf{\Delta=0}$ l'equazione ammette due radici reali e coincidenti date dalla formula:

$$\mathbf{x=-\frac{b}{2a}}\ ;$$

- se $\mathbf{\Delta<0}$ l'equazione non ammette radici reali.

Esempi:

- Considerata l'equazione $x^2-x+1=0$, poiché il suo discriminante è $\Delta=1-4<0$, essa risulta impossibile in $\mathbb{R}$.
- Considerata l'equazione $x^2-2x=0$, lasciamo a chi legge la sua risoluzione con l'uso della formula risolvente. Seguendo invece una via più diretta, osserviamo che l'equazione può scriversi in questo modo equivalente: $x(x-2)=0$, da cui seguono le due soluzioni x=0 ed x=2.
- Considerata l'equazione $x^2+2=0$, senza tante considerazioni si constata subito che, se x deve assumere un valore reale, il primo membro risulta essere la somma di un numero non negativo (x^2) e di un numero positivo (2) e pertanto non potrà mai essere uguale a 0. Se ne desume che essa risulta impossibile in $\mathbb{R}$. Ovviamene si giunge alla stessa conclusione utilizzando la formula risolvente.
- Considerata l'equazione $-2x^2+x+1=0$, poiché il suo discriminante è $\Delta=1+8=9$, dopo aver scritto l'equazione nella forma equivalente $2\,x^2-x-1=0$, applichiamo la formula risolvente [6]:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}1\\-1/2\end{cases}$$

Appunto 1 e −1/2 sono le sue soluzioni.

Prima di procedere, ti proponiamo di risolvere in ℝ le seguenti equazioni di 2° grado in x:

$$x^2-3x=0,\ \ 2x^2+x=0,\ \ x^2-x\sqrt{3}=0,\ \ x^2\sqrt{5}-5x=0,\ \ x^2+3x\sqrt{2}=0.$$

$$x^2-8=0\,,\quad x^2+2=0\,,\quad 4\,x^2-1=0\,,\quad 3\,x^2-4=0\,,\quad 4\,x^2-9=0\,,\quad 2\,x^2-1=0\,.$$

$$x^2-6\,x+9=0\,,\ \ 2\,x^2-4\,x-1=0,\ \ x^2+6\,x+6=0\,,\ \ 3\,x^2-4\,x+1=0\,,\ \ x^2+x+1=0\,.$$

Ti proponiamo inoltre la risoluzione delle seguenti questioni:

- Stabilire, senza risolverla, se la seguente equazione in x ha radici reali:
  (a) $2\,x^2-3\,x-1=0$; (b) $3\,x^2+2\,x+1=0$; (c) $4\,x^2+4\,x+1=0$.
- Calcolare, se esistono, i valori del parametro reale a, per i quali la seguente equazione in x ha due radici reali e coincidenti:
  (a) $x^2-x-a=0$; (b) $x^2+a\,x+1=0$; (c) $x^2-2\,a\,x-1=0$.
- Determinare, se esistono, i valori del parametro reale k, per i quali la seguente equazione in x ha radici reali:
  (a) $x^2-2\,x+k=0$; (b) $k\,x^2-2=0$; (c) $k\,x^2-3\,x+1=0$.

24.1.4 Riprendiamo, a questo punto, le equazioni [1], [2], [3] con le quali abbiamo introdotto l'argomento e completiamo la risoluzione dei problemi ivi proposti.

- Riguardo all'equazione [1], dopo aver calcolato il suo discriminante, che è:
  $$\Delta=157^2-4\cdot 6132=121=11^2,$$
  si ha:
  $$x=\frac{157\pm 11}{2}=\begin{cases}84\\73\end{cases}$$
  Pertanto i due numeri richiesti dal problema sono: 84 e 73. E di fatto:
  $$84+73=157,\quad 84\times 73=6132.$$
- Riguardo all'equazione [2], poiché il suo discriminante è:
  $$\Delta=(8a)^2+4\cdot 5\cdot 21a^2=484a^2=(22a)^2,\ \text{ si trova: }\ x=\frac{8a\pm 22a}{10}=\begin{cases}3a\\-7a/5\end{cases}$$
  Dal momento che $x>0$, solo $x=3a$ è soluzione del problema. Perciò: $\overline{AD}=3a$, $\overline{AB}=6a$.
  Di conseguenza, il perimetro P e l'area A del trapezio sono:
  $$P=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=6a+5a+2a+3a=16a\,,\quad A=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\cdot\overline{AD}=\frac{6a+2a}{2}\cdot 3a=12a^2.$$
- In merito all'equazione [3], il suo discriminante è:
  $$\Delta=24^2-4\cdot 108=144=12^2,\ \text{ per cui si trova: }\ x=\frac{24\pm 12}{2}=\begin{cases}18\\6\end{cases}$$
  Poiché $x<12$, solo $x=6$ è soluzione del problema. Perciò nella classe vi sono: 6 ragazzi e 18 ragazze.

24.2 FORMULE DI VIÈTE. APPLICAZIONI

24.2.1 A volte fa comodo disporre di formule che esprimano la somma e il prodotto delle radici di un'equazione di 2° grado in funzione dei coefficienti dell'equazione medesima. Queste formule esistono e si chiamano **formule di Viète** (o anche di **Viète-Girard**).

Precisamente, dette x_1 ed x_2 le soluzioni (in $\mathbb{R}$) dell'equazione:

$$a\,x^2+b\,x+c=0\,,$$

dove $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a\neq0$, le formule di Viète sono le seguenti:

[7] $$\mathbf{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}\,,\quad \mathbf{x_1\,x_2=\frac{c}{a}}\,.$$

Ad esse si perviene, in verità, senza conoscere le soluzioni dell'equazione. Basta osservare che si ha:

$$x-x_1=0 \text{ e } x-x_2=0 \text{ e perciò: } (x-x_1)(x-x_2)=0,$$

da cui, dopo qualche semplice elaborazione, segue:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Confrontando quest'equazione in x con quella assegnata, scritta nella seguente forma equivalente (si ricorda che $a\neq0$):

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\,,$$

si deducono immediatamente le formule [7] di Viète.

Esempi:

- Considerata l'equazione $2\,x^2-5\,x-3=0$ e dette x_1 ed x_2 le sue soluzioni, si ha:
$$x_1+x_2=\frac{5}{2}\,,\quad x_1x_2=\frac{3}{2}\,.$$
- Considerata l'equazione $x^2+x\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=0$ e dette x_1 ed x_2 le sue soluzioni, si ha:
$$x_1+x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad x_1x_2=-\sqrt{2}+1\,.$$

Un paio di esercizi, in cui puoi utilizzare con risparmio di tempo ed energia le formule di Viète:

1) Dopo aver controllato che le seguenti equazioni hanno radici reali, calcolare la loro somma e il loro prodotto senza determinare tali radici:
$$2x^2-3x-4=0\,,\quad x^2-4x-1=0\,,$$
$$\left(\sqrt{2}+1\right)x^2-2x\sqrt{2}-1=0\,,\quad \left(\sqrt{2}-1\right)x^2-\left(\sqrt{2}-1\right)x-2=0\,.$$
2) ® Siano α e β le radici dell'equazione $P(x)=0$; siano invece α^2 e β^2 le radici dell'equazione $x^2+ax+b=0$. Calcolare il valore di $a+b$, sapendo che:
a) $P(x)=x^2-3x-6$; b) $P(x)=2x^2-x-2$; c) $P(x)=3x^2+5x+1$.

24.2.2 Le formule di Viète sono utili nella fattorizzazione, nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, di un qualunque trinomio di 2° grado in x.

A questo riguardo consideriamo il trinomio:

$$a\,x^2+b\,x+c,$$

con $a,b,c\in\mathbb{R}$ ed $a\neq0$, e siano x_1 e x_2 i suoi *zeri reali*, ossia le soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. Ebbene, risulta:

$$\mathbf{a\,x^2+b\,x+c=a(x-x_1)(x-x_2).}$$

Infatti, in virtù delle [7]:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]=$$
$$=a\left[x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right]=a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=a(x-x_1)(x-x_2)\,.$$

Vediamo alcuni esempi.

- ESERCIZIO 1. Scomporre in prodotto di polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ il seguente trinomio:

$$2x^2-3x+1.$$

RISOLUZIONE.

Poiché $2x^2-3x+1=0 \to x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\begin{cases}1\\1/2\end{cases}$ si ha:

$$2x^2-3x+1=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ ossia: } 2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1).$$

- ESERCIZIO 2. Scomporre in prodotto di polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ il seguente trinomio:

$$8x^2-8x+2.$$

RISOLUZIONE. Naturalmente si può procedere come sopra, ma qui è tempo sprecato. Si ha, infatti:

$$8\,x^2-8\,x+2=2\,(4\,x^2-4\,x+1)=2\,(2\,x-1)^2.$$

- ESERCIZIO 3. Scomporre in prodotto di polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ il seguente trinomio:

$$x^2+2x+2.$$

RISOLUZIONE. Poiché il discriminante del trinomio è negativo, esso non ha zeri reali e perciò non si può ulteriormente fattorizzare nel modo richiesto.

Ti proponiamo, per esercizio, di scomporre in prodotti di polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ i seguenti trinomi:

$$3x^2+4x-4\,,\quad 2x^2-x-1\,,\quad x^2-3x\sqrt{3}+6\,,\quad 3x^2+3x-6\,,\quad 4x^2+2\,.$$

- OSSERVAZIONE. A volte è preferibile ricorrere a qualche semplice artificio per fattorizzare un trinomio di 2° grado piuttosto che trovare preventivamente i suoi zeri.
  Per esempio, con riferimento al trinomio x^2-2x-1 si ha:

$$x^2-2x-1=x^2-2x+1-2=(x-1)^2-2=\left(x-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1-\sqrt{2}\right).$$

24.2.3 Le formule di Viète sono anche utili per stabilire il segno delle radici di un'equazione di 2° grado completa, senza risolvere l'equazione. Ovviamente quando queste radici esistono in $\mathbb{R}$, cioè quando $\Delta\geq 0$. A questo riguardo consideriamo l'equazione:

$$a\,x^2+b\,x+c=0,$$

il cui discriminante sia positivo o nullo, e diciamo x_1 ed x_2 le sue radici.

Premettiamo che si dice che il polinomio ax^2+bx+c presenta una ***permanenza*** (di segno) se due coefficienti consecutivi sono concordi e presenta una ***variazione*** (di segno) se essi sono discordi.

Per esempio:

- il polinomio $3\,x^2-2\,x-4$ presenta nell'ordine una variazione ed una permanenza;
- il polinomio $4\,x^2+3\,x-5$ presenta nell'ordine una permanenza ed una variazione;
- il polinomio $2\,x^2-5\,x+2$ presenta due variazioni;
- il polinomio $x^2+4\,x+2$ presenta due permanenze.

Ebbene si dimostra la seguente regola, detta "regola dei segni di Cartesio".

REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO. In un'equazione di 2° grado completa, in forma normale, <u>con radici reali</u>, ad ogni variazione del trinomio corrisponde una radice positiva e ad ogni permanenza una radice negativa.
Inoltre, nel caso in cui le radici siano discordi, se la variazione precede la permanenza la radice positiva ha valore assoluto maggiore; se la permanenza precede la variazione è la radice negativa ad aver valore assoluto maggiore.

La giustificazione di questa regola è condensata nel seguente prospetto (Tab. 1), per comprendere il quale occorre ricordare le formule [7] di Viète e tenere presente che abbiamo supposto $|x_1|\leq|x_2|$; abbiamo inoltre assunto per comodità $a>0$ (d'altro canto, se fosse $a<0$ basterebbe moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per -1). Bisogna ricordare, infine, che le radici sono reali, per cui deve risultare: $b^2-4ac\geq 0$.

a	b	c	$x_1x_2=\frac{c}{a}$	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	x_1	x_2
+	+	+	+	–	–	–
+	–	+	+	+	+	+
+	+	–	–	–	+	–
+	–	–	–	+	–	+

TAB.1

Per esempio, con riferimento alla prima riga, nella quale $a>0$, $b>0$ e $c>0$, è evidente che $x_1x_2>0$ (per cui i due numeri sono concordi) e $x_1+x_2<0$ (per cui i due numeri, che sono concordi, devono essere negativi).
Esempi.

- L'equazione $x^2-x+2=0$ non ha radici reali; pertanto non si pone il problema di stabilire il loro segno.
- L'equazione $2x^2-3x+1=0$ ha due radici reali e distinte; precisamente, dal momento che il trinomio al 1° membro presenta due variazioni, esse sono entrambe positive.
- L'equazione $x^2-5x-3=0$ ha due radici reali e distinte; precisamente, essendovi una variazione e una permanenza, una è positiva e l'altra negativa. Di più: siccome la variazione precede la permanenza, ha maggior valore assoluto la soluzione positiva.

ESERCIZIO. Stabilire la natura delle radici delle seguenti equazioni, senza risolverle:

$$2x^2-x-1,\quad 3x^2+2x+1,\quad x^2-4x+2,\quad 4x^2+4x+1,\quad x^2\sqrt{2}-x-\sqrt{2}.$$

24.3 EQUAZIONI IRRAZIONALI QUADRATICHE

24.3.1 Prendiamo in considerazione il seguente problema.

PROBLEMA. *Determinare i cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa* $\frac{15}{4}a$ *e di perimetro* $9a$, *dove* a *è una lunghezza assegnata.*

Esso è concettualmente elementare. Tuttavia ci offre lo spunto per qualche importante riflessione.
In questo problema i dati sono costituiti dall'ipotenusa e dal perimetro del triangolo, i cui lati, essendo esso rettangolo, sono ovviamente legati dalla relazione che esprime il teorema di Pitagora.
Le incognite sono i due cateti.
Dopo aver chiamato x la lunghezza di uno di questi, con $0<x<\frac{15}{4}a$, possiamo seguire due vie che, se non presentano differenze sul piano concettuale, ne presentano invece su quello dei calcoli.

- PRIMO PROCEDIMENTO. L'altro cateto del triangolo è lungo $9a-\left(\frac{15}{4}a+x\right)$, vale a dire $\frac{21}{4}a-x$. In virtù del teorema di Pitagora si ha:

$$x^2+\left(\frac{21}{4}a-x\right)^2=\left(\frac{15}{4}a\right)^2.$$

Da qui, dopo alcune elementari semplificazioni, segue:

$$4x^2-21\,a\,x+27\,a^2=0\,.$$

E quindi, una volta ricavato il discriminante di quest'equazione, $\Delta=9a^2$, si trova:

$$x=\frac{21a\pm 3a}{8}=\begin{cases} 3a \\ 9a/4 \end{cases}$$

Entrambe le radici soddisfano alla condizione $0<x<\frac{15}{4}a$ e perciò ambedue sono soluzioni del problema. Ma, osservato che se un cateto è 3a l'altro è $\frac{21}{4}a-3a$, cioè $\frac{9}{4}a$, e viceversa, possiamo concludere che i cateti del triangolo dato hanno lunghezze 3a e $\frac{9}{4}a$.

- SECONDO PROCEDIMENTO. La lunghezza del secondo cateto, determinata in funzione di x mediante il teorema di Pitagora, è: $\sqrt{\left(\frac{15}{4}a\right)^2-x^2}$. Siccome il perimetro del triangolo è 9a, deve risultare:

$$x+\frac{15}{4}a+\sqrt{\frac{225}{16}a^2-x^2}=9a.$$

È evidente che quest'equazione ha una struttura completamente diversa da quella precedente. Di più: mentre sappiamo risolvere la prima, non sappiamo risolvere questa o perlomeno non ancora.
Ebbene, qui vogliamo occuparci proprio della risoluzione delle equazioni di quest'ultimo tipo, che sono un caso particolare di una categoria più generale di equazioni, chiamate *equazioni irrazionali quadratiche*.

24.3.2 Un'equazione si dice **irrazionale quadratica** quando l'incognita figura sotto il segno di radice quadrata.
Tra queste equazioni ci interessano quelle che possono ricondursi ad una delle seguenti forme:

[8] $$\sqrt{f(x)}=g(x),\quad \sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$$

dove f(x) e g(x) sono polinomi o, al più, frazioni algebriche in x (o, come anche si dice, ***funzioni razionali*** di x), con coefficienti in $\mathbb{R}$, naturalmente di tipo particolarmente semplice.
Per esempio, la precedente equazione è del primo tipo. Infatti, dopo alcuni elementari passaggi algebrici, tendenti ad isolare il radicale, si può mettere nella seguente forma:

$$\sqrt{\frac{225}{16}a^2-x^2}=\frac{21}{4}a-x.$$

Le equazioni dei tipi [8] si risolvono di norma trasformandole preventivamente in equazioni razionali. Per questo si elevano al quadrato entrambi i membri dell'equazione, in modo da far scomparire per l'appunto il radicale.
Ora, però, quando si esegue quest'operazione, succede che l'equazione che si ottiene è in genere prevalente rispetto all'equazione di partenza; nel senso che, oltre alle soluzioni di questa, può avere altre soluzioni estranee ad essa.
Per renderci conto di ciò basta osservare che, in $\mathbb{R}$, mentre: $x=2 \rightarrow x^2=4$,
non è vera l'implicazione inversa. Infatti: $x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$.
Dunque l'equazione $x^2=4$ ammette, oltre alla soluzione $x=2$ dell'equazione di partenza, anche la soluzione $x=-2$, estranea a quella. Perciò è prevalente rispetto all'equazione $x=2$.
Pertanto, una volta che è stata risolta l'equazione E_2 ottenuta dall'equazione E_1 con un elevamento al quadrato dei due membri di questa, è indispensabile effettuare una verifica ed accettare come soluzioni di E_1 quelle soluzioni di E_2 che soddisfano per l'appunto ad E_1.

24.3.3 A titolo di esempio, ma anche per completare il discorso ivi interrotto, ritorniamo sull'equazione irrazionale che avevamo lasciato sopra:

$$\sqrt{\frac{225}{16}a^2-x^2}=\frac{21}{4}a-x.$$

Elevando al quadrato entrambi i suoi membri, essa assume questa forma:

$$\frac{225}{16}a^2-x^2=\left(\frac{21}{4}a-x\right)^2.$$

Dopo alcune semplificazioni si ottiene:

$$4x^2-21ax+27a^2=0;$$

equazione che abbiamo risolto prima, trovando due radici: $x_1=3a$, $x_2=\frac{9}{4}a$.

Verifichiamo se 3a è soluzione dell'equazione irrazionale considerata, calcolando i valori che assumono i due membri dell'equazione considerata e controllando se questi valori sono uguali.

Per $x=3a$:

$$\left(\sqrt{\frac{225}{16}a^2-x^2}\right)_{x=3a}=\sqrt{\frac{225}{16}a^2-9a^2}=\sqrt{\frac{81}{16}a^2}=\frac{9}{4}a,\qquad \left(\frac{21}{4}a-x\right)_{x=3a}=\frac{21}{4}a-3a=\frac{9}{4}a;$$

i due membri dell'equazione assumono lo stesso valore. Dunque 3a è effettivamente soluzione dell'equazione irrazionale.

Si può controllare allo stesso modo che anche $\frac{9}{4}a$ è soluzione dell'equazione. Ti lasciamo questo compito.

A questo punto la risoluzione del problema, da cui siamo partiti, prosegue come nel primo procedimento.

24.3.4 Vediamo un altro esempio di equazione irrazionale quadratica da risolvere in $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x-1}=1-x.$$

RISOLUZIONE. Intanto si vede subito che l'equazione è soddisfatta per $x=1$. Ma non sappiamo se ci sono altre soluzioni. Procediamo come per una generica equazione irrazionale. Per questo eleviamo al quadrato entrambi i suoi membri. Si ottiene:

$$(x-1)=(1-x)^2.$$

Risolvendo quest'equazione si trova: $x=2$ oppure $x=1$.

Controlliamo se 2 è soluzione dell'equazione assegnata. Per $x=2$:

$$\left(\sqrt{x-1}\right)_{x=2}=\sqrt{2-1}=1,\quad (1-x)_{x=2}=1-2=-1;$$

i due membri dell'equazione non assumono lo stesso valore. Pertanto 2 non è soluzione dell'equazione assegnata.

Controlliamo se lo è 1, anche se in realtà non ne avremmo bisogno giacché sappiamo già che lo è. Per $x=1$:

$$\left(\sqrt{x-1}\right)_{x=1}=\sqrt{1-1}=0,\quad (1-x)_{x=1}=1-1=0;$$

i due membri dell'equazione assumono lo stesso valore. Dunque 1 è soluzione dell'equazione data.

In conclusione, l'equazione irrazionale assegnata ammette l'unica soluzione $x=1$.

Ti proponiamo di risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni irrazionali nell'incognita x:

$$\sqrt{x-2}=1;\quad \sqrt{x+2}=x;\quad \sqrt{x+1}=\sqrt{x^2+2x+1};\quad \sqrt{x^2+2}=\sqrt{x^2-x}.$$

24.4 SISTEMI DI 2° GRADO

24.4.1 Il più generale sistema di 2° grado di due equazioni in due incognite x, y ridotto alla forma normale è del tipo seguente:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ mx+ny+p=0 \end{cases}$$

dove i coefficienti delle incognite sono numeri reali assegnati purché a, b, c non siano contemporaneamente nulli. In altri termini le equazioni che lo costituiscono sono una di 2° grado e l'altra di 1° grado nelle stesse incognite x, y.

Di un sistema di 2° grado si potrebbe fornire un'interpretazione geometrica, ma ora non lo possiamo fare e dobbiamo rimandare a tempi migliori [(1)].

Un sistema di 2° grado si risolve di norma col metodo di sostituzione: precisamente si calcola, nell'equazione di 1° grado, una delle due incognite in funzione dell'altra e si sostituisce nell'equazione di 2° grado. Si ottiene, così, un'equazione di 2° grado in un'incognita (è detta ***equazione risolvente*** del sistema): basta risolvere questa e determinare per sostituzione i valori dell'altra incognita.

24.4.2 Per esempio, risolviamo in $\mathbb{R}^2$ il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2-y^2+2x+1=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$

RISOLUZIONE. Da esso si ottiene anzitutto il seguente sistema equivalente:

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ x^2-(2x+1)^2+2x+1=0 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione di 2° grado di questo sistema, si trovano le radici $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$.

Siccome per $x=0$ si ha $y=1$ e per $x=-\frac{2}{3}$ si ha $y=-\frac{1}{3}$, allora il sistema ammette le due soluzioni $(0,1)$ e $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Ti proponiamo alcuni esercizi.

1. Risolvi in $\mathbb{R}^2$ i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ y=2x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

2. Per la risoluzione in $\mathbb{R}^2$ di ciascuno dei seguenti sistemi disponi di non più di 10 secondi. Procedi.

$$\begin{cases} x^2+2y^2+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2+3y^2=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

24.4.3 Analogamente si risolve un sistema di 2° grado di n equazioni ($n>2$) in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$, formato ovviamente da una equazione di 2° grado e da $n-1$ equazioni di 1° grado. Precisamente:

- si assume come nota una qualsiasi delle n incognite, mettiamo x_1;
- si risolve il sistema formato dalle $n-1$ equazioni di 1° grado nelle $n-1$ incognite $x_2, \dots, x_n$;
- si sostituiscono le espressioni di tali incognite, calcolate in funzione di x_1, nell'unica equazione di 2° grado: si ottiene la risolvente di 2° grado in x_1;
- basta risolvere quest'equazione e determinare per sostituzione i valori delle altre incognite.

ESERCIZI. Risolvi i seguenti sistemi:

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-z=1 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ (1,1,2),\ \left(-\frac{1}{11},\frac{23}{11},-\frac{14}{11}\right)\right]$

---

[1] Cfr.: In particolare: Unità 41: Parabola, N° 41.2; Unità 42: Circonferenza nel piano cartesiano, N° 42.2.

2. $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 2x-3=0 \\ 4x-y^2+2z+12=0 \end{cases}$ [**R.** $\left(\frac{3}{2},4,-1\right)$, $\left(\frac{3}{2},-6,9\right)$]

3. $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+2y+4z=0 \\ (y-2)^2-4x(z+3)=0 \end{cases}$ [**R.** (8,-14, 5) contata 2 volte]

4. $\begin{cases} 2(x+z)=y+1 \\ x=z+1 \\ 2x^2=2y-3z+1 \end{cases}$ [**R.** (2, 5, 1), $\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$]

24.4.4 NOTA BENE. Abbiamo adesso tutti gli elementi per dimostrare la formula [2] di trasformazione di un radicale quadratico doppio nella somma o differenza di due radicali quadratici semplici:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+k}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-k}{2}},$$

dove a, b, k sono numeri interi positivi tali che $a^2-b=k^2$ e dove, con riferimento al doppio segno "$\pm$", valgono contemporaneamente o il segno "+" o il segno "–".

Bisogna dunque trovare due numeri interi positivi x, y ($x>y$) tali che:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\,.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri di questa uguaglianza:

$$a\pm\sqrt{b}=x+y\pm 2\sqrt{xy}\,.$$

Affinché l'uguaglianza sia possibile deve risultare contemporaneamente:

$$x+y=a\,,\quad xy=\frac{b}{4}.$$

Si tratta dunque di trovare due numeri di cui sono noti la somma (=a) ed il prodotto (=$b/4$). Questi due numeri non sono altro che le radici della seguente equazione:

$$z^2-az+\frac{b}{4}=0\,.$$

Risolvendola si trova:

$$z_1=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\,,\quad z_2=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\,.$$

Solamente se esiste un intero k tale che $a^2-b=k^2$, i numeri trovati sono interi. Tenendo poi presente che deve essere $x>y$, risulta che questi numeri, sotto la condizione precedente, sono i seguenti:

$$x=\sqrt{\frac{a+k}{2}}\,,\quad y=\sqrt{\frac{a-k}{2}}\,.$$

In definitiva si ottiene la formula che si voleva dimostrare.

24.5 PROBLEMI DI 2° GRADO

24.5.1 Abbiamo introdotto questa unità con la traduzione di alcuni problemi nel modello matematico rappresentato da un'equazione di 2° grado.

Abbiamo, quindi, imparato a risolvere una tale equazione nella sua forma più generale.

---

[2] Cfr.: Unità 3: Numeri reali, N° 3.6.6.

Abbiamo allargato la nostra indagine alle equazioni irrazionali quadratiche ed ai sistemi di equazioni di 2° grado in due o più incognite.
Vogliamo adesso terminare con la presentazione di altri problemi, nella risoluzione dei quali trovano completa applicazione le nozioni acquisite, o almeno la maggior parte di esse.
Alterneremo problemi risolti a problemi da risolvere.
Questi problemi sono tradotti in un'equazione di 2° grado. Perciò sono chiamati ***problemi di 2° grado***.
Così come quelli che sono tradotti in un'equazione di 1° grado sono detti ***problemi di 1° grado***.

24.5.2 PROBLEMA RISOLTO 1. In un numero di tre cifre la somma di queste è 9, la cifra delle unità è il quadrato di quella delle centinaia e questa supera di una unità quella delle decine. Trovare il numero.
RISOLUZIONE. Indicate nell'ordine con $x,\ y,\ z$ la cifra delle centinaia, quella delle decine e quella delle unità, il problema è tradotto nel seguente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ z=x^2 \\ x=y+1 \end{cases}$$

dove $x, y, z \in \{\, t \in \mathbb{N} \mid 0 \le t \le 9 \,\}$ con $z \neq 0$.

Sostituiamo nella 1ª equazione, al posto di y, l'espressione:	$x-1$	fornita dalla 3ª
ed al posto di z, l'espressione:	x^2	fornita dalla 2ª.
Otteniamo:	$x+(x-1)+x^2=9$;	
da cui segue:	$x^2+2x-10=0$	
e, applicando la formula risolvente dell'equazione di 2° grado:	$x=-1\pm\sqrt{11}$.	

Siccome queste radici non appartengono ad $\mathbb{N}$, il problema è impossibile.

- PROBLEMI DA RISOLVERE.

1. Determinare due numeri naturali non nulli sapendo che il loro prodotto è uguale alla loro somma. [**R.** 2, 2]
2. Determinare due numeri naturali minori di 10 sapendo che il loro prodotto è uguale al doppio della loro somma. [**R.** 3, 6; 4, 4]
3. Un numero di due cifre è uguale alla somma dei quadrati delle sue cifre aumentata di 4. Inoltre se al numero si addiziona 18 si ottiene un numero derivato da esso con il semplice scambio delle cifre. Determinare il numero. [**R.** 24]
4. Determinare due numeri naturali consecutivi sapendo che la somma dei loro quadrati è 61.
5. Determinare un numero reale che sommato al suo reciproco dia per totale $25/12$.
6. Di due numeri reali a, b si sa che $a+b=-1$ e $a^3+b^3=-19$. Calcolare il prodotto ab dei due numeri.
   [Nota Bene. Si può risolvere il sistema delle due equazioni nelle incognite a, b, determinare tali incognite e quindi calcolare ab. Ma si può calcolare questo prodotto anche senza calcolare preventivamente i due numeri. Come si può procedere?]

24.5.3 PROBLEMA RISOLTO 2. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AB è lungo 30 cm e la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa misura 32 cm. Calcolare il perimetro del triangolo.
RISOLUZIONE. Con riferimento alla figura 2, si ha: $\overline{AB}=30$, $\overline{CD}=32$, dove le misure sono espresse in centimetri. Chiamata x (cm) la misura dell'ipotenusa BC, deve essere evidentemente $x>30$.
In virtù del 1° teorema di Euclide si ha: $\overline{AB}^2=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$ e poiché $\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{CD}=x-32$ si trova:

$$30^2=x\,(x-32);\ \text{vale a dire: }\ x^2-32\,x-900=0.$$

Risolvendo si ottiene:

$$x=\frac{32\pm\sqrt{32^2+4\cdot 900}}{2}=\frac{32\pm 68}{2}=\begin{cases}50\\-12\end{cases}$$

Solo la soluzione $x=50$ è accettabile ai fini della risoluzione del problema. Dunque: $\overline{BC}=50$ (cm).
Mediante il 1° teorema di Euclide si trova poi: $\overline{AC}=40$ (cm).
In definitiva il perimetro P del triangolo ABC è: $P=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=30+50+40=120$ (cm).

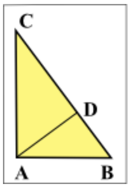

FIG. 2

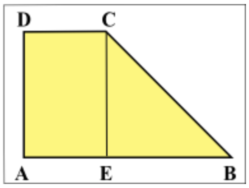

FIG. 3

PROBLEMA RISOLTO 3. La base maggiore e il perimetro di un trapezio rettangolo sono lunghi rispettivamente $9a$ e $22a$, dove a è una lunghezza nota. Sapendo che la base minore e il lato obliquo sono congruenti, calcolare l'area del trapezio.

RISOLUZIONE. Considerato il trapezio rettangolo ABCD (fig. 3), sappiamo che:

$$\overline{AB}=9a,\quad P=22a,\quad BC=CD,$$

dove P è il perimetro. Poniamo $\overline{BC}=\overline{CD}=x$, con $0<x<9a$. Essendo $\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=9a-x$ e dovendo risultare $\overline{CB}>\overline{EB}$ deve essere: $x>9a-x$,
da cui segue: $x>\frac{9}{2}a$.

Insomma x deve soddisfare ai seguenti limiti: $0<x<9a$ e $x>\frac{9}{2}a$; come dire:

$$\frac{9}{2}a<x<9a.$$

Applicando ora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CEB, si ha: $\overline{CE}^2+\overline{EB}^2=\overline{CB}^2$.
D'altronde: $\overline{CE}=\overline{AD}=P-\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}\right)=22a-(9a+x+x)=13a-2x$.
Dunque, ritornando alla relazione precedente, si ottiene: $(13a-2x)^2+(9a-x)^2=x^2$;
da cui, dopo alcuni calcoli elementari, segue: $4x^2-70ax+250a^2=0$.
Risolvendo quest'equazione si trovano due radici: $x=5a$ e $x=\frac{25}{2}a$. Di queste solo la prima soddisfa ai vincoli stabiliti sopra per la x, cioè $\frac{9}{2}a<x<9a$. Per cui: $\overline{CD}=\overline{BC}=5a$, $\overline{AD}=13a-2\cdot 5a=3a$.
Infine, indicata con A l'area del trapezio:

$$A=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}\cdot\overline{AD}=\frac{9a+5a}{2}\cdot 3a=21a^2.$$

- PROBLEMI DA RISOLVERE.

1. Il perimetro e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente 6 cm e 2,6 cm. Determinare i suoi cateti. [**R.** 1 cm; 2,4 cm]
2. Determinare il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa misura 2,5 m e che il cateto maggiore supera di 1,7 m il minore. [**R.** 5,6 m]
3. Calcolare il perimetro di un rombo sapendo che la sua area è 19,2 m^2 e che la diagonale maggiore supera di 5,6 m la minore. [**R.** 20,8 m]
4. Dividere un segmento di lunghezza assegnata L in due parti, tali che una di esse sia media proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente. $\left[\textbf{R.}\ \frac{L}{2}\left(\sqrt{5}-1\right),\ \frac{L}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\right]$

5. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga L. Determinare i suoi cateti sapendo che la somma di uno di essi col doppio dell'altro è $L\sqrt{5}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2}{5}L\sqrt{5},\ \frac{1}{5}L\sqrt{5}\right]$

6. Calcolare il perimetro di un triangolo rettangolo di ipotenusa assegnata a ed area uguale ad $\frac{a^2}{4}$. Trovare per quale valore di a detto perimetro misura 74 cm, calcolando di questo valore una approssimazione a meno di 10^{-1} mm. [**R.** ...; a ≈ 30,65 cm]

7. I cateti OA ed OB del triangolo rettangolo AOB misurano rispettivamente 20 cm e 40 cm. Determinare un punto P sul cateto OA ed un punto Q sul cateto OB in modo che risulti AP=BQ e che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati del quadrilatero APQB sia uguale a 3100 cm^2.
[**R.** AP=BQ=15 cm]

8. I lati di un triangolo misurano rispettivamente: 15 cm, 16 cm, 24 cm. Allungandoli tutti dello stesso segmento si ottiene un triangolo rettangolo. Calcolare la misura di tale segmento.
Successivamente determinare le distanze del baricentro di questo triangolo rettangolo dai suoi vertici.
[**R.** 5 cm; per la 2^a parte si consiglia di fissare un opportuno riferimento cartesiano]

9. La base minore, il lato obliquo e il perimetro di un trapezio rettangolo misurano nell'ordine: 2,1 cm, 2 cm, 9 cm. Calcolare l'area del trapezio. [**R.** 2 sol.: $A'=4{,}32\ cm^2$, $A''=3{,}48\ cm^2$]

10. In un triangolo isoscele, il cui perimetro misura 9,8 cm, la differenza tra la base e l'altezza propriamente dette è di 1,9 cm. Calcolare l'area del triangolo. [**R.** 4,2 cm^2]

11. In un trapezio rettangolo la somma dei lati non paralleli è 9a e la differenza delle basi è 3a, dove a è una lunghezza nota. Calcolare le lunghezze dei lati del trapezio sapendo che la sua area è $14a^2$.
[**R.** 2a, 5a, 5a, 4a]

12. La base minore e il lato obliquo di un trapezio rettangolo misurano rispettivamente 2a e $2a\sqrt{13}$, dove a è una misura assegnata. Inoltre le diagonali del trapezio sono perpendicolari. Dopo aver dimostrato che l'altezza è media proporzionale fra le basi, calcolare il perimetro del trapezio. $\left[\mathbf{R.}\ 2a\left(7+\sqrt{13}\right)\right]$

13. Calcolare il perimetro di un trapezio rettangolo di altezza assegnata h ed area $\frac{41}{24}h^2$, sapendo che la diagonale minore e il lato obliquo sono perpendicolari. $\left[\mathbf{R.}\ 2\text{ sol.: } \frac{17}{3}h,\ \frac{h}{12}\left(53+4\sqrt{73}\right)\right]$

14. Nel trapezio ABCD il lato obliquo AD e la base minore AB misurano rispettivamente 20 cm e 15 cm e l'altezza condotta per A divide internamente la base maggiore DC in due parti, DH ed HC, la prima uguale ai $4/5$ della seconda. Sapendo che il perimetro del trapezio 84 cm, calcolare le misure dei suoi lati incogniti DC e BC. [**R.** DC=36 cm, BC=13 cm]

15. Il quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari ed O è il loro punto comune. Inoltre il triangolo ABC è rettangolo, il triangolo DOC isoscele e il triangolo ADC ha area uguale a 200 cm^2. Sapendo che AO misura 9 cm, calcolare un valore approssimato a meno di 10^{-1} mm del perimetro del quadrilatero. [**R.** 75,98 cm]

16. Si sa che il numero delle diagonali di un poligono di n lati è $\frac{n(n-3)}{2}$.
a) Quante diagonali ha un pentagono? b) Esiste un poligono con 10 diagonali?
c) Esiste un poligono con 20 diagonali?

17. Le diagonali del quadrilatero ABCD sono perpendicolari e si intersecano nel punto O. Sapendo che l'angolo $A\widehat{B}C$ è retto, $OC=OD$, $AO=\frac{16}{15}BC$ e l'area del triangolo AOD è $72a^2$, dove a è una lunghezza data, calcolare l'area del quadrilatero assegnato. Inoltre, dopo aver dimostrato che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero ABCD è un rettangolo, calcolare il perimetro e l'area di questo rettangolo. $\left[\mathbf{R.}\ \text{Posto } \overline{BC}=x, \text{...si trova } \overline{CO}=\frac{3}{5}x; \text{ quindi...} A(ABCD)=\frac{525}{2}a^2;\ldots\right]$

18. Nel trapezio ABCD siano AD e BC nell'ordine la base minore e quella maggiore. Il lato obliquo CD è visto dal vertice A sotto un angolo di 30° e dal vertice B sotto uno di 60°.

a) Dimostrare che una diagonale del trapezio è uguale alla semisomma delle basi mentre l'altra diagonale è il doppio dell'altezza.

b) Sapendo poi che una base del trapezio è i 2/3 dell'altra e che l'area del trapezio è $50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, trovare le misure dei suoi lati.

[**R.** a)…; b) 4 cm, 6 cm, $2\sqrt{21}$ cm, $2\sqrt{31}$ cm]

24.5.4 PROBLEMA RISOLTO 4. Un'azienda produce una certa sostanza. Dai suoi esperti è stato calcolato che il profitto G, connesso con la produzione della quantità Q di quella sostanza, è fornito dalla seguente legge:

$$G = -Q^2 + 25\,Q - 60,$$

dove Q è misurato in quintali e G in euro.

Calcolare per quale produzione il profitto dell'azienda è: 1) nullo; 2) € 90.

RISOLUZIONE.

1) Il profitto G dell'azienda è nullo quando chiaramente risulta:

$$-Q^2 + 25\,Q - 60 = 0\,, \quad \text{ossia:} \quad Q^2 - 25\,Q + 60 = 0\,.$$

Risolvendo questa equazione di 2° grado nell'incognita Q, si trova:

$$Q = \frac{25 \pm \sqrt{385}}{2} \approx \begin{cases} 22{,}31 \\ 2{,}69 \end{cases}$$

Dunque il profitto dell'azienda è nullo sia per una produzione della sostanza di circa 2,69 q sia per una produzione di circa 22,31 q .

2) Il profitto dell'azienda è di € 90 quando risulta:

$$90 = -Q^2 + 25\,Q - 60\,, \quad \text{ossia:} \quad Q^2 - 25\,Q + 150 = 0\,.$$

Risolvendo questa nuova equazione in Q, si trova:

$$Q = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} \approx \begin{cases} 15 \\ 10 \end{cases}$$

L'azienda realizza un profitto di 90 euro sia producendo 10 q di quella sostanza sia producendone 15.

- PROBLEMI DA RISOLVERE.

1. Gli esperti di un'azienda agricola hanno calcolato che il profitto G connesso con la produzione della quantità Q di un certo prodotto è fornito dalla seguente legge:

$$G = -20\,Q^2 + 300\,Q - 40\,,$$

dove Q è misurato in quintali e G in euro, per una produzione che non sia inferiore ai 6 q.

Calcolare per quale produzione il profitto dell'azienda è: 1) nullo; 2) € 1000.

[**R.** 1) ≈ 14,87 q; 2) ≈ 9,56 q]

2. Per una domanda di Q_d quintali di una certa merce viene fissato un prezzo di P centinaia di euro per quintale di quella merce, in modo che risulti:

$$Q_d^2 + 3Q_d + 2P - 100 = 0.$$

Per un'offerta di Q_s quintali della stessa merce viene proposto un prezzo di P centinaia di euro al quintale, in modo che risulti:

$$Q_s + 3\,P - 26 = 0\,.$$

Si ha equilibrio tra domanda ed offerta quando $Q_d = Q_s$.

Determinare il prezzo e la quantità di merce che determinano le condizioni di equilibrio.

[**R.** $P = 600$ €/q , $Q_d = Q_s = 8$ q]

24.5.5 PROBLEMA RISOLTO 5. Dimostra che, se m ed n sono numeri interi dispari, l'equazione:

$$x^2 + 2\,m\,x + 2\,n = 0$$

non ammette radici razionali.

RISOLUZIONE. Si ragiona per assurdo. Se le radici fossero razionali, il discriminante $4(m^2-2n)$ dovrebbe essere un quadrato perfetto, per cui dovrebbe esistere un intero q tale che $m^2-2n=q^2$. Siccome m ed n sono numeri dispari, esistono due interi a, b tali che $m=2a+1$, $n=2b+1$. Deve essere pertanto: $(2a+1)^2-2(2b+1)^2=q^2$. Da qui, dopo qualche semplice elaborazione, si ottiene:

$$a^2+a-2b^2-2b=\frac{q^2+1}{4}.$$

Ora, il 1° membro di quest'ultima uguaglianza è certamente un numero intero e, di conseguenza, anche il 2° membro dovrebbe esserlo. Ma questo è impossibile. Infatti, se q è pari allora q^2+1 è dispari e perciò non è divisibile per 4; se invece q è dispari allora esiste un intero c tale che $q=2c+1$, per cui $q^2+1=(2c+1)^2+1=4c^2+4c+2=2[2(c^2+c)+1]$, vale a dire che q^2+1 è il doppio di un numero dispari e, di conseguenza, neanche adesso è divisibile per 4. In ogni caso, $\frac{q^2+1}{4}$ non può essere un intero, per cui l'ipotesi assunta, che le radici dell'equazione assegnata siano razionali è assurda: l'equazione, pertanto, non ammette radici razionali.

- PROBLEMI DA RISOLVERE.

1. Un numero di cinque cifre è un quadrato perfetto (cioè è il quadrato di un numero naturale). Le sue cifre, scritte nell'ordine in cui si legge il numero, sono le seguenti:
$$a\,,\,a+2\,,\,a+2\,,\,a+1\,,\,a+2\,.$$
Trovare il numero. [**R.** 46656]
2. Trovare tre numeri consecutivi dispari tali che la somma dei loro quadrati sia un numero di 4 cifre uguali. [**R.** 41, 43, 45: la somma dei loro quadrati è 5555]
3. Considera la seguente equazione:
$$(x^2+2x)^{x-1} = 1, \text{con } x\in\mathbb{Z}.$$
Il numero delle sue soluzioni (distinte o coincidenti) è:
[A] 1 ; [B] 2 ; [C] 3 ; [D] 4 .
Una sola alternativa è corretta: individuala e fornisci un'esauriente spiegazione della scelta operata.
[**R.** Bisogna tener presente che la potenza a^b, con a, b interi, è uguale ad 1 in tre casi distinti: 1) $b=0$ con $a\neq 0$; 2) $a=1$ con b qualsiasi; 3) $a=-1$ con b pari. Pertanto, dopo alcuni calcoli, si trova che l'alternativa corretta è la [C]]
4. Stabilire se, fra i numeri di due cifre, scritti nel consueto sistema di numerazione decimale, ne esiste qualcuno che, moltiplicato per la somma delle sue cifre, dia un prodotto uguale alla somma dei cubi di tali cifre. [**R.** 2 sol.: 37 e 48]
5. Un numero si dice ***palindromo*** se ha lo stesso valore letto da sinistra a destra o da destra a sinistra. Per esempio, 21.712 è un numero palindromo, 12.712 non lo è.
Trovare un numero di due cifre, scritto nel consueto sistema di numerazione decimale, il cui quadrato sia un numero palindromo. [**R.** due sol.: 11 e 22]

24.5.6 PROBLEMA RISOLTO 6. Trovare due numeri interi positivi sapendo che la differenza dei loro quadrati è 133.

RISOLUZIONE. Indicati con x, y i due numeri deve essere $x^2-y^2=133$, ossia $(x+y)(x-y)=7\cdot 19$. Siccome x, y sono numeri interi positivi, questa uguaglianza è possibile se e solo se risulta contemporaneamente: $x+y=19$, $x-y=7$ oppure $x+y=133$, $x-y=1$. Da qui, risolvendo ciascuno dei due sistemi in x, y si trovano due soluzioni:

$$x = 13,\ \ y = 6;\quad x = 67,\ \ y = 66.$$

- PROBLEMI DA RISOLVERE.

1. Trovare due numeri interi positivi sapendo che la differenza dei loro quadrati è 15.
[**R.** 2 sol.: (4,1), (8,7)]

2. Trovare due numeri interi positivi sapendo che la differenza dei loro quadrati è 12.
[**R.** 1 sol.: (4,2)]

3. Trovare due numeri interi positivi sapendo che la differenza dei loro quadrati è 45.
[**R.** 3 sol.: (7,2), (9,6), (23,22)]

4. Trovare due numeri interi positivi sapendo che la differenza dei loro cubi è 117.
[**R.** 1 sol:: (5,2)]

5. Stabilire se esiste un numero naturale x tale che sia x+33 sia x+90 siano quadrati di numeri naturali.
[**R.** Esistono due numeri: 751 e 31]

24.6 UNA BREVE STORIA DELLE EQUAZIONI DI 2° GRADO

24.6.1 I Babilonesi, pur mancando di ogni simbolismo algebrico, erano in grado di risolvere, circa 2000 anni prima di Cristo, equazioni di 2° grado. Precisamente le equazioni, che essi risolvevano e di cui si trovano esempi nei reperti archeologici, sono dei seguenti tipi:

$$(1)\ \ x^2 + a\,x = b\,,\quad (2)\ \ x^2 - a\,x = b\,,\quad (3)\ \ x^2 + b = a\,x\,,$$

dove a, b sono numeri positivi.

Riguardo ai primi due tipi sono indicati procedimenti risolutivi che possiamo riassumere nelle seguenti corrispondenti formule:

$$(1')\ \ x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}\,,\qquad (2')\ \ x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}\,.$$

Invece nella risoluzione delle equazioni del tipo (3), il procedimento indica due soluzioni, riassumibili nella formula seguente:

$$(3')\ \ x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,.$$

Affinché risulti più chiaro quale fosse il procedimento seguito dai Babilonesi, ricostruiamolo, ancorché in linguaggio moderno, con riferimento ad un esempio, tratto da una tavoletta, in cui si chiede di «*trovare il lato di un quadrato sapendo che l'area diminuita del lato è 870*» [3].

Noi risolveremmo così: detto x il lato, si ha l'equazione $x^2-x=870$, da cui, prendendo la sola radice positiva, si ricava:

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 870}}{2}\ \text{, che è come dire: } x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+870}+\frac{1}{2}\ \text{, ossia: } x=30.$$

Ebbene la nostra formula non è altro che la sintesi dei passaggi numerici effettuati dai Babilonesi per risolvere l'equazione ed esposti solo a parole: prendi la metà di 1, che è 1/2, e moltiplica 1/2 per 1/2,

[3] I Babilonesi usano un linguaggio che non si preoccupa di rispettare le condizioni di omogeneità delle grandezze considerate. Infatti sommano lunghezze con aree, aree con volumi, lunghezze con volumi, intendendo ovviamente riferirsi alle misure coinvolte e non certamente alle grandezze stesse.

che è 1/4; aggiungi 1/4 a 870 e ottieni 3481/4; questo è il quadrato di 59/2. Aggiungi ora 1/2 a 59/2 e trovi 30, il lato del quadrato.
Si capisce facilmente che tutte e tre le formule – che, ripetiamo, i Babilonesi non avevano, ma che noi abbiamo usato per sintetizzare i procedimenti che essi seguivano per risolvere le tre tipologie di equazioni considerate – non sono che casi particolari della nostra formula risolvente di un'equazione di 2° grado.
Sulla logica che avrebbero seguito i Babilonesi per giungere ai procedimenti che risolvono classi di equazioni, ci sono sostanzialmente due posizioni: una, datata 1935, risalente al matematico austriaco Otto Neugebauer (1899-1990), il quale giudica che i ragionamenti dei Babilonesi fossero di tipo esclusivamente algebrico, l'altra, più recente, formulata nel 1999 dal matematico danese Jens Hoyrup (n. 1943). Questi, riprendendo consapevolmente o no un'idea dell'italiano Ettore Bortolotti (1866-1947), ritiene che la logica di base sia da ricercarsi nella geometria. In entrambi i casi il procedimento risolutivo delle equazioni di 2° grado poggerebbe sulla costruzione di un quadrato incognito: una costruzione algebrica secondo Neugebauer, una costruzione geometrica secondo Hoyrup [4].

24.6.2 L'algebra dei Babilonesi, anche se considerata costruita su una base geometrica, si presentava ai Greci, in particolare ai Pitagorici, come una serie di passaggi meccanici, in cui il supporto geometrico non compariva più. È verosimile che i Pitagorici la rifiutassero. Certamente la loro algebra, che, secondo il parere dei più, forma gran parte del II libro degli *Elementi* di Euclide, è un'algebra basata esclusivamente sulla geometria. In quest'algebra una grandezza è rappresentata da un segmento, il quadrato di una grandezza dal quadrato costruito sul segmento che la rappresenta, il prodotto di due grandezze dal rettangolo avente per lati i segmenti che rappresentano le due grandezze. Qualcuno sostiene addirittura che non si possa neppure parlare di algebra, ma soltanto e semplicemente di geometria. Riguardo alle equazioni di 2° grado, poi, mentre ci sono storici che attribuiscono ai Greci un metodo geometrico di risoluzione di tali equazioni, non manca chi sostiene che questi problemi non albergassero nella loro mente.
Comunque sia, possiamo legittimamente immaginare che, se ad uno studente del tempo di Euclide fosse stato chiesto di trovare un numero x che avesse una delle proprietà espresse dalle relazioni seguenti:

$$x^2+b^2=a\,x,\quad x^2+a\,x=b^2,\quad x^2=a\,x+b^2,$$

dove a, b sono numeri dati, egli avrebbe risolto la questione con una costruzione geometrica, piuttosto complicata. Uno studente di oggi se la caverebbe, invece, con l'applicazione di una banale formula. Questo modo di risolvere i problemi, anche quelli di natura aritmetica, caratterizzava la matematica greca per un assoluto rigore logico e per un grado elevato di perfezione estetica, ma nello stesso tempo la rendeva troppo complicata proprio perché poco maneggevole. Questo fatto impedì ogni progresso nel campo dell'algebra e, prima di arrivare alla nostra agile formula, dovettero passare molti secoli e ci vollero contributi di studiosi di popoli diversi.
Tra questi contributi ci piace citare quelli di uno studioso indiano, **Bhaskara**, vissuto dal 1114 circa al 1185, anche se in fondo i suoi risultati non influenzarono più di tanto quelli dei matematici successivi perché conosciuti troppo tardi. Comunque sia, Bhaskara trovò la soluzione generale dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, riconobbe sotto quale condizione essa ha radici reali e sotto quale condizione non le

4 Per avere un'idea di quanto diciamo qui, vedere Integrazione 1 / Unità 28-88 / Cap. 1 – Algoritmi e calcolabilità, N° 1.5

ha. Inoltre accettò, pur con riserve, le eventuali radici negative. Così, per esempio, riguardo all'equazione $x^2-45x=250$, indicò le soluzioni $x=50$ e $x=-5$.
Chi, diversamente da Bhaskara, influì in maniera determinante sui primi studiosi europei (che, dopo una lunga fase di oscurantismo, ritornavano ad occuparsi di questioni matematiche) fu l'arabo **Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi** (IX secolo) attraverso l'opera più importante da lui scritta: **Al-jabr wa'l muqabalah**, che vuol dire "trasporto e soppressione"; dove la parola "trasporto" si riferisce alla possibilità di trasportare un termine da un membro all'altro di un'equazione e la parola "soppressione" si riferisce invece alla possibilità di elidere i termini uguali che si trovano nei due membri dell'equazione.
Quel titolo, nella versione latina pervenutaci, diventò **Liber algebrae et almucabala** e da esso derivò l'attuale termine "algebra", mentre il termine "almucabala" spari dal linguaggio matematico [5].
L'opera, che è un vero e proprio manuale di algebra elementare, tratta in particolare delle equazioni di 2° grado, le quali sono distinte nei tipi caratterizzati dai seguenti esempi:

$$x^2=5\,x,\ x^2=25,\ x^2+10\,x=39,\ x^2+21=10\,x,\ 3\,x+4=x^2.$$

Esse sono studiate separatamente poiché al-Khwarizmi ammette solo coefficienti positivi e, per ogni tipo, egli prende in considerazione tre esempi a seconda che il coefficiente di x^2 sia uguale, maggiore o minore di 1. Inoltre accetta solo le radici positive; anche tutte e due, come nella penultima equazione, circa la quale, per la realtà delle radici, precisa che quello che oggi chiamiamo "discriminante" deve risultare positivo.
Nella prima parte della sua opera al-Khwarizmi indica in maniera meticolosa tutte le operazioni che bisogna effettuare per risolvere ciascuna equazione, ma senza usare alcun simbolismo e quindi con le parole del linguaggio comune, e inoltre senza fornire alcuna spiegazione. Un po' come facevano i Babilonesi. Successivamente spiega la validità dei procedimenti risolutivi, indicati in precedenza nei casi numerici, col ricorso a dimostrazioni di tipo geometrico, come probabilmente facevano i Greci, seppure con costruzioni geometriche originali.

24.6.3 L'Algebra di al-Khwarizmi fu, assieme agli Elementi di Euclide, l'opera che influenzò maggiormente lo sviluppo della matematica nel primo periodo del Rinascimento europeo.
Ad esse si ispirò certamente il matematico pisano **Leonardo Fibonacci**, vissuto negli anni a cavallo tra il XII e il XIII secolo. Egli elaborò le conoscenze acquisite, in maniera personale non priva di originalità, in alcune opere di matematica, tra cui il **Liber abaci**, completato nel 1202. L'opera – un trattato di aritmetica e algebra e, nel contempo, una sorta di manuale per i commercianti – comprende, oltre ad un'accurata descrizione del sistema di numerazione indo-arabo e ad altre cose interessanti, una parte dedicata allo studio delle equazioni di 1° e di 2° grado. Studio che viene parzialmente ripreso in un'altra opera dal titolo **Practica geometriae** (1220). Questo studio, condotto senza l'uso di alcun simbolismo algebrico, non è per la verità del tutto originale. In esso, infatti, vengono riproposti i procedimenti di al-Khwarizmi, che Fibonacci mostra apertamente di conoscere. Di modo che egli tratta sì delle equazioni algebriche, ma risolvendole col ricorso alla rappresentazione geometrica e sempre in casi numerici particolari. Un esempio, tratto dall'opera *Practica geometriae*, chiarirà il modo il proce-

[5] Il titolo latino di un'altra opera di al-Khwarizmi introdusse nel linguaggio matematico il termine *algorithmus*, che per l'appunto è una latinizzazione di al-Khwarizmi.

dere di Fibonacci più d'ogni altra spiegazione. Egli, proponendosi di risolvere l'equazione, che noi scriviamo simbolicamente nella forma $x^2+4x=140$, considera un segmento AB, di lunghezza 4 e di punto medio C, e lo prolunga di un tratto BD lungo x (Fig. 4); quindi costruisce il quadrato BDEF di area x^2 e il rettangolo ABFG di area 4x. L'incognita x deve essere tale che il rettangolo ADEG abbia area 140. Infatti: $x^2+4x=140$. Ricorrendo allora ad una idonea proprietà (espressa dalla proposizione 6 del II libro degli Elementi di Euclide) ottiene: $\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{CB}^2=\overline{CD}^2$, cioè: $140+\left(\frac{4}{2}\right)^2=\overline{CD}^2$, da cui si trova: $\overline{CD}=\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+140}$ e, di conseguenza, essendo $x=\overline{CD}-\overline{CB}$, si ha: $x=\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+140}-\frac{4}{2}$, ossia: $x=10$.

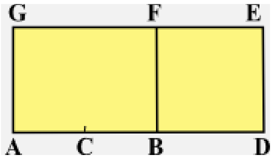

FIG. 4

Anche se Fibonacci opera sempre in casi numerici semplici, nondimeno si mostra del tutto consapevole della generalità delle conclusioni ottenute. Egli infatti enuncia una regola generale per ciascuno dei seguenti tipi di equazioni:

$$x^2+ax=b, \qquad x^2+b=ax, \qquad ax+b=x^2,$$

dove al posto di a, b considera naturalmente particolari valori numerici, prendendo in ogni caso le soluzioni positive. Così, per esempio riguardo alla prima equazione, il Nostro, prendendo in esame la particolare equazione $x^2+4x=140$, con il procedimento geometrico illustrato sopra, trova la radice positiva $x=\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+140}-\frac{4}{2}$ e, in un latino piuttosto discutibile, conclude dicendo:

«*Et sic fiat semper in omnibus questionibus in quibus numerus equatur uni quadrato et radicibus; videlicet super ipsum numerum addatur quadratum medietatis, et summa radix inveniatur; ex qua tollatur medietas positarum radicum*»[6].

Con riferimento all'equazione $x^2+ax=b$, appunto:

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}-\frac{a}{2}.$$

Conclusioni analoghe Fibonacci trae negli altri casi prendendo, per le equazioni del tipo $ax+b=x^2$, la sola radice positiva:

$$x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}+\frac{a}{2}$$

e, per quelle del tipo $x^2+b=ax$, entrambe le radici, nell'ipotesi che siano reali:

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}.$$

---

[6] *E così sia sempre in tutti i casi nei quali un numero* [il numerus è il nostro termine noto, b] *è uguale a un quadrato* [x^2] *e a radici* [qui è il nostro termine di 1° grado, ax, ma più avanti è la quantità a di queste radici]; *cioè allo stesso numero si aggiunga il quadrato della metà delle radici e si trovi la radice (quadrata) della somma; da queste si tolga la metà delle radici poste*.

24.6.4 Dopo Fibonacci diedero contributi alla risoluzione delle equazioni di 2° grado:

- **Giordano Nemorario** (XIII secolo), il quale ebbe il merito di aver formulato in termini generali la regola per la risoluzione di un'equazione di 2° grado, ma sempre per valori positivi delle radici.
- **Michael Stifel** (1487 circa – 1567), autore di un'opera dal titolo **Arithmetica integra** (1544), nella quale, usando i coefficienti negativi nelle equazioni, mostrò come i vari casi, in cui si presentavano le equazioni di 2° grado, potevano essere risolti con un'unica regola, che si poteva applicare ai diversi tipi di equazioni. Ma neppure lui accettò le radici negative, che chiamava "numeri absurdi".

Un notevole passo avanti fu fatto nel 1591 con la pubblicazione dell'opera **In artem analyticem isagoge** di **François Viète** (1540-1603), il quale migliorò la teoria delle equazioni introducendo dei parametri letterali al posto dei coefficienti numerici e aprendo la strada alla possibilità di una discussione generale dei problemi algebrici. Viète, inoltre, rese sistematico il calcolo letterale, benché i simboli di cui egli si serviva sparirono quasi subito dall'uso corrente.

Bisogna segnalare anche il contributo del fiammingo **Albert Girard** (1590-1633), il quale nella sua opera **Invention nouvelle en l'algèbre** (1629) perfezionò le relazioni tra le radici e i coefficienti di un'equazione, già introdotte da Viète.

Il passo definitivo si ebbe dapprima con l'affermarsi – mediante la **Géométrie** di **René Descartes** (**Cartesio**, 1596-1650), pubblicata nel 1637 – di quel simbolismo algebrico che da oltre un secolo si stava facendo strada e infine con l'uso generalizzato delle radici negative nell'opera **Arithmetica universalis** di **Isaac Newton** (1642-1727), la cui pubblicazione avvenne nel 1707.

VERIFICHE [7]

Risolvere in ℝ le seguenti equazioni in x (nn. 1-21):

1. $9x^2+6x-1=0$; $x^2-6x+9=0$.

2. $2x^2-2x\sqrt{2}+1=0$; $4x^2-4x\sqrt{3}+3=0$.

3. $2x^2-2x\sqrt{6}+3=0$; $x^2-4x\sqrt{2}+8=0$.

4. $x^2-x+1=0$; $x^2-4x+5=0$.

5. $4x^2-4x+17=0$; $4x^2+16x+17=0$.

6. $2x^2-x+1=0$; $3x^2+3x+1=0$.

7. $x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$; $4x^2-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}=0$.

8. $2x^2+\left(4-\sqrt{2}\right)x+2\sqrt{2}=0$; $x^2-\left(3+\sqrt{3}\right)x+2+\sqrt{3}=0$.

9. $4x^2-2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)x+3\sqrt{2}=0$; $x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}=0$.

10. $x^2-2ax-3a^2=0,\ a\in\mathbb{R}$; $2x^2-3ax-2a^2=0,\ a\in\mathbb{R}$.

11. $6x^2+ax-a^2=0,\ a\in\mathbb{R}$; $6x^2-13ax+6a^2=0,\ a\in\mathbb{R}$.

12. $x^2-2ax+a^2-1=0,\ a\in\mathbb{R}$; $2x^2-(2a-1)x+a-1=0,\ a\in\mathbb{R}$.

---

[7] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

13. $\dfrac{12-6x}{x+3}=x-2;\qquad \dfrac{4x}{1-x}=x-1.$

14. $\dfrac{x}{x-2}=x-2;\qquad \dfrac{3}{1-2x}=x+2.$

15. $\dfrac{1}{2x-3}=3-2x;\qquad \dfrac{3x}{2x-1}=2-x.$

16. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{x+14}{x^2-4}$. [**R.** -1]

17. $\dfrac{x}{2x-1}-\dfrac{x^2-x+2}{4x^2-1}=\dfrac{1}{2x+1}$. [**R.** $-1,1$]

18. $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-1}$. [**R.** 0]

19. $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+4}{x^2-4}$. [**R.** impossibile]

20. $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$. [**R.** impossibile]

21. $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x^2-x}{x^2-4}+\dfrac{x}{x-2}=0$. $\left[\mathbf{R.}\ 0,\dfrac{1}{3}\right]$

Calcolare, se esistono, i valori del parametro reale m per cui le seguenti equazioni in x hanno due radici reali e coincidenti e, in corrispondenza dei valori di m così trovati, determinare tali radici (nn. 22-27):

22. $x^2+2x-m=0$, [**R.** $m=-1$, $x'=x''=-1$]

23. $m x^2-x+m-1=0$, $\left[\mathbf{R.}\ m=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2},\ x'=x''=-1-\sqrt{2},\ \ldots\right]$

24. $2x^2-4(m-1)x+m-2=0$, [**R.** nessun m]

25. $m x^2-2mx+1-m=0$, [**R.** $m=1/2$, ...]

26. $x^2-2(5-2m)x+(m-2)=0$, [**R.** $m'=3$, $m''=9/4$, ...]

27. $(m-2)x^2-2(m-2)x+m-3=0$, [**R.** nessun m]

Dopo aver controllato che le seguenti equazioni in x hanno radici reali, calcolare la somma e il prodotto di tali radici senza determinarle (nn. 28-33):

28. $2x^2-3x-4=0$.

29. $x^2-4x-1=0$.

30. $(\sqrt{2}+1)x^2-2x\sqrt{2}-1=0.$

31. $(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}-1)x-2=0.$

32. $x^2\sqrt{3}-2mx-\sqrt{3}=0,\ m\in\mathbb{R}.$

33. $2x^2\sqrt{2}-(k+1)x-\sqrt{2}=0,\ k\in\mathbb{R}.$

Dopo aver verificato che il numero indicato a fianco di ciascuna delle seguenti equazioni in x ne è una radice, calcolare l’altra radice senza ricorrere alla formula risolvente (nn. 34-40):

34. $x^2-(2+\sqrt{2})x+2\sqrt{2}=0,\ \ 2.$

35. $2x^2+(2\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0,\ \ -\sqrt{2}\,.$

36. $2x^2+3x-2=0,\ \ 1/2.$

37. $3x^2-x-2=0,\ \ -2/3.$

38. $x^2-mx+m-1=0,\ \ 1;\ \ m\epsilon\mathbb{R}.$

39. $4x^2-2(3m+1)x+m(2m+1)=0,\ \ \frac{m}{2};\ \ m\epsilon\mathbb{R}.$

40. $mx^2-(m^2-m+1)x+m-1=0,\ \ m-1;\ \ m\epsilon\mathbb{R}.$

Scomporre in prodotti di polinomi con coefficienti in $\mathbb{R}$ i seguenti trinomi (nn. 41-43):

41. $3\,x^2-4\,x-4;$ $\qquad 2\,x^2-x-1.$

42. $x^2-3\,x\sqrt{3}+6;$ $\qquad x^2-(2\sqrt{2}+1)\,x+\sqrt{2}+2.$

43. $2x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3};$ $\qquad x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}.$

Questioni varie (nn. 44-55):

44. Assegnata la seguente equazione in x: $ax^2+bx+c=0$, dove a, b, c sono numeri reali con $a\neq0$, e dette x_1 ed x_2 le sue radici (supposte reali), esprimere in funzione dei coefficienti a, b, c:

$$1)\ |x_1-x_2|\,;\qquad 2)\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2};\qquad 3)\ x_1^2+x_2^2\,.$$

$$\left[\mathbf{R.}\ 1)\ \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}\ ;\ \ 2)\ -\frac{b}{c}\ ;\ \ 3)\ \frac{b^2-2ac}{a^2}\right]$$

45. Dopo aver formato l'equazione di 2° grado in x, determinare le sue radici x_1 ed x_2, sapendo che fra di esse sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_1+x_2=2x_1x_2 \\ x_1x_2-x_1-x_2=3 \end{cases}$$

[**R.** Posto $x_1+x_2=s$, $x_1x_2=p$, ...]

46. Dopo aver formato l'equazione di 2° grado in x, determinare le sue radici x_1 ed x_2, sapendo che fra di esse sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_1x_2=\frac{5}{2} \\ x_1+x_2-2x_1x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

[**R.** $2x^2-3x+1=0$, ...]

47. Ė assegnata la seguente equazione in x:

$$(m-1)\,x^2-2\,m\,x+m-2=0,$$

dove m è un parametro reale diverso da 1. Determinare per quali valori di m: a) la somma delle sue radici è uguale a 2; b) il loro prodotto è uguale ad 1/2.
Nel secondo caso calcolare anche le radici dell'equazione.

48. Ė assegnata la seguente equazione in x:

$$a\,x^2-(2\,a-1)\,x+1=0\,,$$

dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire per quale valore di a una sua radice è –2 e quindi calcolare l'altra.

49. Ė assegnata la seguente equazione in x:

$$x^2 - k\,x + k - 1 = 0\,,$$

dove k è un parametro reale. Calcolare le sue radici, x_1 ed x_2, sapendo che:

$$1)\ x_1 = x_2\,. \quad 2)\ x_1 = \frac{1}{x_2}\,. \quad 3)\ x_1 = -x_2\,. \quad 4)\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3\,.$$

[**R.** 1) $x_1 = x_2 = 1$; ….. ; 4) $x_1 = 1/2,\ x_2 = 1$]

50. Ė assegnata la seguente equazione in x:

$$a\,x^2 - b\,x + a - b + 1 = 0\,,$$

dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$. Dette x_1, x_2 le sue radici, determinare per quali valori di a e di b risulta contemporaneamente:

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{e} \quad x_1\,x_2 = 0\,.$$

51. Considerata la seguente equazione in x:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0\,,$$

dove $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, costruire l'equazione avente come soluzioni in $\mathbb{R}$: a) i valori opposti delle radici dell'equazione assegnata; b) i valori reciproci delle radici dell'equazione assegnata.

[**R.** a) $a\,x^2 - b\,x + c = 0$; b) $c\,x^2 + b\,x + a = 0$]

52. Considerata la seguente equazione in x:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0\,,$$

dove $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, e supposto che le sue radici siano reali, dimostrare che esse sono del tipo t, $\frac{1}{t}$, dove $t \neq 0$, cioè una reciproca dell'altra, se e solo se $c=a$.

53. Dimostra che:

a) Un'equazione di 2° grado, avente come radici i numeri α e β, assume la seguente forma:

$$x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\,\beta = 0\,.$$

b) Due numeri, il cui prodotto P e la cui somma S, sono le radici della seguente equazione:

$$x^2 - S\,x + P = 0\,.$$

Verifica in alcuni casi particolari pensati da te.

[**R.** 1) Se α e β sono le radici di un'equazione di 2° grado in x, allora $x=\alpha$ e $x=\beta$; cioè: $x-\alpha=0$ e $x-\beta=0$: da qui, moltiplicando … . 2) Detti α e β i due numeri, siccome $\alpha+\beta=S$ e $\alpha\beta=P$, allora …]

54. Sono date le seguenti equazioni in x:

$$2ax = 1, \quad x = 2a.$$

Trovare per quali valori del parametro reale a hanno la stessa soluzione.

[**R**. Conviene risolvere ciascuna equazione e uguagliare le soluzioni]

55. Sono date le seguenti equazioni in x:

$$x^2 + 2ax - 1 = 0, \quad x^2 + x - 2a = 0.$$

Trovare per quali valori del parametro reale a esse hanno in comune almeno una soluzione reale e in tal caso quante sono le soluzioni comuni.

[**R**. Diversamente dal caso precedente conviene sottrarre membro a membro le due equazioni, considerare la relazione ottenuta come un'equazione in a e trarre le conclusioni:

- per $a=0$ le due equazioni hanno in comune una sola soluzione: … ;
- per $a=1/2$ hanno in comune due soluzioni: …;
- non esistono altri valori di a per i quali le due equazioni hanno soluzioni comuni]

Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni irrazionali quadratiche in x (nn. 56-66):

56. $\sqrt{x^2-1}=x.$ [**R.** impossibile]
57. $\sqrt{x^2-1}=x+2.$ $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{5}{4}\right]$
58. $\sqrt{x+2}+3=0.$ [**R.** impossibile]
59. $\sqrt{x-1}-2=0.$ [**R.** 5]
60. $\sqrt{x-1}+2x-5=0.$ [**R.** 2]
61. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+1}=0.$ [**R.** impossibile]
62. $2\sqrt{x-1}-\sqrt{2x+1}=0.$ $\left[\mathbf{R.}\ \frac{5}{2}\right]$
63. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}=0.$ [**R.** 2]
64. $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2+x-1}.$ [**R.** -1]
65. $\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{x+3}.$ [**R.** ± 1]
66. $2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+7}=0.$ [**R.** $1, 3$]

Risolvere per valori reali i seguenti sistemi di 2° grado (nn. 67-73):

67. $\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=2x \end{cases}$ [**R.** $(0,0),\ (4,8)$]
68. $\begin{cases} y=2x^2-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$ [**R.** $(0,-1),\ (1,1)$]
69. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ (1,0),\ \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)\right]$
70. $\begin{cases} x^2+y^2-2x-y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ (0,0),\ \left(\frac{24}{13},\frac{16}{13}\right)\right]$
71. $\begin{cases} xy=2 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ $\left[\mathbf{R.}\ (2,1),\ \left(-\frac{4}{3},-\frac{3}{2}\right)\right]$
72. $\begin{cases} 2xy=3 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$ [**R.** impossibile]
73. $\begin{cases} xy-2x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ [**R.** $(0,0)$ contata 2 volte]

Questioni varie:

74. L'età del padre, che 2 anni fa era 16 volte quella del figlio, fra due anni sarà il quadrato di quella. Calcolare le due età attuali. [**R.** 4 e 34 anni; si scartano, per ovvi motivi, 8 e 98 anni]
75. In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) sono assegnate le rette:
$$r \equiv x-2y+2=0 \ \text{ ed } \ s \equiv y+2=0.$$
Si determinino i punti della retta r che risultano equidistanti dal punto O e dalla retta s.
Stabilito che questi punti sono due, A e B, si dicano C e D rispettivamente le loro proiezioni ortogonali sulla retta s.
Si dimostri per via sintetica e si verifichi per via analitica che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero ABCD è un parallelogramma.
76. Due semirette Oa ed Ob formano un angolo di 45°. Sulla prima semiretta è fissato il punto A tale che $\overline{OA}=6k$, dove k è una lunghezza assegnata. Scelto un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare un punto B sulla seconda semiretta in modo che risulti $\overline{AB}=2k\sqrt{5}$.

Stabilito che di punti B siffatti ne esistono due, B' e B", calcolare per quale valore di k l'area del triangolo AB'B" è uguale a 48 cm^2.

77. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (0xy), sono assegnate le rette di equazioni:

$$[1]\ y=(a+1)x+2(a+1), \qquad [2]\ y=ax-(3a+1),$$

dove $a\in\mathbb{R}$.

a. Dimostrare che tutte le rette [1] passano per un punto A e tutte le rette [2] per un punto B.
b. Determinare in funzione di a le coordinate del punto P in cui la generica retta [1] interseca la generica retta [2].
c. Verificare che dei suddetti punti P ne esistono due che appartengono alla retta di equazione $y=x-2$: si chiamino P' e P".
d. Calcolare l'area del quadrilatero AP'BP".

78. ® Due corpi, A e B, si muovono con velocità costanti su due rette perpendicolari, partendo contemporaneamente dallo stesso punto O. Sapendo che la velocità di A supera di 12 km/h quella di B e che, dopo 45 minuti dalla partenza, i due corpi distano 45 km, determinare le loro velocità.

[**R.** Indicata con V la velocità di B, espressa in km/h, si trova la seguente equazione risolvente: $V^2+12V-1728=0$, da cui segue: $V_B = 36$ km/h, $V_A = 48$ km/h]

79. ® Due corpi, A e B, si muovono con velocità costanti su due rette perpendicolari. Sono partiti dallo stesso punto O ma B è partito 10 minuti prima di A. Sapendo che la velocità di A supera di 12 km/h quella di B e che, dopo 45 minuti dalla partenza di B, i due corpi distano 45 km, determinare le loro velocità.

[**R.** Indicata con V la velocità di B, espressa in km/h, si ottiene la seguente equazione risolvente: $65V^2+588V-142272=0$, da cui segue $V_B \approx 42{,}5$ km/h, $V_A \approx 54{,}5$ km/h]

80. Un sacchetto contiene palline bianche e palline nere, ma non se ne conosce la composizione. Si sa però che il numero delle palline bianche supera di due unità quello delle palline nere ed estraendo a caso due palline, senza reinserimento, la probabilità che siano di colore diverso è 8/15. Determinare una plausibile composizione dell'urna e la probabilità che le due palline estratte siano entrambe bianche e quella che siano entrambe nere.

[**R.** Indicato con x il numero delle palline bianche, si ottiene la seguente equazione: $\frac{x(x-2)}{(x-1)(2x-3)}=\frac{8}{15}$, da cui seguono 2 situazioni: 1) 4 palline bianche, … ; 2) 6 palline bianche, …]

81. ® Un'urna contiene 30 palline, che possono essere rosse o verdi, separate però in due compartimenti: in uno vi sono palline di plastica, nell'altro palline di vetro. In particolare, 5 palline sono di plastica rossa e 4 palline sono di vetro verde. Si estraggono due palline a caso, una di plastica ed una di vetro e si sa che è 11/20 la probabilità che quella di plastica sia rossa o quella di vetro sia verde. Calcolare quante sono le palline di plastica e quante quelle di vetro.

[**R.** Indicato con x il numero delle palline di plastica verde, si ottiene la seguente equazione risolvente: $\frac{125-x}{x(x-25)}=\frac{11}{20}$]

82. In un sacchetto vi sono 32 palline, che possono essere bianche o rosse, separate però in due compartimenti distinti: nel primo vi sono palline di plastica, nel secondo palline di vetro. In particolare 8 palline sono di plastica bianca e 10 sono di vetro rosso. Si estraggono due palline a caso, una di plastica e una di vetro e si sa che è 1/3 la probabilità che quella di plastica sia bianca e quella di vetro sia rossa. Calcolare quante sono le palline di plastica e quante quelle di vetro.

[**R.** 2 sol.: 12 palline di plastica e 20 di vetro oppure 20 di plastica e 12 di vetro]

83. ® Paolo ha percorso i 720 km che separano casa sua dal luogo della villeggiatura ad una certa velocità media V. In seguito ad alcuni calcoli ha constatato che, se avesse viaggiato ad una velocità media superiore di 10 km/h rispetto a quella tenuta, avrebbe risparmiato esattamente un'ora di tempo. Calcolare la velocità tenuta da Paolo ed il tempo impiegato a compiere il percorso.

[**R.** $V=80\ \text{km/h};\ t=9\ \text{h}$]

84. Una squadra di operai porta a termine un lavoro, per il quale sono necessarie 240 giornate di lavoro di un singolo operaio. È stato calcolato che il lavoro sarebbe stato terminato con 5 giornate di anticipo se la squadra avesse potuto contare sull'apporto dei 4 operai provvisoriamente assenti. Calcolare quanti operai e in quanti giorni hanno compiuto il lavoro. [**R.** 12 operai, 20 giorni]

85. Mario decide di costruirsi un gruzzoletto da utilizzare per l'acquisto di un cellulare. Per questo accantona 1 euro la prima settimana, 2 euro la seconda, 3 euro la terza e, così via, n euro l'ennesima settimana. Dopo una certa settimana, una volta accantonati gli euro prestabiliti, constata che il numero complessivo di euro messi da parte è esattamente uguale a 8 volte il numero di euro che ha accantonato in quella settimana. Quanti euro complessivamente ha accantonato Mario? In quante settimane? [**R.** 120 euro, 15 settimane]

86. Il seguente problema è stato proposto e risolto dal matematico indiano Bhaskara, il quale però non disponeva del nostro agile simbolismo: «La radice quadrata della metà del numero di uno sciame d'api si posa su un cespuglio di jasmin; e così gli otto noni dell'intero sciame; una femmina vola sul maschio rimasto, che, attratto dalla sua fragranza notturna, ronza all'interno di un loto nel quale si trova imprigionato. Dimmi tu, donna amabile, il numero delle api.» [**R.** 72]

87. Anche questo problema è dovuto a Bhaskara: «Dieci volte la radice quadrata di un gruppo di oche si era diretta verso il lago Manasa, all'avvicinarsi di una nuvola; un'ottava parte andò nella foresta di St'halapadminis; tre coppie furono viste dedicarsi al gioco sull'acqua abbondante con le delicate fibre di loto. Dimmi, cara ragazza, l'intero numero delle oche.» [**R.** 144]

88. ® Posto che $P(z)$ indichi il binomio $az+b$, dove $a,\ b$ sono numeri reali, con $a\neq 0$, determinare i valori di a, b per cui si ha identicamente: $P\big(P(x)\big)=P(x)+P(x+1)$. [**R.** $a=b=2$]

89. Un gruppo di conoscenti organizza una gita in pullman e contratta una spesa complessiva di € 9675. All'ultimo momento si aggiungono alla comitiva altri due componenti e questo permette ai componenti del gruppo originario di risparmiare 10 euro cadauno. Da quante persone è composto l'intero gruppo? Quale somma spende ciascuno di loro? [**R.** 45, € 215]

90. Dato il trinomio $2x^2-(k+2)x+k$, dove k è un parametro reale, si indichino con α e β i suoi zeri e siano α^2 e β^2 gli zeri del trinomio x^2+ax+b. Determinare per quale valore di k è $a+b=-1$.

[**R.** ogni k]

91. Determinare i coefficienti del trinomio x^2+ax+b, sapendo che sono numeri interi positivi tali che $a<b$ e $a^2+b^2=74$. Il trinomio così trovato ammette zeri reali? [**R.** $a=5, b=7$; ...]

92. Si consideri la seguente equazione in x: $x^2-2kx+2k-1=0$, dove k è un parametro reale. Verificare che una delle sue radici è un numero intero per ogni valore di k e trovare per quali valori di k anche l'altra radice è un numero intero. [**R.** $x'=1$ per ogni k; x" intero per ogni k intero e per $k=1/2$]

93. PROBLEMA RISOLTO. Si consideri l'equazione in x: $x^2-kx+2k-1=0$, dove k è un parametro reale. Dopo aver verificato che per $k=0$ le sue radici sono entrambe numeri interi, trovare se c'è qualche altro valore di k per il quale le radici dell'equazione sono entrambe numeri interi.

[Questione ad alto coefficiente di difficoltà]

RISOLUZIONE. Questo problema può sembrare simile al precedente, ma non è così. In realtà il primo si risolve in un modo che potremmo dire naturale, mentre il secondo richiede qualche artificio non proprio evidentissimo.

Indicate allora con x' ed x" le sue radici (x'≤x"), si può constatare immediatamente che per k=0 risulta $x'=-1$, $x''=1$. Adesso, in virtù delle formule di Viète, si ha:

$$x' + x'' = k\,,\quad x'x'' = 2k-1;$$

da cui segue: $x'x''=2(x'+x'')-1$ ossia: $x'x''-2(x'+x'')=-1$.

D'altro canto, si può constatare che si ha: $(x'-2)(x''-2)=x'x''-2(x'+x'')+4$.

Pertanto: $(x'-2)(x''-2)=3$.

Deve dunque risultare (ricordiamo che x'<x" e che x' ed x" si vuole che siano interi):

$$\begin{cases} x'-2=1 \\ x''-2=3 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x'-2=-3 \\ x''-2=-1 \end{cases}$$

Come dire:

$$\begin{cases} x'=3 \\ x''=5 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x'=-1 \\ x''=1 \end{cases}$$

La seconda situazione porta alle radici -1 e 1, già prese in considerazione e si ottengono per $k=0$. La prima situazione porta all'unico altro caso in cui l'equazione assegnata ha entrambe le radici intere, x'=3 ed x"=5, e queste si hanno per k=3+5=8.

94. Un parallelogramma è tale che, conducendo per il suo centro una particolare retta r che intersechi i due lati maggiori, esso resta diviso in due trapezi isosceli: dimostrare che tali trapezi sono congruenti. Sapendo, poi, che un angolo del parallelogramma misura $45°$ e che il perimetro e l'area di ciascuno dei due trapezi ottenuti sono rispettivamente 10 cm e $3\sqrt{2}\ \text{cm}^2$, calcolare le misure dei lati del parallelogramma e quelle dei segmenti in cui ciascuno dei suoi lati maggiori è diviso dalla retta r. [**R.** 2 cm, 6 cm; $(3\pm\sqrt{2})$ cm]

95. Un'urna contiene palline rosse e palline nere, ma le palline nere sono 2 in più di quelle rosse. Sono estratte casualmente 2 palline, senza reinserimento. Quante palline rosse devono essere contenute nell'urna affinché sia uguale a $8/7$ il rapporto fra la probabilità che le due palline estratte abbiano colore diverso e quella che abbiano lo stesso colore? [**R.** 2 sol.: 2, 4]

96. È dato un rettangolo ABCD tale che il segmento avente per estremi i punti medi dei lati maggiori, AB e AD, lo divide in due rettangoli simili ad esso. Si prendano un punto E sul lato AB ed un punto F sul lato CD, in modo che il quadrilatero EFCB sia un quadrato. Stabilire qual è la maggiore delle due parti in cui il segmento EF divide il rettangolo dato.

97. Un cateto di un triangolo rettangolo misura 6 cm. Sul cateto incognito è costruito un quadrato ed il trapezio rettangolo che così si ottiene ha perimetro 40 cm. Calcolare l'area del trapezio. [**R.** 88 cm²]

98. È dato il quadrato ABCD di lato lungo L. Si prendano sulla diagonale AC due punti P, Q (AP<AQ) e sulla diagonale BD due punti R, S (BR<BS) tali che il quadrilatero PRQS sia un quadrato.
  a) Dimostrare che i quadrilateri ABRP, BCQR, CDSQ, DAPS sono uguali.
  b) Trovare la posizione di P per la quale il quadrato PRQS è equivalente a ciascuno dei 4 quadrilateri suddetti.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\ldots;\text{b)}\ \overline{AP}=\frac{L}{10}\left(5\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)\right]$

99. Il lato del quadrato ABCD è lungo 14 cm. Internamente al quadrato si prendano i due punti E ed F in modo che il quadrilatero AECF sia un parallelogrammo la cui area sia metà di quella del quadrato. La diagonale EF di tale parallelogrammo misura $2\sqrt{29}$ cm. Calcolare le distanze del punto E dai lati AB ed AD del quadrato. [**R.** 2 sol.: 5 cm, 12 cm; 2 cm, 9 cm]

100. Due rettangoli sono disposti l'uno internamente all'altro in modo che i loro lati siano paralleli e sia

costante la distanza di ogni lato di un rettangolo dal lato parallelo più vicino dell'altro rettangolo. Sapendo il rettangolo minore ha dimensioni 6 cm e 9 cm e che e che risulta essere equivalente alla metà del rettangolo maggiore, qual è la distanza suddetta fra due lati paralleli dei due rettangoli?

[**R.** 1,5 cm]

101. Due circonferenze, K' e K", sono tangenti internamente nel punto A. K" è la circonferenza esterna. Una retta, condotta per A, interseca ulteriormente K' in B e K" in C. Condurre per C una tangente a K' in modo che, chiamato D il punto di contatto ed E l'ulteriore punto in cui tale tangente interseca K", risulti, rispetto alla medesima unità di misura delle lunghezze:

$$\overline{AB}=6\sqrt{3},\ \overline{CD}=4\sqrt{3},\ \overline{BD}=6.$$

a) Verificare che il triangolo BCD è rettangolo. b) Calcolare l'area del triangolo ACE.

[È richiesta molta attenzione, in particolare agli angoli del triangolo ABD. **R.** a)...;b) $48\sqrt{3}$]

102. Un pavimento rettangolare, le cui dimensioni sono 4 m e 5 m, può essere ricoperto perfettamente con 625 piastrelle uguali fra loro e simili al pavimento stesso.

a) Quali sono le dimensioni di ogni piastrella?

b) Se le piastrelle fossero quadrate, ma sempre uguali fra loro, quanto sarebbe lunga la loro diagonale?

[**R.** a) 16 cm, 20 cm; b) $8\sqrt{10}$ cm]

103. Risolvere in ℝ le seguenti equazioni in x:

$$\left|x^2-2\right|=1;\qquad \frac{1}{x^2-2}=0;\qquad x^2-1=|2x-1|;\qquad \frac{1}{x-1}+(x-1)=\frac{1}{x-1}.$$

104. Nella figura sottostante (Fig. 5) è rappresentato un pentagono.

a) Calcolarne l'area.

b) Determinare l'equazione della retta, parallela all'asse x, che divide il pentagono in due parti equivalenti.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)...;\ b)}\ y=\frac{1}{2}\left(21-\sqrt{183}\right)\right]$

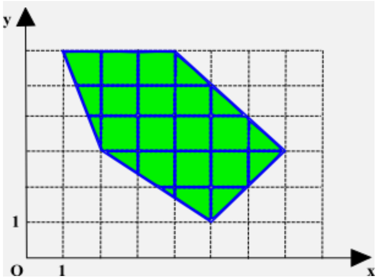

FIG. 5

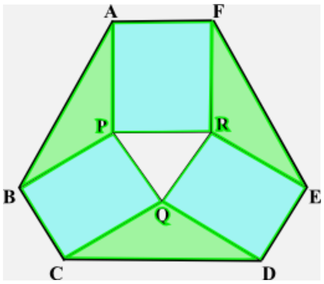

FIG. 6

105. Con riferimento alla figura sovrastante (Fig. 6), i triangoli ABP, CDQ ed EFR sono isosceli e uguali ed inoltre i quadrilateri FAPR, BCQP e DERQ sono rettangoli uguali. Si sa che l'area del triangolo PRQ è $3a^2\sqrt{3}$, dove a è una lunghezza assegnata, ed è 1/12 dell'area dell'esagono ABCDEF. Calcolare il perimetro di tale esagono. [**R.** $18a\sqrt{3}$]

106. Sul pavimento di una stanza di forma quadrata sono disposte in ordine sparso alcune mattonelle quadrate uguali, lasciando scoperta la maggior parte del pavimento. Il loro numero è un quadrato perfetto. Disponendo sul pavimento altre 253 mattonelle uguali alle precedenti e disponendole tutte a stretto contatto le une con le altre, il pavimento è completamente ricoperto. Tendendo presente che il lato di ogni mattonella misura 20 cm: a) quant'è l'area del pavimento? b) quante mattonelle occorrono per ricoprirlo esattamente?

[**R.** Con una scelta opportuna delle incognite, si arriva alla seguente equazione: $x^2-y^2=11\cdot 23$, da cui si avrebbero due soluzioni, ma una non è compatibile con i dati del problema. Dunque: a) area = $11{,}56\ m^2$, b) 289]

107. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il punto $A(4,-3)$. Determinare il punto B in modo che il triangolo OAB sia equilatero.

$$\left[\mathbf{R.}\ 2\ \text{sol.}:\ B'\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right),\ \ B''\left(2-\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\right)\right]$$

108. Un corpo, partendo da fermo nell'istante 0, cade da un'altezza h. Si sa che nell'istante in cui impatta sul suolo risulta: $h=\frac{1}{2}gt^2$, $v=gt$, essendo g l'accelerazione di gravità ($g\ \approx\ 9{,}8\ \ m/s^2$) e v la velocità d'impatto al suolo. 1) Esprimere v in funzione di h. 2) Supposto che sia h = 5 m, qual è, con approssimazione ed espressa in chilometri orari, la velocità d'impatto sul suolo?

[**R.** $v=\sqrt{2gh}$; $v \approx 15{,}2$ km/h]

109. Luigi decide di liberarsi delle 169 figurine di attori che ha raccolto pazientemente nel corso dell'ultimo anno. Lo fa distribuendole fra i suoi amici e le sue amiche, regalando a ciascun amico tante figurine quanti sono gli amici e a ciascun'amica tante figurine quante sono le amiche. Quanti amici e quante amiche ha Luigi, se il numero degli amici supera quello delle amiche, che comunque non è 0?

[**R.** Se x è il numero degli amici ed y quello delle amiche (x, y numeri naturali tali che $x>y>0$), agli amici vanno complessivamente x^2 figurine ed alle amiche ne vanno y^2, per cui ... : $x=12$, $y=5$]

110. La differenza tra la radice quadrata di un numero naturale e la sua radice quarta è 6. Determinare il numero. [**R.** Si suggerisce di porre $\sqrt[4]{N}=A$, N=81]

111. In un'urna vi sono 10 palline di due colori diversi: bianco e rosso. La probabilità che, estraendone due a caso, siano dello stesso colore è $7/15$.

a) Qual è la probabilità che siano di colore diverso?
b) Quante sono le palline bianche?

[**R.** a) … ; b) 6 o 4]

112. In un sacchetto sono contenute 10 palline, di cui 3 rosse e le altre bianche o nere. Sono estratte due palline a caso e la probabilità che siano di colore diverso è $7/15$.

a) Qual è la probabilità che siano dello stesso colore?
b) Quante palline bianche sono contenute nell'urna?
c) Qual è la probabilità che almeno una delle palline estratte sia nera?

$$\left[\mathbf{R.}\ \text{a) ... ; b) 2 sol .... ; c)}\ \frac{1}{5}\ \text{o}\ \frac{8}{15}\right]$$

113. In un sacchetto sono contenute palline di tre colori diversi: bianco, rosso e nero. In particolare, le palline bianche sono 6 e quelle rosse 4. Sono estratte due palline a caso e la probabilità che nessuna di esse sia nera è $7/22$. a) Qual è la probabilità che almeno una delle due palline estratte sia nera? b) Quante palline nere sono contenute nel sacchetto? c) Qual è la probabilità che una ed una soltanto delle due palline estratte sia nera? [**R.** a) … ; b) 2; c) $10/33$]

114. Un'urna contiene palline di due colori diversi: bianco e nero. La probabilità di estrarre da essa due palline dello stesso colore è 7/15, quella di estrarre una pallina bianca è 3/5. Quante palline sono contenute nell'urna? Quante sono bianche? [**R.** 10; 6]

115. LABORATORIO DI MATEMATICA. Ti proponiamo alcuni problemi, ciascuno dei quali ha come risolvente un'equazione di 2° grado. Ma ognuno di essi si può risolvere senza scomodare tali equazioni.

Risolvi seguendo il primo procedimento e prova a trovare una strategia di risoluzione che non coinvolga equazioni di 2° grado.

Problema 1. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 10 cm e l'altezza relativa ad essa misura 4,8 cm. Trovare le misure dei cateti.

Problema 2. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 10 cm mentre la somma dei cateti è 14 cm. Trovare le misure dei cateti.

Problema 3. Il sig. Rossi vorrebbe vendere un appezzamento di terremo, piuttosto esteso, ma non trova acquirenti. Avendo proprio necessità di disfarsi di quel terreno, pur di venderlo, accetta di suddividerlo fra due acquirenti, ma con una svalutazione enorme del 32%. Sapendo che normalmente un terreno si vende ad un prezzo proporzionale al quadrato della sua superficie, quali porzioni di superficie hanno acquistato i due compratori?

[N.B. In merito ai problemi 2 e 3, da risolvere con il secondo procedimento, si suggerisce di tener presente lo sviluppo del quadrato di un binomio]

116. Un corpo è lanciato verticalmente verso l'alto con la velocità di $25\ \mathrm{m/s}$. Supponendo la mancanza di resistenza dell'aria ed un'accelerazione di gravità di $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, calcolare con un'approssimazione al primo decimale:

a) dopo quanto tempo dall'istante del lancio il corpo ripassa per la posizione del lancio;

b) dopo quanto tempo dall'istante del lancio il corpo si trova a 25 m di distanza dalla posizione del lancio;

c) qual è la massima altezza raggiunta dal corpo.

RISOLUZIONE (Traccia) La Fisica insegna che un corpo, lanciato con velocità v_0 secondo la verticale verso l'alto, dopo un tempo t dal lancio si trova ad una distanza x dalla posizione del lancio tale che:

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Su questa base i punti a) e b) si risolvono agevolmente.

c) Quando il corpo raggiunge la massima altezza è massima x, ossia la quantità:

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{o anche la quantità:} \quad \frac{2}{g} \cdot \frac{g}{2} t \left(v_0 - \frac{1}{2} g t \right).$$

Ora questa quantità, prescindendo dalla costante $2/g$, è il prodotto di due variabili positive, $\frac{g}{2}t$ e $v_0 - \frac{1}{2}gt$, per $0<t<2v_0/g$, la cui somma è la costante v_0. Ne discende che tale prodotto è massimo quando le due variabili sono uguali [8], cioè quando si ha:

$$\frac{g}{2} t = v_0 - \frac{1}{2} g t \quad \text{da cui segue:} \quad t = \frac{v_0}{g}.$$

La massima altezza è allora:

$$\max(x) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{g} = \frac{25^2}{9{,}8} \approx 31{,}8\ (\mathrm{m}).$$

117. Calcolare i valori massimi delle seguenti funzioni:

a) $2+x-x^2,\ \text{con } 0<x<1$; b) $x-3x^2,\ \text{con } 0<x<\frac{1}{3}$; c) $3x-2x^2,\ \text{con } 0<x<\frac{3}{2}$.

118. ® Le misure dei cateti di un triangolo rettangolo, espresse in metri, sono numeri interi tali che il quadrato della loro differenza supera di un numero quadrato il numero che esprime la misura del cateto minore. a) Determinare, attraverso le misure dei cateti, tutti i triangoli la cui area è compresa fra $10\ \mathrm{m^2}$ e $100\ \mathrm{m^2}$. b) Fra i triangoli trovati ce n'è qualcuno le misure dei cui lati formano una terna pi-

[8] Cfr.: Proprietà 1 in Laboratorio di matematica a conclusione del n. 22.6.2 in Unità 22: Sistemi lineari.

tagorica?

[Problema ad alto coefficienti di difficoltà. È ispirato ad un problema proposto a Fermat nel 1641 dal matematico francese Bernard Frénicle de Bessy, 1605-1675]

[**R.** 6 soluzioni: (11,8), (8,5), (16,12), (11,7), (14,9), (17,11)]

119. ® Nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, un numero naturale che termina per 5 si può mettere nella forma seguente: $10a+5$, dove a è un numero naturale.

a) Dimostrare che il quadrato di un tale numero è un numero che si può mettere nella forma seguente: $100a(a+1)+25$. Verificare con qualche esempio particolare.

b) Un numero N di 4 cifre è un quadrato perfetto e termina per 25. Se il numero formato dal gruppo delle prime due cifre è moltiplicato per 6, si ottiene ancora un numero di 4 cifre che è un quadrato perfetto e termina per 25. Trovare N.

120. Il numero 4.005 è uguale alla somma dei primi n numeri naturali a partire da 1. Qual è il valore di n?

Spiegare perché non esiste alcun numero n tale che il numero 405 sia uguale alla somma dei primi n numeri naturali a partire da 1.

121. Alcuni amici si danno appuntamento a cena presso il ristorante "da sora Gina". Al momento di saldare il conto, pari a € 245, tre di essi fanno i furbi e si defilano senza pagare. Di modo che quelli che rimangono si vedono obbligati a pagare ciascuno € 10,5 in più del dovuto. a) Quanti erano gli amici a cena? b) Quale quota ha dovuto pagare ciascuno di coloro che sono rimasti? [**R.** a) 10; b) € 35]

122. Stabilire se esistono due numeri reali a, b tali che il polinomio $(x^2+ax+b)^2$ sia identicamente uguale (cioè uguale per ogni x) al polinomio seguente:

a) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$; b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1$.

123. È data la seguente equazione: $x^2+4x+4=0$, il cui discriminante è nullo. Dopo aver sostituito alla x l'espressione in y tale che:

$$x = \frac{ay+b}{cy+d},$$

dove a, b, c, d sono parametri reali, verificare che la nuova equazione di 2° grado in y, che così si ottiene (sotto quale condizione?), ha anch'essa discriminante nullo.

[In realtà, ciò accade non solo per l'equazione assegnata, ma per ogni equazione di 2° grado con discriminante nullo. Questo fatto si esprime dicendo che il discriminante dell'equazione assegnata è un ***invariante*** per sostituzioni del tipo suddetto.]

124. In un'urna sono contenute 15 palline, uguali in tutto e per tutto tranne che nel colore, che può essere rosso o nero. Si estraggono a caso 2 palline. Il rapporto fra la probabilità che siano entrambe rosse e quella che siano entrambe nere è 3/4. Calcolare la probabilità che le due palline estratte siano: a) entrambe rosse; b) entrambe nere; c) di colore diverso. $\left[\mathbf{R.}\ \text{a) } \frac{1}{5}\ ;\ \text{b) } \frac{4}{15}\ ;\ \text{c) } \frac{8}{15}\right]$

125. Gli amici Gianni e Piero, dopo aver conseguito il diploma di scuola secondaria di 1° grado, si sono iscritti alla prima classe dell'Istituto Tecnico "Einstein". A causa della lingua straniera studiata, i due amici possono capitare solamente nella 1ªA o nella 1ªB: la destinazione avviene per sorteggio e ci sono 27 possibilità su 55 che essi finiscano nella stessa classe. Sapendo che le due classi hanno lo stesso numero di studenti, calcolare qual è questo numero. [**R.** 28]

126. Sia P un punto interno al quadrato ABCD tale che le lunghezze dei segmenti PA, PB, PC, calcolate rispetto alla medesima unità di misura, siano nell'ordine: $\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$. Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), trovare le coordinate del punto P e dei vertici del quadrato e calcolare la distanza PD. $\left[\mathbf{R.}\ \ldots;\ 2\sqrt{2}\right]$

127. Nel trapezio ABCD l'angolo in C è ottuso. L'altezza del trapezio misura 8 cm, la base maggiore AB supera la base minore di 6 cm e il perimetro del trapezio è 30 cm. Si sa inoltre che è 1/3 il rapporto fra il triangolo ACD ed il triangolo ABC. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è l'unica corretta, fornendo anche una completa giustificazione della scelta operata:

[A] il trapezio è rettangolo;
[B] il trapezio è isoscele;
[C] le precedenti affermazioni sono entrambe false;
[D] i dati sono insufficienti per decidere sulla natura del trapezio.

128. Calcolare le misure dei lati di un triangolo rettangolo, sapendo che il raggio del cerchio inscritto in esso misura 1 m ed il perimetro è 12 m. [**R.** 2 soluzioni simmetriche: 3 m, 4m, 5 m; 4 m, 3 m, 5 m]

129. Nel parallelogrammo ABCD la diagonale AC è perpendicolare al lato AB. Sapendo che questo lato e la diagonale BD misurano rispettivamente $\sqrt{11}$ m e 7 m, calcolare la misura della diagonale AC.

$\left[\textbf{R.}\ \sqrt{5}\ \text{m}\right]$

130. La base maggiore AB, la base minore DC e l'altezza AD del trapezio rettangolo ABCD misurano rispettivamente: 20 cm, 5 cm e 8 cm. Determinare un punto P interno al trapezio in modo che i triangoli $A\widehat{P}D$ e $B\widehat{P}C$ siano entrambi rettangoli in P.

$\left[\textbf{R.}\ \text{Detta H la proiezione di P su AB, si ha la sola soluzione: } AH=\frac{64}{37},\ PH=\frac{208}{37}\right]$

131. Il raggio del cerchio circoscritto e quello del cerchio inscritto nel triangolo ABC, rettangolo in A, misurano rispettivamente 15 cm e 6 cm. Calcolare: a) il perimetro e l'area del triangolo; b) le misure dei cateti del triangolo.

[**R.** Indicato con T il punto in cui l'ipotenusa BC tocca il cerchio inscritto, si suggerisce di porre TB=x e TC=y. In questo modo, se si vuole, si può pervenire alla risoluzione del punto a) senza aver risolto il punto b). In ogni caso si trova: a) 72 cm, 216 cm^2; b) 18 cm, 24 cm]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Si consideri la seguente equazione in x: $x^2+2x=0$. È vero o è falso che essa non ha discriminante dal momento che si tratta di un'equazione spuria?
2. Si consideri l'equazione $2x^2-4x+3=0$. Si può stabilire se sono reali o no senza averle prima calcolate?
3. Si consideri l'equazione $2x^2-4x+1=0$. Si può calcolare la somma e il prodotto delle sue radici senza averle prima calcolate?
4. Si consideri l'equazione $3x^2-3x+1=0$. È vero che essa, presentando due variazioni, ammette due radici positive in base alla regola dei segni di Cartesio?
5. Siamo in grado di costruire l'equazione di 2° grado che ha come radici i numeri -2 e $1/3$?
6. È vero che le due equazioni $x=3$ e $x^2=9$ sono equivalenti nell'insieme ℕ dei numeri naturali e non lo sono invece nell'insieme ℤ degli interi?
7. Quale equazione di 2° grado ha come radici i due numeri reali x_1 e x_2 tali che:

$$x_1x_2=3 \ \text{ e } \ x_1^2+x_2^2=\frac{25}{4}\ ?$$

8 Si consideri l'equazione in x: $x^2 - x - k + 1 = 0$, dove k è un parametro reale. Determinare, se esistono, per quali valori di k l'equazione ammette come soluzioni dei numeri interi.

9 È assegnata l'equazione $x^2-3x-4=0$. Come si costruisce un'equazione di 2° grado in x, le cui radici si ottengono aumentando di 2 ciascuna delle radici dell'equazione assegnata?

10 Prova a risolvere il seguente sistema per valori reali delle incognite:

$$\begin{cases} 2x = yz \\ x + y + z = 4 \\ x^2 = y^2 + z^2 - 2yz \end{cases}$$

11 Sapresti fornire una ragione plausibile per la quale i matematici antichi non prendevano in considerazione l'equazione $ax^2+bx+c=0$, con a, b, c numeri positivi?

12 X, Y, Z sono tre numeri reali positivi tali che: XY=4, YZ=7, ZX=35. Quanto vale il prodotto XYZ?

RISPOSTE.

1 È falso. Di ogni equazione di 2° grado si può considerare il discriminante, che nel caso specifico è $\Delta=4$. Più in generale, quando l'equazione è spuria, il discriminante dell'equazione è certamente positivo.

2 Sì. Basta calcolare il suo discriminante Δ: a seconda che esso sia positivo, nullo, negativo, l'equazione ammette nell'ordine radici reali e distinte, radici reali e coincidenti, radici non reali. Nel caso specifico, essendo $\Delta=4^2-4\cdot2\cdot3=-8$, l'equazione non ammette radici reali.

3 Sì. Basta far ricorso alle formule di Viète. Indicate con x' ed x" le radici dell'equazione (che, detto per inciso, sono reali e distinte), si trova nel caso specifico: $x'+x''=2$ e $x'x''=1/2$.

4 È falso. Infatti, per poter stabilire il segno delle radici bisogna anzitutto assicurarsi che siano reali ($\Delta\geq0$) e quelle dell'equazione data non lo sono poiché il discriminante dell'equazione è negativo.

5 Sì. Essa è semplicemente l'equazione $(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$, vale a dire, dopo aver semplificato: $3x^2+5x-2=0$.

6 È così. Esse, infatti, ammettono la stessa soluzione 3 nell'insieme ℕ, mentre nell'insieme ℤ la prima continua ad avere la soluzione 3 ma la seconda ammette le soluzioni 3 e –3.

7 Bisogna notare che dalle condizioni: $x_1x_2=3$ e $x_1^2+x_2^2=\frac{25}{4}$, si ottiene: $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=\frac{25}{4}+6$, ossia: $(x_1+x_2)^2=\frac{49}{4}$ e perciò: $x_1+x_2=\pm\frac{7}{2}$. Come dire che le condizioni iniziali si sdoppiano in queste altre: $x_1x_2=3,\ x_1+x_2=\frac{7}{2}$ oppure $x_1x_2=3,\ x_1+x_2=-\frac{7}{2}$. Dalle prime due si ottiene l'equazione: $x^2-\frac{7}{2}x+3=0$, vale a dire: $2x^2-7x+6=0$, la quale ha come radici 2 e 3/2. Dalle seconde si ottiene, invece, l'equazione: $x^2+\frac{7}{2}x+3=0$, vale a dire: $2x^2+7x+6=0$, la quale ha come radici –2 e –3/2.

8 Applicando la formula risolvente, si ottiene:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{4k-3}}{2}.$$

Affinché questi x siano numeri interi il numero $4k-3$ deve essere il quadrato di un numero intero dispari. Vale a dire: deve esistere un numero intero z tale che: $4k-3 = (2z+1)^2$. Sotto questa condizione, per la quale:

$$k = \frac{3 + (2z+1)^2}{4}, \quad \forall z \in \mathbb{Z},$$

le radici dell'equazione assegnata sono le seguenti:

$$x=\frac{1\pm(2z+1)}{2}=\begin{cases}z+1\\-z\end{cases}$$

ed evidentemente sono numeri interi.

9 Non è necessario trovare le radici dell'equazione per costruire quella richiesta. Si constata, infatti, che se è a una radice dell'equazione data, quella dell'equazione da costruire è un numero b tale che $b=a+2$, ossia $b-2=a$. Basta, pertanto, sostituire $x-2$ al posto di x, nell'equazione assegnata, per ottenere l'equazione richiesta. Lasciamo a te la verifica di quanto testé sostenuto.

10 Bisogna osservare che la terza equazione si può mettere nella forma $x^2=(y-z)^2$, la quale dà luogo a due possibilità: $x=y-z$ e $x=z-y$. Di modo che il sistema assegnato si sdoppia. Una volta risolti i due sistemi ottenuti, si trovano due soluzioni: (1,2,1) e (1,1,2).

11 Gli antichi non prendevano in considerazione i numeri negativi e tantomeno le eventuali radici negative di un'equazione. E le radici dell'equazione assegnata, ammesso che siano reali, non possono che essere negative. In caso contrario, avremmo infatti l'assurdo di una somma di numeri positivi uguale a zero.

12 La risoluzione è molto più semplice e immediata di quanto si possa immaginare. Basta infatti constatare che si ha: $(XY)(YZ)(ZX)=4\cdot 7\cdot 35$, da cui segue facilmente $XYZ=10\sqrt{7}$.