Prerequisiti:
- Saper operare con i numeri razionali

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *dimostrare le formule per il calcolo delle disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici*
- *calcolare disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici in varie situazioni*
- *dimostrare relazioni fra i coefficienti binomiali*
- *conoscere e utilizzare la formula del binomio di Newton*
- *determinare la probabilità di un evento utilizzando il calcolo combinatorio*
- *risolvere problemi di probabilità utilizzando il calcolo combinatorio*

**Questa unità è rivolta a tutte le scuole, ma preferibilmente dovrebbe essere rinviata al 2° biennio, in particolare per quanto concerne gli ultimi due paragrafi 27-5 e 27.6.**



# Calcolo combinatorio. Il binomio di Newton

## Unità 27

## 27.1 INTRODUZIONE

Se è richiesto di determinare tutte le possibili successioni in cui, per esempio, possono essere estratte le palline contenute in un'urna, una dopo l'altra senza rimetterle nell'urna, c'è poco da fare, bisogna armarsi di pazienza e costruire tali successioni. Le quali sono già tante se, per esempio, le palline sono solo 3. Infatti, indicate per comodità con p1, p2, p3 tali palline, tutte le possibili successioni sono esattamente 6 e sono per la precisione le seguenti:

p1-p2-p3,   p1-p3-p2,   p2-p1-p3,   p2-p3-p1,   p3-p1-p2,   p3-p2-p1.

Si immagini cosa sarebbe se le palline fossero di più.
Ora, fortunatamente, spesso non interessano "quali" successioni si possano costruire ma "quante", e inoltre spesso non interessa neppure l'ordine con cui le palline sono estratte e, anzi, interessa solo l'estrazione di alcune palline. Si pensi, per esempio, al gioco del Lotto. Qui si estraggono solo 5 dei 90 numeri e non interessa l'ordine di estrazione; può interessare sapere però quante sono le "cinquine" che possono essere estratte.

Per inquadrare meglio la questione, consideriamo alcuni problemi.

- PROBLEMA 1. In una classe di 25 alunni il professore decide di interrogarne 3 scegliendo a caso. Per questo predispone 25 foglietti contrassegnati coi numeri da 1 a 25 e ne estrae 3.
  Qual è la probabilità che venga interrogato Giorgio, che risulta impreparato?

Diciamo subito che questa probabilità si può calcolare immediatamente tenendo presente che i casi possibili sono 25 mentre quelli favorevoli all'uscita del foglietto corrispondente a Giorgio sono 3. Perciò, la probabilità è evidentemente:

$$\mathrm{p}=\frac{3}{25}.$$

Ma noi vogliamo complicarci la vita e seguire un procedimento diverso.
Si tratta precisamente di determinare quante terne si possono formare con i 25 numeri e quante di esse contengono il numero che corrisponde a Giorgio. Lo vedremo fra breve.

- PROBLEMA 2. Calcolare la probabilità che, scegliendo a caso tra le cifre 1, 2, 3, 4, 5 e mettendo ogni volta da parte la cifra estratta, si formi un numero di 5 cifre contenente le cifre 1 e 2 rispettivamente al 1° ed al 2° posto.

Anche questa probabilità si può calcolare subito ricorrendo alla "regola del prodotto". Infatti, la probabilità di pescare il numero 1 al 1° posto è evidentemente 1/5 e, una volta che ciò è avvenuto, la probabilità di pescare 2 al 2° posto è 1/4; per cui la probabilità che entrambi gli eventi si verifichino è:

$$\mathrm{p}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}.$$

Ma, sempre per complicarci la vita, volendo calcolare la probabilità come rapporto fra il numero dei casi favorevoli all'evento e quello dei casi possibili, si tratta chiaramente di trovare quanti numeri di 5 cifre diverse si possono formare con le cifre 1, 2, 3, 4, 5 e quanti di essi presentano le cifre 1 e 2 al 1° ed al 2° posto rispettivamente.

La risoluzione di questi problemi e di altri analoghi, nei quali sono molti i casi possibili relativi all'evento che si studia, è basata in linea di massima su alcune conoscenze del cosiddetto ***calcolo combinatorio*** (o semplicemente ***combinatoria***). Ce ne occupiamo in questa unità.

## 27.2 DISPOSIZIONI SEMPLICI

**27.2.1** Incominciamo con il proporti alcune semplici operazioni:

- Scrivi tutti i numeri di 2 cifre diverse che si possono ottenere utilizzando le cifre 1, 2, 3, 4. Ti può essere utile un grafo opportuno. Conta quanti sono questi numeri. Se hai fatto bene ne conterai 12.
- Scrivi adesso tutti i numeri di 2 cifre diverse che si possono ottenere con le cifre 1, 2, 3, 4, 5. Se hai fatto bene conterai 20 numeri.

Supponi adesso che ti interessi conoscere quanti (ma non quali) numeri di 3 cifre, tutte diverse fra loro, si possono ottenere con le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
È possibile trovare quanti sono questi numeri senza elencarli tutti, come hai fatto sopra?
Provaci. Ti potrà essere utile ancora un grafo, non necessariamente completo, ma solo per quello che interessa il ragionamento che questo grafo permette di condurre. Vale a dire (Fig. 1):

- per prima cosa si scrivono le 7 cifre assegnate;
- ad ognuna di esse si associa ciascuna delle altre 6; per cui si può affermare che i numeri di 2 cifre distinte che si possono formare con le 7 cifre date sono in numero di 7×6;
- infine, ad ognuna delle 7×6 successioni di due delle 7 cifre considerate si associa ciascuna delle altre 5 cifre; per cui il numero dei numeri di 3 cifre distinte, che si possono formare con le 7 cifre date, è 7×6×5, vale a dire 210.

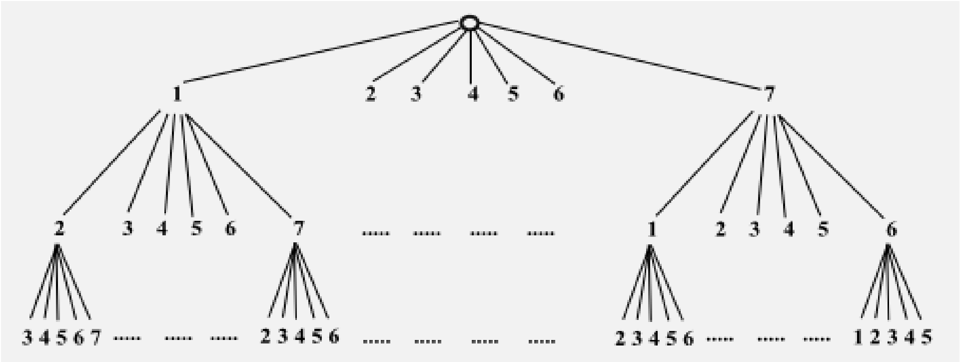



FIG. 1

**27.2.2** Ancora un compito per te.

Procedendo nel ragionamento precedente, calcola quanti numeri di 4 cifre, tutte diverse fra loro, si possono formare con le 7 cifre solite; quanti di 5 cifre, quanti di 6, quanti di 7.

Dovresti aver trovato nell'ordine:

$$7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4\,,\;\; 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3\,,\;\; 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2\,,\;\; 7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1\,.$$

Dunque, riprendendo la questione originaria, con le 7 cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 si possono formare $7{\cdot}6{\cdot}5=210$ numeri di 3 cifre distinte fra loro.
Ora, questi numeri di 3 cifre – se prescindiamo dal loro significato – si possono in fondo considerare come modi diversi di disporre le 7 cifre a gruppi di 3.
Quanto andiamo dicendo può apparire più chiaro se pensiamo ad una gara alla quale partecipano 7 atleti e ci chiediamo quante sono le possibili terne ordinate di atleti che saliranno sul podio dei primi tre posti. Queste terne sono appunto 210.

Ebbene, tali terne si chiamano *disposizioni semplici di 7 oggetti distinti presi a 3 a 3*.

In un insieme I formato da n elementi distinti, dove $n \in \mathbb{N}_0$, tutte le successioni ordinate, costituite da k elementi di I, con $0<k\leq n$, si **dicono disposizioni semplici di n oggetti distinti presi a k a k** (o **della classe k**).

Facciamo notare, se ce ne fosse bisogno, che due disposizioni distinte differiscono o perché gli elementi che le costituiscono non sono gli stessi o perché questi si susseguono in ordini diversi.

Cosicché, tanto per dire, la disposizione 1-2-3 è diversa sia da 3-5-7 sia da 2-3-1.

Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti distinti presi a k a k si indica con la scrittura:

$$\mathbf{D_{n,k}}.$$

Per cui, con riferimento all'esempio precedente: $D_{7,3}=210$ .

Utilizzando il ragionamento seguito per il calcolo di $D_{7,3}$ prova a calcolare da solo: $D_{4,3}$ , $D_{5,2}$ , $D_{8,5}$ .

Se hai ragionato correttamente e fatto bene i conti, dovresti essere giunto alle seguenti conclusioni:

$$D_{4,3} = 4\cdot 3\cdot 2\,, \qquad D_{5,2} = 5\cdot 4\,, \qquad D_{8,5} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\,.$$

Cioè:

- $D_{4,3}$ è uguale al prodotto dei primi 3 interi decrescenti a partire da 4;
- $D_{5,2}$ è uguale al prodotto dei primi 2 interi decrescenti a partire da 5;
- $D_{8,5}$ è uguale al prodotto dei primi 5 interi decrescenti a partire da 8.

In generale:

**Il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni semplici di n oggetti distinti presi a k a k è uguale al prodotto dei primi k interi decrescenti a partire da n.**

Ossia, scritto in simboli: $D_{n,k}=n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]$, o meglio, dopo aver osservato che $n-(k-1)=n-k+1$:

$$\mathbf{D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}.$$

Il ragionamento che giustifica la regola per il calcolo di $D_{n,k}$ non è altro che il ragionamento seguito per calcolare $D_{7,3}$ a condizione che si metta n al posto di 7 e k al posto di 3.

### 27.3 PERMUTAZIONI SEMPLICI

**27.3.1** Consideriamo il caso in cui k=n. Ebbene:

Le disposizioni semplici di n oggetti distinti, presi ad n ad n, si dicono più propriamente **permutazioni semplici di n oggetti distinti.**

In questo caso, al posto di $D_{n,n}$ si preferisce la scrittura:

$$\mathbf{P_n}.$$

Dunque:

$$\mathbf{P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

Ossia, detto a parole:

**Il numero delle permutazioni semplici di n oggetti distinti è uguale al prodotto dei primi n numeri naturali a partire da 1.**

Questo prodotto si indica anche col simbolo [1]:

$$\mathbf{n}!$$

che si legge: «**n fattoriale**» o «**fattoriale di n**».

Si osserva subito che si ha:

$$\mathbf{n}! = (\mathbf{n}-\mathbf{1})!\ \mathbf{n}\,.$$

Ora, se n=1, da questa formula si ricava: $1!=0!\times 1$; che ha significato solo se si accetta per convenzione che sia:

$$\mathbf{0}! = \mathbf{1}\ ;$$

cosa che noi facciamo senz'altro.

Ti proponiamo di risolvere alcuni esercizi.

1. Considerato il numero naturale n, si sa che n! è compreso fra 100 e 200. Qual è il valore di n?
2. Quanti anagrammi si possono formare con la parola POETA, prescindendo dal significato delle parole ottenute?
3. Spiegare perché il numero 36! non è divisibile per 37 mentre lo è per 38.
4. Si consideri il seguente teorema:

   **Un numero naturale n è primo se e solo se il numero (n–1)!+1 è divisibile per n.**

   Verificarlo per i seguenti valori di n: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

   Per la cronaca, il teorema fu scoperto all'incirca nell'anno 1000 dallo scienziato arabo **Alhazen** (965 ca. – 1039) e riscoperto oltre 7 secoli più tardi dal matematico inglese **John Wilson** (1741-1793), ma chi ne fornì una dimostrazione fu il matematico italo-francese **Giuseppe Luigi Lagrange** (1736-1813).

Facciamo notare, per inciso, che il numero n! cresce molto rapidamente con l'aumentare di n.

Per esempio:

$$0!=1,\quad 1!=1,\quad 2!=2,\quad 3!=6,\quad 4!=24,\quad 5!=120,\quad 6!=720,$$
$$7!=5.040,\quad 8!=40.320,\quad 9!=362.880,\quad 10!=3.628.800.$$

Oggigiorno il calcolo di n! non comporta difficoltà per valori di n anche abbastanza grandi purché si disponga di uno strumento di calcolo automatico (l'abbastanza dipende dalle caratteristiche del software). Difficoltà che invece si presentavano fino a qualche decennio fa. Si ovviava a quest'inconveniente ricorrendo ad una formula che forniva un'approssimazione accettabile di n!. La formula, conosciuta come ***formula di Stirling*** , è la seguente:

$$\mathrm{n}! \approx \sqrt{2\,\pi\,\mathrm{n}}\,\left(\frac{\mathrm{n}}{e}\right)^{\mathrm{n}},$$

dove "*e*" è un numero irrazionale, il cui valore, approssimato fino al 6° decimale è 2,718281. La formula prende il nome dal matematico scozzese James Stirling (1692-1770). In realtà fu scoperta dal matematico francese Abraham De Moivre (1667-1754) benché nella forma seguente:

$$\mathrm{n}! \approx \mathrm{k}\,\sqrt{\mathrm{n}}\,\left(\frac{\mathrm{n}}{e}\right),$$

dove però la costante k rimaneva sconosciuta e per questo la formula serviva a ben poco. Stirling dimostrò

[1] Il simbolo in questione compare per la prima volta nell'opera *Elements d'arithmétique universelle* (1808) del matematico francese Christian Kramp (1760-1826).

che k=$\sqrt{2\,\pi}$ .
Al fine di avere una qualche idea di come l'espressione al secondo membro della formula approssimi n!, vediamo un esempio.
Si ha:

$$10! = 3.628.800, \qquad \sqrt{2\,\pi \cdot 10}\,\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \approx 3.575.125\,.$$

Assumendo quindi il valore approssimato al posto del valore effettivo di 10!, si commette il seguente errore relativo:

$$\varepsilon_r = \frac{3.628.800 - 3.575.125}{3.628.800} \approx 1{,}48\%\,.$$

Si tratta, in verità, di un errore trascurabile e l'approssimazione migliora al crescere di n.

**27.3.3** Un esercizio interessante.
Utilizzando il prodotto dei primi n numeri naturali a partire da 1, vale a dire il numero n!, si possono costruire successioni, lunghe quanto si vuole, di numeri consecutivi tutti composti. Al riguardo basta considerare gli n−1 numeri seguenti:

$$n!+2,\ \ n!+3,\ \ n!+4,\ \ \dots\ ,\ \ n!+n$$

e costatare che il primo di essi è certamente divisibile per 2, il secondo lo è per 3, il terzo per 4, … , l'ultimo per n.
Questo non significa tuttavia che i due numeri che racchiudono la successione, vale a dire n!+1 e n!+n+1 siano numeri primi.

**27.3.4** Già a questo punto siamo in grado di risolvere il secondo dei due problemi formulati in 27.1. È evidente, infatti, che il numero dei numeri di 5 cifre distinte, che si possono formare con le cifre 1-2-3-4-5, è 5!, vale a dire 120.
D'altronde, fra questi 120 numeri, quelli che presentano le cifre 1 e 2 rispettivamente al 1° ed al 2° posto sono tanti quante le permutazioni semplici delle 3 cifre rimanenti 3-4-5 (Fig. 2); vale a dire che essi sono in numero di 3!, ossia 6.

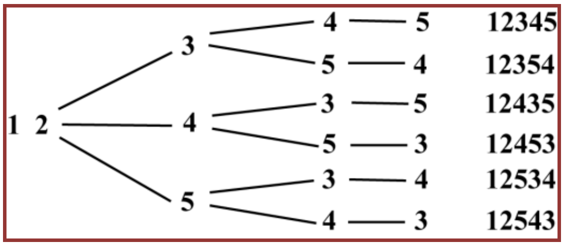


FIG. 2

La probabilità p cercata, esattamente come prima, ma in modo più complicato, è pertanto:

$$p = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}.$$

### 27.4 COMBINAZIONI SEMPLICI

**27.4.1** Con riferimento al 1° dei due problemi considerati in 27.1, interessa l'ordine con cui sono sorteggiati i tre numeri? In altri termini, se sono estratti nell'ordine per esempio gli alunni coi numeri 2-7-18 o quelli coi numeri 18-2-7, differiscono gli alunni interrogati?

Evidentemente no. Sono gli stessi.
Questo significa che NON le disposizioni di 25 oggetti presi a 3 a 3 interessano, ma qualche altra cosa.
Per capire meglio di che cosa si tratti, riduciamo drasticamente da 25 a 4 gli oggetti assegnati e consideriamo le disposizioni semplici dei 4 oggetti distinti a-b-c-d presi a 3 a 3. Esse, in numero di $D_{4,3}=4\cdot3\cdot2=24$, sono le seguenti:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| abc | acb | bac | bca | cab | cab |
| abd | adb | bad | bda | dab | dba |
| acd | adc | cad | cda | dac | dca |
| bcd | bdc | cbd | cdb | dbc | dcb |

Tali disposizioni sono state raggruppate in 4 classi, ognuna formata da 6 disposizioni, le quali differiscono soltanto per l'ordine in cui sono stati presi gli oggetti considerati. Di modo che, se non interessa l'ordine con cui si susseguono gli oggetti, ognuna delle 6 disposizioni di una stessa classe indica in sostanza la stessa cosa: precisamente un sottoinsieme di 3 elementi dell'insieme $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$. Cosicché, se vogliamo ottenere il numero di queste classi, cioè il numero di sottoinsiemi di 3 elementi ciascuno ma tutti dell'insieme $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$ basta dividere il numero $\mathbf{D_{4,\,3}}$ delle disposizioni suddette per il numero dei modi in cui possono disporsi 3 oggetti, vale a dire 3!.
In effetti, i sottoinsiemi di 3 elementi di quest'insieme sono:

$$\{a,b,c\},\ \ \{a,b,d\},\ \ \{a,c,d\},\ \ \{b,c,d\}.$$

E per l'appunto:

$$\frac{D_{4,\,3}}{3!}=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4\ .$$

Questi sottoinsiemi si chiamano anche *combinazioni semplici dei 4 oggetti distinti a, b, c, d presi a 3 a 3* ed è evidente che sono in numero di 4.
In generale:

Considerato un insieme I di n elementi, dove $n\in\mathbb{N}_0$, tutti i sottoinsiemi di I formati ciascuno da k elementi, con $0<k\leq n$, si chiamano **combinazioni semplici di n oggetti distinti presi a k a k** (o **della classe k**).

Il loro numero si indica con la scrittura:

$$\mathbf{C_{n,\,k}}\ .$$

Generalizzando il ragionamento precedente, condotto nel caso di 4 oggetti distinti presi a 3 a 3, si può dimostrare che:

$$\mathbf{C_{n,\,k}=\frac{D_{n,\,k}}{k!}}$$

ossia:

$$\mathbf{C_{n,\,k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}}\ .$$

Detto a parole, dopo aver constatato che k! è anche il numero delle permutazioni di k oggetti:

**Il numero $\mathbf{C_{n,k}}$ delle combinazioni semplici di n oggetti distinti presi a k a k è uguale al rapporto fra il numero $\mathbf{D_{n,k}}$ delle disposizioni semplici di n oggetti presi a k a k e il numero delle permutazioni semplici di k oggetti.**

Questo numero $C_{n,k}$ si indica anche con la scrittura:

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}}$$

che si legge: «**n su k**».

Per esempio:

$$\binom{4}{3} = \frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3} = 4\ ; \qquad \binom{15}{4} = \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 1365\ .$$

Nella definizione delle combinazioni semplici, abbiamo escluso che possa essere $n=0$ o $k=0$. Tuttavia, qualunque sia l'insieme I, un suo sottoinsieme costituito da 0 elementi di fatto c'è: esso è l'insieme vuoto. Per cui è lecito scrivere:

$$\mathbf{C_{n,0} = 1},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Come dire:

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{0}} = \mathbf{1},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

ESERCIZI.

a) Qualunque sia $n\in\mathbb{N}$, quanto vale $\binom{n}{n}$?

b) Calcolare: $\binom{5}{2},\binom{6}{4},\binom{15}{5},\binom{52}{5},\binom{90}{5}$.

c) Verificare le seguenti uguaglianze:

$$\binom{15}{7}=\frac{15!}{7!8!}\ ; \qquad \binom{45}{20}=\frac{45!}{20!25!}\ ;$$

$$\binom{15}{5}=\binom{15}{10};\quad \binom{17}{8}=\binom{17}{9};\quad \binom{4}{3}=\binom{3}{3}+\binom{3}{2};\quad \binom{15}{7}=\binom{14}{7}+\binom{14}{6}.$$

**27.4.2** Siamo ora in grado di risolvere (in modo complicato!) il primo dei due problemi proposti in 27.1 (e lì risolto in modo semplice ed immediato). È chiaro, infatti, che le terne che si possono formare con i 25 numeri dell'insieme $I=\{x\in\mathbb{N}\mid 1\le x\le 25\}$ sono tante quanti i sottoinsiemi di 3 elementi che si possono estrarre da I, vale a dire $\binom{25}{3}$.

Volendo ottenere poi quante, fra queste terne, contengono uno specifico numero (quello che corrisponde a Giorgio – mettiamo, per comodità di esposizione, che sia il numero 17), ragioniamo così: per costruire tali terne (quelle col numero 17) si associa il numero 17 a ciascuna delle coppie che si possono estrarre dall'insieme I privato del 17. Siccome queste coppie sono $\binom{24}{2}$, ne discende che altrettante sono le terne col numero 17. Dunque la probabilità cercata è:

$$p = \frac{\binom{24}{2}}{\binom{25}{3}} = \frac{\frac{24\cdot23}{2}}{\frac{25\cdot24\cdot23}{2\cdot3}} = \frac{3}{25}.$$

**27.4.3** Vediamo adesso un paio di esercizi di combinatoria applicata alla probabilità.

- ESERCIZIO 1. Un'urna contiene 14 palline bianche e 11 palline nere. Calcolare la probabilità che, estraendone due, una dopo l'altra, senza rimetterle nell'urna, esse siano: 1) bianche; 2) nere; 3) di colore diverso.

RISOLUZIONE. Riferendoci al punto 1), la questione può essere risolta interpretandola come un problema di probabilità condizionata. Cosicché, considerati gli eventi:

$E_1'$: «la prima pallina estratta è bianca», $E_1''|E_1'$: «la seconda pallina estratta è bianca»,

l'evento $E_1$: «le due palline estratte sono bianche» ha probabilità:

$$p(E_1)=p(E_1')\cdot p(E_1''|E_1')=\frac{14}{25}\cdot\frac{13}{34}=\frac{91}{300}.$$

Ma la stessa questione può essere risolta ricorrendo al calcolo combinatorio. Il numero dei casi possibili è costituito da tutte le coppie ordinate che si possono formare con le 25 palline che sono nell'urna; e questo numero è: $D_{25,2}=25\cdot24$. Invece il numero dei casi favorevoli all'evento $E_1$ è dato da tutte le coppie ordinate che si possono formare con le 14 palline bianche, vale a dire: $D_{14,2}=14\cdot13$. Ne discende che si ha:

$$p(E_1)=\frac{14\cdot13}{25\cdot24}=\frac{91}{300}.$$

Come prima, naturalmente.

Anche la risposta al punto 2) si può trovare in due modi diversi. Ne lasciamo il compito a te, limitandoci a fornirti il risultato:

$$p(E_2)=\frac{11}{60}.$$

Relativamente al punto 3) notiamo che l'evento $E_3$: «le due palline estratte sono di colore diverso» si verifica quando si verificano i due eventi incompatibili:

$E_3'$: «le due palline estratte sono nell'ordine bianca-nera»,

$E_3''$: «le due palline estratte sono nell'ordine nera-bianca».

Poiché, come si può facilmente trovare, $p(E_3')=P(E_3'')=77/300$, allora:

$$p(E_3)=p(E_3')+P(E_3'')=2\cdot\frac{77}{300}=\frac{77}{150}.$$

Ragionando in base al calcolo combinatorio, mentre il numero dei casi possibili è ancora $D_{25,2}=25\cdot24$, il numero dei casi favorevoli all'evento $E_3$ è il doppio del numero delle coppie ordinate "pallina bianca - pallina nera", ossia $2\cdot14\cdot11$. Di modo che, come prima:

$$p(E_3)=\frac{2\cdot14\cdot11}{25\cdot24}=\frac{77}{150}.$$

Ma c'è un terzo modo di calcolare $p(E_3)$. L'evento $E_3$, infatti, si verifica quando le due palline estratte non sono né entrambe bianche né entrambe nere. Dunque, $E_3=\overline{E_1\cup E_2}$. D'altra parte $E_1\cap E_2=\emptyset$. Perciò:

$$p(E_3)=p\left(\overline{E_1\cup E_2}\right)=1-p(E_1\cup E_2)=1-\big(p(E_1)+p(E_2)\big)=1-\left(\frac{91}{300}+\frac{11}{60}\right)=\frac{77}{150}.$$

- ESERCIZIO 2. Calcolare la probabilità di realizzare un terno al Lotto, giocando su una sola "ruota".

RISOLUZIONE. L'evento E: «esce un terno prefissato» si realizza quando, sui 5 numeri estratti fra i 90 possibili, vi sono i tre numeri giocati. Ora, i casi possibili sono tanti quante le cinquine che si possono formare con i 90 numeri, ossia tanti quante le combinazioni semplici di 90 oggetti presi a 5 a 5, vale a dire:

$$\binom{90}{5}=\frac{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}.$$

Dovendo calcolare poi quante, fra queste cinquine, contengono il terno prefissato, ragioniamo così: eliminiamo dai 90 numeri complessivi i 3 che costituiscono il terno; se combiniamo gli 87 numeri rimanenti a 2 a 2 e ad ogni coppia ottenuta associamo il terno predetto, otteniamo esattamente tutte le cinquine che contengono per l'appunto quel terno. Dunque i casi favorevoli ad E sono in numero di:

$$\binom{87}{2} = \frac{87 \cdot 86}{1 \cdot 2}.$$

In definitiva:

$$p(E) = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{87 \cdot 86}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11748}.$$

Per la verità, l'esercizio può essere risolto senza ricorrere al calcolo combinatorio. A questo proposito si ricorda che il terno sarà stato azzeccato se i tre numeri giocati sono compresi fra i cinque estratti sulla "ruota" del Lotto su cui si è scommesso. Ora, la probabilità che sia stato indovinato uno dei tre numeri è $\frac{5}{90}$; la probabilità che, azzeccato questo numero, sia stato indovinato uno dei due rimanenti è $\frac{4}{89}$; la probabilità che, azzeccati i primi due, anche il numero rimanente lo sia stato è $\frac{3}{88}$. Pertanto la probabilità di azzeccare il terno è:

$$p(E) = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{88} = \frac{1}{11748}.$$

Esattamente come sopra.

ESERCIZIO 3 (da risolvere). Com'è forse noto a chi legge, il SuperEnalotto è un gioco in cui, in seguito alla estrazione di 6 dei 90 numeri interi da 1 a 90, si vince se si sono indovinati alcuni dei numeri estratti. Calcolare: a) quante sono le possibili combinazioni; b) la probabilità di indovinare 2 numeri; c) la probabilità di indovinare tutti e 6 i numeri estratti. [**R.** a) 622.614.630; b) 1/267; c) …]

### 27.5 COEFFICIENTI BINOMIALI E BINOMIO DI NEWTON

**27.5.1** I numeri $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$, dove n e k sono numeri naturali qualsiasi purché $n \geq k$, si chiamano **coefficienti binomiali** (o **numeri di Pascal**).

Per la loro importanza, e non solo in relazione al calcolo delle probabilità, riteniamo opportuno mostrarne qualche aspetto interessante.

Anzitutto si giustifica agevolmente che:

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!\ (\mathbf{n}-\mathbf{k})!}.$$

A questo riguardo basta moltiplicare per $(n–k)!$ il numeratore ed il denominatore dell'espressione:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

che fornisce il valore di $\binom{n}{k}$, ed osservare che:

$[n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)][(n-k)!] =$

$= [n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)][(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1] = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ .

Adesso un rilievo elementare. Fissato n e dovendo risultare $0 \leq k \leq n$, di numeri $\binom{n}{k}$ ve ne sono evidentemente $n+1$; i seguenti: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$. Di modo che:

- se n=0 vi è un solo numero $\binom{n}{k}$, il numero $\binom{0}{0}$;

- se n=1 vi sono due numeri $\binom{n}{k}$, i numeri $\binom{1}{0}, \binom{1}{1}$;
- se n=2 vi sono tre numeri $\binom{n}{k}$, i numeri $\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}$;

eccetera.

Questo fatto suggerisce un'interessante disposizione dei numeri di Pascal, secondo la figura 3, dove al posto dei tondini bisogna mettere però i numeri stessi. Per cui si ha la disposizione triangolare (nota come ***triangolo di Pascal*** o anche ***triangolo di Tartaglia***) di figura 4, o quella talvolta più comoda di figura 5, dove risultano calcolati i valori dei coefficienti binomiali.

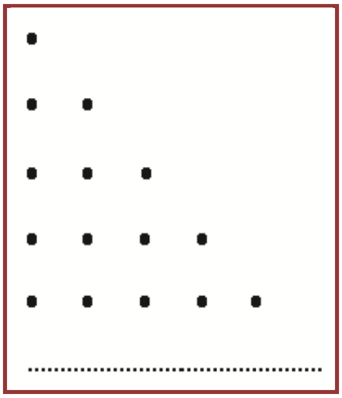


FIG. 3

$$\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

FIG. 4

$$\begin{array}{lllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

FIG. 5

Il riferimento più antico, di cui si ha conoscenza, al "triangolo aritmetico" risale al secolo XI con l'opera del matematico cinese **Jia Xian** (1010-1070 ca.).

Forse era conosciuto dai matematici indiani, dai quali l'avrebbe appreso **Omar Khayyam** (1050 ca. – 1122), matematico e poeta arabo, che ne studiò per primo alcune caratteristiche.

Un altro matematico cinese, **Chu Shih-chieh** (1249-1314 ca.), ne parla nell'opera *SSu-yüan yü-chien* (*Prezioso specchio dei quattro elementi*) del 1303.

Il matematico tedesco **Michael Stifel** (1487 ca. - 1567) se ne occupa in una sua opera, *Aritmetica integra*, del 1544.

**Niccolò Fontana**, detto **Tartaglia** (1505 ca. - 1557) lo descrive in maniera articolata nella sua opera *General trattato dei numeri e misure*, del 1556.

Ma chi, per primo, trattò del "triangolo aritmetico" in maniera approfondita e completa fu **Blaise Pascal** (matematico, fisico e filosofo francese, 1623-1662) nell'opera *Traité du triangle arithmétique*, di circa 36 pagine, completata nel 1654, ma pubblicata postuma, nel 1665.

**27.5.2** Si possono notare alcuni fatti significativi, riguardo al triangolo aritmetico:

♦ **I numeri estremi di ogni riga sono uguali ad 1**.

Ma questo era prevedibile dal momento che, come si sa, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$\binom{n}{0}=1, \quad \binom{n}{n}=1.$$

♦ **Due numeri della stessa riga, equidistanti dagli estremi, sono uguali**.

La giustificazione di questo fatto è basata sulla seguente uguaglianza:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$

la cui verifica è immediata, potendosi entrambi i suoi membri trasformare nella seguente medesima espressione:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

♦ **A partire dalla 3ª riga (e quindi per n≥2) ogni numero, fatta eccezione per il primo e l'ultimo, che sono uguali ad 1, si ottiene sommando i due numeri della riga precedente situati uno sopra il numero considerato e l'altro immediatamente prima**.
La giustificazione di questo fatto è basata sulla seguente uguaglianza:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1},$$

dove $n>k\geq 1$. È conosciuta come ***formula di Stifel***.
La sua verifica non è difficile. La lasciamo a te per esercizio.

**27.5.3** Tutte queste considerazioni sono compendiate nella formula seguente, che è detta **formula dello sviluppo del binomio di Newton** (2) o semplicemente **formula del binomio**:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0 b^n$$

che può essere sintetizzata nel modo seguente, dove il secondo membro si legge: "sommatoria per k che varia da 0 ad n di …"

$$\mathbf{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}.$$

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DEL BINOMIO.

Consideriamo il prodotto:

$$(a+b_1)\,(a+b_2)\,\ldots\,(a+b_n)$$

ed eseguiamone lo sviluppo. Anzi, per capire meglio come si fa, operiamo per ampliamenti successivi, supponendo dapprima $n=2$, $n=3$, $n=4$. Si ottiene agevolmente:

$(a+b_1)\,(a+b_2)=a^2+a\,(b_1+b_2)+b_1b_2;$

$(a+b_1)\,(a+b_2)\,(a+b_3)=a^3+a^2\,(b_1+b_2+b_3)+a\,(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)+b_1b_2b_3;$

$$\begin{aligned}(a+b_1)\,(a+b_2)\,(a+b_3)\,(a+b_4)=&\\ &=a^4+a^3\,(b_1+b_2+b_3+b_4)+\\ &+a^2\,(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+b_2b_3+b_2b_4+b_3b_4)+\\ &+a\,(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_2b_3b_4)+b_1b_2b_3b_4.\end{aligned}$$

In generale, per n qualsiasi:

$$\begin{aligned}(a+b_1)\,(a+b_2)\,\ldots\,(a+b_n)=&\\ &=a^n+a^{n-1}\,(b_1+b_2+\ldots+b_n)+\\ &+a^{n-2}\,(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+\ldots+b_{n-1}b_n)+\\ &+a^{n-3}\,(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\ldots+b_{n-2}b_{n-1}b_n)+\ldots+\\ &+a\,(b_1b_2\ldots b_{n-1}+b_1b_2\ldots b_{n-2}b_n+b_2b_3\ldots b_n)+b_1b_2b_3\ldots b_n.\end{aligned}$$

Ora, in questo sviluppo:

[2] **Newton**, Isaac, fisico e matematico inglese, 1642-1727.

- il coefficiente di $a^{n-1}$ è dato dalla somma degli n numeri $b_1+b_2+\ldots+b_n$;
- il coefficiente di $a^{n-2}$ è dato da una somma di prodotti, ciascuno di 2 fattori, e vi figurano tanti addendi quante sono le combinazioni degli n numeri $b_1, b_2, \ldots, b_n$, presi a due a due;
- il coefficiente di $a^{n-3}$ è dato da una somma di prodotti, ciascuno di 3 fattori, e vi figurano tanti addendi quante sono le combinazioni degli n numeri $b_1, b_2, \ldots, b_n$, presi a tre a tre;
- … ;
- il coefficiente di $a^{n-(n-1)}$, vale a dire di a, è dato da una somma di prodotti, ciascuno di $n-1$ fattori, e vi figurano tanti addendi quante sono le combinazioni degli n numeri $b_1, b_2, \ldots, b_n$, della classe $n-1$.

Insomma, in generale, il coefficiente di $a^{n-k}$, a partire da $k=1$ e fino a $k=n-1$, è dato da una somma di prodotti, ciascuno di k fattori, e vi figurano tanti addendi quante sono le combinazioni degli n numeri $b_1, b_2, \ldots, b_n$, presi a k a k. Di modo che, se poniamo $b_1=b_2=\ldots=b_n=b$, tale coefficiente è $\binom{n}{k} b^k$.

D'altronde, supponendo a, b non nulli, possiamo constatare che è: $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$, $b_1b_2b_3 \ldots b_n=b^n$ e $a^0=b^0=1$, per cui il 1° termine dello sviluppo precedente si può mettere nella forma $\binom{n}{0} a^n b^0$ e l'ultimo termine si può mettere nella forma $\binom{n}{n} a^0 b^n$.

Sulla base di queste considerazioni, lo sviluppo precedente assume la forma seguente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n,$$

che è esattamente la formula del binomio.

Al fine di approfondire le tue conoscenze riguardo ai coefficienti binomiali, ti proponiamo per esercizio di semplificare le seguenti espressioni:

$$\binom{3}{2}; \quad \binom{5}{2}+\binom{4}{3}; \quad \binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5};$$

$$\binom{n+1}{3}; \quad 2\binom{n}{3}+3\binom{n}{2}; \quad \binom{n+1}{3}-2\binom{n}{2}.$$

Ancora per esercizio ti proponiamo di dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n ; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 .$$

**27.5.4** La conoscenza del comportamento dei coefficienti binomiali ci permette inoltre di generalizzare un esercizio proposto poco sopra (esercizio 2 in 73.4.3)

ESERCIZIO. Un'urna contiene m oggetti distinti (per esempio dischetti numerati, come nel gioco della Tombola) e se ne estraggono n ($n \leq m$) in modo casuale. Dimostrare che la probabilità p di indovinare h oggetti fra gli n estratti è fornita dalla formula seguente:

$$p = \binom{m-h}{n-h} : \binom{m}{n}.$$

RISOLUZIONE. Come detto prima, occorre generalizzare il procedimento esposto nella risoluzione dell'esercizio 2.

Descriviamo un primo procedimento. Il numero dei casi possibili (ugualmente probabili) è uguale al numero delle possibili n-uple che si possono formare con gli m oggetti, vale a dire al numero delle combinazioni semplici di m oggetti distinti presi ad n ad n, ossia $\binom{m}{n}$. Invece il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento è uguale al numero delle possibili n-uple che contengono gli h oggetti da indovinare, vale a dire

al numero delle combinazioni semplici dei rimanenti $m-h$ oggetti della classe $n-h$, ossia $\binom{m-h}{n-h}$. Il calcolo di p è immediato.
Descriviamo adesso un secondo procedimento. La probabilità che sia stato indovinato uno degli n oggetti estratti è $\frac{n}{m}$. Una volta azzeccato questo oggetto, la probabilità che ne venga indovinato un secondo fra gli $n-1$ oggetti rimanenti è $\frac{n-1}{m-1}$. Azzeccati i primi due oggetti, la probabilità di indovinarne un altro fra gli $n-2$ rimanenti è $\frac{n-2}{m-2}$. E così via, fino ad indovinare anche l'h-esimo oggetto fra gli $n-h+1$ rimanenti, la cui probabilità è $\frac{n-h+1}{m-h+1}$. La probabilità p, di indovinare h degli n oggetti estratti fra gli m contenuti nell'urna, è pertanto:

$$p=\frac{n}{m}\cdot\frac{n-1}{m-1}\cdot\frac{n-2}{m-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-h+1}{m-h+1}.$$

Si tratta, a questo punto di elaborare questa formula per farla diventare uguale a quella che si vuole dimostrare. Osserviamo al riguardo che si ha:

$$p=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-h+1)}$$

e inoltre:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)\cdot(n-h)!}{(n-h)!}=\frac{n!}{(n-h)!}$$

e parimenti:

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-h+1)=\frac{m!}{(m-h)!}.$$

Pertanto:

$$p=\frac{\frac{n!}{(n-h)!}}{\frac{m!}{(m-h)!}}=\frac{(m-h)!\,n!}{(n-h)!\,m!}\cdot\frac{(m-n)!}{(m-n)!}=\frac{(m-h)!}{(n-h)!\,(m-n)!}\cdot\frac{n!\,(m-n)!}{m!}=\binom{m-h}{n-h}:\binom{m}{n}.$$

## 27.6 COMPLEMENTI

**27.6.1** Le disposizioni, permutazioni e combinazioni studiate fin qui si dicono *semplici* per il fatto che gli oggetti dell'insieme che si prende in considerazione sono diversi l'uno dagli altri e parimenti diversi l'uno dagli altri sono gli oggetti delle disposizioni, permutazioni o combinazioni che si vanno a costruire.
Ci sono però situazioni in cui questo non è possibile e tra gli oggetti considerati ve ne sono alcuni uguali oppure tra le disposizioni, permutazioni o combinazioni che si costruiscono vi sono oggetti uguali fra loro. In questo caso si parla di disposizioni, permutazioni e combinazioni *con ripetizione*.

Alcuni esempi per chiarire meglio il concetto espresso:

a) I numeri di 2 cifre che si possono formare con le cifre 1, 2, 3 sono i seguenti:

$$11,\ 12,\ 13,\ 21,\ 22,\ 23,\ 31,\ 32,\ 33.$$

Sono in numero di 9. Quanti sarebbero stati qualora si fosse imposto che le cifre dovessero essere diverse?

b) I possibili anagrammi della parola OLIO, indipendentemente dal significato, sono i seguenti:

OLIO, OLOI, OILO, OIOL, OOLI, OOIL,
LOIO, LOOI, LIOO, IOLO, IOOL, ILOO.

Essi sono in numero di 12. Quanti sarebbero stati qualora si fosse presa in esame una parola con lettere tutte diverse fra loro come per esempio ROMA?

c) Quando si gioca all'ENALOTTO, una colonna giocata non è altro che una disposizione dei tre simboli 1, X, 2 presi a 12 a 12 e perciò con inevitabili ripetizioni dei simboli medesimi.

d) Se si vogliono distribuire 3 oggetti esattamente uguali fra 2 persone, inevitabilmente bisogna costruire combinazioni di 2 oggetti (tanti quante sono le persone) a 3 a 3 (tanti quanti sono gli oggetti da ripartire) e perciò sono necessarie delle ripetizioni. Nella fattispecie le combinazioni si costruiscono agevolmente; se infatti si indicano con A e B le due persone, esse sono le seguenti: AAB, ABB.

**27.6.2** Forniamo le formule che permettono di trovare il numero delle disposizioni, permutazioni e combinazioni con ripetizione.

- Il numero delle **disposizioni con ripetizione** di n oggetti distinti presi a k a k (o di classe k) – indicato col simbolo $\mathbf{D'_{n,k}}$ – è :

[1] $$\mathbf{D'_{n,k} = n^k}.$$

Per esempio, il numero delle possibili colonne al gioco dell'ENALOTTO non è altro che il numero delle disposizioni con ripetizione di 3 oggetti distinti (1, X, 2) presi a 12 a 12; vale a dire:

$$D'_{3,12} = 3^{12} = 531.441.$$

- Il numero delle **permutazioni (con ripetizione)** di n oggetti fra i quali ve ne sono $m_1$ uguali fra loro, $m_2$ uguali fra loro, … , $m_r$ uguali fra loro (con $m_1+m_2+\ldots+m_r \leq n$) – indicato col simbolo $\mathbf{P_n^{(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_r)}}$ – è:

[2] $$\mathbf{P_n^{(m_1, m_2,\ \ldots, m_r)} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_r!}}.$$

Per esempio, il numero degli anagrammi della parola MAMMA, prescindendo dal loro significato, è esattamente il numero delle permutazioni di 5 oggetti tra i quali 2 sono uguali fra loro e 3 sono uguali fra loro; vale a dire:

$$P_5^{(2,\,3)} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot3)} = 10.$$

- Il numero delle **combinazioni con ripetizione** di n oggetti distinti presi a k a k (o di classe k) – indicato col simbolo $\mathbf{C'_{n,\ k}}$ – è:

[3] $$\mathbf{C'_{n,\ k} = \binom{n+k-1}{k}}.$$

Per esempio, il numero dei modi in cui 5 monete da 1 euro possono essere ripartite in 3 tasche altro non è che il numero delle combinazioni con ripetizione di 3 oggetti distinti (le tasche) presi a 5 a 5 (le monete); vale a dire:

$$C'_{3,\,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21.$$

Ti proponendoti la risoluzione di alcuni semplici esercizi, idonei a verificare quanto hai appreso su quest'argomento.

1. Alcuni allibratori accettano scommesse su raggruppamenti di 5 partite del campionato italiano di calcio. Quante sono le possibili colonne vincenti? (Si ricorda che per ogni partita sono possibili tre segni: 1,X,2)
2. Se una moneta è lanciata per 4 volte, quante successioni di "Testa" e/o "Croce" sono possibili?
3. Se un dado è lanciato per 3 volte, quante sono le possibili successioni delle facce uscite?
4. Quanti anagrammi della parola ANANAS si possono costruire, indipendentemente dal loro significato?
5. Quanti sono gli anagrammi della parola RETATA, indipendentemente dal loro significato?

6. In quanti modi 3 monete da 2 euro possono essere ripartite fra tre persone?
7. In quanti modi 10 oggetti identici possono essere distribuiti fra 8 persone?

**27.6.3** Ci occupiamo adesso della dimostrazione delle formule [1], [2] e [3].

- DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA [1].

Supponiamo che in un'urna siano contenute 3 palline contrassegnate dai numeri 1, 2, 3. Estraiamo dall'urna una pallina e, dopo averla rimessa nell'urna, ne estraiamo una seconda. Ci proponiamo di calcolare quante sono le possibili coppie di palline che si possono estrarre dall'urna, vale a dire il numero $D'_{3,2}$ delle disposizioni con ripetizione di 3 palline prese a 2 a 2. Si comprende subito che la prima pallina può essere scelta in 3 modi diversi (può uscire la pallina 1 oppure la 2 o anche la 3) e ugualmente la seconda. Ragion per cui il numero delle disposizioni con ripetizione delle 3 palline, prese a 2 a 2, è $3\times3=3^2$, vale a dire: $D'_{3,2}=3^2$. Un grafo (Fig. 6) mostra che queste disposizioni, ottenute seguendo gli archi del grafo, sono precisamente le seguenti:

$$11,\ 12,\ 13,\ 21,\ 22,\ 23,\ 31,\ 32,\ 33.$$

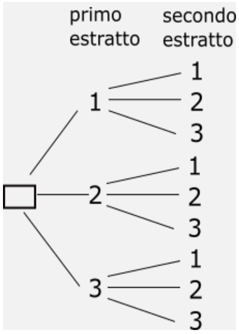


FIG. 6

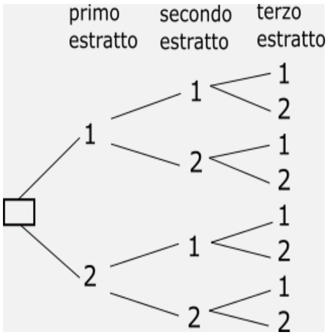


FIG. 7

Facciamo un altro esempio, supponendo questa volta che nell'urna vi siano 2 palline, contrassegnate con i numeri 1 e 2. Si estrae una prima pallina e la si rimette nell'urna, quindi se ne estrare una seconda e, dopo aver rimesso anche questa nell'urna, se ne estrare una terza. Ci proponiamo di calcolare quante sono le possibili terne di palline che si possono estrarre dall'urna, vale a dire il numero $D'_{2,3}$. Anche adesso si capisce subito che la prima pallina può essere estratta in 2 modi diversi (pallina 1 o pallina 2) e così pure la seconda e la terza. Ragion per cui il numero delle disposizioni con ripetizione delle 2 palline, prese a 3 a 3, è $2\times2\times2=2^3$, vale a dire: $D'_{2,3}=2^3$. Un grafo (Fig. 7) mostra che queste disposizioni, ottenute seguendo gli archi del grafo, sono precisamente le seguenti:

$$111,\ 112,\ 121,\ 122,\ 211,\ 212,\ 221,\ 222.$$

Se ripetiamo il ragionamento con n palline, prese a k a k, dove il numero k può essere maggiore, minore o uguale ad n, otteniamo il numero $D'_{n,k}$ che è pertanto uguale ad $n^k$. Basta constatare infatti che, per ogni disposizione di k palline ci sono n possibilità di sceglier la prima pallina (pallina 1 o pallina 2 o … o pallina n) ed altrettante di scegliere la seconda, la terza e, così via, fino alla k-esima pallina estratta. Quindi, come volevasi dimostrare:

$$D'_{n,k} = n^k.$$

- DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA [3].

Supponiamo che nelle estrazioni di cui ci siamo occupati a proposito delle disposizioni, e in particolare della prima ivi presa in esame, non interessi l'ordine di estrazione, per cui si identificano le estrazioni 12 e 21, così come 13 e 31 e infine 23 e 32. Le estrazioni possibili sono allora le seguenti:

$$11,\ 12,\ 13,\ 22,\ 23,\ 33$$

e sono evidentemente in numero di 6. Questo numero è esattamente il numero $\mathrm{C'}_{3,2}$ delle combinazioni con ripetizione di 3 oggetti presi a 2 a 2.

Si può constatare che esso coincide con il numero $\mathrm{C}_{4,2}$ delle combinazioni semplici di 4 oggetti presi a 2 a 2. Si tratta di un caso?

Ragioniamo sull'esempio considerato e proviamo ad associare ad ognuna delle combinazioni precedenti la combinazione in cui il primo termine rimane invariato, mentre il secondo è aumentato di una unità. Vale a dire:

$$1{,}1 \to 1,\ 1+1;\quad 1{,}2 \to 1,\ 2+1;\quad 1{,}3 \to 1,\ 3+1;\quad 2{,}2 \to 2,\ 2+1;\quad 2{,}3 \to 2,\ 3+1;\quad 3{,}3 \to\ 3,\ 3+1.$$

E perciò:

$$11 \to 12;\quad 12 \to 13;\quad 13 \to 14;\quad 22 \to 23;\quad 23 \to 24;\quad 33 \to\ 34.$$

In questo modo sono poste in corrispondenza biunivoca le combinazioni con ripetizione di 3 oggetti presi a 2 a 2 (11, 12, 13, 22, 23, 33) con le combinazioni semplici di 4 oggetti presi a 2 a 2 (12, 13, 14, 23, 24, 34).

Facciamo un altro esempio e supponiamo che nell'urna ci siano 2 palline contrassegnate con i numeri 1 e 2. Eseguiamo 3 estrazioni, rimettendo ogni volta nell'urna la pallina estratta. Le possibili combinazioni con ripetizione sono questa volta le seguenti:

$$111,\ 112,\ 122,\ 222.$$

Procediamo come prima, associando ad ognuna di queste combinazioni una nuova combinazione in cui il primo termine rimane invariato, il secondo è aumentato di 1 e il terzo è aumentato di 2. Vale a dire:

$$1{,}1{,}1 \to 1,\ 1+1,\ 1+2;\quad 1{,}1{,}2 \to 1,\ 1+1,\ 2+2;\quad 1{,}2,\ 2 \to 1,\ 2+1,\ 2+2;\quad 2{,}2{,}2 \to 2,\ 2+1,\ 2+2.$$

E perciò:

$$111 \to 123;\quad 112 \to 124;\quad 122 \to 134;\quad 222 \to 234.$$

In questo modo sono poste in corrispondenza biunivoca le combinazioni con ripetizione di 2 oggetti presi a 3 a 3 (111, 112, 122, 222) con le combinazioni semplici di 4 oggetti presi a 3 a 3 (123, 124, 134, 234).

Quale può essere una formula generale per $\mathrm{C'}_{\mathrm{n,k}}$ tale che risulti in particolare:

$$\mathrm{C'}_{3,2} = \mathrm{C}_{4,2} \quad \text{e} \quad \mathrm{C'}_{2,3} = \mathrm{C}_{4,3}\ ?$$

Per scoprirlo bisogna generalizzare il ragionamento precedente, supponendo che nell'urna vi siano n palline contrassegnate con i numeri interi da 1 ad n. Eseguire quindi k estrazioni (k può essere maggiore, minore o uguale ad n), rimettendo ogni volta nell'urna la pallina estratta. Si associa allora ad ognuna delle combinazioni ottenute (ciascuna formata da k termini) una nuova combinazione in cui il 1° termine rimane invariato, il 2° è aumentato di 1, il 3° è aumentato di 2, … , il k-esimo è aumentato di k−1. Bisogna però avere l'accortezza di disporre le diverse combinazioni in modo convenientemente ordinato. Precisamente, così come abbiamo fatto nei due esempi descritti sopra, occorre:

a) disporre i termini di ogni combinazione in modo che la sequenza sia formata da numeri non decrescenti (vale a dire che ogni termine non deve superare il successivo);
b) disporre le varie combinazioni in modo che i loro primi termini formino una sequenza non decrescente

Seguendo questi accorgimenti:

- la prima combinazione è la seguente:

$$\underbrace{1,\ 1,\ 1,\ -\ ,\ 1,\ 1}_{\text{k termini}}$$

e ad essa è associata la combinazione:

$$\underbrace{1,\ 1+1,\ 1+2,\ -\ ,\ 1+k-2,\ 1+k-1}_{\text{k termini}}\ ;$$

- la seconda combinazione è la seguente:

$$\underbrace{1,\ 1,\ 1,\ -\ ,\ 1,\ 2}_{\text{k termini}}$$

e ad essa è associata la combinazione:

$$\underbrace{1,\ 1+1,\ 1+2,\ -\ ,\ 1+k-2,\ 2+k-1}_{\text{k termini}}\ ;$$

- e, così via fino all'ultima combinazione:

$$\underbrace{n,\ n,\ n,\ -\ ,\ n,\ n}_{\text{k termini}}$$

alla quale è associata la combinazione:

$$\underbrace{n,\ n+1,\ n+2,\ -\ ,\ n+k-2,\ n+k-1}_{\text{k termini}}\ .$$

Si può ora constatare, ponendo l'attenzione sui diversi termini delle nuove combinazioni, che essi sono i numeri $1, 2, \dots, n+k-1$. Pertanto le nuove combinazioni altro non sono che le combinazioni semplici di $n+k-1$ oggetti presi a k a k. In questo modo sono messe in corrispondenza biunivoca le combinazioni con ripetizione di n oggetti presi a k a k con le combinazioni semplici di $n+k-1$ oggetti presi a k a k (Fig.8 – in entrambi gli insiemi i diversi elementi sono sequenze di numeri e ogni sequenza è costituita da k numeri).

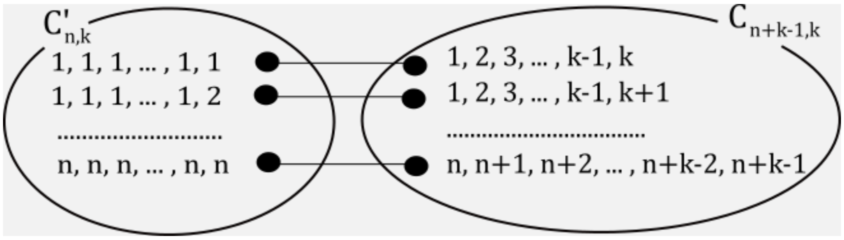



FIG. 8

Pertanto, come volevasi dimostrare:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,\ k} \quad \text{che è come dire:} \quad C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

- DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA [2].

Partiamo da un esempio e riflettiamo sulla sequenza di lettere della parola ALA. Se le due "A" che vi figurano svolgessero ruoli distinguibili (evidenziati, per esempio, con indici numerici sottostanti, tipo $\underbrace{A}_{1}$ , $\underbrace{A}_{2}$ ), si avrebbero della sequenza tante permutazioni quante sono le permutazioni semplici di 3 oggetti, cioè $P_3=6$ permutazioni e precisamente, raggruppandole in modo da mettere nello stesso raggruppamento quelle permutazioni che coinciderebbero qualora le due "A" svolgessero ruoli indistinguibili:

$$\underbrace{A}_{1}\,\underbrace{A}_{2}\,L \qquad \underbrace{A}_{2}\,\underbrace{A}_{1}\,L$$
$$\underbrace{A}_{1}\,L\,\underbrace{A}_{2} \qquad \underbrace{A}_{2}\,L\,\underbrace{A}_{1}$$
$$L\,\underbrace{A}_{1}\,\underbrace{A}_{2} \qquad L\,\underbrace{A}_{2}\,\underbrace{A}_{1}$$

Sennonché realmente le “A” svolgono ruoli non distinguibili, per cui le permutazioni effettive sono le seguenti:

AAL, ALA, LAA.

Sono per l’appunto le permutazioni (con ripetizione) delle tre lettere A, A, L, fra le quali evidentemente ve ne sono 2 uguali. Esse sono chiaramente in numero di 3. Per cui si ha: $P_3^{(2)}=3$.

È immediato constatare che in ognuno dei tre raggruppamenti evidenziati sopra per elencare le $P_3$ permutazioni, figurano $P_2$ permutazioni (quelle dei numeri 1 e 2). Sembra lecito pertanto affermare che si ha:

$$P_3^{(2)}=\frac{P_3}{P_2} \quad \text{ossia:} \quad P_3^{(2)}=\frac{3!}{2!}.$$

Ed effettivamente:

$$\frac{3!}{2!}=\frac{3\cdot 2}{2}=3\,.$$

Consideriamo un secondo esempio, riflettendo questa volta sulla sequenza di lettere AAAL. Assegnando alle tre lettere “A” ruoli distinguibili, come prima, si avrebbero le seguenti $P_4=24$ permutazioni:

$$\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{3}L \quad \underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{2}L \quad \underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{3}L \quad \underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{1}L \quad \underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1}L \quad \underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2}L$$
$$\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2}L\underbrace{A}_{3} \quad \underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{3}L\underbrace{A}_{2} \quad \underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1}L\underbrace{A}_{3} \quad \underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{3}L\underbrace{A}_{1} \quad \underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{2}L\underbrace{A}_{1} \quad \underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{1}L\underbrace{A}_{2}$$
$$\underbrace{A}_{1}L\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{3} \quad \underbrace{A}_{1}L\underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{2} \quad \underbrace{A}_{2}L\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{3} \quad \underbrace{A}_{2}L\underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{1} \quad \underbrace{A}_{3}L\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1} \quad \underbrace{A}_{3}L\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2}$$
$$L\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{3} \quad L\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{2} \quad L\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{3} \quad L\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{1} \quad L\underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1} \quad L\underbrace{A}_{3}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2}$$

Siccome però le tre lettere “A” svolgono ruoli non distinguibili, le effettive permutazioni sono le seguenti:

AAAL, AALA, ALAA, LAAA.

Sono per l’appunto le permutazioni (con ripetizione) delle 4 lettere A, A, A, L, fra le quali evidentemente ve ne sono 3 uguali. Esse sono chiaramente in numero di 4. Per cui si ha: $P_4^{(3)}=4$.

Si può constatare che in ognuno dei quattro raggruppamenti evidenziati sopra per le $P_4$ permutazioni, figurano $P_3$ permutazioni (quelle dei numeri 1, 2, 3). Sembra lecito pertanto affermare che si ha:

$$P_4^{(3)}=\frac{P_4}{P_3} \quad \text{ossia:} \quad P_4^{(3)}=\frac{4!}{3!}.$$

E realmente:

$$\frac{4!}{3!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}=4\,.$$

Ancora un esempio, per riflettere questa volta sulla sequenza di lettere della parola MAMMA. Se fossero distinguibili i ruoli sia delle tre lettere “M” sia delle due “A”, si avrebbero $P_5=120$ permutazioni.

Esse, con un po' di pazienza, possono essere raggruppate in 10 raggruppamenti mettendo in ogni raggruppamento le permutazioni che si identificano qualora i ruoli delle lettere che si ripetono fossero indistinguibili. Uno di tali raggruppamenti è il seguente:

$$\underbrace{M}_{1}\underbrace{M}_{2}\underbrace{M}_{3}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2},\ \underbrace{M}_{1}\underbrace{M}_{2}\underbrace{M}_{3}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1},\ \underbrace{M}_{1}\underbrace{M}_{3}\underbrace{M}_{2}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2},\ \underbrace{M}_{1}\underbrace{M}_{3}\underbrace{M}_{2}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1},\ \underbrace{M}_{2}\underbrace{M}_{1}\underbrace{M}_{3}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2},\ \underbrace{M}_{2}\underbrace{M}_{1}\underbrace{M}_{3}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1},$$
$$\underbrace{M}_{2}\underbrace{M}_{3}\underbrace{M}_{1}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2},\ \underbrace{M}_{2}\underbrace{M}_{3}\underbrace{M}_{1}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1},\ \underbrace{M}_{3}\underbrace{M}_{1}\underbrace{M}_{2}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2},\ \underbrace{M}_{3}\underbrace{M}_{1}\underbrace{M}_{2}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1},\ \underbrace{M}_{3}\underbrace{M}_{2}\underbrace{M}_{1}\underbrace{A}_{1}\underbrace{A}_{2},\ \underbrace{M}_{3}\underbrace{M}_{2}\underbrace{M}_{1}\underbrace{A}_{2}\underbrace{A}_{1}.$$

Naturalmente, dal momento che i ruoli delle lettere sono realmente indistinguibili, le effettive permutazioni sono le seguenti:

MMMAA, MMAMA, MAMMA, MAMAM, MAAMM,
AMMMA, AMMAM, AMAMM, AMAMA, AAMMM.

Sono per l'appunto le permutazioni (con ripetizione) delle 5 lettere M, M, M, A, A, fra le quali evidentemente ve ne sono 3 uguali fra loro e 2 uguali fra loro. Esse sono chiaramente in numero di 10. Per cui si ha: $P_5^{(3,2)}=10$.

Si può constatare ora che in ognuno dei dieci raggruppamenti che elencano le $P_5$ permutazioni, figura un numero di permutazioni dato dal prodotto di $P_3$ permutazioni (quelle dei numeri 1, 2, 3) per $P_2$ permutazioni (quelle dei numeri 1 e 2). Sembra lecito pertanto affermare che si ha:

$$P_5^{(3,2)}=\frac{P_5}{P_3\cdot P_2}\quad \text{ossia:}\quad P_5^{(3,2)}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\,.$$

E realmente:

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{(3\cdot 2)\cdot 2}=10\,.$$

Estendendo al caso generale (cosa che però non facciamo), si può dimostrare che vale la formula [2].

## VERIFICHE [3]

**1.** Calcolare:

a) $D_{4,2}\quad D_{7,3}\quad D_{5,3}$. b) $P_4\quad P_5\quad P_6$. c) $C_{4,2}\quad C_{7,3}\quad C_{5,2}$.

**2.** Calcolare:

a) $D'_{4,2}\quad D'_{7,3}\quad D'_{5,3}$. b) $P_5^{(2)}\quad P_6^{(2,2)}\quad P_7^{(2,3)}$. c) $C'_{4,2}\quad C'_{7,3}\quad C'_{5,2}$.

**3.** Considerate le cifre 1, 2, 3, 4, formare con esse: 1) tutti i numeri di due cifre distinte; 2) tutti i numeri di tre cifre distinte; 3) tutti i numeri di quattro cifre distinte.

**4.** Trovare quanti numeri di tre cifre distinte, quanti di quattro cifre distinte e quanti di cinque cifre distinte si possono formare con le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

**5.** Intorno ad un tavolo sono disposte sei sedie. In quanti modi vi si possono sedere quattro persone? In quanti modi sei persone? [**R.** 360; 720]

**6.** Nel sistema di numerazione decimale, quanti numeri di due cifre distinte si possono scrivere, sapendo

[3] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 1-27", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

che la prima è "1"? Quanti di tre cifre distinte? Quanti di quattro? Risolvi le stesse questioni supponendo che il sistema di numerazione sia duodecimale (cioè a base dodici).

7. Nel sistema di numerazione decimale, quanti numeri di cinque cifre distinte si possono scrivere se la prima cifra è "9" e l'ultima è "0"? Quanti numeri di sei cifre distinte?

8. Ad un concorso partecipano 15 concorrenti. Sapendo che solo i primi tre vengono premiati, stabilire quante sono in partenza le possibili graduatorie dei premiati. [**R**. 2730]

9. Ad una gara ciclistica a coppie partecipano 10 squadre. Quanti sono, prima della partenza, i possibili ordini di arrivo?

10. Osservato che si ha:
$$1\cdot3\cdot5\cdot7=\frac{(1\cdot3\cdot5\cdot7)\cdot(2\cdot4\cdot6\cdot8)}{2\cdot4\cdot6\cdot8}=\frac{8!}{(2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4)}=\frac{(2\cdot4)!}{2^4\cdot4!},$$
spiega come l'espressione $1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9$ possa essere elaborata in modo da diventare:
$$\frac{(2\cdot5)!}{2^5\cdot5!}$$
e dimostra infine che il prodotto dei primi n numeri naturali dispari vale:
$$\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}.$$

11. Si consideri il numero $100!+1$. Delle seguenti alternative una sola è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata, ma senza servirsi di strumenti di calcolo automatico.
[A] Il numero è divisibile per 10. [B] Il numero è divisibile per 37.
[C] Il numero è divisibile per 91. [D] Le tre proposizioni precedenti sono tutte false.

12. Una sola delle seguenti proposizioni è falsa. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata, ma senza usare alcuno strumento di calcolo automatico.
[A] Il numero 73! è divisibile per 74. [B] Il numero 88! è divisibile per 89.
[C] Il numero 118! è divisibile per 119. [D] Il numero 128! È divisibile per 129.

13. In una classe di 25 alunni devono essere eletti due rappresentanti di classe. Tutti gli alunni sono eleggibili. Quante sono le possibili coppie di rappresentanti?

14. Nel gioco della Tombola, quante cartelle distinte si possono formare? (Si fa presente che ogni cartella è costituita da 15 numeri). [**R.** $\approx 4{,}58\times10^{16}$]

15. Nel gioco del Lotto, quante cinquine possono uscire su una determinata "ruota"? [**R**. $\approx 4{,}39\times10^{7}$]

16. Calcola quante sono le possibili funzioni di A in B, che ad elementi distinti di A associano elementi distinti di B, posto che sia:
a) $A=\{1,2\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,1\le x\le7\}$. b) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,1\le x\le10\}$.
c) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,1\le x\le7\}$.
[**R.** a) 42; b) 720; c) 840]

17. Calcola quante sono le possibili funzioni biiettive di A in A sapendo che:
a) $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,1\le x\le5\}$. b) $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,1\le x\le8\}$.
[**R.** a) 120; b) 40320]

18. In Italia, ormai da alcuni anni, è praticato il seguente criterio per contrassegnare la targa di un'automobile: due delle 26 lettere maiuscole della cosiddetta versione moderna dell'alfabeto latino {A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z}, seguite da tre delle 10 cifre dell'usuale sistema di numerazione decimale (0 1 2 3 4 5 6 7 8 9), seguite ancora da due lettere dell'alfabeto lati-

no. Per esempio: WJ499XX. Quante targhe è possibile contrassegnare con questo metodo?

[**R.** 456.976.000]

**19.** Un'urna contiene 8 palline bianche e 4 palline nere. Si estraggono a caso 3 palline senza rimetterle nell'urna. Calcolare: a) quante sono le possibili terne di palline estratte; b) quante di tali terne sono formate da due palline bianche ed una pallina nera. [**R.** a) 220; b) 112]

**20.** ® Nell'usuale sistema di numerazione decimale:

a) Quante sono le coppie (non ordinate) di numeri naturali minori di 10?
b) Quante di queste coppie sono formate da numeri non consecutivi?
c) Quanti sono i numeri di tre cifre tutte dispari? (N.B.: il numero tredici va pensato nella forma 13 e non 013 e così in tutti i casi analoghi)
d) Quanti sono i numeri di tre cifre in cui almeno una cifra è pari?

[**R.** a) 45; b) 36; c) 125; d) 775]

**21.** Gli alunni dell'ex 5ªB si ritrovano dopo 25 anni e si salutano con una stretta di mano.

a) Quante sono complessivamente le strette di mano se gli alunni che partecipano al ritrovo sono 27?
b) In realtà, alcuni alunni non si presentano e le strette di mano sono complessivamente 231. Quanti alunni non si sono presentati al ritrovo?

[**R.** a) 351; b) 5]

**22.** È consuetudine che, prima di una partita di calcio, dopo la presentazione delle squadre e degli arbitri a centrocampo, gli 11 giocatori di una squadra stringano la mano ai loro 11 avversari ed ai 6 arbitri. Anche gli arbitri si scambiano tra loro l'un l'altro strette di mano. Quante sono complessivamente le strette di mano?

[A] 202. [B] 246. [C] 268. [D] 378.

Individuare l'unica alternativa corretta e spiegare il procedimento seguito per trovarla.

**23.** Sarebbe possibile dimostrare (cosa che però non facciamo e che non è richiesta) la seguente formula:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Verificare la formula per $n=3$ ed $n=4$.

**24.** ESERCIZIO RISOLTO.

Dimostrare che il numero delle diagonali di un poligono (convesso) di n lati è $n(n-3)/2$.

RISOLUZIONE.

Abbiamo già fornito una dimostrazione di questa proprietà nell'unità 7, paragrafo 7.5.7. Qui vogliamo proporre un'altra dimostrazione, basata sul calcolo combinatorio.

Consideriamo allora tutti i possibili segmenti che congiungono due vertici del poligono: sono tanti quante le combinazioni di n oggetti presi a 2 a 2, vale a dire $\binom{n}{2}$. Per ottenere il numero D delle diagonali del poligono basta togliere a questo numero il numero dei lati del poligono, vale a dire n. Pertanto:

$$D = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}. \qquad [\text{c.v.d.}]$$

**25.** ESERCIZIO RISOLTO.

Nel gioco del POKER classico ad ogni giocatore sono distribuite a caso 5 delle carte che formano il mazzo (un mazzo è formato da 52 carte distribuite in 4 colori: cuori, quadri, fiori, picche; ogni colore comprende 13 valori: due, tre, quattro, …, dieci, fante, donna, re, asso).

a) In quanti modi diversi può essere servito un giocatore?
b) In quanti modi diversi può essere servito ad un giocatore un poker d'assi (4 Assi più una quinta carta)?
c) In quanti modi diversi può essere servito ad un giocatore un poker qualunque (4 carte dello stesso valore più una quinta carta)?
d) In quanti modi diversi può essere servito ad un giocatore un tris d'assi (3 assi più due altre carte di valori diversi tra loro e diversi dall'asso)?
e) In quanti modi diversi può essere servito ad un giocatore un tris qualunque (3 carte di uguale valore più due altre carte di valori diversi tra loro e diversi da quelli delle carte del tris)?

RISOLUZIONE.

a) Il numero dei modi in cui può essere servito un giocatore è dato dalle possibili combinazioni delle 52 carte prese a 5 a 5, vale a dire $\binom{52}{5}$ e cioè 2.598.960.
b) Se il poker d'assi è servito, si tratta di vedere in quanti modi può essere assegnata la $5^a$ carta e ciò può avvenire evidentemente in $52-4=48$ modi diversi.
c) I poker possibili sono evidentemente 13 ed ognuno di essi può essere ottenuto in 48 modi diversi, pertanto ad un giocatore può essere servito un poker qualunque in $13\cdot 48=624$ modi diversi.
d) I possibili TRIS d'assi sono $\binom{4}{3}$, cioè tanti quanti sono i modi di prendere i 4 assi del mazzo a 3 a 3. Bisogna moltiplicare questo numero per il numero dei modi in cui possono essere distribuite le due carte che mancano per formarne appunto 5. Ora tale numero sarebbe $\binom{48}{2}$ se non ci fosse il vincolo che le due carte devono avere valore diverso (altrimenti si avrebbe un FULL). Da questo numero bisogna quindi togliere il numero delle possibili COPPIE (2 carte di uguale valore). Per ciascuno dei 12 valori diversi dall'Asso, le possibili coppie sono in numero di $\binom{4}{2}$, cioè tante quante sono le combinazioni delle 4 carte di uguale valore prese a 2 a 2. Quindi le possibili coppie di valore diverso dall'asso sono in numero di $12\cdot\binom{4}{2}$. Di conseguenza le due carte, oltre ai tre assi del TRIS, possono essere distribuite in $\binom{48}{2}-12\cdot\binom{4}{2}=1056$ modi diversi. In definitiva, ad un giocatore può essere servito un tris d'assi in $\binom{4}{3}\cdot 1056=4224$ modi diversi.
e) Basta ragionare come nel caso c) per ottenere il numero cercato, che è $13\cdot 4224=54912$.

**26.** Nella figura sottostante (Fig. 9) sono disegnati 5 punti (A-B-C-D-E) in modo che tre qualunque di essi non risultino allineati. Quanti e quali triangoli si possono costruire in modo che tre dei cinque punti siano vertici di uno di tali triangoli? [**R.** 10 triangoli, …]

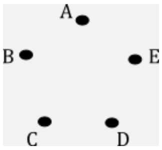


FIG. 9

**27.** Calcolare quanti oggetti distinti bisogna combinare 2 a 2 per ottenere 300 combinazioni. [**R.** 25]

**28.** Stabilire se, combinando n oggetti distinti a 2 a 2, è possibile ottenere k combinazioni nei seguenti casi:

$$k=8,\ \ k=10,\ \ k=15.$$

**29.** 15 oggetti distinti devono essere combinati a 6 a 6 oppure a 9 a 9. È maggiore il numero delle combinazioni di classe 6 o quello di classe 9?

**30.** Risolvere le seguenti equazioni in x:

$$\text{a) } \binom{x}{3}=\binom{x}{2}; \quad \text{b) } \binom{x}{4}-\binom{x}{3}=\frac{1}{2}\binom{x}{2}.$$

[**R.** a) ... ; b) x=0]

**31.** Considerata l'equazione $\binom{x}{4}=\binom{x}{6}$, dove x è un numero naturale, è evidente che una sua soluzione è x=10. Dimostrare che non ammette altre soluzioni.

**32.** Nel gioco del Lotto, giocando su una data "ruota", calcolare la probabilità di indovinare: 1) una quaterna; 2) un ambo; 3) un numero. [**R.** $\approx 1{,}96\cdot 10^{-6}$; 2) $\approx$0,25%; 3) $\approx$5,56% ]

**33.** Nel gioco della Tombola, disponendo di una cartella, qual è la probabilità di realizzare tombola dopo 15 numeri estratti? [**R.** $\approx 2{,}2\times 10^{-17}$ ]

**34.** Si consideri un'estrazione del Lotto, supponiamo sulla ruota di Napoli.

a) Qual è la probabilità che il primo numero estratto non superi 30?

b) Posto che il 1° numero estratto non superi 30, qual è la probabilità che anche il 2° estratto non superi 30?

c) Posto che il 1° estratto non superi 30, qual è la probabilità che il 2° estratto superi 60?

d) Qual è la probabilità che fra i 5 numeri estratti ve ne siano 2 e 2 soltanto che non superano 30?

[**R.** ... ; b) $\approx$32,6%; c) $\approx$33,7%; d) $\approx$33,9% ]

**35.** In un mazzo di 40 carte napoletane se ne scelgono tre a caso. Qual è la probabilità che fra di esse vi sia: 1) esattamente uno dei quattro RE; 2) almeno uno dei quattro RE. [**R.** 1) $\approx$25,5 %; 2) $\approx$27,7% ]

**36.** In un'urna sono contenute 5 palline contrassegnate dai numeri interi da 1 a 5. Si estraggono a caso, una dopo l'altra e senza reinserimento, 3 palline ed i numeri che le contrassegnano sono scritti uno di seguito agli altri nell'ordine di estrazione, da sinistra a destra, in modo da formare un numero di 3 cifre. Qual è la probabilità che il numero così formato sia divisibile per 3? [**R.** 40%]

**37.** Utilizzando la formula del binomio di Newton, sviluppare i seguenti binomi:

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^3; \quad \left(x+\frac{1}{x^2}\right)^4; \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^5.$$

**38.** Si possono formare più anagrammi con la parola PATATA o con la parola RENATA?

**39.** Sono di più i modi di distribuire 4 oggetti identici fra 3 persone o quelli di distribuire 5 oggetti identici fra 4 persone?

**40.** Il campionato italiano di calcio, serie A, annata 20015/16, si disputa fra 20 squadre con partite di andata e ritorno. Quante partite si disputano complessivamente?

[A] $D_{20,2}$ [B] $C_{20,2}$ [C] $P_{20}$ [D] Un numero diverso.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**41.** I 20 studenti della 5ª C dell'anno scolastico 2004/05 s'incontrano 10 anni dopo e si salutano con una stretta di mano. Quante sono complessivamente le strette di mano?

[A] $D_{20,2}$ [B] $C_{20,2}$ [C] $P_{20}$ [D] Un numero diverso.

Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**42.** Prescindendo dal loro significato, quanti anagrammi si possono formare con la parola

COMBINATORIA?
[A] $D_{12,9}$ [B] $C_{12,9}$ [C] $P_{12}$ [D] Un numero diverso.
Una sola alternativa è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**43.** Calcola quante sono le possibili funzioni di A in B, posto che sia:

a) $A=\{1,2\}$, $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\le x\le 7\}$. b) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\le x\le 10\}$.
c) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\le x\le 7\}$.

[**R.** a) 49; b) 1000; c) 2401]

**44.** Si lancia per 3 volte un dado con le facce numerate da 1 a 6, aventi la stessa probabilità di uscire. Calcolare la probabilità che: a) fra i tre numeri usciti ci siano i numeri 1 e 2; b) fra i tre numeri usciti ci siano il 5, il 6 ed uno degli altri 4 numeri. [**R**. 5/36; 1/9]

**45.** I signori Rossi hanno 5 figli. Calcolare la probabilità che siano:
a) tutti dello stesso sesso;
b) 4 di un sesso ed uno dell'altro sesso;
c) 3 di un sesso e 2 dell'altro sesso.

$\left[\mathbf{R.}\ \text{a)}\ \frac{1}{16}\ ;\ \text{b)}\ \frac{5}{16}\ ;\ \text{c)}\ \frac{5}{8}\right]$

**46.** Una classe mista è formata da 24 alunni. Qual è la probabilità che siano metà di un sesso e metà dell'altro sesso?

$\left[\mathbf{R.}\ \frac{1}{2^{24}}\cdot\frac{24!}{12!\,12!}\approx 16{,}11\%\right]$

**47.** ® LABORATORIO DI MATEMATICA.
Mediante un idoneo strumento di calcolo automatico si può controllare che lo sviluppo di:
- 24! presenta 4 zeri finali;
- 25! presenta 6 zeri finali;
- 124! presenta 28 zeri finali;
- 125! presenta 31 zeri finali.

Prova, discutendone in classe con i tuoi compagni ed eventualmente con l'aiuto del professore, a darne una spiegazione razionale. Prova inoltre a generalizzare determinando il numero degli zeri finali di n!, dove n è un qualsiasi numero naturale.
Calcola quindi quanti sono gli zeri finali dei numeri 200! e 1000!
Risolvi infine le seguenti questioni:
a) Esiste un numero naturale n tale che n! termini con 5 zeri?
b) Qual è il più piccolo numero naturale n tale che n! termini con 7 zeri?
c) Qual è il più grande numero naturale n tale che n! termini con 7 zeri?

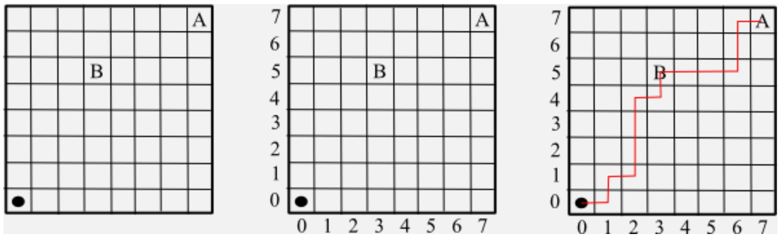
[Esercizio ad alto coefficiente di difficoltà]

**48.** Siano a, b, c tre numeri naturali dispari consecutivi. Calcolare il valore di b per il quale la somma delle quarte potenze dei tre numeri è uguale a 707. [**R**. 3]

**49.** Sia m la media aritmetica di 3 numeri interi positivi e sia p la probabilità che almeno uno di essi sia uguale a 2. Spiegare in modo esauriente perché:

a) se $m=2$ allora $p=7/10$; b) se $m\le 2$ allora $p=10/17$.

**50.** ESERCIZIO RISOLTO. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura (Fig. 10a). Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?




(a) (b) (c)

FIG. 10

RISOLUZIONE. Questo quesito è stato assegnato nella sessione ordinaria 2016 degli esami di Stato di Liceo Scientifico. Ci offre lo spunto per alcune considerazioni che possono essere utilizzate in situazioni più generali.

Contrassegniamo le caselle della scacchiera come se fossero quelle di una rappresentazione tabulare, utilizzando la successione 0-1-2-3-4-5-6-7 sia in orizzontale sia in verticale (Fig. 10b). In questo modo, alla casella in cui è posta la pedina inizialmente corrisponde la coppia ordinata (0,0), a quella contrassegnata dalla lettera A corrisponde la coppia orinata (7,7), a quella contrassegnata con la lettera B corrisponde la coppia ordinata (3,5).

Possiamo adesso assimilare la situazione al lancio di una moneta TESTA-CROCE, identificando l'evento "la pedina si sposta di una casella verso destra" con l'evento "esce TESTA" e l'evento "la pallina si sposta di una casella verso l'alto" con l'evento "esce CROCE". Ebbene, lanciando la moneta 14 volte (cioè tante volte quante sono le mosse necessarie per andare dalla casella in basso a sinistra alla casella A), un possibile percorso è quello indicato in figura (Fig. 10c) – ed è fra l'altro un percorso passante per B – e che può essere indicato nel modo seguente:

$$T-C-T-C-C-C-T-C-T-T-T-C-C-T\,.$$

Si può notare che ci sono 7 TESTE e 7 CROCI: in realtà accade così per ogni percorso che porti dalla posizione (0,0) alla posizione (7,7). Si tratta di stabilire allora in quanti casi, nei 14 lanci della moneta, escono 7 TESTE (e ovviamente 7 CROCI), ed in quanti di questi casi, giunti all'8° lancio, si presentano 3 TESTE (e ovviamente 5 CROCI).

Ora, è noto dal calcolo combinatorio, che il numero di casi in cui, in n lanci di una moneta, l'evento "esce TESTA" si presenta k volte (per cui l'evento "esce CROCE" si presenta n−k volte) è uguale al numero $P_n^{(k,\,n-k)}$ delle permutazioni con ripetizione di n oggetti di cui k uguali fra loro e n−k uguali fra loro, vale a dire:

$$P_n^{(k,\,n-k)}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Numero che, come si sa, è uguale al numero di Pascal $\binom{n}{k}$, che, detto per inciso e come risulta noto, è anche uguale a $\binom{n}{n-k}$.

Ritornando allora al nostro quesito, la probabilità cercata è la seguente:

$$p=\frac{\binom{8}{3}}{\binom{14}{7}}=\frac{\frac{8\times7\times6}{2\times3}}{\frac{14\times13\times12\times11\times10\times9\times8}{2\times3\times4\times5\times6\times7}}=\frac{7}{429}\approx 1{,}63\%\,.$$

**51.** Un'azienda ha bandito un concorso per l'assunzione di 4 impiegati. Hanno superato una prima selezione 3 maschi e 7 femmine, i quali hanno tutti le stesse possibilità di essere assunti.

a) Qual è la probabilità che i 4 assunti siano 1 maschio e 3 femmine?

b) Quante sono le possibili quaterne dei candidati all'assunzione?
c) Quante di queste quaterne sono formate da 1 maschio e 3 femmine?

[**R.** Sono possibili più procedimenti. In ogni caso: a) 1/2; b) 210; c) 105]

**52.** Due giocatori, A e B, giocano alcune partite, in ognuna delle quali vince l'uno o l'altro, con pari probabilità. Si aggiudica la vittoria finale il giocatore che consegue per primo k vincite parziali. Poiché, dopo un certo numero di partite giocate, nessuno dei due è giunto a quota k vincite parziali, i due giocatori decidono di interrompere il gioco. In quel momento il giocatore A ha vinto k–n partite, mentre il giocatore B ne ha vinte k–m.

a) Calcolare il numero N di partite che si sarebbero dovute giocare per avere la certezza che uno dei due giocatori se ne fosse aggiudicate k.
b) Determinare il numero dei possibili esiti delle N partite se fossero effettivamente giocate. (A titolo di esempio: se $n=1$ ed $m=2$, è $N=2$ dal momento che in capo a 2 partite sicuramene uno dei due giocatori si sarà aggiudicata la vittoria finale. Gli esiti possibili di queste due partite sono pertanto 4 e precisamente: AA, AB, BA, BB, dove con A si indica l'evento "vince A" e con B l'evento "vince B")
c) Nel caso in cui $n=1$ ed $m\geq1$, calcolare quanti, dei possibili esiti delle N partite, sono favorevoli a B e quanti sono favorevoli ad A.
d) Nel caso in cui $n=2$ ed $m\geq2$, dimostrare che, dei possibili esiti delle N partite, quelli favorevoli a B sono m+2. Quanti sono quelli favorevoli ad A? (Suggerimento per la prima risposta: sono favorevoli a B gli esiti in cui figura, al più, 1 vincita di A e questi sono in numero di $P_{m+1}^{(0,\, m+1)}+P_{m+1}^{(1,\, m)}$)
e) Se $n=3$ ed $m=4$, quale probabilità avrebbe A di conquistare la vittoria finale se il gioco fosse portato a termine? Quale probabilità avrebbe B?
f) Nel caso generale in cui n ed m sono interi positivi qualsiasi, con $m\geq n$, dimostrare che, dei possibili esiti delle N partite, quelli favorevoli a B sono un numero $F_B(n,m)$ tale che:

$$F_B(n,m)=\sum_{j=0}^{n-1} P_{m+n-1}^{(j,\ m+n-1-j)}=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m+n-1}{j}.$$

(Suggerimento: generalizzare il procedimento seguito per risolvere la prima parte del punto d)
In particolare, tanto per fare qualche esempio, si ha:

$$F_B(n=1,m=2)=\binom{2}{0}=1;\quad F_B(n=3,m=4)=\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}=22.$$

g) Tenendo presente la formula precedente, completare la seguente tabella, dove $F_A(n,m)$ indica il numero di esiti favorevoli ad A, mentre $p_B(n,m)$ e $p_A(n,m)$ rappresentano le probabilità che avrebbero rispettivamente B ed A di aggiudicarsi la vittoria finale qualora il gioco fosse portato a termine.

| n | m | $F_B(n,m)$ | $F_A(n,m)$ | $p_B(n,m)$ | $p_A(n,m)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1/2 | 1/2 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1/4 | 3/4 |
| 1 | 3 | | | | |
| 1 | 4 | | | | |
| 2 | 2 | | | | |
| 2 | 3 | | | | |
| 2 | 4 | | | | |
| 3 | 4 | 22 | 42 | 11/32 | 21/32 |

[**R.** a) N=n+m−1; b)… ; c)… , favorevoli ad A: $2^m-1$; d)… , $2^{m+1}-(m+2)$; e) … ; f) … ; g) … ]

**53.** Calcolare quante sono le combinazioni semplici delle 7 cifre da 1 a 7 prese a 3 a 3.
Se s'impone la condizione che due medesime cifre, comunque scelte, figurino in una ed una sola terna e constatato che un insieme di terne con tali caratteristiche è il seguente:

$$\{\{1,2,3\}\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}. \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\},$$

determinare un altro insieme con le medesime caratteristiche.

**54.** In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?
[Quesito assegnato nell'esame di Stato 2018, sessione ordinaria, maturità scientifica]

$$\left[\mathbf{R.}\ 2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(P_{11}^{(10)}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{1}{2}+\left(P_{12}^{(10,2)}-P_{11}^{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right\}=\frac{79}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 3{,}86\%\right]$$

## UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

**DOMANDE.**

**1.** Di ciascuna delle seguenti uguaglianze, dove n è un qualsiasi numero naturale, dire se è vera o falsa:
A) $(2\,n)! = 2 \cdot n!$ B) $(2\,n)! = 2!\,n!$
C) $n!\,(n+1) = (n+1)!$ D) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2\,n) = 2^n \cdot n!$

**2.** Quanto vale la somma $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$ ?
A) 25. B) 32. C) 36 . D) 64.
Una sola alternativa è corretta. Quale?

**3.** Cinque persone sono contrassegnate con i numeri da 1 a 5. Cinque sedie sono contrassegnate con gli stessi numeri. Quante sono le possibilità che vedono le persone "1" e "2" mettersi sedute sulle sedie che portano gli stessi numeri e le altre tre persone dove capita?

**4.** Quanti sono i sottoinsiemi, formati da 3 elementi, di un insieme costituito da 8 elementi?

**5.** In quanti modi può essere formato il podio dei primi tre classificati in una gara alla quale partecipano 8 atleti?

**6.** Sono di più i modi di distribuire fra 20 persone 8 oggetti identici oppure 12 oggetti identici, in modo però che ogni persona non ne riceva più d'uno?

**7.** I cinque amici Aldo, Giovanni, Giacomo, Luca e Paolo s'incontrano e si salutano scambiandosi fra loro una stretta di mano, a parte Luca che non dà la mano a nessuno. Quante sono complessivamente le strette di mano?

**8.** È vero che il numero 99!+1 è divisibile per 99 ?

**9.** È vero che il numero 99! è divisibile per 100 ?

**10.** È vero che le possibili funzioni di $\{a,b\}$ in $\{1,2,3\}$ sono tante quante le disposizioni di 3 oggetti distinti presi a 2 a 2?

**11.** Fra tutti i numeri di 3 cifre, scritti nel consueto sistema di numerazione decimale posizionale, i numeri che contengono almeno una delle cifre 1 e 2 sono in numero maggiore, minore o uguale a quelli che non contengono alcuna di tali cifre? (Per semplicità, si ammettano come numeri di 3 cifre anche quelli che iniziano per 0, come per esempio 001)

E se si prendono i numeri di 4 cifre, quelli che contengono almeno una delle cifre 1 e 2 sono in numero maggiore, minore o uguale a quelli che non contengono alcuna di tali cifre?

**RISPOSTE.**

1. A) F; B) F; C) V; D) V.
2. Risposta corretta: B. O si fanno i conti oppure si ricorre alla formula del binomio di Newton in cui si pone $n=5$ ed $a=b=1$, per cui risulta che la somma è $2^5$.
3. Le possibilità sono tante quante le permutazioni di 3 oggetti distinti, cioè 3!.
4. Sono tanti quante le combinazioni di 8 oggetti distinti presi a 3 a 3, cioè $\binom{8}{3}$.
5. In tanti modi quante sono le disposizioni di 8 oggetti distinti presi a 3 a 3, vale a dire in $8\times7\times6=336$ modi.
6. I modi di distribuire 8 oggetti identici fra $20$ persone, in modo che ad ognuna di esse non ne vada più d'uno, sono tanti quante le combinazioni semplici di $20$ oggetti distinti presi a 8 a 8, vale a dire $\binom{20}{8}$. Quelli di distribuire $12$ oggetti fra le $20$ persone sono, invece, $\binom{20}{12}$. Siccome $\binom{20}{8}=\binom{20}{12}$, le due modalità sono evidentemente nello stesso numero.
7. Le cose vanno come se fossero 4 gli amici che si salutano con strette di mano. Il numero complessivo di queste strette è pertanto $C_{4,2}=6$.
8. È falso. Il numero $99!+1$, uguale a $1\times2\times3\times4\times...\times99+1$, diviso per $99$, dà resto uguale ad $1$ e perciò non è divisibile per $99$.
9. È vero. Il numero $99!$ è divisibile per $100$ giacché tra i fattori del numero $99!$, vi sono $4$ e $25$, il cui prodotto è per l'appunto $100$.
10. Non è vero. Sono invece tante quante le disposizioni con ripetizione di 3 oggetti distinti presi a 2 a 2, vale a dire $3^2$.
11. Conviene calcolare dapprima il numero dei numeri che non contengono né 1 né 2: essi sono in numero di $8^3=512$ (N.B.: la base 8 perché tante sono le cifre del sistema di numerazione decimale posizionale diverse da 1 e 2; l'esponente 3 perché si cercano numeri di 3 cifre). I numeri di 3 cifre che contengono almeno una delle cifre 1 o 2 sono pertanto in numero di $1000-512=488$. La continuazione è banale.
    Analogo ragionamento nel caso dei numeri di 4 cifre. La conclusione è la stessa?