Prerequisiti:

- Saper operare con le quattro operazioni fondamentali nell'insieme dei numeri razionali.

**L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.**

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *confrontare numeri decimali di vario genere*
- *spiegare che esistono punti della retta numerica cui corrispondono numeri non razionali*
- *dimostrare l'irrazionalità di* $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{3}$
- *costruire un numero irrazionale*
- *rappresentare un numero reale sulla retta dei numeri*
- *operare consapevolmente con una calcolatrice per calcolare in particolare un valore (approssimato) della potenza di un numero positivo con esponente razionale*
- *operare con i radicali quadratici*
- *esporre con proprietà le principali tappe nell'evoluzione storica dei sistemi di numerazione*



# Numeri reali

# Unità 3

### 3.1 ESIGENZA DI UN AMPLIAMENTO DELL'INSIEME ℚ

**3.1.1** Un breve riassunto delle puntate precedenti. Partendo dall'insieme ℕ dei numeri naturali (chiuso rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione) siamo passati, per successivi ampliamenti, all'insieme ℤ degli interi (chiuso anche rispetto alla sottrazione) e quindi all'insieme ℚ dei numeri razionali relativi (chiuso – ove si escluda *zero* – anche rispetto alla divisione).
Quindi, operando su due o più numeri razionali con le operazioni addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione, si ottiene sempre un numero razionale, fatta ovviamente la debita eccezione nota per la divisione. Per questa ragione le 4 operazioni suddette, considerate come le *operazioni fondamentali dell'aritmetica*, sono chiamate a volte *operazioni razionali*.
A questo punto potrebbe sembrare che l'insieme ℚ costituisca l'ultimo traguardo nella costruzione degli insiemi numerici. Ed in effetti è una tappa fondamentale. Ma non l'ultima. Tale insieme, infatti, si manifesta insufficiente se tentiamo di operare sui numeri razionali con operazioni che non siano solamente le 4 operazioni razionali.
Possiamo constatare, per esempio, che:

♦ **Non esiste alcun numero razionale x tale che $x^2=2$.**

DIMOSTRAZIONE.
Se un siffatto x esistesse, esisterebbero due numeri interi a, b tali che $x=\frac{a}{b}$. Cosicché dovrebbe essere:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=2, \text{ ossia: } \frac{a^2}{b^2}=2 \text{ e dunque: } a^2=2b^2.$$

Ora, nel primo membro dell'ultima uguaglianza, scomposto in fattori primi, il numero 2 figura con esponente pari o non figura affatto, mentre nel secondo membro figura con esponente dispari. L'uguaglianza è perciò impossibile.
Ammettere, quindi, l'esistenza di un numero razionale, il cui quadrato sia 2, significa giungere ad una conclusione assurda. Pertanto dobbiamo concludere che quel numero non esiste. Come volevamo dimostrare.

**3.1.2** È vero, dunque, che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato è 2. D'altro canto, se consideriamo il quadrato OUPQ di lato 1 (Fig. 1), è fuor di dubbio [1] che la sua diagonale OP ha una lunghezza il cui quadrato è 2. Se allora riportiamo questa lunghezza sulla retta numerica a partire da O, otteniamo su di essa un punto A, cui non corrisponde alcun numero razionale.

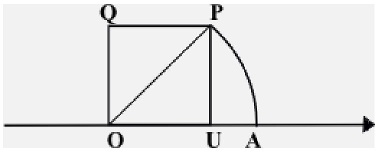


FIG. 1

E quello descritto non è l'unico esempio del genere. Basti pensare che non esiste alcun numero razionale x per il quale sia vera una delle seguenti relazioni:

$$x^2=3,\ x^2=5,\ 2x^2=1,\ 2x^2=3,\ \text{eccetera.}$$

La spiegazione di ciò è simile alla precedente. La lasciamo a te. Anche di questi "oggetti" x si può poi dare un'interpretazione geometrica simile a quella data sopra per l'oggetto il cui quadrato è 2. Ma questo deve

[1] Per questo è necessario ricordare e applicare il teorema di Pitagora.

essere rinviato al momento in cui saranno svolti alcuni contenuti di geometria.

In conclusione: **i punti aventi ascisse razionali (detti *punti razionali*) della retta numerica non ricoprono completamente la retta**, ma lasciano dei "buchi", vale a dire che ci sono punti sulla retta dei numeri ai quali non corrispondono numeri razionali. Come riempire quei buchi?
Quest'interrogativo, conseguenza delle precedenti considerazioni, giustifica l'esigenza di introdurre un insieme di numeri che contenga un sottoinsieme che si comporti come $\mathbb{Q}$ e permetta di dare risposta all'interrogativo medesimo. È quello che andiamo a fare.

### 3.2 GLI ALLINEAMENTI DECIMALI ILLIMITATI

**3.2.1** Cominciamo col ricordare che ogni numero razionale può porsi sotto forma di numero decimale illimitato periodico e, viceversa, ogni numero decimale illimitato periodico è un numero razionale.
Così, per esempio, si ha:

$$1,\overline{9}=2,\ \ 0,2\overline{9}=3,\ \ 2,3\overline{9}=2,4=\frac{24}{10},\ \ 0,\overline{3}=\frac{3}{9},\ \ 2,\overline{5}=\frac{25-2}{9}=\frac{23}{9},\ \ 2,3\overline{1}=\frac{231-23}{90}=\frac{208}{90}.$$

**3.2.2** Abbiamo spiegato prima che non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2. Perciò, se ammettiamo per un momento che questa "cosa", il cui quadrato è 2, sia un numero, non può essere certamente messa sotto forma di allineamento decimale illimitato periodico.
Ora, se x è questa cosa, deve essere $x^2=2$. Per stabilirne la forma, ragioniamo nel modo seguente.
Determiniamo anzitutto due interi consecutivi, a ed $a_1=a+1$, tali che:

$$a^2<2<a_1^2.$$

Troviamo subito a=1. Infatti: $1^2<2<2^2$. Quindi deve essere $1<x<2$.
Determiniamo adesso due numeri decimali del tipo 1,d ed $1,d_1$, dove d è una della cifre comprese fra 0 e 9 e $d_1=d+1$, tali che:

$$1,d^2<2<1,d_1^2.$$

Dopo qualche tentativo, condotto magari con il supporto di una calcolatrice, si trova d=4. Infatti $1,4^2<2<1,5^2$. Quindi deve essere $1,4<x<1,5$ .
Proseguiamo, determinando due numeri decimali del tipo 1,4d e $1,4d_2$, dove d è una delle cifre comprese fra 0 e 9 e $d_2=d+1$, tali che [2]:

$$1,4d^2<2<1,4d_2^2.$$

Dopo altri tentativi si trova d=1. Infatti $1,41^2<2<1,42^2$ . Dunque $1,41<x<1,42$ .
Continuando nella ricerca, si trova:

$$\begin{aligned}&1,414<x<1,415\\&1,4142<x<1,4143\\&1,41421<x<1,414222\\&1,414213<x<1,414214\\&1,4142136<x<1,4142137.\end{aligned}$$

Non si otterrà certamente un numero decimale periodico, giacché, in tal caso, x sarebbe un numero razionale, in contraddizione con quanto è stato prima dimostrato.

Questo ente, del quale il procedimento precedente costituisce la legge che permette di costruirlo fino

---

[2] Attenzione! Qui la scrittura 1,4d e simili non deve essere interpretata come prodotto di 1,4 per d, ma d deve essere intesa come la seconda cifra decimale. Per esempio, se d=1 allora 1,4d=1,41.

ad una qualunque cifra decimale, si chiama ***numero decimale illimitato non periodico*** o anche ***numero irrazionale***. In generale:

Un **numero irrazionale** è un allineamento decimale illimitato non periodico, del quale è nota la legge che consente di costruirlo fino ad una qualsiasi cifra decimale.

Questa legge può essere dello stesso tipo di quella che ci ha permesso di costruire l'allineamento decimale $1,414\,213\,6\ldots$, con cui si identifica il numero irrazionale il cui quadrato è 2, ma può essere di tipo diverso, come le due seguenti leggi, di facile comprensione, che permettono di costruire altri allineamenti decimali illimitati non periodici:

$$0,10\,1100\,111000\,11110000\ldots;\qquad 2,10\,200\,3000\,40000\,500000\ \ldots\ .$$

L'unione dell'insieme dei numeri razionali con quello dei numeri irrazionali si chiama **insieme dei numeri reali**. Si indica col simbolo $\mathbb{R}$.

Di esso, con chiaro significato per i simboli (che è uguale al significato dei simboli analoghi derivati da $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$), si utilizzano spesso i seguenti sottoinsiemi:

$$\mathbb{R}_0,\ \ \mathbb{R}_0^+,\ \ \mathbb{R}_0^-,\ \ \mathbb{R}^+,\ \ \mathbb{R}^-.$$

**3.2.3** Prima di chiudere questo paragrafo, ti poniamo una domanda:

♦ **I numeri irrazionali sono tanti o pochi?**

Cerca di fornire una risposta prima di continuare nella lettura.

Osserviamo anzitutto che sono irrazionali tutti i numeri x tali che $x^2=a$, dove a è un numero razionale positivo che però non sia un *quadrato perfetto*, cioè non sia il quadrato di un numero razionale.

Il numero positivo x, tale che $x^2=a$, dove a è un numero razionale positivo (non importa che sia o no un quadrato perfetto), si indica con la scrittura:

$$\sqrt{\mathbf{a}}$$

e si legge « *radice quadrata di* a ».

Per quanto detto sopra, i numeri $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ sono numeri irrazionali; non lo sono invece i numeri $\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{9}{4}}$ che sono uguali rispettivamente a 2 e $\frac{3}{2}$.

È pure irrazionale ogni numero, indicato col simbolo

$$\sqrt[3]{\mathbf{a}}$$

che si legge « *radice cubica di* a », il cui cubo è uguale al numero razionale a, che non sia però il cubo di un altro numero razionale (non sia cioè un *cubo perfetto*).

Per esempio sono irrazionali i numeri $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$; non lo sono invece $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$, che sono rispettivamente uguali a 2 ed a 3.

Ma sono anche irrazionali tutti i numeri dei quali si può dare una qualsiasi legge di formazione degli allineamenti decimali illimitati non periodici con cui i numeri si identificano.

Come per esempio i seguenti:

$$1,01\,0011\,000111\,00001111\ldots;\qquad 0,123\,112233\,111222333\ldots;$$
$$15,01\,012\,0123\,01234\,012345\ldots;\qquad 3,10\,200\,3000\,40000\,500000\ldots.$$

Insomma i numeri irrazionali sono "tantissimi". Anzi, sarebbe possibile dimostrare (ma qui non lo possiamo fare) che, tra i numeri reali, essi costituiscono la parte preponderante, mentre i razionali, anche se sono infiniti, sono in quantità trascurabile rispetto ad essi.

### 3.3 OPERAZIONI NELL'INSIEME $\mathbb{R}$

**3.3.1** Due qualsiasi numeri reali si possono confrontare fra loro. Basta far ricorso alla rappresentazione decimale dei due numeri.
Così per esempio, considerati i numeri:

$$a = 1{,}19999\ldots,\quad b = 1{,}19\ 199\ 1999\ \ldots,\quad c = 1{,}199\ 1199\ 11199\ \ldots,$$

è facile capire che si ha:

$$a > b,\ a > c,\ c > b \quad \text{e quindi} \quad a > c > b\,.$$

ESERCIZIO. Disponi in ordine crescente i seguenti numeri:

a) $\sqrt{3}\quad 1{,}73\quad 1{,}7\overline{3}\quad \dfrac{17}{10}\quad 1{,}\overline{7}\quad 1{,}\overline{70}$ ; b) $\dfrac{11}{5}\quad 2{,}\overline{2}\quad \sqrt{5}\quad 2{,}\overline{20}\quad 2{,}23\quad 2{,}2\overline{3}$ ;

c) $1{,}41\quad 1{,}4\overline{1}\quad \sqrt{2}\quad 1{,}\overline{41}\quad \dfrac{7}{5}\quad 1{,}\overline{4}$ .

**3.3.2** Per calcolare la somma ed il prodotto di due numeri reali assegnati si opera attraverso i loro valori approssimati, in modo da poter costruire l'allineamento decimale che rappresenta il numero somma o il numero prodotto.
Incominciamo, però, a dire che cosa sono i **valori approssimati** di un numero reale. Lo facciamo con riferimento ad un numero particolare, il numero irrazionale $\alpha = 1{,}414\ 213\ 6\ldots$, ma il discorso vale in generale.
I numeri razionali:

$$1\quad 1{,}4\quad 1{,}41\quad 1{,}414\quad 1{,}4142\ \ldots$$

ottenuti dall'allineamento che dà α, arrestati all'unità o al 1° decimale o al 2°, eccetera, si dicono *valori approssimati per difetto* di α a meno di:

$$1\quad 10^{-1}\quad 10^{-2}\quad 10^{-3}\quad 10^{-4}\quad \ldots;$$

invece i numeri razionali:

$$2\quad 1{,}5\quad 1{,}42\quad 1{,}415\quad 1{,}4143\ \ldots$$

ottenuti dai precedenti, aumentando di una unità l'ultima cifra a destra, si dicono *valori approssimati per eccesso* di α a meno di:

$$1\quad 10^{-1}\quad 10^{-2}\quad 10^{-3}\quad 10^{-4}\quad \ldots.$$

Sei invitato a scrivere i valori approssimati per difetto e per eccesso, a meno di $1,\ 10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3}$, dei seguenti numeri reali:

a) $\dfrac{3}{7}$ ; b) numero il cui quadrato è $\dfrac{3}{2}$ ; c) $0{,}10\ 1100\ 111000\ \ldots$ .

Occupiamoci adesso delle operazioni con i numeri reali. Un esempio sarà sufficiente a far capire le tecniche di calcolo nel caso in cui almeno uno dei due numeri è irrazionale, poiché, ovviamente, se entrambi i numeri sono razionali le tecniche sono quelle note.
Consideriamo i numeri reali α e β, rappresentati rispettivamente dai seguenti allineamenti decimali:

$$\alpha = 2{,}236\ 068\ \ldots \quad \text{e} \quad \beta = 1{,}732\ 050\ \ldots.$$

Consideriamo i valori approssimati per difetto e per eccesso dei due numeri:

$$\alpha = \begin{cases} 2\quad 2{,}2\quad 2{,}23\quad 2{,}236\quad 2{,}2360\quad 2{,}23606\quad 2{,}236068\ \ldots \\ 3\quad 2{,}3\quad 2{,}24\quad 2{,}237\quad 2{,}2361\quad 2{,}23607\quad 2{,}236069\ \ldots \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & 1{,}7 & 1{,}73 & 1{,}732 & 1{,}7320 & 1{,}73205 & 1{,}732050 & \dots \\ 2 & 1{,}8 & 1{,}74 & 1{,}733 & 1{,}7321 & 1{,}73206 & 1{,}732051 & \dots \end{cases}$$

Per la somma α+β, i suoi valori approssimati per difetto e per eccesso si costruiscono sommando i corrispondenti valori approssimati di α e di β:

$$\alpha + \beta = \begin{cases} 3 & 3{,}9 & 3{,}96 & 3{,}968 & 3{,}9680 & 3{,}96811 & 3{,}968118 & \dots \\ 5 & 4{,}1 & 3{,}98 & 3{,}970 & 3{,}9682 & 3{,}96813 & 3{,}968120 & \dots \end{cases}$$

allora, siccome $3{,}968118<\alpha+\beta<3{,}968120$, l'allineamento decimale che approssima α+β, perlomeno fino alla 5ª cifra decimale, è 3,96811. Pertanto:

$$\alpha+\beta = 3\,,968\,11\,\dots\,.$$

In modo analogo si opera riguardo al prodotto:

$$\alpha\,\beta = \begin{cases} 2 & 3{,}7 & 3{,}85 & 3{,}872 & 3{,}8727 & 3{,}87296 & 3{,}872981 & \dots \\ 6 & 4{,}1 & 3{,}89 & 3{,}876 & 3{,}8731 & 3{,}87300 & 3{,}872985 & \dots \end{cases}$$

Perciò:

$$\alpha\,\beta = 3\,,872\,98\,\dots\,.$$

Per la sottrazione e la divisione, pur con qualche complicazione in più, le cose non vanno molto diversamente.

Quanto esposto **è utile per avere consapevolezza di come si opera con i numeri irrazionali**, ma nella pratica si determina direttamente con l'uso di una calcolatrice l'allineamento decimale con cui si identifica il risultato dell'operazione, perlomeno fino al numero di cifre decimali che la calcolatrice consente.

Per esempio, con riferimento ai numeri α e β, considerati sopra, e con approssimazione fino alla quarta cifra decimale, si trova:

$$\alpha+\beta \approx 3{,}9681\,,\quad \alpha\,\beta \approx 3{,}8730\,,\quad \alpha-\beta \approx 0{,}5040\,,\quad \alpha:\beta \approx 1{,}2910\,.$$

Il segno "≈" si legge, come già detto, « all'incirca uguale ».

Sugli errori di approssimazione che in questo modo si commettono, e che bisogna saper valutare attentamente, ritorneremo nella prossima unità.

Ti proponiamo adesso un esercizio. Calcola i valori approssimati per difetto e per eccesso a meno di $10^{-4}$ dei numeri A+B, A–B, AB, A:B, sapendo che:

1) $A = 4,\overline{3};\ B = 2,\overline{31}.$ 2) $A = 3,\overline{42};\ B = \sqrt{2}.$

3) $A = 5\,,20\,200\,2000\,20000\,\dots\,;\ B = 3\,,02\,022\,0222\,02222\,\dots\,.$

**3.3.3** Le operazioni con i numeri reali godono delle identiche proprietà di cui godono le analoghe operazioni con i numeri razionali. Per questo non riteniamo necessario ripeterle.

In ℝ si definisce anche l'operazione di elevamento a potenza con esponente in ℤ esattamente come in ℚ e con le medesime proprietà formali. Precisamente:

$\mathbf{a^0 = 1}\,,\ \ \forall a\in\mathbb{R}_0\,;$

$\mathbf{a^1 = a}\,,\ \ \forall a\in\mathbb{R};$

$\mathbf{a^n} = \underbrace{\mathbf{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}}_{\text{n fattori}},\ \forall a\in\mathbb{R}$ con n intero maggiore di 1;

$\mathbf{a^{-n}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^n}},\ \forall a\in\mathbb{R}_0$ con n intero positivo.

Inoltre, $\forall a,b\in\mathbb{R}_0$ e $\forall m,n\in\mathbb{Z}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\quad a^m : a^n = a^{m-n},\quad (a^m)^n = a^{m\cdot n},\quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n,\quad (a:b)^n = a^n : b^n$$

## 3.4 POTENZE DI NUMERI POSITIVI CON ESPONENTE RAZIONALE

**3.4.1** Abbiamo già detto che, dato il numero reale positivo a:
- col simbolo $\sqrt{a}$ (*radice quadrata di* a) si indica il numero reale positivo b tale che $b^2=a$;
- col simbolo $\sqrt[3]{a}$ (*radice cubica di* a) si indica il numero reale positivo b tale che $b^3=a$.

I numeri $\sqrt{a}$ e $\sqrt[3]{a}$ si indicano anche con le scritture seguenti:

$$a^{\frac{1}{2}},\quad a^{\frac{1}{3}}.$$

In generale, dato un numero reale positivo **a**, con la scrittura:

$$\mathbf{a}^{\frac{1}{n}}$$

si indica il numero reale positivo **b** tale che $\mathbf{b^n=a}$.
Per esempio, con l'uso di una calcolatrice, si trova:

$$5^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}23607;\quad 7^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}91293;\quad 25^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}90365;\quad \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}91932.$$

Più in generale, col simbolo

$$\mathbf{a}^{\frac{m}{n}}$$

dove a è un numero reale positivo ed $\frac{m}{n}$ rappresenta un numero razionale, si indica il numero reale positivo:

$$\left(\mathbf{a}^{\frac{1}{n}}\right)^{\mathbf{m}}.$$

Per esempio, sempre con l'uso di una calcolatrice, si ottiene:

$$37^{\frac{2}{3}} \approx 11{,}1037;\quad \left(\frac{9}{13}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0{,}57603;\quad \left(\frac{7}{12}\right)^{-\frac{4}{5}} \approx 1{,}5391.$$

Naturalmente l'immissione dei dati in una calcolatrice, ai fini del calcolo di una delle potenze considerate sopra, richiede un po' di attenzione nell'uso delle parentesi. Per esempio:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{4}} = (5/7)\text{^}(1/4);\qquad \left(\frac{7}{12}\right)^{-\frac{4}{5}} = (7/12)\text{^}(-4/5).$$

**3.4.2** La scrittura

$$\mathbf{a}^{\frac{m}{n}}$$

si chiama ***potenza*** avente per base il numero reale positivo a ed esponente il numero razionale $\frac{m}{n}$.

Valgono per tali scritture tutte le proprietà delle potenze con esponente intero. Vale a dire:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},\quad a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},\quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\frac{p}{q}},\quad a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}},\quad a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a:b)^{\frac{m}{n}}.$$

Inoltre:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Ti proponiamo, per esercizio, di calcolare il più rapidamente possibile e senza l'uso di strumenti di calcolo automatico, i valori delle seguenti espressioni:

a) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$ b) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$ c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$ d) $18^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ e) $\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$ f) $4^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$.

### 3.5 LA RETTA REALE

**3.5.1** Abbiamo visto in precedenza come i numeri razionali si possano rappresentare sulla retta dei numeri. Da qui in avanti denomineremo ***retta cartesiana*** una retta siffatta. Precisamente, riepilogando quanto detto al riguardo:

Una retta cartesiana è una retta su cui sono fissati due punti distinti – **O**, detto *origine*, al quale si associa il numero **0**, ed **U**, detto *punto unità*, al quale si associa il numero **1** – ed un *verso positivo*, quello che va da O ad U.

Una retta cartesiana, concepita come sostegno dei numeri razionali, si dice **retta razionale**.

Essa è ***densa***, come l'insieme $\mathbb{Q}$, nel senso che fra due suoi punti qualsiasi è sempre possibile inserirne un terzo; ma ***non è continua***, cioè – detto in parole povere – il passaggio da un suo punto ad un altro punto distinto avviene attraverso interruzioni. Queste interruzioni, o buchi, sono dovuti al fatto che fra due qualsiasi numeri razionali è sempre possibile inserire un numero irrazionale, cioè un numero di specie diversa.  Chiariamo meglio questa affermazione con un esempio.

È evidente, intanto, che la scelta dei due numeri razionali riveste un qualche interesse se essi non sono "lontani" l'uno dall'altro, giacché, nel caso che lo fossero, s'intuisce facilmente che esiste qualche numero irrazionale compreso fra essi. A questo proposito ti invitiamo a fornire qualche esempio di numero irrazionale compreso fra i due numeri razionali seguenti:

a) $0{,}2$ e $0{,}3$ ;  b) $-3{,}5$ e $-3{,}6$.

Noi prendiamo, invece, in considerazione i due seguenti numeri razionali:

$$0{,}1234\bar{5} \text{ e } 0{,}1234\overline{56},$$

vale a dire, scritti per esteso:

$$0\,,1234\;55555\;\ldots \quad \text{e} \quad 0\,,1234\;56\;56\;56\;56\;\ldots\,.$$

Il seguente numero decimale illimitato non periodico:

$$0\,,1234\;56\;10\;100\;1000\;10000\;\ldots\,,$$

la cui legge di formazione non dovrebbe essere tanto complicata da capire, è certamente compreso fra i due numeri dati. In maniera più o meno analoga si procede in altri casi.

Ti proponiamo qualche esercizio.

1) Costruisci, sotto forma di allineamento decimale illimitato non periodico, un numero irrazionale compreso fra i due numeri seguenti:

a) $1$ e $2$ ;  b) $2{,}1$ e $2{,}2$ ;  c) $1,\bar{3}$ e $1,\overline{30}$;

d) $2,\overline{03}$ e $2{,}0\bar{3}$;  e) $1$ e $\sqrt{2}$;  f) $1{,}7\bar{3}$ e $\sqrt{3}$.

2) Inserisci un numero razionale e un numero irrazionale fra i due numeri seguenti:

a) $1{,}2$ e $1,\bar{2}$;  b) $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$;  c) $3{,}2$ e $3,\bar{2}$.

**3.5.2** Riempiendo allora i "buchi" della retta razionale con i numeri irrazionali che competono ad essi, otteniamo una retta che questa volta è il sostegno dei numeri reali: su di essa vi sono punti di ascisse razionali (*punti razionali*) e punti di ascisse irrazionali (*punti irrazionali*). Questa retta si chiama **retta reale** (o **asse reale**) e s'intuisce che non presenta più interruzioni. Infatti, fra due punti aventi per ascisse numeri reali, non si può inserire altro che un punto la cui ascissa è o un numero intero o un allineamento decimale finito o un allineamento decimale illimitato (periodico o non periodico), ossia ancora e soltanto un numero reale e non invece un "qualcosa" di specie diversa.

Terminiamo proponendoti un paio di esercizi, il secondo dei quali ispirato ad uno assegnato in una prova Invalsi 2015/16:

1) Disegnare una retta cartesiana e riportare quindi su di essa i punti aventi le seguenti ascisse:
$$\frac{2}{3};\ -2,\bar{4};\ \sqrt{2}+1;\ \sqrt{2}-1;\ 1-\sqrt{2},\ \frac{14}{3},\ -7,5.$$

2) Dei numeri reali a, b, c non si conosce il valore. Si sa però che la loro posizione sulla retta cartesiana è quella riportata nella figura sottostante (Fig. 2), dove O rappresenta l'origine:

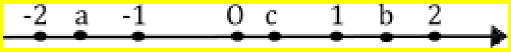


FIG. 2

Indica, per ciascuna delle seguenti proposizioni quale dei seguenti attributi la caratterizza: vera (V), falsa (F), incerta (I):

| Proposizione | $-a>c$ | $\frac{1}{c}<b$ | $a+b+c=0$ | $a+c>b$ | $a+b<0$ | $abc>0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Attributo | | | | | | |

**3.5.3** Riepiloghiamo alcuni concetti, accomunando i numeri razionali e i numeri reali nelle considerazioni che andiamo a fare.

- Gli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono entrambi ***chiusi*** rispetto sia all'addizione (+) sia alla moltiplicazione (·).
- Queste due operazioni sono entrambe ***commutative*** e ***associative***.
- Rispetto ad ognuna di esse esiste, sia in $\mathbb{Q}$ che in $\mathbb{R}$, l'***elemento neutro***: è **0** rispetto a "+" ed è **1** rispetto a "·".
- Ogni elemento sia di $\mathbb{Q}$ che di $\mathbb{R}$ è ***simmetrizzabile*** rispetto a "+": il simmetrico di α rispetto a "+" è −α. Ogni elemento sia di $\mathbb{Q}_0$ che di $\mathbb{R}_0$ è ***simmetrizzabile*** rispetto a "·": il simmetrico di α rispetto a "·" è $\frac{1}{\alpha}$.
- Sia in $\mathbb{Q}$ che in $\mathbb{R}$, l'operazione "·" è ***distributiva*** rispetto a "+".

Tutte queste proprietà si riassumono dicendo che ognuno degli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$, considerato assieme alle due operazioni "+" e "·", è un **campo**. Si parla, più precisamente, di ***campo razionale*** e ***campo reale***.

Ma tra l'insieme $\mathbb{Q}$ e l'insieme $\mathbb{R}$ esistono delle differenze notevoli, che al momento non possiamo evidenziare, a parte quella, cui abbiamo accennato, che l'insieme $\mathbb{Q}$ presenta dei buchi, mentre l'insieme $\mathbb{R}$ non li presenta.
Ricordiamo però quell'altra differenza fra i due insiemi che implicitamente è emersa dalle pagine precedenti, importante sul piano pratico: nell'insieme dei razionali possiamo operare per valori esatti con le quattro operazioni razionali; nell'insieme dei reali (perciò irrazionali inclusi) non possiamo farlo e dobbiamo accontentarci di operare per valori approssimati. Fatte salve però alcune situazioni come le seguenti: se A è un qualsiasi numero reale, nel secondo caso non nullo, risulta immediatamente:
$$3A+2A=5A,\qquad \frac{2A}{3A}=\frac{2}{3}.$$

### 3.6 RADICALI QUADRATICI IN $\mathbb{R}^+$

**3.6.1** Ripetiamo che, per ogni numero reale non negativo a, la scrittura $\sqrt{a}$, cioè la radice quadrata di a, indica quel numero b non negativo tale che $b^2=a$. In simboli:

[1] $$\mathbf{b=\sqrt{a}\ \text{se e solo se}\ b^2=a\,.}$$

In generale, dati il numero $a\in\mathbb{R}^+$ ed il numero naturale $n\geq 2$, il numero $b\in\mathbb{R}^+$ tale che $b^n=a$ si rappresenta come potenza di a ed esponente 1/n, cioè $a^{1/n}$. Questo numero si indica anche con la scrittura:

$$\sqrt[n]{a}$$

e si chiama ***radice n-esina*** di a.

Nella scrittura $\sqrt[n]{a}$ il numero reale non negativo a si chiama *radicando* ed il numero naturale n si denomina *indice di radice*.

Quando n=2, l'indice di radice si sottintende. Vale a dire che si preferisce scrivere $\sqrt{a}$ invece di $\sqrt[2]{a}$.

Si ha evidentemente:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\quad \sqrt[n]{a^n}=a.$$

Esempi:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2=5,\ \left(\sqrt[3]{6}\right)^3=6,\ \sqrt{5^2}=5,\ \sqrt[3]{4^3}=4.$$

Sono interessanti le espressioni del tipo:

$$\mathbf{b\,\sqrt[n]{a},}$$

dove $b\in\mathbb{Q}$, $a\in\mathbb{R}^+$ ed n è un numero naturale maggiore di 1. Si chiamano **radicali**. Il numero b è detto *coefficiente* del radicale.

In particolare le espressioni del tipo $\mathbf{b\sqrt{a}}$ si chiamano **RADICALI QUADRATICI**.

È appunto sui radicali quadratici che vogliamo soffermarci per qualche approfondimento.

**3.6.2** Incominciamo con due importanti osservazioni.

**OSSERVAZIONI.**

- Quando scriviamo $\sqrt{A}$ senza specificare il segno di A, conveniamo una volta per tutte che sia $A\geq 0$.
  Questo perché, nel più ampio degli insiemi numerici fin qui introdotti (cioè a dire l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali), non hanno senso scritture come $\sqrt{-1}$ e simili. Essa, infatti, dovrebbe rappresentare quel numero x tale che $x^2=-1$ . E, come ben si sa, un tale numero non esiste in $\mathbb{R}$, in quanto $x^2\geq 0$ per ogni x reale.
  Pertanto, quando si scrive per esempio $\sqrt{a-1}$, senza alcuna specificazione circa il segno di a, è sottinteso che sia $a-1\geq 0$, cioè $a\geq 1$.
- Ricorda che abbiamo definito $\sqrt{A}$ quel numero B NON NEGATIVO tale che $B^2=A$. Ora, mentre è corretto scrivere, per esempio: $\sqrt{a^2}=a$, se si sa che $a\geq 0$, è invece un **GRAVE ERRORE** scrivere $\sqrt{a^2}=a$ se non si sa nulla sul segno di a.
  Infatti, se per esempio a=2, tutto va bene perché effettivamente $\sqrt{2^2}=2$. Se invece $a=-2$ (e tuttavia è certamente $a^2>0$) risulterebbe $\sqrt{(-2)^2}=-2$. Il che è in evidente contraddizione con la definizione data sopra, in base alla quale la radice quadrata è un numero non negativo.
  Nei casi in cui non si sa nulla sul segno di a, **si deve scrivere correttamente**:

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Prova a semplificare:

$$\sqrt{0{,}04};\quad \sqrt{x^2}\text{ con } x\in\mathbb{R};\quad \sqrt{(a^2+1)^2}\text{ con } a\in\mathbb{R};\quad \sqrt{(a+)^2}\text{ con } a\in\mathbb{R}.$$

**3.6.3** Vi sono delle regole che permettono di operare con i radicali quadratici e di trasformarli in altri, di volta in volta più convenienti. Tali regole sono basate sostanzialmente sulle proprietà delle potenze e, per la verità, valgono anche quando il radicando è un numero reale e non necessariamente un razionale. Vediamo queste regole.

♦ Se a, b sono numeri reali non negativi (nel secondo caso anche b>0):

[2] $$\sqrt{\mathbf{a}}\cdot\sqrt{\mathbf{b}}=\sqrt{\mathbf{ab}},\quad \frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}}=\sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}.$$

Detto a parole:
- il prodotto delle radici quadrate di due numeri reali non negativi è uguale alla radice quadrata del prodotto dei due numeri;
- il quoziente delle radici quadrate di due numeri (il primo non negativo, il secondo positivo) è uguale alla radice quadrata del quoziente dei due numeri.

In effetti:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}=(ab)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}\,;\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\,.$$

Per esempio:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}\,;\quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}}\,.$$

♦ Le due uguaglianze [2], in virtù della proprietà simmetrica dell'uguaglianza, si possono leggere da destra a sinistra, cioè a membri invertiti. Di questo fatto vedremo fra breve un'importante applicazione. Intanto, a titolo di esempio, osserviamo che si può scrivere:

$$\sqrt{12}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,;\quad \sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

♦ Se a, b sono numeri reali non negativi ed n è un naturale non nullo, si ha:

$$\mathbf{a^n}\cdot\sqrt{\mathbf{b}}=\sqrt{\mathbf{a^{2n}b}}\,.$$

Infatti:

$$a^n\cdot\sqrt{b}=\sqrt{(a^n)^2}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^{2n}}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^{2n}b}\,.$$

L'operazione è denominata ***trasporto di un fattore sotto il segno di radice***.

Per esempio:

$$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}\,;\quad 4\sqrt{5}=\sqrt{4^2\cdot 5}=\sqrt{80}\,.$$

♦ Osserviamo adesso che, considerata la potenza $a^p$, con $a\in\mathbb{R}^+$ e $p\in\mathbb{N}_0$, si possono presentare due situazioni: o il numero p è pari o è dispari. In ogni caso esiste un naturale n tale che:

se p è pari allora p=2n, se p è dispari allora p=2n+1.

Ebbene, se p=2n, risulta:

$$\sqrt{\mathbf{a^p}}=\sqrt{\mathbf{a^{2n}}}=\mathbf{a^n}\,;$$

in questo caso il radicale si dice ***apparente***.
Se invece p=2n+1 risulta:

$$\sqrt{\mathbf{a^p}} = \sqrt{\mathbf{a^{2n+1}}} = \mathbf{a^n} \cdot \sqrt{\mathbf{a}}\,.$$

Lasciamo a te la dimostrazione delle due regole.
Nell'ultimo caso l'operazione è spesso chiamata ***trasporto di un fattore fuori del segno di radice***.
Per esempio:

$$\sqrt{3^6}=3^3\,;\quad \sqrt{5^8}=5^4\,;\quad \sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}\,;$$
$$\sqrt{96}=\sqrt{2^5\cdot 3}=2^2\cdot\sqrt{2\cdot 3}=4\sqrt{6}\,;\quad \sqrt{(a-1)^3}=(a-1)\sqrt{a-1}\,.$$

Nell'ultimo esempio, a differenza di un altro visto in precedenza, non è necessario mettere l'espressione $a-1$ sotto il segno di valore assoluto poiché soltanto se essa è non negativa il radicale al secondo membro ha senso.

Alcuni esercizi per consolidare i concetti fin qui appresi sui radicali.

1. Esegui le seguenti operazioni:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\,;\quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\quad \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\,;\quad \sqrt{\frac{2}{5}}:\sqrt{\frac{4}{5}}\,;\quad \sqrt{5}:\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\,.$$

2. Trasporta sotto il segno di radice:

$$2\sqrt{2}\,;\quad -2\sqrt{3}\,;\quad 3\sqrt{2}\,;\quad -3\sqrt{3}\,.$$

3. Trasporta fuori del segno di radice:

$$\sqrt{20}\,;\quad \sqrt{45}\,;\quad \sqrt{\frac{3}{4}}\,;\quad \sqrt{\frac{2}{9}}\,.$$

**3.6.4** Nel radicale $a\sqrt{b}$, dove $a\in\mathbb{Q}$ e $b\in\mathbb{R}^+$, il numero a è, come detto, il coefficiente del radicale. Quando esso è 0 il radicale stesso è evidentemente 0. Quando ha valore assoluto 1 si sottintende. Cosicché si scrive per esempio $\sqrt{3}$ invece di $1\cdot\sqrt{3}$ e $-\sqrt{5}$ invece di $-1\cdot\sqrt{5}$.
Due o più radicali quadratici che differiscano al più per il coefficiente si dicono ***simili***.
Sono tali, per esempio, i seguenti radicali: $-4\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ .
Mentre non sono simili, per esempio: $2\sqrt{3}$ e $3\sqrt{2}$. Pure i radicali $\sqrt{18}$ e $\sqrt{2}$ sono simili, anche se non lo sembrano a prima vista. Risulta infatti: $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.
Quando, in un'espressione numerica, figura la somma di radicali quadratici, alla somma di eventuali radicali simili può essere sostituita la loro somma effettuata tenendo presente la proprietà distributiva di "·" rispetto a "+". Per esempio:

$$3\sqrt{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{5}+\left(-\sqrt{3}\right)=\left(3+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{2}-1\right)\sqrt{3}+\sqrt{5}=\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}+\sqrt{5}\,;$$
$$\left(\sqrt{2}+3\right)\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-\sqrt{6}+6-3\sqrt{3}+3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2=4+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}\,.$$

Ti proponiamo, per esercizio, di semplificare le seguenti espressioni numeriche:

$$\sqrt{12}+\sqrt{27}\,;\quad \sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{12}\,;\quad \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right);\quad \left(2+\sqrt{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{50}\right).$$

**3.6.5** Quando si calcola il valore di un'espressione numerica, è possibile imbattersi in frazioni aventi un radicale al numeratore o al denominatore. Spesso è conveniente trasformare tali frazioni, se possibile,

in altre equivalenti aventi per denominatore un numero razionale. A volte (ma più raramente e soprattutto in questioni di Analisi matematica) è conveniente trasformarle in modo che il numeratore sia un numero razionale.
Lo scopo, in ogni caso, si raggiunge ricorrendo alla proprietà invariantiva delle frazioni, cioè moltiplicando i termini della frazione per una stessa espressione non nulla, opportunamente scelta.
Tale espressione si chiama ***fattore razionalizzante*** e varia ovviamente a seconda dei casi.
Esaminiamo i due casi con cui si ha a che fare più di frequente, nell'ipotesi in cui si voglia rendere razionale il denominatore, ma le cose vanno più o meno alla stessa maniera se si deve rendere razionale il numeratore.

- Sia la frazione:

$$\frac{k}{\sqrt{a}}.$$

Il fattore razionalizzante è evidentemente $\sqrt{a}$. Infatti:

$$\frac{k}{\sqrt{a}}=\frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}}=\frac{k\sqrt{a}}{a}.$$

Per esempio:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ ;\qquad \sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{15}}{3}\ .$$

- Siano le frazioni:

$$\frac{k}{a+\sqrt{b}},\ \frac{k}{a-\sqrt{b}},\ \frac{k}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\ \frac{k}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

I fattori razionalizzanti sono nell'ordine: $a-\sqrt{b},\ a+\sqrt{b},\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
In effetti, con riferimento al denominatore della prima frazione, si ha:

$$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-a\sqrt{b}+a\sqrt{b}-\left(\sqrt{b}\right)^2=a^2-b\ .$$

Analogamente per gli altri denominatori, come tu stesso puoi verificare.
Esempi:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\ ;\qquad \frac{2}{2+\sqrt{2}}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}\ ;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\ ;\qquad \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1}=5-2\sqrt{6}\ .$$

Ti proponiamo, per esercizio, di razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{3}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{2}{\sqrt{12}}\ ;\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ ;\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}\ ;\ \frac{4}{\sqrt{5}-1}\ ;\ \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\ .$$

**3.6.6** NOTA BENE. A volte si ha a che fare con radicali dei tipi seguenti, detti ***radicali quadratici doppi***:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\,,\quad \sqrt{a-\sqrt{b}}\,,$$

dove $a$, $b$ sono numeri interi positivi.
Può far comodo trasformali, se è possibile, in somma o differenza di radicali quadratici semplici.
Ebbene, ciò è effettivamente possibile se esiste un intero positivo $k$ tale che $a^2-b=k^2$, ossia se $a^2-b$ è un *quadrato perfetto*. In tal caso si ha precisamente:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+k}{2}}+\sqrt{\frac{a-k}{2}}\,,\quad \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+k}{2}}-\sqrt{\frac{a-k}{2}}\,.$$

Più avanti, nel prosieguo degli studi [3], avremo modo di dimostrare queste due formule. Per il momento, se te la senti di farlo [4], puoi verificarle elevando al quadrato entrambi i membri di ciascuna delle due uguaglianze e facendo vedere che si ottengono in ciascun caso due espressioni uguali.

Per esempio, considerato il radicale quadratico doppio $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ e constatato che $3^2-5=2^2$, risulta:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3+2}{2}}+\sqrt{\frac{3-2}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

ESERCIZIO. Stabilisci quali dei seguenti radicali quadratici doppi si possono trasformare in somma o differenza di radicali quadratici semplici e di questi opera la trasformazione:

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}\,,\quad \sqrt{2+\sqrt{3}}\,,\quad \sqrt{3-\sqrt{2}}\,,\quad \sqrt{5+\sqrt{21}}\,,\quad \sqrt{6-\sqrt{5}}\,.$$

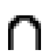
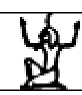
## 3.7 EVOLUZIONE STORICA DEI SISTEMI DI NOTAZIONE DEI NUMERI

**3.7.1** Sulla "data di nascita" dell'aritmetica – ossia del concetto di numero, di una rappresentazione grafica e simbolica dei numeri e delle regole e procedimenti per operare con essi – non si hanno notizie precise e sono possibili soltanto congetture. Quello che possiamo affermare con certezza, perché documentato da reperti archeologici [5], è che le civiltà egizia e babilonese del periodo intorno al 2000 a.C. applicavano una forma di aritmetica abbastanza evoluta.

Gli Egizi si servivano di un sistema di numerazione decimale additivo e avevano un segno, in carattere cosiddetto geroglifico, per ognuna delle 7 potenze di 10, da 1 a $10^6$ (Tab. 6): il numero 1 era rappresentato da un trattino verticale, 10 da una U rovesciata, 100 da una specie di spirale, 1.000 da un fiore di loto, 10.000 da un dito, 100.000 da un girino, 1.000.000 da un uomo adorante.

Con la ripetizione di questi simboli, scritti uno dopo l'altro su una stessa riga, ma anche su righe diverse, scrivevano i vari numeri e operavano con essi.

TAB. 1 – Numeri egizi

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| $10^0=1$ | $10^1=10$ | $10^2=100$ | $10^3=1.000$ | $10^4=10.000$ | $10^5=100.000$ | $10^6=1.000.000$ |

[3] Cfr.: Unità 24: Equazioni, sistemi e problemi di 2° grado, n. 24.4.4.

[4] Consigliamo comunque di rimandare questa verifica e riprenderla dopo aver studiato l'unità 5: Polinomi e operazioni con essi.

[5] Questi reperti sono soprattutto:
- le **iscrizioni** su tombe e monumenti egizi risalenti al 3000 a.C.;
- il **Papiro di Rhind**, che risale circa al 1650 a.C., e il **Papiro di Mosca**, che risale circa al 1890 a.C.. Entrambi contengono dei problemi (87 il primo, 25 il secondo), che testimoniano delle conoscenze degli Egizi in campo matematico;
- circa **300 tavolette** di argilla (alcune risalenti al periodo 1800-1600 a.C., altre al IV sec. a.C.), a contenuto matematico, a testimonianza delle conoscenze della civiltà babilonese in questo campo.

Le operazioni di addizione e sottrazione, con questo sistema, non presentavano difficoltà: si trattava di aggiungere o togliere un conveniente numero di simboli ad un altro numero scritto in precedenza.
La moltiplicazione era ricondotta all'addizione con un procedimento di successive duplicazioni, abbastanza ingegnoso, che descriviamo con un esempio, dove per comodità ci serviamo del nostro sistema di numerazione.
Volendo, allora, moltiplicare 27 per 13, scriviamo su una colonna i numeri che si ottengono raddoppiando via via i numeri a partire da 1 e su una colonna corrispondente i numeri che si ottengono raddoppiando via via 27.

| | |
|---|---|
| *1 | 27 |
| 2 | 54 |
| *4 | 108 |
| *8 | 216 |

I numeri della prima colonna contrassegnati con un asterisco danno per somma 13; i loro corrispondenti della seconda colonna danno per somma $27 \cdot 13$. In effetti è come se si operasse così:

$$27 \cdot 13 = 27 \cdot (1+4+8) = 27 \cdot 1+27 \cdot 4+27 \cdot 8 = 27+108+216 = 351.$$

Il procedimento per eseguire la divisione fra due numeri è sostanzialmente analogo al precedente. Così, per esempio, per dividere 114 per 6 si scrive la colonna di sinistra come prima e quella di destra raddoppiando successivamente 6:

| | |
|---|---|
| 1 | *6 |
| 2 | *12 |
| 4 | 24 |
| 8 | 48 |
| 16 | *96 |

I numeri della seconda colonna contrassegnati con un asterisco danno per somma 114; i loro corrispondenti della prima colonna danno per somma 114:6. In effetti è come se si operasse così:

$$114:6 = (6+12+96):6 = 6:6+12:6+96:6 = 1+2+16 = 19.$$

Naturalmente questo procedimento, con la moltiplicazione funziona sempre, ma con la divisione funziona solo se il dividendo è multiplo del divisore.

**3.7.2** Più evoluta di quella degli Egizi era l'aritmetica dei Babilonesi. Questi si servivano di un **sistema di numerazione posizionale sessagesimale**, cioè a base 60, che utilizzava due soli *simboli cuneiformi*:

 e 

rispettivamente per 1 e per 10.
Per scrivere i numeri da 1 a 59 il sistema era additivo, come presso gli Egizi. Così, per esempio, il numero 43 poteva assumere questa forma:

I numeri più grandi di 59, però, venivano scritti non più secondo un sistema additivo, ma in base ad un sistema posizionale, più o meno come facciamo noi, cioè attribuendo ai simboli usati valori diversi secondo la posizione che occupano nella scrittura che rappresenta il numero. Così, per esempio, il numero rappresentato dalla scrittura:

dove risultano chiaramente spaziati l'uno rispetto all'altro i tre gruppi di simboli che vi intervengono, è (si ricorda che la numerazione è in base 60):

$$1 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 11$$

cioè: 3600+120+11=3731.

Per la verità all'inizio, siccome non era usato alcun simbolo per lo «zero», ma solo uno spazio vuoto, la numerazione babilonese poteva ingenerare qualche equivoco. Le cose migliorarono a partire dal IV sec. a.C. con l'introduzione di un tale simbolo. Ma l'ambiguità non scomparve del tutto giacché questo simbolo per lo «zero» veniva usato solo per riempire una posizione vuota intermedia, ma mai alla fine della scrittura che rappresentava il numero. Insomma non era ancora l'uso dello «zero» quale facciamo oggi.

**3.7.3** I Greci, riguardo ai sistemi di numerazione, non segnarono progressi rispetto agli Egizi e addirittura fecero registrare un regresso rispetto ai Babilonesi.

Il sistema di numerazione solitamente usato in Grecia, almeno a partire dal III sec. d. C., ma il cui uso potrebbe risalire a tempi più remoti, era il cosiddetto **sistema ionico** o **alfabetico**. È un sistema additivo che utilizza 27 simboli per indicare i numeri 1, 2, ... , 9, 10, 20, ... , 90, 100, 200, ... , 900. Questi simboli sono le 24 lettere dell'alfabeto greco dell'età classica e 3 lettere di un alfabeto più antico. Questo sistema restò in uso oltre 1500 anni.

Oltre al sistema ionico, veniva usato, ma solo per le epigrafi e verosimilmente per il periodo compreso fra il 454 e il 95 a.C., un sistema di numerazione additivo, detto **attico** o **erodiano**, dal nome dello storiografo Erodiano (II-III sec d.C.), al quale è attribuito un frammento dove il sistema è descritto.

Si tratta di un sistema in cui i numeri 1, 5, 10, 100, 1000, 10000 venivano indicati con simboli che, fatta eccezione per il primo, costituivano le lettere iniziali delle parole corrispondenti.

Questo sistema non differisce nella sostanza dal **sistema di numerazione romana** che, come forse sai già, ha i seguenti simboli:

I V X L C D M

rispettivamente per i numeri:

1 5 10 50 100 500 1000.

Gli altri numeri sono scritti seguendo alcune regole:

- *Un numero scritto alla destra di un altro di valore non minore va sommato ad esso*.
  Per esempio: II indica 1+1, cioè 2; LXX indica 50+10+10, cioè 70.
- *Un numero scritto alla sinistra di un altro di valore maggiore va sottratto da esso*.
  Per esempio: IV indica 5–1, cioè 4; XC indica 100–10, cioè 90.
- *Non si possono scrivere più di tre segni uguali consecutivi per rappresentare i numeri*.
  Per esempio: 4 si scrive IV e non IIII; 900 si scrive CM e non DCCCC.
- *Un numerale soprassegnato rappresenta il numero individuato dal numerale, moltiplicato per 1000*.
  Per esempio: $\overline{\mathrm{V}}$ rappresenta 5.000, $\overline{\mathrm{X}}$ rappresenta 10.000, $\overline{\mathrm{L}}$ rappresenta 50.000.

Per quanto riguarda la possibilità di operare in questi sistemi di numerazione (greci o romani) con le quattro operazioni aritmetiche, l'addizione e la sottrazione, quantunque non semplicissime, non presentavano eccessive difficoltà. Meno agevole risultava, invece, operare con la moltiplicazione e la divisione. Per questo, al fine di facilitare il calcolo, fu utilizzato, sia presso i Greci sia presso i Romani, un apposito strumento, chiamato ***abaco***, già in uso presso i Cinesi fin dal 2000 a.C., e si formarono veri e propri professionisti nella gestione di tale strumento, i cosiddetti *abacisti*.

**3.7.4** I sistemi di numerazione ionico (presso i Greci) e romano restarono in uso finché non furono soppiantati dal sistema di numerazione decimale posizionale che ancor oggi utilizziamo. E possiamo anticipare che questo avvenne in via definitiva solo nel XVI secolo.

Questo sistema di numerazione era in uso presso gli Indiani. Ne fanno fede, in particolare, due matematici: **Aryabhata** (la cui opera più famosa, scritta nel 499, ha per titolo *Aryabhatiya* che potrebbe tradursi con *Una composizione di Aryabhata*) e **Brahmagupta** (attivo intorno al 625 e autore di un'opera intitolata *Brahmasphuta Siddhanta*, che potrebbe tradursi con *Il sistema migliorato di Brahma*). Ma, addirittura anteriore ad essi, è il più antico testo indiano che si conosca: un trattato di cosmologia di autore ignoto, intitolato *Lokavibhaga* (*Le parti dell'universo*). Risale al 458 e contiene il sistema di numerazione posizionale decimale, incluso lo zero.

Dagli Indiani appresero il sistema gli Arabi nell'VIII sec. d.C., in particolare attraverso quella che viene considerata dai più la prima traduzione in arabo di un testo indiano e precisamente del *Brahmasphuta Siddhanta.*

Un'opera del matematico musulmano **Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi** (IX secolo), pervenutaci in una traduzione latina del XII secolo col titolo ***Algorithmi de numero Indorum*** (6), fece conoscere agli Europei il sistema posizionale decimale indiano, che oggi chiamiamo *indo-arabo* e usiamo in tutto il mondo. Occorre dire che i caratteri indiani per rappresentare le cifre 0,1,2,…,9 sono molto diversi da quelli attuali ma il principio su cui si basa il sistema è lo stesso.

Già nel 1138, in Sicilia, sotto il regno di Ruggero II, detto il normanno, venivano coniate monete con impresse cifre indo-arabe.

Ma la divulgazione di questo sistema di numerazione avvenne principalmente, almeno in Italia, per merito di un matematico pisano – **Leonardo Fibonacci** – vissuto tra la fine del XII secolo e la prima metà del XIII, in particolare attraverso la sua opera più importante, il ***Liber abaci***, completato nel 1202 e contenente, tra le altre cose, un'accurata descrizione sia del sistema di numerazione indo-arabo sia delle regole per eseguire le operazioni aritmetiche. Vi compare inoltre la parola *zephirum*, quale traduzione latina del termine arabo *sifr*, che significa "vuoto". Da essa derivarono, attraverso alterne vicende, due parole che oggigiorno sono di uso comune in tutto il mondo: "zero" e "cifra" nella lingua italiana.

Occorre precisare che l'introduzione del sistema indo-arabo non trovò all'inizio accoglienza favorevole presso il pubblico, poiché l'uso dei nuovi simboli, al posto di quelli della numerazione romana, rendeva difficile la lettura dei libri contabili dei mercanti. Ci volle molto tempo prima che esso venisse accettato da tutti ed alla sua divulgazione, soprattutto in Europa ed in maniera determinante, contribuirono due altre opere, meno significative di quelle di Fibonacci sul piano concettuale, ma a quell'epoca più popolari forse proprio perché più elementari: il ***Carmen de al-***

---

[6] *Intorno al numero degli Indiani di al-Khwarizmi*. Si tratta dell'opera dalla quale derivò poi il termine "algoritmo", che finì per essere usato nell'accezione "programma di calcolo".

***gorismo*** del francese **Alexandre de Villedieu** (1175-1240), frate francescano, e l'***Algorismus vulgaris*** dell'inglese **Giovanni di Halifax** (ca. 1195-1256), noto anche come **Sacrobosco**.
Possiamo dire, comunque, che l'uso del sistema indo-arabo diventò definitivo solo dopo il 1494, anno in cui comparve una delle prime opere di matematica pubblicate a mezzo stampa [7]: la ***Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*** del frate francescano **Luca Pacioli** (1445-1514).

Detto che in origine non esistevano simboli per indicare le varie operazioni con i numeri, ecco alcune curiosità sulla comparsa di tali segni, almeno dei principali.
I segni **+** e **–** compaiono per la prima volta nel 1489 in un'opera del tedesco **Johann Widmann** (ca. 1460-1498).
Il segno **×** compare nel 1631 in un'opera dell'inglese **William Ougthred** (1574-1660).
Nel 1698 il tedesco **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) aggiunse il segno **·** per la moltiplicazione. A lui si deve pure l'introduzione del segno **:** per la divisione.
Il segno **=** di uguaglianza s'incontra per la prima volta nel 1557 in un'opera del matematico gallese **Robert Recorde** (ca. 1510-1558), mentre i segni **<** e **>** per minore e maggiore compaiono nel 1631 in un'opera dell'inglese **Thomas Harriot** (1560-1621), pubblicata postuma.
Riguardo al segno di radice, possiamo dire che in **Viète** [8] per indicare la radice quadrata di un numero si antepone al numero la lettera r, ma già in **Cartesio** [9] compare il simbolo $\sqrt{\ }$. È perciò plausibile la tesi di **Eulero** [10] che questo simbolo altro non sia che una deformazione della lettera r.

**3.7.5** L'idea di numero razionale come rapporto di due numeri naturali è presente presso gli antichi Greci (Pitagorici). La denominazione "razionale" deriva dal termine latino "ratio", di cui uno dei tanti significati (conto, misura, registro, ragione, …) è proprio "rapporto". Che è, a sua volta, la traduzione latina del termine greco λόγος (*logos*). Nondimeno, il modo di incolonnare numeratore e denominatore separandoli con una linea orizzontale e leggendo il numeratore come numero cardinale e il denominatore come numero ordinale, vale a dire la scrittura $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, si deve a Leonardo Fibonacci. Anche la scrittura **a/b**, che pure ai nostri giorni è utilizzata, è presente nell'opera di Fibonacci, ma sembra che fosse stata introdotta già da qualche tempo.
Fu poi lo scienziato fiammingo **Simon Stevin** (1548-1620) a introdurre la notazione decimale per questi numeri. Questa notazione fu anche utilizzata dallo stesso Stevin per rappresentare i numeri reali. La scrittura decimale dei numeri fu perfezionata qualche anno dopo dal matematico scozzese **John Napier** (1550-1617).

Un paio di precisazioni.

---

[7] Nell'anno 1446 è aperta a Magonza la prima tipografia ad opera di Johann Gutenberg (1400-1468). Dieci anni dopo, nel 1455, compare la prima opera a stampa: una Bibbia. Per la cronaca, la prima opera a stampa di matematica fu un manuale di aritmetica, scritto in dialetto veneziano, di un anonimo, conosciuto col titolo *Arte dell'abaco* o *Aritmetica di Treviso*, pubblicato per l'appunto a Treviso nel 1478.
[8] **Viète**, François, uomo politico francese, matematico per diletto, 1540-1603.
[9] **Descartes**, René (italianizzato **Cartesio**), filosofo e matematico francese, 1596-1650.
[10] **Euler** Leonhard (italianizzato **Eulero**), matematico svizzero, 1707-1783.

La prima riguarda i numeri reali. Questi numeri, ad onor del vero, per lungo tempo furono denominati “numeri continui” poiché riempivano completamente e senza interruzioni la retta dei numeri. La denominazione di “numeri reali” è dovuta al matematico tedesco **Georg Cantor** (1845-1916), che la coniò nel 1883, in contrapposizione ad un’altra categoria di numeri, i cosiddetti numeri immaginari.
La seconda precisazione attiene ai numeri negativi. Questi numeri erano stati introdotti dagli Indiani, che li avevano messi in contrapposizione a quelli positivi per distinguere i debiti dai crediti. Fornirono anche le regole per operare con essi (**Brahmagupta**, VII sec. d. C.).
Nonostante ciò, in Europa una loro piena accettazione si ha solo nel 1707 con la pubblicazione dell’opera *Arithmetica universalis* del fisico e matematico inglese **Isaac Newton** (1642-1727).

## VERIFICHE

**1.** Per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o se è falsa:

- $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ .
- $10^{10} \notin \mathbb{Q}$ .
- $\sqrt{16} \notin \mathbb{Q}$ .
- $3{,}1234\ 1234\ 1234\ 1234 \ldots \in \mathbb{Q}$ .
- $\frac{196}{10^4} = 1{,}96 \cdot 10^{-6}$ .
- Tra due numeri irrazionali distinti è possibile inserire un numero irrazionale.
- Tra due numeri razionali distinti è possibile inserire un numero irrazionale.
- Se il prodotto di due numeri reali è positivo allora entrambi i numeri sono positivi.
- $|a+b| = |a| + |b|$ , essendo a, b numeri reali qualsiasi.
- $|ab| = |a| \cdot |b|$ , essendo a, b numeri reali qualsiasi.
- $\sqrt{(-3^2)} = 3$.
- $\sqrt{(x+y)^2}=x+y$, essendo x, y numeri reali qualsiasi.
- $\sqrt{(a^2+1)^2}=a^2+1$, essendo a un numero reale qualsiasi.
- $\sqrt{x^4}=x^2$, essendo x un numero reale qualsiasi.
- $\sqrt{x^6} = x^3$, essendo x un numero reale qualsiasi.
- $\sqrt{a^2+b^2}=|a|+|b|$, essendo a, b numeri reali qualsiasi.
- $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{2}$.
- $\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$ .
- $\sqrt{4a^3}=2a\sqrt{a}$, essendo a un numero reale qualsiasi.
- $\sqrt{16+9}=4+3$.
- Per ogni x reale risulta: $|-x|=-|x|$.

**2.** Si considerino i seguenti numeri reali:

$$\alpha = 1{,}001001001001\ldots , \qquad \beta = 1{,}101001000100001\ldots .$$

Nel numero α il numero di "0" compresi fra due "1" consecutivi è costante, mentre nel numero β tale numero cresce come la successione dei numeri naturali.
Si esaminino le seguenti alternative:
[A] I due numeri α e β sono entrambi razionali. [B] I due numeri α e β sono entrambi irrazionali.
[C] Il numero α è razionale mentre β è irrazionale. [D] Il numero α è irrazionale mentre β è razionale.
Una sola di esse è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**3.** Senza utilizzare strumenti di calcolo automatico, disporre in ordine crescente i 4 numeri $\sqrt[n]{n}$, essendo n uno dei numeri 2, 3, 4, 5.

**4.** Semplificare le seguenti espressioni contenenti radicali quadratici:

- $2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ 2\sqrt{2}\right]$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{7}{4}\sqrt{3}\right]$
- $\frac{3}{5}\sqrt{5}-2\sqrt{5}-\sqrt{5}+5$.
- $\frac{3}{2}\sqrt{6}-\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- $\frac{3}{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{11}{10}-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right]$
- $\frac{1}{2}\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{7}{2}\sqrt{3}\right]$
- $\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}$.
- $4-2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}+\sqrt{3}$.
- $\sqrt{8}-2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{12}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$
- $\frac{\sqrt{27}}{4}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{18}$. $\left[\mathbf{R.}-\frac{11}{12}\sqrt{3}\right]$
- $\sqrt{32}+\sqrt{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}$.
- $\sqrt{18}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\sqrt{\frac{12}{25}}+\sqrt{\frac{8}{9}}$.
- $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}+1)^2$. $\left[\mathbf{R.}\ 4+2\sqrt{2}\right]$
- $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2$.
- $\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$
- $\frac{3}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ 1+\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

- $\left(\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{1}{12}\right]$
- $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right]$
- $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. $\left[\mathbf{R.}\ -4\sqrt{2}\right]$
- $\frac{2}{\sqrt{2}-2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

**5.** Calcolare i valori delle seguenti espressioni letterali in corrispondenza dei valori delle lettere indicati a fianco:

- $2x^2-x\sqrt{3}+1$ per $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $[\mathbf{R.}\ 1]$
- $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$ per $x=-\sqrt{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ 3\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right]$
- $x^3-\frac{x^2}{2}+x\sqrt{3}-\sqrt{3}$ per $x=\sqrt{3}$. $\left[\mathbf{R.}\ 2\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right]$
- $x^2-x\sqrt{2}+\sqrt{2}$ per $x=\sqrt{2}-1$. $[\mathbf{R.}\ 1]$
- $\frac{2x-1}{x-2}$ per $x=\sqrt{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{3\sqrt{2}+2}{2}\right]$
- $\frac{2x^2-\sqrt{2}}{2x-1}$ per $x=\sqrt{2}-1$. $\left[\mathbf{R.}\ 3\sqrt{2}+2\right]$
- $\frac{3x^3-x\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2x}$ per $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\left[\mathbf{R.}\ -\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\right]$

**6.** Il seguente procedimento è sbagliato almeno in un punto. Trovare tutti gli errori.

- $\sqrt{49-25}=\sqrt{49}-\sqrt{25}=7-2=5$.
- $\sqrt{2}^{\frac{3}{2}}=\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt{\sqrt{2}}$.
- $\sqrt{10}-\sqrt{2}=\sqrt{10-2}=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$.

**7.** Spiegare in modo convincente perché la prima delle seguenti uguaglianze, dove a è un numero reale, è *vera*, mentre la seconda è *falsa*:

$$\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}\,,\quad \sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a}\,.$$

**8.** Posto che A e B siano numeri reali qualsiasi, sussiste la seguente relazione:

$$|A-B|\geq\big||A|-|B|\big|.$$

Verificarla nei casi particolari che si possono avere a seconda del segno di A e B (A>0 e B>0, oppure A>0 e B<0, eccetera). Stabilire, in particolare, quando vale l'uguaglianza.

**9.** Essendo A un qualsiasi numero reale negativo, quali delle seguenti uguaglianze sono vere? Quali sono false?

$$|-A|=|A|;\quad |-A|=-|A|;\quad |-A|=A;\quad |-A|=-A.$$

**10.** Siano a, b, m numeri reali qualsiasi con m<0. Risulta:

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$$

se e solo se:

[A] $a>b$; [B] $a<b$; [C] $a>0$ e $b>0$; [D] $a<0$ e $b<0$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**11.** I due numeri reali a, b sono tali per cui risulta: $a+b>0$ e $ab<0$.

Stabilire quali, tra le seguenti relazioni sono certamente *vere*, quali certamente *false* e quali invece sono *possibili* e, in quest'ultimo caso, precisare quale condizione deve verificarsi affinché la relazione risulti vera:

[A] $a>0$ e $b<0$; [B] $a<b$ e $a>0$; [C] $|a|>|b|$ e $a>0$; [D] $|a|>|b|$ e $b>0$.

**12.** I due numeri reali a, b sono tali per cui risulta: $a-b>0$ e $ab>0$.

Stabilire quali, tra le seguenti relazioni sono certamente *vere*, quali certamente *false* e quali invece sono *possibili* e, in quest'ultimo caso, precisare quale condizione deve verificarsi affinché la relazione risulti vera:

[A] $a>b$ e $b>0$; [B] $a<b$ e $a<0$; [C] $a<0$ e $b>0$; [D] $|a|>b$ e $a<0$.

**13.** I due numeri reali a, b sono tali per cui risulta: $a+b<0$ e $|a/b|>1$.

Stabilire quali, tra le seguenti rappresentazioni (Fig. 3), dove O indica l'origine sulla retta cartesiana, illustrano una situazione certamente *vera* e quali una situazione certamente *falsa*:


FIG. 3

**14.** Prendere in esame il numero $N=16^9$ e le seguenti proposizioni:

[A] La metà di N è $8^9$ e la sua radice quadrata è $8^6$.
[B] La metà di N è $8 \cdot 16^8$ e la sua radice quadrata è $16 \cdot 8^5$.
[C] La metà di N è $8^9$ e la sua radice quadrata è $16 \cdot 8^5$.
[D] La metà di N è $8 \cdot 16^8$ e la sua radice quadrata è $8^6$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla senza usare strumenti di calcolo automatico e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

**15.** Siano a, b, c, d numeri reali qualsiasi tali che $a<b$ e $c<d$. Dire quali delle seguenti relazioni sono vere e quali false:

$$a+c<b+d, \quad ac<bd, \quad a-c<b-d, \quad \frac{a}{c}<\frac{b}{d}.$$

Provare a fornire una spiegazione convincente della risposta. Eventualmente, almeno per la spiegazione di qualche risposta, ritornare su questo esercizio dopo aver studiato l'unità 5: Polinomi e operazioni con essi.

**16.** Sono dati i seguenti numeri:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[5]{5}.$$

Senza usare strumenti di calcolo automatico, disporli in ordine crescente.

**17.** Sono dati i seguenti numeri:

$$\sqrt{4+\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3+\sqrt{5}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{10}}.$$

Senza usare strumenti di calcolo automatico, disporli in ordine crescente.

**18.** Si consideri la seguente espressione numerica:

$$\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}}\,.$$

Un idoneo software matematico mostra che il suo valore è 1. Sviluppare tutti i singoli passaggi per provare ciò.

## UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

**DOMANDE.**

**1.** Non esiste alcun numero intero il cui quadrato è il doppio del quadrato di un numero intero. È vero o è falso?

**2.** Qual è la differenza fra un numero razionale e uno irrazionale?

**3.** Il numero 0,001111..., dove i puntini di sospensione indicano una successione infinita di 1, è razionale o irrazionale?

**4.** Il numero 0 , 91 911 9111 ..., dove i puntini di sospensione indicano un “9” seguito da quattro “1” e poi ancora un “9” seguito da cinque “1” e così via con la stessa alternanza di cifre, è un numero razionale o irrazionale?

**5.** Fra due qualsiasi numeri razionali è sempre possibile inserire almeno un numero irrazionale. Sapresti costruire un numero irrazionale compreso fra i numeri razionali $0,\overline{32}$ e $0,\overline{3}$?

**6.** Fra due qualsiasi numeri irrazionali è sempre possibile inserire almeno un numero razionale. Sapresti costruire un numero razionale compreso fra i numeri irrazionali 0,10100100010000... e 0,10110111011110... ?

**7.** Considera le seguenti uguaglianze:

$$(a+b)+c=a+(b+c),\quad (ab)c=a(bc),\quad (a-b)-c=a-(b-c),\quad (a:b):c=a:(b:c),$$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi. Diresti che sono tutte vere?

**8.** Devi stabilire quale dei due numeri $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt{2}$ è il maggiore senza usare strumenti di calcolo automatico. Come pensi di procedere?

**9.** È vero che, quali che siano i numeri reali a, b, risulta $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$?

**10.** È vero che, quali che siano i numeri reali a, b, purché non negativi, risulta $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$?

**11.** È vero che la metà di $32^5$ e la sua radice quadrata sono nell’ordine: $16^5$ e $16^3\cdot\sqrt{2}$ ?

**RISPOSTE.**

**1.** È vero. Se infatti esistesse un numero siffatto, diciamolo a, esisterebbe un altro naturale, che chiamiamo b, tale che $a^2=2b^2$. Ma sappiamo che questo è impossibile.

**2.** Un numero razionale può essere rappresentato da un allineamento decimale finito o illimitato periodico, mentre un irrazionale è rappresentato da un allineamento decimale illimitato non periodico.

**3.** Razionale. Si tratta, infatti, dell’allineamento decimale periodico misto $0,00\overline{1}$, precisamente uguale a $\frac{1}{900}$.

**4.** Irrazionale. Si tratta, infatti, di un allineamento decimale illimitato non periodico.

**5.** Un esempio è il seguente numero 0,32404004000… . Ma ne esistono infiniti.

**6.** Un esempio è il seguente numero: 0,10101. Ma ne esistono infiniti.

**7.** No. Sono vere solo le prime due (proprietà associativa di "+" e "·" in $\mathbb{R}$). Non lo sono le ultime due e per provarlo basta un contro-esempio per ciascuna di esse:

$$(15-7)-5=8-5=3,\ 15-(7-5)=15-2=13; \qquad (45:15):3=3:3=1,\ 45:(15:3)=45:5=9.$$

**8.** È sufficiente elevare alla potenza 6 i due radicali $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt{2}$. Si ottengono i numeri interi $3^2$ e $2^3$, vale a dire 9 e 8. Siccome 9>8 allora $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

**9.** No. Solo se $a+b\geq 0$, la relazione è vera. La scrittura corretta, comunque si scelgano a, b, è invece $\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$.

**10.** No, è falso. Basta un contro-esempio per provarlo. Di fatto: $\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}$.

**11.** Falsa la prima, vera la seconda. Si ha infatti:

$$\frac{1}{2}\cdot 32^5=\frac{(2^5)^5}{2}=2^{25-1}=2^{24}=(2^4)^6=16^6$$
$$\sqrt{32^5}=\sqrt{2^{25}}=\sqrt{2^{24}\cdot 2}=2^{12}\cdot\sqrt{2}=(2^4)^3\cdot\sqrt{2}=16^3\cdot\sqrt{2}$$

## COMPLEMENTI

In chiusura del precedente paragrafo N° 3.1.1, abbiamo concluso che:

non esiste alcun numero reale x tale che $x^2=2$

dopo aver dimostrato che:

non esistono due numeri interi a, b tali che $a^2=2\,b^2$.

Il procedimento da noi seguito per la dimostrazione, basato su una riduzione all'assurdo, non è l'unico.
In realtà, il filosofo greco **Aristotele** (384-322 a.C.) accenna, nell'opera *Analitici primi* (cap. I, prop. 23), ad un altro modo di dimostrare la proposizione suddetta, laddove afferma sostanzialmente che se esistono due numeri interi a, b tali che $a^2=2b^2$, si cade nell'assurdo che *i numeri dispari sono uguali a quelli pari*.
Aristotele, in verità, non espone la sua dimostrazione, ma – secondo gli storici – questa, sempre basata su una riduzione all'assurdo, potrebbe essere la seguente.

DIMOSTRAZIONE. Intanto si può ammettere che i numeri a, b siano primi fra loro, giacché, in caso contrario, basterebbe dividere entrambi i membri dell'uguaglianza $a^2=2b^2$ per il loro massimo comune divisore perché lo diventino.
Ora, evidentemente, $a^2$ è un numero pari, essendo il doppio di un numero intero, per cui anche a lo è. Di conseguenza b, che è primo con a, è dispari.
D'altro canto, essendo a pari, esiste un numero intero c tale che $a=2c$. Cosicché, sostituendo nell'uguaglianza $a^2=2b^2$, si ha: $4c^2=2b^2$, da cui segue: $2c^2=b^2$. Questo implica che $b^2$ è un numero pari e perciò anche b lo è. Di modo che il numero b è contemporaneamente dispari e pari. Il che è assurdo. Dunque non esistono due numeri interi a, b tali che $a^2=2b^2$.