Prerequisiti:
- Conoscere e utilizzare le isometrie.
- Conoscere e applicare i teoremi di Pitagora e di Euclide.
- Avere consapevolezza del concetto di rapporto di due grandezze e di proporzione fra quattro grandezze.

L'unità è indirizzata agli studenti del primo biennio di tutte le scuole superiori.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare e utilizzare il teorema di Talete*
- *dividere un segmento in n parti in proporzione sia con riga e compasso sia utilizzando strumenti informatici*
- *definire una omotetia ed una similitudine*
- *elencare e dimostrare le proprietà che si conservano in una omotetia ed in una similitudine*
- *individuare nel mondo reale situazioni riconducibili alla similitudine*

Omotetie e similitudini nel piano

Unità 30

30.1 IL TEOREMA DI TALETE

30.1.1 Sia assegnata una direzione δ e siano t, t' due rette distinte che non hanno quella direzione. La relazione che ad ogni punto di t associa la sua proiezione su t', costruita secondo la direzione data, realizza una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di t e quello di t'.

Questa corrispondenza si chiama **corrispondenza di Talete** (1) determinata dalla direzione δ.

Dimostriamo il seguente teorema.

♦ TEOREMA. **In una corrispondenza di Talete, a segmenti congruenti su una retta corrispondono segmenti congruenti sull'altra ed alla somma delle lunghezze di due segmenti di una retta corrisponde la somma delle lunghezze dei segmenti corrispondenti sull'altra.**

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima parte del teorema.

Siano allora a, b, c, d alcune rette aventi la stessa direzione δ e siano t, t' le due rette su cui si considera la corrispondenza di Talete determinata da δ (Fig. 1). Vogliamo provare che:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \ \rightarrow \overline{A'B'} = \overline{C'D'}\,.$$

A questo proposito consideriamo le proiezioni M, N di A', C' su b, d rispettivamente ottenute secondo la direzione di t. Siccome A'M≅C'N, i due triangoli A'B'M e C'D'N risultano congruenti e perciò: $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$.

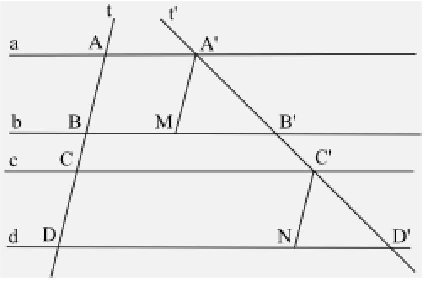

FIG. 1

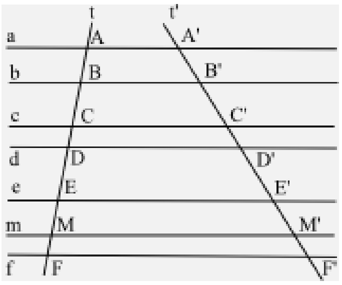

FIG. 2

Passiamo adesso alla seconda parte del teorema. Con riferimento alla figura 2, vogliamo provare che:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{EF} \ \rightarrow \ \overline{A'B'} + \overline{C'D'} = \overline{E'F'}.$$

Siccome $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{EF}$, esiste internamente al segmento EF un punto M tale che AB≅EM e CD≅MF. Ne segue, per la prima parte del teorema, che A'B'≅E'M' e C'D'≅M'F'. Perciò:

$$\overline{A'B'} + \overline{C'D'} = \overline{E'M'} + \overline{M'F'} = \overline{E'F'}.$$ [c.v.d.]

30.1.2 Vale il seguente teorema.

♦ TEOREMA (**di Talete**). **Un fascio di rette parallele determina su due trasversali due classi di lunghezze direttamente proporzionali.**

DIMOSTRAZIONE. Considerate le rette di direzione δ, siano t, t' due rette distinte non aventi la direzione δ. Presi arbitrariamente i punti P,Q∈t e detti P',Q' i loro omologhi su t' in base alla corrispondenza di Talete determinata dalla direzione δ, si vuole dimostrare che $\overline{PQ}=k\,\overline{P'Q'}$, dove k è una costante. Per questo basta dimostrare che:

---

[1] **Talete** di Mileto, vissuto intorno al 600 a.C. Ricordiamo (cfr.: U23, N° 23.6.3) che nei paesi anglosassoni è chiamato teorema di Talete la proprietà in base alla quale "ogni angolo inscritto in un semicerchio è retto".

[1] $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}},$$

dove A, B, C, D sono punti qualsiasi di t ed A', B', C', D' sono i loro corrispondenti su t' (Fig. 3).

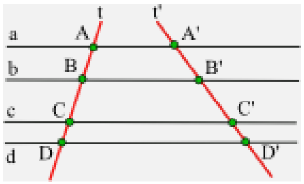

FIG. 3

Sorvoliamo sul caso banale in cui P coincide con Q e occupiamoci della situazione generale.
Se fosse AB≅CD, per il teorema precedente sarebbe A'B'≅C'D' e pertanto la [1] sarebbe vera.
Supponiamo AB≠CD. Questo significa che:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \alpha,$$

dove α è un numero reale positivo diverso da 1. Allora, delle due l'una: o α è un numero razionale o è un numero irrazionale.

- Nel primo caso esistono due interi m, n tali che:

  $$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$$

  e perciò $n\,\overline{AB} = m\,\overline{CD}$. Sicché, in virtù del teorema precedente: $n\,\overline{A'B'}=m\,\overline{C'D'}$ e di conseguenza:

  $$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{m}{n}.$$

  Insomma: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$, ossia: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$. [c. v. d.]

- Se α è un numero irrazionale, diciamo p/q un suo qualunque valore approssimato per difetto. Questo vuol dire che:

  $$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} > \frac{p}{q}$$

  e pertanto: $q\,\overline{AB}>p\,\overline{CD}$.

  Sicché esiste un opportuno segmento XY tale che: $q\,\overline{AB}=p\,\overline{CD}+\overline{XY}$. Ancora una volta e sempre in virtù del teorema precedente: $q\,\overline{A'B'}=p\,\overline{C'D'}+\overline{X'Y'}$. Di conseguenza: $q\,\overline{A'B'}>p\,\overline{C'D'}$ e perciò:

  $$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} > \frac{p}{q}.$$

  Se, invece di quelli per difetto, si considerano i valori r/s approssimati per eccesso di α, ossia se:

  $$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{r}{s}$$

  si conclude che:

  $$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{r}{s}.$$

  Insomma, ogni valore approssimato per difetto del numero $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ lo è anche del numero $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ e così pure ogni valore approssimato per eccesso del primo lo è pure del secondo.

Allo stesso modo si può giustificare che ogni valore approssimato per difetto del numero $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ lo è anche del numero $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ e così pure ogni valore approssimato per eccesso. Pertanto i due numeri $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ e $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ sono uguali. Dunque anche adesso risulta:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}\ . \qquad \text{[c.v.d.]}$$

30.1.3 Alcuni esercizi sull'argomento.

1. Descrivi come può essere costruito (con l'uso dei soli strumenti riga non graduata e compasso) il punto P che divide un dato segmento AB in due parti, AP e PB, di cui la prima di lunghezza doppia della seconda. Generalizza la questione, facendo vedere come sia possibile dividere un dato segmento in n parti direttamente proporzionali ad altrettanti numeri.
2. Dimostra che, se dal punto medio di uno dei lati di un triangolo si conduce la parallela r alla mediana relativa ad uno degli altri due lati, questo lato risulta diviso da r in due parti, di cui una tripla dell'altra.
3. Dimostra che il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo e la mediana relativa al terzo lato si bisecano.
4. Dimostra che la congiungente i punti medi di due lati di un triangolo divide in due parti congruenti:
   - la mediana del triangolo relativa al terzo lato;
   - l'altezza del triangolo relativa a questo lato;
   - la bisettrice del triangolo relativa all'angolo opposto a tale lato.
5. Riprendi la **proprietà del rapporto** che probabilmente già conosci [2]:
   Considerate due rette r ed r' secanti in un punto O, siano R ed S due punti qualsiasi di r ed R' ed S' le loro proiezioni su r'. Risulta:
   $$\boldsymbol{\frac{\overline{OR'}}{\overline{OS'}}=\frac{\overline{OR}}{\overline{OS}}}\ .$$
   Spiega perché si tratta di un caso particolare del teorema di Talete.
6. È dato un segmento AB. Con l'uso esclusivo di riga (non graduata) e compasso costruisci un triangolo rettangolo, di cui AB sia l'ipotenusa ed H il piede dell'altezza relativa ad esso tale che AH:HB=1:2.
7. Una retta, intersecando due lati di un triangolo, li divide in parti tra loro direttamente proporzionali. Dimostrare che la retta è parallela al terzo lato del triangolo.
   [**R**. Condotta per uno dei punti intersezione la parallela al terzo lato del triangolo e considerato il punto in cui questa interseca il secondo lato, in virtù del teorema di Talete si ha la proporzione …, la quale, confrontata con la proporzione data per ipotesi …]
8. Una circonferenza, intersecando i tre lati di un triangolo, divide ciascuno di essi in tre parti uguali. Dimostrare che il triangolo è equilatero.
   [**R**. Conviene utilizzare la precedente proprietà 7 e ricordare che un trapezio inscritto in una circonferenza è isoscele.]
9. Internamente al lato AB del triangolo ABC si prenda un qualsiasi punto D e si indichi con E l'intersezione del lato BC con la parallela al lato AC condotta per D. Quindi, sul prolungamento del lato BC, dalla parte di B, si prenda il punto F tale che $\overline{CF}=\overline{CB}+\overline{CE}$. Sia infine G il punto in cui la retta DF interseca il lato AC del triangolo. Dimostrare che risulta: $\overline{DF}:\overline{DG}=\overline{AB}:\overline{AD}$.

[2] Cfr.: U18: Retta cartesiana. Vettori e traslazioni nel piano cartesiano, N° 18.2.3.

30.2 OMOTETIE

30.2.1 Ti invitiamo a focalizzare l'attenzione su due particolari isometrie piane:

- l'*identità*, che ad ogni punto P associa il punto P' tale che: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$, dove O è un punto prefissato; come dire la trasformazione che ad ogni punto associa se stesso;
- la *simmetria centrale* di dato centro O, che ad ogni punto P associa il punto P' tale che: $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$.

Queste due trasformazioni geometriche si possono considerare come casi particolari della trasformazione che, prefissato un certo punto O, ad ogni punto P associa il punto P' tale che:

$$\overrightarrow{OP'} = k\,\overrightarrow{OP},$$

dove k è un numero reale non nullo. In effetti, se k=1 si ha l'identità e se k=−1 si ha la simmetria centrale di centro O. Questa nuova trasformazione si chiama "omotetia". In generale:

- Fissati un punto O del piano ed un numero reale k non nullo, si definisce **omotetia** di ***centro*** O e ***caratteristica*** k la trasformazione del piano in sé che ad ogni punto P associa il punto P' tale che:

$$\mathbf{\overrightarrow{OP'} = k\,\overrightarrow{OP}}.$$

Evidentemente questa trasformazione è biiettiva: è possibile, infatti, associare a P' il punto P; basta porre:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{OP'}.$$

L'omotetia si dice *diretta* se k>0 (Fig. 4), *indiretta* se k<0 (Fig. 5).

FIG. 4

FIG. 5

30.2.2 Probabilmente conosci le equazioni sia dell'identità sia della simmetria centrale di centro O. Ad ogni buon conto le riprendiamo. Riferito allora il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), avente l'origine proprio in O, e dette (x,y) le coordinate di P ed (x',y') quelle del punto P' associato a P:

- dalla relazione vettoriale $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$ seguono le equazioni dell'identità:
$$\mathbf{x' = x,\quad y' = y};$$
- dalla relazione vettoriale $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$ seguono le equazioni della simmetria centrale di centro O:
$$\mathbf{x' = -x,\quad y' = -y}.$$

Ebbene, generalizzando, dalla relazione vettoriale $\overrightarrow{OP'}=k\,\overrightarrow{OP}$ seguono le equazioni dell'omotetia di centro O e di caratteristica k (Fig. 6):

[2] $$\mathbf{x' = k\,x,\quad y' = k\,y}.$$

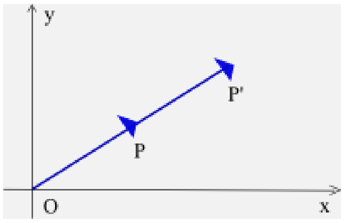

FIG. 6

E non ci vuol molto a capire che le equazioni dell'identità e della simmetria centrale sono casi particolari delle [2].

Ti proponiamo un paio di esercizi.

1. Disegna in un piano cartesiano ortogonale (Oxy) il triangolo di vertici: A(1,0), B(–1,2), C(3,1), il triangolo A'B'C' trasformato di ABC in base all'omotetia di centro O e di caratteristica 2 ed il triangolo A"B"C" trasformato di ABC in base all'omotetia di centro O e di caratteristica 1/2, dopo aver determinato le coordinate dei vertici dei due triangoli A'B'C' ed A"B"C". Noti delle particolarità? Queste si osservano in entrambe le omotetie?
2. Dimostra che un triangolo generico ABC ha il medesimo baricentro del triangolo MNP avente per vertici i punti medi dei suoi lati. Il triangolo MNP può essere concepito come il trasformato di ABC in base ad una determinata omotetia: qual è il centro di tale omotetia? Quanto vale la sua caratteristica?

30.2.3 S'intende che, se il centro dell'omotetia è un punto diverso dall'origine O del sistema di riferimento cartesiano, le equazioni dell'omotetia sono diverse. Precisamente, se C(a,b) è il nuovo centro, indicate con (x,y) le coordinate di un punto P e con (x',y') quelle del punto P' associato a P dall'omotetia di centro C e caratteristica k, dalla relazione $\overrightarrow{CP'} = k\,\overrightarrow{CP}$ risulta:

$$x' - a = k\,(x - a)\,, \qquad y' - b = k\,(y - b)$$

da cui seguono le equazioni dell'omotetia di centro C(a,b) e caratteristica k:

$$\mathbf{x' = a + k\,(x - a)\,, \qquad y' = b + k\,(y - b)\,.}$$

Naturalmente, se C=O, le precedenti equazioni assumono la forma [2].

30.3 SIMILITUDINI

30.3.1 Ripensando alle isometrie, ricorderai che un'isometria trasforma un punto A in un punto A' ed un punto B in un punto B' in modo che risulti $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, ovvero, scritto in modo diverso ma equivalente:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1.$$

Le omotetie non sono, in genere, delle isometrie. Vale, infatti, il seguente teorema.

♦ TEOREMA. Detti A, B due qualsiasi punti ed A', B' i loro trasformati secondo un'omotetia di caratteristica k, risulta:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |k|.$$

DIMOSTRAZIONE. Considerata l'omotetia ω di centro O e di caratteristica k, riferiamo il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e diciamo $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ due qualsiasi punti del piano ed $A'(x_{A'},y_{A'})$ e $B'(x_{B'},y_{B'})$ i loro trasformati dall'omotetia ω (Fig. 7).

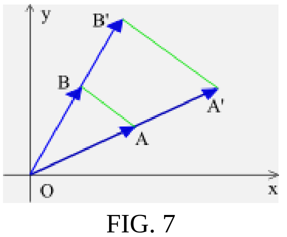

FIG. 7

Intanto osserviamo che risulta: $x_{A'} = k\,x_A$, $y_{A'} = k\,y_A$, $x_{B'} = k\,x_B$, $x_{B'} = k\,x_B$. Sicché:

$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$;
$\overline{A'B'} = \sqrt{(x_{A'} - x_{B'})^2 + (y_{A'} - y_{B'})^2} = |k|\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = |k|\,\overline{AB}$.
Dunque: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |k|$. [c. v. d.]

30.3.2 Analizzando isometrie ed omotetie, possiamo notare che, per due qualsiasi coppie di punti corrispondenti A, A' e B, B':

- in un'isometria il rapporto $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ è uguale ad 1, ma non accade, in genere, che tutte le coppie di punti corrispondenti P, P' siano allineate con uno stesso punto;
- in un'omotetia tutte le coppie di punti corrispondenti P, P' sono allineate con uno stesso punto, ma non accade, in genere, che il rapporto $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ sia uguale ad 1, pur mantenendosi costante.

Consideriamo, allora, un'applicazione biiettiva del piano in sé, che generalizzi entrambe le precedenti trasformazioni. Ossia un'applicazione in cui, senza ipotizzare nulla sugli altri fatti, accade che il rapporto tra la lunghezza del segmento A'B' e quella del segmento AB, del quale A'B' è il trasformato, si mantenga costante al variare dei punti prescelti. Una tale trasformazione si chiama "similitudine". Precisamente:

♦ Una **similitudine** è un'applicazione biiettiva σ del piano in sé tale che, detti A, B due qualsiasi punti del piano ed A', B' i loro trasformati secondo la σ, cioè tali che A'=σ(A) e B'=σ(B), risulti:

$$\frac{\overline{\mathbf{A'B'}}}{\overline{\mathbf{AB}}} = \mathbf{h}\,,$$

dove h è un numero reale positivo.

Il numero h è detto ***costante*** (o ***rapporto***) ***di similitudine***.
Da quanto precede si evince facilmente che:

- **Ogni isometria è una similitudine di costante 1.**
- **Ogni omotetia di caratteristica k è una similitudine di costante |k|.**

30.3.3 Occupiamoci adesso delle prime proprietà delle figure che rimangono invarianti rispetto ad una similitudine. La proprietà base, per così dire, è costituita dal seguente teorema.

♦ TEOREMA 1. **Ogni similitudine trasforma segmenti congruenti in segmenti congruenti.**

DIMOSTRAZIONE. Presi due qualsiasi segmenti AB e CD e chiamati A'B' e C'D' i loro trasformati mediante una similitudine qualunque, si ha evidentemente:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}\,.$$

Cosicché, se AB≅CD, deve risultare A'B'≅C'D'.
Dunque, se i segmenti AB e CD sono congruenti, anche i loro trasformati lo sono. [c.v.d.]

Detto in altre parole, questo teorema assicura che, se la distanza dei punti A, B è uguale a quella dei punti C, D allora anche la distanza dei punti trasformati A', B' è uguale a quella dei punti C', D'.
Le altre proprietà invarianti di cui ci occuperemo in questo paragrafo, sono diretta conseguenza del teorema precedente.

♦ TEOREMA 2. **Ogni similitudine trasforma ogni retta in una retta.**

DIMOSTRAZIONE. Presa una qualunque retta r, si considerino due punti A, B simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla retta r (Fig. 8): la retta r può essere allora pensata come l'asse del segmento AB, cioè il luogo dei punti P equidistanti da A e B.

Detti A', B' i trasformati di A, B mediante la similitudine σ che si considera, ogni punto P della retta r, per il quale risulta chiaramente PA≅PB, è trasformato da σ nel punto P' tale che P'A'≅P'B'; cioè P' appartiene all'asse del segmento A'B'; in sostanza alla retta r', luogo dei punti equidistanti da A' e B'. Dunque la retta r è trasformata in r'. [c.v.d.]

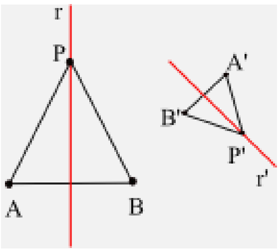

FIG. 8

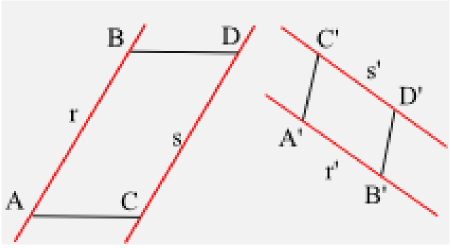

FIG. 9

♦ TEOREMA 3. **Ogni similitudine trasforma rette parallele in rette parallele.**

DIMOSTRAZIONE. Considerate due qualsiasi rette parallele r ed s, prendiamo su r due punti distinti A, B e su s due punti C, D in modo che risulti AB≅CD (Fig. 9).

Il quadrilatero ABDC, avendo i lati opposti AB e CD paralleli e congruenti, è un parallelogramma, per cui anche AC≅BD.

Questo parallelogramma viene trasformato dalla similitudine σ che si considera, nel quadrilatero A'B'C'D' tale che A'B'≅C'D' e A'C'≅B'D'; cioè ancora in un parallelogramma. Per cui i lati A'B' e C'D' sono paralleli. D'altra parte A'B' è la retta r' trasformata di r e C'D' è la retta s' trasformata di s. Dunque r'||s'. [c.v.d.]

♦ TEOREMA 4. **Ogni similitudine trasforma una circonferenza in una circonferenza.**

DIMOSTRAZIONE. Una circonferenza K di centro C è il luogo dei punti P equidistanti da C. Ogni similitudine σ trasforma il punto C in un punto C' ed i punti P, equidistanti da C, nei punti P' equidistanti da C'; cioè nei punti di una circonferenza K' di centro C'. Dunque σ trasforma la circonferenza K in una circonferenza K'. [c.v.d.]

30.3.4 Tutte le precedenti proprietà possono essere completate da queste altre, delle quali però ci limitiamo a fornire gli enunciati:

- ♦ **Se due segmenti sono rispettivamente congruenti ad altri due, esiste almeno una similitudine che trasforma i primi nei secondi.**
- ♦ **Assegnate due qualsiasi rette, esiste almeno una similitudine che trasforma l'una nell'altra.**
- ♦ **Se due rette r, s sono parallele e se ugualmente sono parallele le rette r', s', esiste almeno una similitudine che trasforma le prime nelle seconde.**
- ♦ **Assegnate due qualsiasi circonferenze, esiste almeno una similitudine che trasforma l'una nell'altra.**

30.3.5 Le proprietà delle figure geometriche fin qui enunciate sono **invarianti** per una qualunque similitudine e, di conseguenza, lo sono per ogni isometria e per ogni omotetia, che sono particolari similitudini.

Ora, a dire il vero, riguardo alle isometrie sapevi già tutto sulla conservazione di queste proprietà. Hai appreso adesso che questo fatto vale anche per le omotetie.

In realtà, a proposito delle omotetie, tali proprietà possono essere dimostrate direttamente utilizzando le equazioni [2] di una generica omotetia di centro O. È un compito che ti lasciamo per esercizio.

Il procedimento da seguire è, nella sostanza, uguale a quello che andiamo ad esporre per dimostrare una proprietà che vale per le omotetie ma non vale per una generica similitudine.

♦ TEOREMA. **Ogni omotetia trasforma una qualsiasi retta in una retta parallela.**

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una generica retta r, di equazione:

$$a\,x + b\,y + c = 0\,.$$

Le equazioni [2] dell'omotetia di centro O e di caratteristica h, scritte in questa forma equivalente:

$$x = \frac{1}{h}x', \;\; y = \frac{1}{h}y',$$

trasformano l'equazione di r in quest'altra equazione:

$$a \cdot \frac{1}{h}x' + b \cdot \frac{1}{h}y' + c = 0,$$

o anche, liberando dal denominatore e ritornando a chiamare x, y (anziché x', y') le coordinate correnti:

$$a\,x + b\,y + h\,c = 0\,.$$

Si tratta evidentemente dell'equazione di una retta r' parallela alla retta r.

Alcuni esercizi da risolvere (quando serve, il piano si suppone riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali).

a) Sono assegnati i punti A, B, C, non appartenenti alla stessa retta, ed i punti A', B', C', distinti dai primi ed essi pure non appartenenti alla stessa retta. Tali punti sono assegnati in modo che le rette AA', BB', CC' abbiano un punto in comune ed inoltre le rette AB e A'B' siano parallele e così pure siano parallele le rette AC e A'C'. Dimostrare che sono parallele le rette BC e B'C'.

b) In un'omotetia:
   - esistono punti uniti (sono punti che l'omotetia trasforma in se stessi)?
   - esistono rette unite (sono rette che l'omotetia trasforma in se stesse)?
   - esistono rette unite luogo di punti uniti?

c) Tra le seguenti trasformazioni geometriche alcune sono similitudini e alcune non lo sono. Specificare caso per caso.

   $t_1\colon\; x' = \frac{3}{5}x,\;\; y' = \frac{3}{5}y.$ $\qquad$ $t_2\colon\; x' = 2y,\;\; y' = 2x.$

   $t_3\colon\; x' = 2x + y,\;\; y' = -x + 2y.$ $\qquad$ $t_4\colon\; x' = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}y,\;\; y' = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}y.$

   $t_5\colon\; x' = x + y,\;\; y' = 2x - y.$ $\qquad$ $t_6\colon\; x' = 3x - y,\;\; y' = -x + 3y.$

   [**R.** 1) SI; 2) SI; 3) SI; 4) SI; 5) NO; ...]

d) Dopo aver scritto le equazioni dell'omotetia ω di centro O e di caratteristica h e quelle della traslazione τ di componenti (a,b), determinare le equazioni della trasformazione geometrica ω∘τ e quelle della trasformazione τ∘ω. Dimostrare che si tratta di due similitudini. È ω∘τ= τ∘ω ? Cosa se ne deduce?

   [**R.** ... ; ω∘τ: (x'=hx+a, y'=hy+b); τ∘ω: (x'=hx+ha, y'=hy+hb); ...]

e) Sono assegnati i due quadrati ABCD ed A'B'C'D', dove:

$$A(0,0),\; B(1,0),\; C(1,1);\quad A'(4,1),\; B'(7,1),\; C'(7,4).$$

Il secondo quadrato si può pensare come il trasformato del primo mediante la similitudine $\omega\circ\tau$, dove ω è un'omotetia di centro O e τ è una traslazione. Determinare le equazioni di ω e di τ .

[**R.** ω: ($x'=3x, y'=3y$), t: ($x'=x+4, y'=y+1$)]

f) Sono assegnate le due rette parallele: $a \equiv y = \frac{1}{2}x+2$, $b \equiv y = \frac{1}{2}x-4$. a) Esiste un'omotetia di centro O che trasforma a in b: trovarne le equazioni. b) Si tratta della stessa omotetia che trasforma b in a? c) Trovare inoltre le equazioni di un'omotetia di centro C(0,4) che trasforma a in b.

[**R.** a) $x'= -2x, y'=-2y$; b) No: la seconda omotetia, infatti, ha equazioni: …; c) …]

30.4 FIGURE SIMILI

30.4.1 Hai avuto certamente occasione di vedere una fotografia e un suo ingrandimento (Fig. 10). Le due figure hanno una caratteristica comune: sono "simili", vale a dire si ottengono l'una dall'altra con una similitudine.

FIG. 10

Anche due cartine geografiche di una medesima regione sono due figure simili. Ma a questo riguardo vogliamo fare qualche altra considerazione. Se una cartina geografica è la riproduzione di una certa regione in scala, per esempio, 1:100.000 significa che ad una unità di misura nella riproduzione corrispondono 100.000 unità di misura nella realtà. In particolare ad 1 cm sulla riproduzione corrispondono nella realtà 100.000 cm, ovvero 1 km. La *scala* 1:100.000, nel caso specifico, è il *rapporto di similitudine*.

♦ In generale, considerate due figure F ed F':

Si dice che F è **simile** ad F' se esiste una similitudine che trasformi F in F'.

In particolare, oltre ad una fotografia e un suo ingrandimento, sono figure simili: due rette, due circonferenze, due quadrati.

In simboli, per evidenziare che «F è simile ad F'» scriviamo:

$$F(s)F'.$$

È evidente che: **Se una figura F è congruente ad F' allora F è simile ad F'.**

30.4.2 TEOREMA. **Nell'insieme Φ delle figure piane la relazione di similitudine "(s)" è una relazione di equivalenza.**

DIMOSTRAZIONE. Occorre dimostrare ovviamente che la relazione "(s)" è riflessiva, simmetrica, transitiva.

- È <u>riflessiva</u>: $F(s)F,\ \forall F \in \Phi$.
  Ogni figura è, infatti, congruente a se stessa e quindi è simile a se stessa.
- È <u>simmetrica</u>: $F(s)F' \rightarrow F'(s)F,\ \forall F, F' \in \Phi$.
  Infatti, se $F(s)F'$, esiste una similitudine σ che trasforma F in F'. Ma, allora, la similitudine inversa

di σ, trasforma F' in F. Per cui F′(s)F.

- È <u>transitiva</u>: $F(s)F' \wedge F'(s)F \rightarrow F(s)F,\ \forall F, F' \in \Phi$.
  Infatti, se F(s)F′, esiste una similitudine σ' che trasforma F in F'; parimenti, se F′(s)F", esiste una similitudine σ" che trasforma F' in F". Ma, allora, la similitudine prodotto σ'∘σ" trasforma F in F". Per cui F(s)F".

30.4.3 Per il teorema precedente, l'insieme delle figure piane può essere ripartito in classi di equivalenza rispetto alla relazione "(s)".
Ogni classe di equivalenza, vale a dire ogni insieme di figure simili, è un nuovo ente che si chiama **forma**. Per questo si dice che ***due figure simili hanno la stessa forma***.
Esempi di figure che hanno la stessa forma sono costituiti da una fotografia e da un suo ingrandimento, da due cartine geografiche della stessa regione, da due rette, da due circonferenze, da due quadrati.

30.5 TRIANGOLI SIMILI

30.5.1 Hai appreso che, per stabilire che due figure sono simili, bisogna far vedere che esiste una similitudine che trasformi l'una nell'altra.

Per esempio, considerati i due triangoli F ed F' (Fig. 11), supponiamo che si passi da F ad F' trasformando dapprima F in F_0 mediante una particolare omotetia ω di centro O e da F_0 ad F' mediante un'idonea rotazione ρ intorno ad O. Ebbene, siccome la trasformazione ω∘ρ è certamente una similitudine, possiamo concludere che F(s)F'.

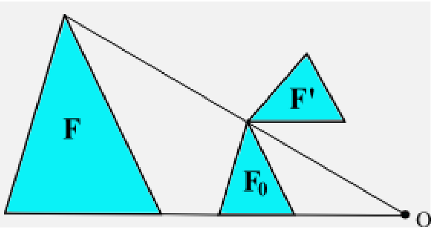

FIG. 11

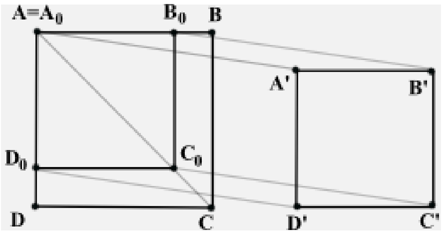

FIG. 12

La trasformazione ω∘ρ, composta da un'omotetia con una rotazione, si chiama ***rotomotetia***.
Un altro esempio. Considerati i quadrati ABCD ed A'B'C'D' aventi i lati rispettivamente paralleli, il quadrato A'B'C'D' può essere ottenuto come prodotto di un'omotetia ω per una traslazione τ, dove precisamente ω è una particolare omotetia di centro A, la quale trasforma ABCD in $A_0B_0C_0D_0$, e τ è la traslazione che porta A in A' (Fig. 12).

30.5.2 Ora, però, quando si vuole provare che due assegnate figure sono simili, la ricerca di una similitudine idonea a trasformare l'una figura nell'altra si rivela, purtroppo, un esercizio non sempre agevole. Anzi, qualche volta è proprio difficile. Per questo è opportuno affidarsi a procedimenti alternativi.
Uno di questi procedimenti coinvolge i triangoli. Precisamente fa ricorso a tre teoremi sui triangoli, conosciuti di solito come ***criteri di similitudine*** dei triangoli.

- TEOREMA (***PRIMO CRITERIO DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI***).

Due triangoli sono simili se due angoli dell'uno sono rispettivamente congruenti a due angoli dell'altro.

DIMOSTRAZIONE. Ammettiamo che nei due triangoli ABC ed A'B'C' (Fig. 13) sia: $\widehat{A}\cong\widehat{A'}$ e $\widehat{B}\cong\widehat{B'}$.
Sulla semiretta di origine A passante per B prendiamo il punto D in modo che risulti AD=A'B'; conduciamo quindi la corda DE del triangolo ABC parallela a BC. Nei due triangoli ADE ed A'B'C' si ha: $AD\cong A'B'$, $\widehat{A}\cong\widehat{A'}$, $\widehat{D}\cong\widehat{B'}$. Essi sono, dunque, congruenti e pertanto simili.
Consideriamo ora il fascio di rette parallele a BC (ed a DE) tagliate dalle trasversali AB e AC. Per il teorema di Talete si ha $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}$.
Come dire che i due triangoli ABC e ADE si corrispondono in un'omotetia di centro A. Essi sono, dunque, simili.
In conclusione: ABC (s) ADE et ADE (s) A'B'C' . Siccome la relazione "(s)" è transitiva, risulta alla fine: ABC (s) A'B'C'. [c.v.d.]

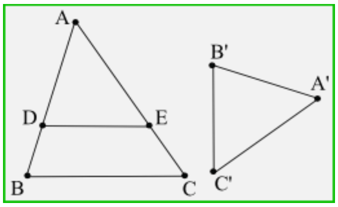

FIG. 13

- TEOREMA (***SECONDO CRITERIO DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI***).

Due triangoli sono simili se un angolo dell'uno è congruente ad un angolo dell'altro e i lati che comprendono questi angoli sono direttamente proporzionali.
DIMOSTRAZIONE. Siano ABC ed A'B'C' (ancora con riferimento alla figura 14) due triangoli tali che:

$$\widehat{A}\cong\widehat{A'} \text{ e } \overline{A'B'}:\overline{AB}=\overline{A'C'}:\overline{AC}.$$

Posto $\overline{A'B'}:\overline{AB}=\overline{A'C'}:\overline{AC}=k$ e perciò $\overline{A'B'}=k\,\overline{AB}$ e $\overline{A'C'}=k\,\overline{AC}$, l'omotetia di centro A e caratteristica k trasforma il triangolo ABC nel triangolo ADC tale che $\overline{AD}=k\,\overline{AB}$ e $\overline{AE}=k\,\overline{AC}$; per cui: AD=A'B' e AE=A'C'. Dunque, non solo risultano simili, in quanto omotetici, i due triangoli ABC e ADE, ma risultano simili anche i due triangoli ADE e A'B'C' in quanto congruenti per il 1° criterio di congruenza (infatti: $\widehat{A}\cong\widehat{A'}$, $AD\cong A'B'$, $AE\cong A'C'$). Di modo che, per la transitività di "(s)":

ABC (s) ADE et ADE (s) A'B'C' $\rightarrow$ ABC (s) A'B'C'. [c.v.d.]

- TEOREMA (***TERZO CRITERIO DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI***).

Due triangoli sono simili se i lati dell'uno sono direttamente proporzionali a quelli dell'altro.
DIMOSTRAZIONE (traccia). Siano ABC ed A'B'C' due triangoli tali che $\overline{A'B'}:\overline{AB}=\overline{B'C'}:\overline{BC}=\overline{C'A'}:\overline{CA}$.
Chiamato k ciascuno di questi rapporti uguali, per cui: $\overline{A'B'}=k\,\overline{AB}$, … , consideriamo l'omotetia di centro A e di caratteristica k. Essa trasforma il triangolo ABC nel … .
Pertanto: ... $\rightarrow$ ABC (s) A'B'C'. [c.v.d.]

30.5.3 I tre precedenti teoremi forniscono, come abbiamo già precisato, dei criteri idonei a stabilire quando due triangoli sono simili.
Il teorema che segue evidenzia, invece, una proprietà dei triangoli simili, che, per certi aspetti, riassume, invertendoli, i tre teoremi suddetti.

- TEOREMA. **Due triangoli simili hanno gli angoli ordinatamente congruenti e i lati corrispon-**

denti direttamente proporzionali.

DIMOSTRAZIONE. Siano ABC ed A'B'C' due triangoli simili (Fig. 14), i cui vertici si corrispondono secondo la seguente tabella:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{bmatrix}.$$

Dal fatto stesso che sono simili segue che: $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{BC} = \overline{C'A'} : \overline{CA}$.

Indicato, allora, con k ciascuno dei precedenti rapporti uguali, consideriamo l'omotetia di centro A e caratteristica k. Essa trasforma il triangolo ABC nel triangolo ADE tale che:

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AC}.$$

D'altro canto, un'omotetia trasforma una retta in una retta parallela; per cui DE||BC. Di conseguenza gli angoli del triangolo ABC sono ordinatamente congruenti a quelli del triangolo ADE.

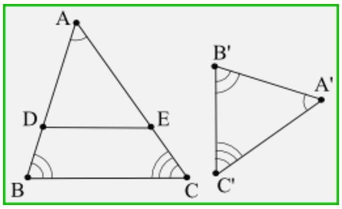

FIG. 14

Confrontando poi la suddetta catena di rapporti uguali con la precedente, si desume che:

$$AD=A'B',\quad DE=B'C',\quad AE=A'C'.$$

Dunque i triangoli ADE ed A'B'C' sono congruenti e perciò sono ordinatamente congruenti i loro angoli. In definitiva, per la proprietà transitiva della congruenza, sono ordinatamente congruenti gli angoli dei triangoli ABC ed A'B'C'. [c.v.d.]

30.5.4 Riguardo ai triangoli simili, ti proponiamo di dimostrare le seguenti proprietà:

Se due triangoli ABC ed A'B'C' sono simili e se k è il rapporto della similitudine che trasforma ABC in A'B'C' allora:

- dette h ed h' due altezze corrispondenti (la prima del triangolo ABC e la seconda ovviamente di A'B'C'), si ha: $h'/h = k$;
- dette m ed m' due mediane corrispondenti, si ha: $m'/m = k$;
- dette b e b' due bisettrici corrispondenti, si ha: $b'/b = k$;
- detti P e P' i perimetri dei due triangoli, si ha: $P'/P = k$;
- dette A ed A' le aree dei due triangoli, sia ha: $A'/A = k^2$.

30.5.5 Come applicazione dei criteri di similitudine dei triangoli e delle relative conseguenze, ti invitiamo a risolvere i seguenti esercizi.

a) È dato il quadrato ABCD, il cui lato ha una lunghezza assegnata a. Sul prolungamento di AB, dalla parte di B, determinare un punto E in modo che il triangolo AED sia equivalente al quadrato.

b) In un determinato momento della giornata, l'ombra della tua persona sul suolo è uguale al doppio della tua altezza. L'ombra di un palo, che ti sta vicino, è in quel momento di 4 m. Quant'è lungo il palo? (S'intende che la tua persona ed il palo si considerano in posizione verticale)

c) Un appezzamento di terreno ha forma triangolare con i lati aventi le misure: 60 m, 48 m, 40 m. Il proprietario vuole ricavarne un altro appezzamento, esso pure di forma triangolare, avente il perimetro di 37 m, tracciando una linea retta parallela al maggiore dei lati dell'appezzamento dato. Per quale punto del lato minore deve essere condotta questa linea?

d) In un trapezio rettangolo ABCD la differenza fra la base maggiore AB e la base minore CD misura 5 cm, mentre il perimetro del trapezio è 36 cm e la sua altezza AD misura 12 cm. Determina la misura della corda PQ, parallela alle basi, tale che il quadrilatero convesso ABQP sia circoscrivibile ad un cerchio. [**R.** Conviene costruire il punto E in cui si secano le rette AD e BC. $PQ=16/3$ cm]

e) Considerato il triangolo ABC, nel quale $B\widehat{A}C>A\widehat{B}C$, si prenda, internamente al lato BC, il punto D tale che $C\widehat{A}D=A\widehat{B}C$. Dimostrare che $A\widehat{D}C=B\widehat{A}C$.

f) È dato il triangolo ottusangolo ABC e sia A il vertice dell'angolo ottuso. Siano inoltre E il piede dell'altezza relativa al lato AB ed F quello dell'altezza relativa al lato AC. Indicati con H l'ortocentro del triangolo e con G il punto in cui s'intersecano AH e EF, dimostrare che i triangoli GAE e GHF sono simili. [**R**. Conviene ragionare su una particolare proprietà del quadrilatero AEHF]

30.5.6 A conclusione di questo paragrafo dimostriamo un teorema che, generalizzando in parte un precedente teorema sui triangoli (n. 30.5.3), esprime una nuova proprietà delle figure simili.

♦ TEOREMA. **Se due figure piane sono simili, ogni angolo dell'una è congruente al corrispondente angolo dell'altra.**

DIMOSTRAZIONE. Siano F ed F' due figure simili (Fig. 15). Questo significa che esiste una similitudine σ che trasforma F in F'. Detti allora A, B, C tre punti qualsiasi, non allineati, di F, indichiamo nell'ordine con A', B', C' i punti di F' nei quali σ trasforma A, B, C. Vogliamo dimostrare che si ha: $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$.

Siccome F(s)F', risulta $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{B'C'} : \overline{BC} = \overline{C'A'} : \overline{CA}$. Per cui, in virtù del 3° criterio di similitudine dei triangoli, ABC(s)A'B'C' e, di conseguenza, $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$. [c.v.d.]

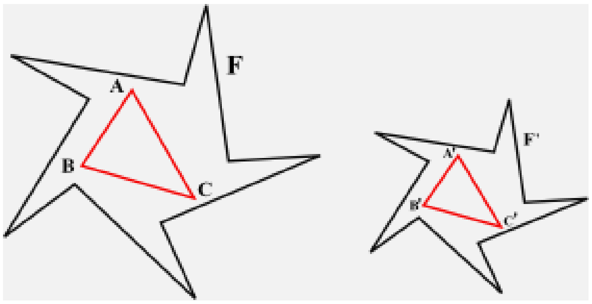

FIG. 15

30.5.7 Se i due angoli corrispondenti di due figure simili, considerati come angoli orientati, hanno lo stesso verso, la similitudine che trasforma l'una nell'altra si dice ***similitudine diretta*** e le due figure si dicono *direttamente simili* (Fig. 16).

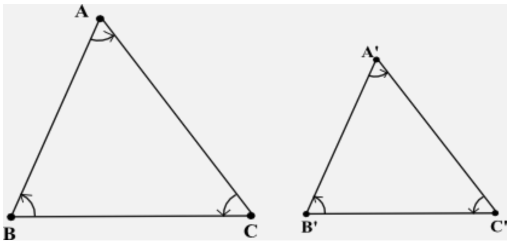

FIG. 16

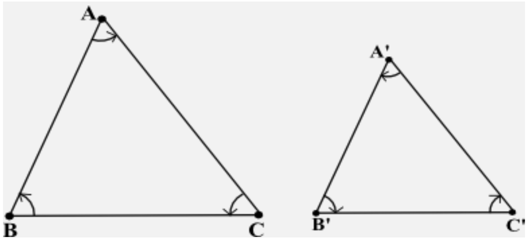

FIG. 17

Se invece gli angoli non hanno lo stesso verso, la similitudine si dice ***similitudine speculare*** e le due figure si dicono *specularmente simili* (Fig. 17).
Si può far vedere che: **Ogni omotetia (diretta o indiretta) è una similitudine diretta.**

30.6 POLIGONI SIMILI

30.6.1 È facile comprendere, sulla base di quanto abbiamo detto fin qui sulle figure simili, che:

Due poligoni simili (e quindi chiaramente con lo stesso numero di lati) **hanno gli angoli ordinatamente congruenti e i lati corrispondenti direttamente proporzionali.**

Ora, l'inversa di questa proposizione ci fornisce un criterio per riconoscere se due poligoni, sempre con lo stesso numero di lati, sono simili. Per la precisione vale il seguente teorema.

♦ TEOREMA. **Due poligoni sono simili se gli angoli dell'uno sono direttamente congruenti a quelli dell'altro e i lati che comprendono angoli congruenti sono direttamente proporzionali.**

DIMOSTRAZIONE. Siano ABCD e A'B'C'D' due poligoni (nella fattispecie due quadrilateri – Fig. 18) i cui vertici si corrispondono secondo la seguente tabella:

$$\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{bmatrix}.$$

Di modo che:

$$\widehat{A}\cong\widehat{A}',\ \ \widehat{B}\cong\widehat{B}',\ \ \widehat{C}\cong\widehat{C}',\ \ \widehat{D}\cong\widehat{D}';\qquad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}}\ .$$

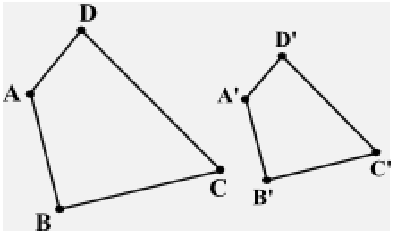

FIG. 18

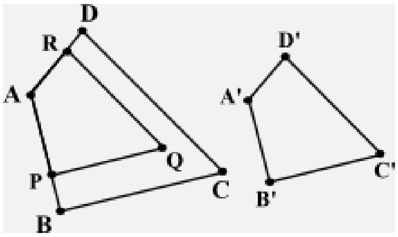

FIG. 19

Chiamato k ciascuno dei precedenti rapporti uguali, consideriamo l'omotetia di centro A e di caratteristica k. Essa trasforma il poligono ABCD nel poligono APQR (Fig. 20). Quindi:

$$\text{ABCD (s) APQR}\ .$$

D'altronde, si giustifica che APQR è congruente ad A'B'C'D'. Di conseguenza:

$$\text{ABCD (s) A'B'C'D'}. \qquad \text{[c.v.d.]}$$

30.6.2 Ti proponiamo adesso alcuni esercizi.

a) Un foglio di carta di formato A4 ha dimensioni 297 mm e 210 mm. Verifica che, piegandolo opportunamente a metà, si ottengono due fogli uguali fra loro e, con ottima approssimazione, simili al foglio A4. Ciascuno di essi è un formato A5. Parimenti, raddoppiando in modo opportuno il foglio A4 si ottiene un foglio simile ad esso, sempre con ottima approssimazione. Il nuovo foglio è un formato A3.
b) Dimostra le seguenti proprietà dei poligoni:
   1) Due poligoni regolari di ugual numero di lati sono simili ed i loro apotemi e i loro raggi stanno nello stesso rapporto di similitudine dei due poligoni.
   2) Due poligoni simili si possono scomporre in un ugual numero di triangoli simili.
   3) Se due poligoni sono simili ed è k il rapporto di similitudine allora:

- il rapporto fra i loro perimetri è k;
- il rapporto fra le loro aree è k^2.

c) ® Dimostra la seguente proprietà (si tratta di una dimostrazione articolata, che richiede buone capacità di ragionamento e una sicura preparazione):
È dato il parallelogramma ABCD, la cui diagonale minore AC è perpendicolare ai lati paralleli AB e CD. Indicate con E ed F le proiezioni ortogonali dei vertici A e C rispettivamente sulla diagonale BD, dimostrare che il quadrilatero AECF è un parallelogramma simile a quello dato.

d) Una lamina metallica di forma rettangolare ha il perimetro di 4,20 m. Da essa si ricavano n lamine uguali tra loro e simili alla lamina originaria aventi il perimetro di 21 cm. Quanto vale n?
[A] $n=20$. [B] $n=200$. [C] $n=400$. [D] Dati insufficienti.
Individuare l'alternativa corretta e darne giustificazione.

e) Sono assegnati un quadrato ed un secondo quadrato avente come diagonale un lato del primo quadrato. Si tratta evidentemente di due figure simili. Descrivi una similitudine che trasformi il minore dei due quadrati nel maggiore.

f) Due rettangoli, aventi lo stesso centro, si corrispondono in un'omotetia avente il centro nel loro centro comune. Si sa che la parte di piano compresa fra i due rettangoli ha la medesima estensione del rettangolo minore, le cui dimensioni sono 30 cm e 40 cm.
  1) Qual è la caratteristica dell'omotetia?
  2) Quali sono le distanze fra ogni lato di un rettangolo ed il lato parallelo più vicino dell'altro rettangolo?

[**R.** a) $\sqrt{2}$; b) …]

30.7 NOTA STORICA

Diogene Laerzio, grammatico greco e commentatore di opere di filosofia greca (III sec. d.C.), attribuisce a Talete:

"**la misura delle altezze delle piramidi egizie ottenuta misurando la lunghezza delle loro ombre quando l'ombra di una persona è lunga quanto la sua altezza**".

In tal caso, infatti, la misura dell'altezza della piramide è esattamente uguale alla misura della sua ombra (Fig. 20).

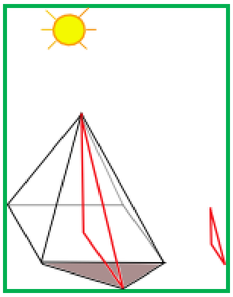

FIG. 20

In realtà, già prima di Diogene Laerzio, lo scrittore greco Plutarco (45 ca. – 125), nella sua opera *Convivio dei sette sapienti*, aveva attribuito a Talete quella scoperta. Dice Plutarco, press'a poco: «Collo-

cò il suo bastone al limite dell'ombra proiettata dalla piramide [3]; i raggi del Sole investendo l'asta e la piramide formavano due triangoli. [Talete] dimostrò che il rapporto fra l'altezza del bastone e quella della piramide era uguale a quello intercorrente fra le loro ombre».
Questa scoperta fa ritenere che Talete conoscesse quello che oggi denominiamo 2° criterio di similitudine dei triangoli e che negli *Elementi* di Euclide è enunciato e dimostrato nel libro VI, prop. 6.
Ora, che Talete abbia potuto dimostrare questo criterio alla maniera di Euclide appare agli storici moderni cosa del tutto inverosimile, per non dire impossibile. È più probabile che egli abbia intuito quella proprietà, quantunque in un caso particolarmente semplice, e l'abbia applicata all'altezza delle piramidi, senza curarsi di fornire alcuna dimostrazione, di cui peraltro non aveva consapevolezza.
Fra l'altro, detto per inciso, nessuno storico attribuisce a Talete la scoperta del teorema sul fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, che porta il suo nome solo dalla fine dell'Ottocento, forse per celebrare un personaggio comunque importante nel panorama matematico. In realtà i concetti che stanno alla base del teorema sono troppo astratti per poter essere compresi da una mentalità come quella di Talete, ancora troppo legata a questioni di carattere concreto-operativo.
Se vogliamo dirla tutta, neppure negli Elementi di Euclide c'è un enunciato uguale in tutto e per tutto al "teorema di Talete". C'è invece l'enunciato di una proposizione (*Elementi*, VI, 2), che di quel teorema si può considerare, almeno nella prima parte, un corollario ma che Euclide dimostra come teorema a sé: «Se in un triangolo si conduce una retta parallela ad uno dei lati, essa divide proporzionalmente [gli altri due] lati del triangolo».

VERIFICHE [4]

Il piano si suppone riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) (nn. 1-5):

1. Si considera il triangolo ABC, dove: A(1,1), B(3,1), C(3,4). Determinare i vertici del triangolo A'B'C' trasformato di ABC mediante l'omotetia ω'di centro O e caratteristica 2 e quelli del triangolo A"B"C" trasformato di A'B'C' mediante l'omotetia ω" di centro O e caratteristica -1/2. Dopo aver trovato le equazioni dell'omotetia ω'∘ω", verificare che il triangolo A"B"C" è il trasformato di ABC mediante questa omotetia.

[**R.** A'(2,2), B'(6,2), C'(6,8); A"(−1,−1), B"(−3,−1), C"(−3,−4); ω'∘ω": (x'=−x, y'=−y)]

2. Si considera il triangolo ABC, dove: A(2,1), B(1,2), C(3,3). Determinare i vertici del triangolo A'B'C' trasformato di ABC mediante l'omotetia ω'di centro O e caratteristica -3/2 e quelli del triangolo A"B"C" trasformato di A'B'C' mediante l'omotetia ω" di centro O e caratteristica 4/3. Dopo aver trovato le equazioni dell'omotetia ω'∘ω", verificare che il triangolo A"B"C" è il trasformato di ABC mediante questa omotetia.

3. Si considera il triangolo ABC, dove: A(2,0), B(4,3), C(1,2). Determinare i vertici del triangolo A'B'C' trasformato di ABC mediante la similitudine ω∘t, dove ω è l'omotetia di centro O e caratteristica 3/2 e τ è la traslazione di componenti (3,-2).

---

[3] Si tratta della piramide di Cheope, la quale, assieme alle piramidi di Khepren e Mykerinos, sorge nella Piana di Giza, nella valle del Nilo.

[4] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

Determinare anche i vertici del triangolo A”B”C” trasformato di ABC mediante la similitudine $t\circ\omega$. I due triangoli A’B’C’ e A”B”C” coincidono? Cosa se ne deduce?

$$\left[\mathbf{R.}\ A'(6,-2),\, B'\left(9,\frac{5}{2}\right),\, C'\left(\frac{9}{2},1\right);A''\left(\frac{15}{2},-3\right),\, B''\left(\frac{21}{2},\frac{3}{2}\right),\, C''(6,0);\ldots\right]$$

4. Sono assegnati i due quadrati ABCD ed A'B'C'D', dove:

A(0,0), B(1,0), C(1,1); A'(4,1), B'(7,1), C'(7,4).

Il secondo quadrato si può pensare come il trasformato del primo mediante la similitudine $\tau\circ\omega$, dove ω è un’omotetia di centro O e τ è una traslazione. Determinare le equazioni di ω e di τ.

5. Sono assegnate due circonferenze qualunque. Dimostrare che esiste almeno una similitudine che trasforma l’una nell’altra, esaminando tutti i possibili casi che si possono presentare a seconda delle reciproche posizioni delle due circonferenze.

Problemi di dimostrazione (nn. 6-27):

6. Dimostrare che una retta parallela ad uno dei lati di un triangolo e non passante per il vertice opposto interseca gli altri due lati o i loro prolungamenti in due punti che col vertice suddetto formano un triangolo simile al dato.
Viceversa, dimostrare che se una retta, intersecando due lati di un triangolo o i loro prolungamenti, forma col vertice comune a quei lati un triangolo simile a quello dato, allora essa è parallela al terzo lato del triangolo.

7. Considerate due altezze di un triangolo acutangolo, dimostrare che il loro punto intersezione divide ciascuna di esse in due parti, delle quali quelle di una costituiscono i medi di una proporzione e quelle dell’altra gli estremi.

8. Considerato un qualsiasi triangolo acutangolo ABC, siano H e K i piedi delle altezze relative ai lati AC e AB rispettivamente. Dimostrare che i triangoli ABC e AHK sono simili.

[**R.** Osservato che il quadrilatero BCHK è inscrivibile nel cerchio …]

9. Dimostrare che in un trapezio rettangolo avente le diagonali perpendicolari l’altezza è media proporzionale fra le basi. E viceversa: se l’altezza di un trapezio rettangolo è media proporzionale fra le basi, le diagonali del trapezio sono perpendicolari.

10. Dato un triangolo rettangolo e costruito il quadrato inscritto in esso in modo che un suo lato sia contenuto nell’ipotenusa, dimostrare che tale lato è medio proporzionale tra le rimanenti due parti dell’ipotenusa.

11. Dato un triangolo rettangolo e costruito il quadrato inscritto in esso in modo che un suo angolo coincida con l’angolo retto del triangolo, si dicano p e q le differenze fra le lunghezze di ciascun cateto e quelle del lato del quadrato. Dimostrare che il quadrato è equivalente al rettangolo di dimensioni p e q.

12. Considerato un quadrilatero inscritto in un cerchio, dimostrare che i quattro triangoli in cui esso è diviso dalle sue diagonali sono simili a due a due.

13. Considerata una semicirconferenza di diametro AB, si dica C un suo punto qualsiasi. Condotta per C la tangente t alla semicirconferenza, si dica H la proiezione ortogonale di A su t. Si dimostri che i due triangoli ACB e AHC sono simili.

14. Dimostrare che i raggi dei cerchi inscritti in due triangoli simili e quelli dei cerchi circoscritti stanno fra loro nel medesimo rapporto e che questo è il rapporto di similitudine dei due triangoli.

15. Come si sa, due poligoni congruenti sono anche simili ed equivalenti. Del resto è noto che due poligoni equivalenti non sono necessariamente congruenti né lo sono necessariamente due poligoni simili. Se, però, due poligoni sono equivalenti e simili nel medesimo tempo, allora essi sono congruenti:

dimostrare questo fatto.

16. Considerata una semicirconferenza c di diametro AB e centro O, si costruisca il quadrato ABCD dalla stessa parte di c rispetto ad AB. Si dicano quindi M ed N i punti in cui c è intersecata dalle rette OC e OD rispettivamente e si chiamino M' ed N' le proiezioni ortogonali di M ed N su AB. Si dimostri che il quadrilatero MNN'M' è un quadrato.

17. Considerato il triangolo OAB, si costruisca, dalla stessa parte di esso rispetto ad AB, il quadrato ABCD. Si dicano quindi M ed N i punti in cui i lati OA e OB sono intersecati rispettivamente dalle rette HC ed HD, dove H è il piede della perpendicolare condotta da O ad AB. Si chiamino poi M' ed N' le proiezioni ortogonali di M ed N su AB. Si dimostri che il quadrilatero MNN'M' è un quadrato.

18. Considerato il punto intersezione delle diagonali di un quadrilatero e presi i punti medi dei segmenti aventi un estremo in tale punto e l'altro in un vertice del quadrilatero, dimostrare che detti punti sono i vertici di un quadrilatero simile a quello dato.

19. Considerato un triangolo ABC, rettangolo in A, sia D un punto dell'ipotenusa tale che BD=AD. Detti M il punto medio del cateto AB ed H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, dimostrare che: 1) i triangoli DMN e DMB sono congruenti; 2) ciascuno di essi è simile al triangolo CHA ed al triangolo ABC.

20. Dimostrare che, se sui tre lati di un triangolo rettangolo si costruiscono tre triangoli equilateri, quello costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma degli altri due.
Più in generale, dimostrare che, se sui tre lati di un triangolo rettangolo si costruiscono tre poligoni simili qualsiasi, aventi quei tre lati come lati corrispondenti, allora il poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma degli altri due (la proposizione è una *generalizzazione del teorema di Pitagora*. Euclide la enuncia e dimostra in *Elementi*, libro VI, prop. 31).

21. Due circonferenze sono tangenti internamente in un punto A. Condotta per A una secante comune, si dicano M ed N rispettivamente i punti in cui essa interseca ulteriormente la circonferenza esterna c e quella interna c'. Considerata la corda PQ di c tangente in N a c', si dicano R l'ulteriore punto in cui AP interseca c' ed S quello in cui la interseca AQ. Si dimostri che i quadrilateri APMQ ed ARNS sono simili.

22. Sia dato il triangolo ABC e sia G il suo baricentro. Si dimostri che i triangoli GAB, GBC, GCA sono equivalenti, procedendo per gradi a seconda che il triangolo sia:
- equilatero (dimostrazione banale);
- isoscele (dimostrazione semplice ma non banale);
- scaleno (la dimostrazione richiede attenzione).

[**N.B.**: Si ricorda che il baricentro di un triangolo è il punto in cui s'incontrano le sue mediane e inoltre che esso divide ogni mediana in due parti, una doppia dell'altra]

23. Considerato un parallelogramma ABCD, si dica O il punto intersezione delle sue diagonali e si indichino con A' e C' le rispettive proiezioni dei punti A e C sulla retta BD e con B' e D' quelle dei punti B e D sulla retta AC. Si dimostri che:
1) i triangoli OA'A ed OC'C sono congruenti e parimenti sono congruenti i triangoli OB'B ed OD'D;
2) il quadrilatero A'B'C'D' è un parallelogramma;
3) i triangoli OA'A ed OD'D sono simili e parimenti sono simili i triangoli OB'B e OC'C;
4) i due parallelogrammi ABCD ed A'B'C'D' sono simili.

24. ® Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si prenda un qualsiasi punto D∈[AB] e si costruisca il triangolo ECD, isoscele sulla base CD e simile al triangolo ABC, in modo che il punto E stia dalla stessa parte di A rispetto a BC. Detto O il punto intersezione dei segmenti

AC e DE, si dimostri che:
1) i triangoli EOC ed AOD sono simili e, di conseguenza, che lo sono pure i triangoli EOA e COD;
2) il punto E si trova sulla parallela a BC condotta per A;
3) il quadrilatero ADCE è inscrivibile in un cerchio.

25. Si consideri la seguente proposizione: "In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
[Tratto dall'esame di Stato 2007, indirizzo sperimentale, sessione suppletiva]

26. Se i punti A', B', C' sono le intersezioni di una retta rispettivamente con le rette dei lati BC, CA, AB di un triangolo qualsiasi, allora si ha:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}=1.$$

[Questa proprietà va sotto il nome di **teorema di Menelao**, astronomo e matematico greco, 1° sec. d.C.]

[**R.** Si suggerisce di tracciare per A la retta r parallela alla retta BC e, dopo aver chiamato R il punto in cui essa interseca la retta dei punti A', B', C', considerare, dapprima i due triangoli ARC' e BA'C e poi i due triangoli ARB' e CA'B']

27. Su una circonferenza si prendano nell'ordine i punti A, B, C, D, E, ma in modo che C sia il punto di mezzo dell'arco BD. Chiamati poi M ed N i punti intersezione rispettivamente delle corde AC e BE e delle corde AD e CE, si dimostri che il quadrilatero convesso AENM è inscrivibile in una circonferenza.

[**R**. Si constata anzitutto che gli angoli $C\widehat{A}D$ e $B\widehat{E}C$ sono uguali. Indicato poi con H il punto comune ai segmenti AN e ME, si dimostra che i triangoli AHM ed EHN sono simili per il 1° criterio; di conseguenza lo sono anche i triangoli MHN ed AHE per il 2° criterio. Si desume da ciò che gli angoli $H\widehat{A}E$ e $H\widehat{M}N$ sono uguali. Pertanto $M\widehat{A}E=M\widehat{A}H+H\widehat{A}E=H\widehat{E}N+H\widehat{M}N$. Dunque l'angolo $M\widehat{N}E$, essendo supplementare dell'angolo $H\widehat{E}N+H\widehat{M}N$, … . In conclusione …]

Problemi vari [5]:

28. Nella figura sottostante (Fig. 21) sono disegnati due triangoli simili. Costruisci e descrivi una similitudine che trasformi il triangolo ABC in A'B'C'.

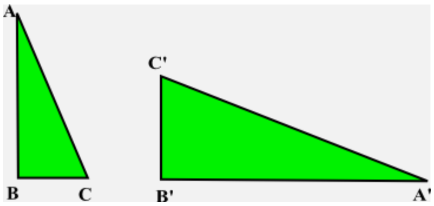

FIG. 21

29. I cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi 3a e 4a, essendo a una lunghezza assegnata. L'ipotenusa di un altro triangolo rettangolo, simile al primo, è lunga 30a. Calcolare i perimetri dei due triangoli. [**R.** 12a, 72a]

---

[5] **NOTA BENE**. Qualche problema ha come risolvente un'equazione di 2° grado o un'equazione in cui l'incognita figura sotto il segno di radice quadrata. In tal caso ci sono due possibilità: a) l'argomento è già stato studiato e la risoluzione del problema non presenta difficoltà; b) l'argomento non è stato ancora studiato e perciò la risoluzione, una volta ottenuta l'equazione risolvente, deve essere provvisoriamente accantonata.

30. La base e l'altezza di un triangolo isoscele sono lunghe rispettivamente 10a e 12a, dove a è una lunghezza assegnata. Il lato obliquo di un altro triangolo isoscele, simile al primo, è lungo 39a. Calcolare le aree dei due triangoli. [**R.** $60a^2$, $540a^2$]

31. La diagonale ed un lato di un rettangolo sono lunghi rispettivamente 17a e 8a, essendo a una lunghezza assegnata. L'area di un altro rettangolo, simile al primo, è uguale a $30a^2$. Calcolare i perimetri dei due rettangoli. [**R.** 46a, 23a]

32. Le diagonali di un rombo sono lunghe 21a e 20a, essendo a una lunghezza assegnata. Il perimetro di un altro rombo, simile al primo, è 174a. Calcolare le aree dei due rombi. [**R.** $210\ a^2$, $1890\ a^2$]

33. La diagonale minore di un parallelogramma è perpendicolare ad uno dei suoi lati ed è lunga 8a; inoltre il perimetro del parallelogramma è 32a, essendo a una lunghezza assegnata. Un altro parallelogramma, simile al primo, ha area uguale a $32a^2$; calcolarne il perimetro. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{32}{3}a\sqrt{6}\right]$

34. I lati di un triangolo sono lunghi 4a, 5a, 6a, essendo a una lunghezza assegnata. Una corda del triangolo, lunga 4a e parallela al lato maggiore, divide il triangolo in due poligoni dei quali si chiede di calcolare i perimetri. [**R.** 10a, 13a]

35. La base maggiore AB e l'altezza AD del trapezio rettangolo ABCD sono lunghe 7a e 4a rispettivamente, mentre la sua diagonale minore è lunga 5a, essendo a una lunghezza assegnata. Detto E il punto in cui s'intersecano i prolungamenti dei lati non paralleli del trapezio, calcolare il perimetro e l'area del triangolo EAB. $\left[\mathbf{R.}\ 7a\left(2+\sqrt{2}\right), \frac{49}{2}a^2\right]$

36. Considerato il triangolo ABC, rettangolo in B, si tracci la circonferenza di diametro AB e si dica D il punto in cui essa è secata ulteriormente dalla retta AC. Indicato quindi con E il punto simmetrico di D rispetto ad AB, si calcoli il perimetro del quadrilatero AEBC sapendo che la sua area è $\frac{17}{4}L^2$, dove L è una lunghezza nota, e che $AB = \frac{3}{4}BC$. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{11}{2}L\sqrt{3}\right]$

37. L'ipotenusa ed il perimetro di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente 20 cm e 48 cm. Calcolare la misura di una corda del triangolo, parallela al cateto minore, sapendo che il trapezio, che essa individua nel triangolo dato, ha il lato obliquo uguale alla base minore. Di tale trapezio calcolare, poi, le misure del perimetro e dell'area. [**R.** 15/2 cm; …]

38. I lati di un triangolo misurano 10 cm, 12 cm, 15 cm. Determinare le misure dei lati di un triangolo simile a quello dato, sapendo che il suo perimetro misura 148 cm. [**R.** 40 cm, 48 cm, …]

39. I cateti di un triangolo rettangolo misurano 7 cm e 24 cm. Un secondo triangolo, simile al primo, ha il perimetro di 280 cm. Calcolarne la misura dell'ipotenusa. [**R.** 125 cm]

40. Le dimensioni di un rettangolo sono 10k e 24k, essendo k una lunghezza assegnata. Calcolare la lunghezza delle diagonali di un rettangolo simile a quello dato sapendo che la sua area è $60k^2$. [**R.** 13 k]

41. Sul lato AB, di lunghezza assegnata h, del rettangolo ABCD determinare un punto E in modo che l'area del triangolo AED sia la metà di quella del triangolo BEC. $\left[\mathbf{R.}\ \overline{AE}=h/3\right]$

42. Un quadrato, la cui diagonale è lunga $6a\sqrt{2}$, essendo a una lunghezza assegnata, è inscritto in un triangolo rettangolo in modo che un suo lato sia contenuto nell'ipotenusa, la cui lunghezza è 18a. Calcolare il perimetro del triangolo. $\left[\mathbf{R.}\ 18a\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$

43. Si consideri un rettangolo, la cui dimensione maggiore è uguale ad una lunghezza assegnata a.
a) È possibile dividere il rettangolo in due rettangoli congruenti fra loro e simili al rettangolo dato? b) È possibile dividerlo in tre rettangoli congruenti fra loro e simili al rettangolo dato?

44. Nel quadrato ABCD, di lato unitario, si indichino con E, F, G, H, nell'ordine, i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA. Si indichino, inoltre, con M ed N i punti in cui AF interseca rispettivamente DE e

GB e con Q e P i punti in cui HC interseca rispettivamente DE e GB.
Dopo aver dimostrato che il quadrilatero MNPQ è un quadrato, calcolarne l'area.

[**R**. Bisogna dimostrare diversi fatti: a) le rette AF e HC sono … , come le rette DE e GB; b) i triangoli AME ed ABF sono … ; c) i triangoli AMD e DQC sono … ; d) i segmenti AM, DQ e QM sono … ; e) A(MNPQ)=1/5]

45. Nel quadrato ABCD, di lato unitario, si indichino con E, F, G, H, nell'ordine, i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA. Si indichino, inoltre, con M il punto in cui AG interseca CH e con N il punto in cui AF interseca rispettivamente CE.
Dopo aver dimostrato che il quadrilatero ANCM è un rombo, calcolarne l'area.

[**R**. … . Ai fini del calcolo dell'area S del rombo, conviene constatare che i due triangoli HMG e CMA si corrispondono in un'omotetia, per cui …, a conti fatti si trova S=1/3]

46. Le basi AB e DC del trapezio ABCD misurano rispettivamente 9 cm e 3 cm. Una corda del trapezio, parallela alle sue basi, divide il trapezio medesimo in due parti, di cui quella determinata dalla base minore è equivalente ai 2/7 dell'altra. Stabilire se i dati assegnati sono sufficienti per determinare: a) la misura della corda; b) l'area del trapezio ABCD.

[**R.** a) Sì. Conviene costruire il punto P in cui si secano i lati obliqui del trapezio e, chiamata EF la corda in esame, confrontare dapprima i triangoli PAB e PCD e poi i triangoli PEF e PCD al fine di calcolare il rapporto h/k fra le altezze dei due trapezi ABCD e EFCD. Una vola trovato che h/k=6/(EF–3), dopo qualche altra considerazione si giunge all'equazione $\overline{EF}^2=25$, da cui segue EF = 5 cm; b) No]

47. ® Il seguente problema si ispira ad un altro, proposto e risolto da **Erone** di Alessandria (I-II sec. d.C.) nella sua *Metrica*:
«Dato il triangolo rettangolo ABC, i cui cateti AB e AC misurano rispettivamente 40 m e 30 m, determinare un punto D sul lato AB, un punto E sul lato BC e un punto F sul lato CA, in modo che il triangolo DEF abbia area 168 m^2 ed i triangoli ADF, BED, CEF siano equivalenti».

[**R.** Si suggerisce di porre: $\overline{DB}=x$ e $\overline{FC}=y$; con un po' di fatica si giunge al sistema formato dalle due seguenti equazioni: $3x+4y=120$, $xy=288$; risolto il quale si ottengono due soluzioni entrambe accettabili: $(x_1=16, y_1=18)$, $(x_2=24, y_2=12)$. Un altro passo e un po' di attenzione e si giunge alle due soluzioni del problema: $\overline{AD}_1=24$; $\overline{BE}_1=22{,}5$; $\overline{AF}_1=12$. $\overline{AD}_2=16$; $\overline{BE}_2=15$; $\overline{AF}_2=18$]

48. ® Il seguente problema si ispira ad un altro, proposto e risolto da **Luca Pacioli** (1445-1515 circa) nella sua *Summa:* «In un triangolo isoscele ciascuno dei lati congruenti misura 10 cm e la base misura 12 cm. In esso sono inscritte tre circonferenze congruenti in modo che ciascuna sia tangente a due lati del triangolo ed una di esse sia tangente alle altre due. Determinare il raggio delle circonferenze». [**R**. 15/8 cm]

49. Due circonferenze γ e γ', di centri C e C', sono l'una esterna all'altra e toccano nei punti A e A' rispettivamente una medesima retta che le lascia da parti opposte rispetto ad essa. Indicare con B e B' i punti in cui il segmento CC' interseca nell'ordine γ e γ'.

a) Dimostrare che le rette AB e A'B' sono parallele.
b) Ammesso che i raggi delle due circonferenze γ e γ' siano rispettivamente 6a e 9a, essendo a una lunghezza assegnata, e ammesso che la distanza dei loro centri sia 23a: 1) trovare la distanza dei punti di contatto A e A'; 2) calcolare l'area del quadrilatero AB'A'B.

50. Il sig. Rossi possiede un orto, che ha la forma di un rettangolo, le cui dimensioni sono 30 m e 15 m. Il sig. Rossi vorrebbe ricavarne una regione a forma di "L", avente un'area di 250 m^2, in modo che la parte restante dell'orto abbia ancora la forma di un rettangolo e, per giunta, simile a quello originario. Il problema del sig. Rossi è risolubile?

51. Un rettangolo R è simile ai due rettangoli in cui esso è diviso dal segmento che congiunge i punti medi dei due lati maggiori. Esso può essere trasformato in un quadrato Q se la sua dimensione maggiore è diminuita di una lunghezza e la sua dimensione minore è aumentata della stessa lunghezza. È maggiore l'area del rettangolo R o quella del quadrato Q?

52. I lati AB e BC del parallelogramma ABCD misurano rispettivamente 10 cm e $5\sqrt{2}$ cm e, inoltre, anche la diagonale BD misura $5\sqrt{2}$ cm. Calcolare l'area di ciascuna delle due parti in cui il parallelogramma è diviso dalla perpendicolare alla diagonale maggiore nel suo punto medio.

53. ® Considerato il trapezio ABCD, sia E il punto comune alle sue diagonali. I due triangoli EAB ed ECD hanno aree rispettivamente 75 cm^2 e 27 cm^2. I dati assegnati sono sufficienti per calcolare le misure delle basi del trapezio? Lo sono per calcolare la sua area?

54. Il sig. Rossi possiede un appezzamento di terreno piuttosto esteso a forma di triangolo. Lo lascia in eredità ai suoi 4 figli ma a condizione che trovino la maniera di suddividerlo in modo che le 4 parti siano non solo equivalenti ma anche simili. Spiegare in modo esauriente come possa essere trovata la soluzione.

55. Siano a, b le dimensioni di un rettangolo, con $a>b$. Una retta parallela ad uno dei lati del rettangolo lo divide in due parti: un quadrato e un rettangolo simile a quello dato. Quale relazione sussiste fra a e b? [**R.** $a^2-b^2=ab$]

56. I lati BC e CA del triangolo ABC misurano rispettivamente 6 cm e 4 cm. Inoltre l'angolo in A è il doppio dell'angolo in B. Calcolare: a) la misura del lato AB; b) la misura della bisettrice AD; c) le misure delle due parti in cui il punto D divide il lato BC. [**R.** a) 5 cm, b) 10/3 cm, c) …]

57. I lati di un rettangolo misurano 16 cm e 10 cm. Internamente ad esso è costruito un secondo rettangolo avente i lati paralleli ed alla stessa distanza $d\neq0$ dai lati del primo rettangolo. a) Dimostrare che i due rettangoli non sono simili. b) Calcolare d sapendo che l'area del rettangolo interno è 10 cm^2.
[**R.** a) … ; b) 3 cm]

58. Sia un trapezio rettangolo di base minore AD, base maggiore BC e altezza AB. Siano inoltre EF e GH due sue corde parallele alle basi con $EF<GH$. Si sa che la corda EF e la base BC sono lunghe rispettivamente a e 4a, essendo a una lunghezza nota.

a) Dopo aver calcolato le lunghezze della base AD e della corda GH, verificare che i segmenti AD, EF, GH, BC, presi nell'ordine scritto, sono tali che, a partire dal secondo, ciascuno è lungo il doppio di quello che lo precede.
b) Spiegare in modo esauriente perché i dati non sono sufficienti per il calcolo dell'altezza AB.

59. Sia ABC un triangolo isoscele sulla base BC. Si indichi con D il punto medio di BC e con E il punto medio di AD. Siano poi: F la proiezione ortogonale di D sulla retta BE; G l'intersezione di AC con la parallela a BC condotta per E; H e L i punti in cui la parallela a BE condotta per G interseca rispettivamente BC e DE. Dimostrare che:

a) il quadrilatero BEGH è un parallelogramma;
b) il segmento GL è mediana e altezza del triangolo GED rispetto al lato DE;
c) i segmenti GD, GF, GA, GC sono uguali ;
d) il triangolo AFC è rettangolo.

60. Considerata una circonferenza γ di diametro AB, siano C e D due punti distinti presi su un delle due semicirconferenze in cui AB divide γ, in modo che i punti A, D, C, B si susseguano in quest'ordine. Siano inoltre P e Q le proiezioni ortogonali di D sulle rette CA e CB rispettivamente. Siano infine E il punto simmetrico di D rispetto al centro della circonferenza ed N un qualsiasi punto preso sulla retta EC da parte opposta di E rispetto a C. Dimostrare che:

a) la circonferenza di diametro CD passa per i punti P e Q;
b) la retta EN è tangente a tale circonferenza;
c) gli angoli $B\hat{A}E$ e $B\hat{C}E$ sono uguali e parimenti sono uguali gli angoli $Q\hat{P}C$ e $Q\hat{C}N$;
d) i triangoli BAE e QPC sono simili.

61. Considerato un segmento AB, sia C il punto che lo divide internamente in due parti AC e CB, la prima doppia della seconda. Dalla stessa parte di AB si costruiscano i due triangoli equilateri ACD e CBE.
- Trovare il centro e la caratteristica dell'omotetia che trasforma il triangolo ACD nel triangolo CBE
- Costruire il triangolo trasformato di ACE nella rotazione di 60° in senso orario intorno a C.
- Calcolare il rapporto fra l'area del triangolo DCB e quella del triangolo EFC, essendo F il punto comune ai segmenti AE e CD.

62. Nel triangolo acutangolo ABC si ha: CA<AB<BC. Si prendano, internamente al lato BC, due punti M ed N in modo che risulti BM<BN ed inoltre $B\hat{A}N = A\hat{C}B$ e $M\hat{A}C = C\hat{B}A$.
a) Dimostrare che i triangoli ABC, ABN, AMC sono simili fra loro.
b) Descrivere una similitudine che trasformi il triangolo ABN nel triangolo AMC.

63. Nel triangolo ABC si ha: $\overline{AB} = 10\text{m}$, $\overline{BC} = 21\text{m}$, $\overline{CA} = 17\text{m}$. Siano D ed E due punti, il primo del lato AB ed il secondo del lato CA, tali che la corda DE sia parallela al lato BC e risulti inoltre BD+EC=BC.
a) Trovare la lunghezza della corda DE.
b) Calcolare le aree delle due regioni in cui la corda DE divide il triangolo ABC.
c) Indicato con F il punto che divide il lato BC nelle due parti, BF e FC, rispettivamente uguali a BD ed EC, spiegare perché F è equidistante dalle rette AB, DE, AC.

$\left[\textbf{R.}\ \text{a)}\,\dfrac{14}{3}\,\text{m};\ \ \text{b)}\,\dfrac{112}{27}\,\text{m}^2, \ldots;\ \text{c)} \ldots\right]$

64. La circonferenza γ_1 è tangente esternamente alla circonferenza γ_2 nel punto A ed alla circonferenza γ_3 nel punto B (Fig. 22). Preso su γ_1 un punto C, sia D l'ulteriore punto in cui la retta CA interseca γ_2 e sia E l'ulteriore punto in cui la retta CB interseca γ_3. Siano inoltre F e G gli ulteriori punti in cui la retta AB interseca rispettivamente γ_2 e γ_3.

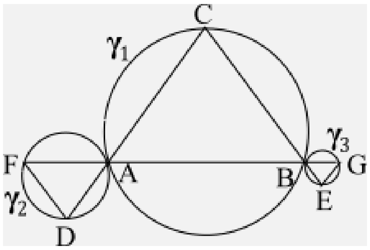

FIG. 22

Si sa che il rapporto tra il raggio della circonferenza γ_1 e quello della circonferenza γ_2 è $5/2$, che è anche il rapporto fra il raggio della circonferenza γ_2 e quello della circonferenza γ_3. Si sa inoltre che i lati AB, BC, CA del triangolo ABC misurano nell'ordine 6 cm, 5 cm, 5 cm. Calcolare: a) la lunghezza del segmento FG; b) le aree dei triangoli ADF e BEG.

[**R.** a) 9,36 cm; b) 1,92 cm², 0,3072 cm²]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Considerato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, la somma di due segmenti presi su una delle due trasversali è uguale alla somma dei segmenti corrispondenti presi sull'altra trasversale. È vero o falso?
2. È dato il segmento AB. Utilizzando solamente riga (non graduata) e compasso, costruire un triangolo isoscele, di cui AB è uno dei lati uguali ed H il piede dell'altezza relativa a tale lato, sapendo che AH:HB=3:2.
3. È vero che l'identità e la simmetria centrale si possono considerare particolari omotetie?
4. Si consideri l'insieme delle omotetie dirette e quello delle omotetie indirette. È vero che ciascuno dei due insiemi è chiuso rispetto all'operazione prodotto?
5. È vero che esiste almeno una similitudine che trasforma una retta in una retta parallela?
6. È vero che ogni similitudine trasforma un quadrato in un quadrato?
7. È dato il triangolo isoscele ABC, il cui angolo al vertice $B\widehat{A}C$ misura 36°. Dopo aver tracciato la corda BD tale che anche l'angolo $C\widehat{B}D$ misuri 36°, dimostrare che i due triangoli ABC e BCD sono simili. Costruire e descrivere quindi una similitudine che trasformi il triangolo ABC nel triangolo BCD.
8. È vero che un'omotetia diretta conserva il verso degli angoli e un'omotetia indiretta lo inverte?
9. Per stabilire che due poligoni sono simili bisognerebbe far vedere che esiste almeno una similitudine che trasforma l'uno nell'altro. Oltre a questa modalità, esiste qualche criterio in base al quale si possa concludere che due poligoni sono simili?

RISPOSTE.

1. È falso. Un noto teorema assicura solo che se un segmento è lungo quanto la somma delle lunghezze di due segmenti di una trasversale allora quel segmento ha come corrispondente sull'altra trasversale un segmento la cui lunghezza è uguale alla somma delle lunghezze dei segmenti corrispondenti degli altri due, ma non assicura che i due segmenti siano uguali: potrebbero esserlo e non esserlo. Dipende da come sono inclinate le due rette rispetto alle parallele.
2. Dapprima si costruisce il punto H utilizzando il teorema di Talete; poi si traccia la perpendicolare p ad AB per H; infine si traccia la circonferenza avente centro in A e raggio AB. Tale circonferenza interseca la retta p in due punti: C' e C". Ciascuno dei due triangoli ABC' ed ABC" risolve il problema. Naturalmente le varie costruzioni devono essere fatte mediante l'uso esclusivo di riga e compasso, compresa quella della retta p.
3. Sì. Precisamente l'identità si può considerare un'omotetia di caratteristica 1 e la simmetria centrale un'omotetia di caratteristica -1.
4. No. Solo l'insieme delle omotetie dirette è chiuso, mentre il prodotto di due omotetie indirette dà luogo ad un'omotetia diretta.
5. È così. Basti pensare che ogni omotetia e ogni traslazione (particolari similitudini) trasformano una retta in una retta parallela.
6. Sì. Infatti ogni similitudine trasforma una figura in una figura avente la stessa forma e quindi un quadrato in un quadrato.
7. È facile stabilire che gli angoli interni sia del triangolo ABC sia del triangolo BCD misurano 36°, 72°, 72°. Perciò i due triangoli sono simili (Fig. 23). Esiste pertanto almeno una similitudine che trasforma

ABC in BCD. Una similitudine particolare è composta dalla traslazione τ di vettore $\overrightarrow{AB}$ (che trasforma ABC in BB'C') seguita dalla rotazione ρ, in senso antiorario intorno a B, di ampiezza $B'\widehat{B}C=180°-72°=108°$ (la quale trasforma BB'C' in BB"C"), seguita a sua volta dall'omotetia ω di centro B e caratteristica BC/BB'' (che trasforma BB"C" in BCD). Una similitudine che trasformi ABC in BCD è pertanto $\sigma=(\tau\circ\rho)\circ\omega$.

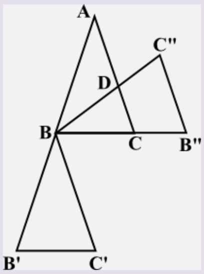

FIG. 23

8. No. Sia l'omotetia diretta che l'omotetia indiretta sono similitudini dirette e per questo conservano il verso degli angoli.
9. Sì, un criterio esiste. Si tratta di stabilire che gli angoli dell'un poligono sono congruenti a quelli dell'altro e i lati che comprendono angoli congruenti sono direttamente proporzionali.

COMPLEMENTI: RETTA DI EULERO.

TEOREMA. L'ortocentro H, il baricentro G e il circocentro K di un triangolo sono situati su una medesima retta (***retta di Eulero***) e inoltre HG = 2 GK.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il triangolo ABC (Fig. 24), disegniamo il baricentro G e l'ortocentro H. Indicato con M il punto medio del lato AB, intanto è evidente che G appartiene alla mediana CM e risulta CG = 2 GM.
Prolunghiamo il segmento HG di un segmento GP tale che HG = 2 GP. Si desume che i due triangoli CGH e MGP si corrispondono in una omotetia di centro G. Siccome le rette CH ed MP si corrispondono in tale omotetia e siccome rette corrispondenti in un'omotetia sono parallele, ne consegue che CH è parallela ad MP e, perciò, MP è perpendicolare ad AB. Il che significa che MP è l'asse del lato AB del triangolo ABC.

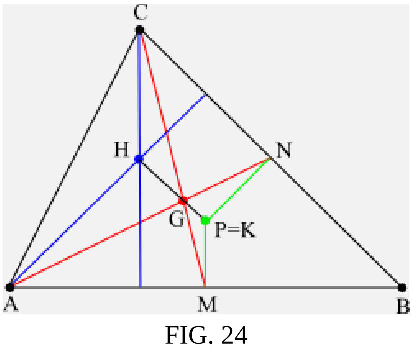

FIG. 24

In maniera analoga, indicato con N il punto medio del lato BC e ragionando sui triangoli GAH e GNP, si dimostra che la stessa omotetia precedente associa tali triangoli e, inoltre, che NP è l'asse del lato BC.
Il punto P è, quindi, proprio il circocentro K del triangolo ABC. Ragion per cui: HG = 2 GK.