Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le proprietà delle figure piane
- Conoscere e utilizzare il calcolo numerico e algebrico

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *enunciare e applicare le formule per calcolare le aree ed i volumi dei principali solidi geometrici (prisma, piramide, cilindro, cono, sfera)*
- *risolvere semplici problemi sulle aree e sui volumi dei solidi*

Questa unità è riservata al 1° biennio degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali.

Solidi geometrici: aree e volumi

Unità 32

32.1 CUBO

Il **cubo** è un solido geometrico delimitato da sei quadrati congruenti. Un modello di cubo è il "dado". In figura 1 è rappresentato il disegno di un modello di cubo, ma tu puoi servirti di un modello materiale: se ti è possibile, prova a costruirlo o a reperirlo.
I 6 quadrati che delimitano un cubo si dicono ***facce*** del cubo.
I lati di questi quadrati sono gli ***spigoli*** del cubo. Sono in numero di 12 e, trattandosi di lati di quadrati congruenti, sono essi stessi congruenti.
I vertici delle facce di un cubo si dicono ***vertici*** del cubo. Sono in numero di 8 e si possono ripartire in 4 coppie, mettendo in ogni coppia due vertici non appartenenti alla stessa faccia (come, per esempio: A_1 ed A_7): i due vertici di una stessa coppia si dicono ***vertici opposti***.
Anche le 6 facce del cubo si possono ripartire in coppie: 3 per la precisione. Basta mettere in ogni coppia due facce che non hanno vertici comuni (come, per esempio: $A_1A_2A_3A_4$ e $A_5A_6A_7A_8$): le due facce di una stessa coppia si dicono ***facce opposte***.

Con riferimento al cubo di figura 1, individua:
- le 3 coppie di facce opposte;
- le 4 coppie di vertici opposti.

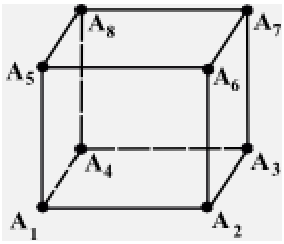


FIG. 1

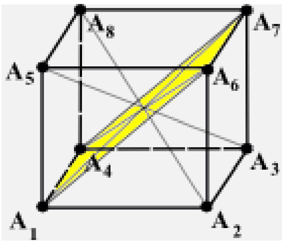


FIG. 2

Ogni segmento che unisce due vertici opposti di un cubo si chiama ***diagonale*** del cubo: in un cubo vi sono 4 diagonali.
Con riferimento al nostro cubo, esse sono i segmenti A_1A_7, A_2A_8, A_3A_5, A_4A_6.
Vale la seguente proprietà che ci limitiamo ad enunciare, come tutte quelle con cui avremo a che fare in questa unità:

Le diagonali di un cubo (Fig. 2):
- passano tutte per uno stesso punto che biseca ciascuna di esse (si chiama ***centro*** del cubo);
- sono congruenti.

32.2 POLIEDRI REGOLARI

32.2.1 Il cubo rientra in una particolare categoria di solidi geometrici, denominati **poliedri regolari**.
È chiamato anche ***esaedro regolare*** (Fig. 3).
Oltre ad esso vi sono soltanto altri quattro poliedri regolari: tre sono limitati da triangoli equilateri congruenti ed uno da pentagoni regolari congruenti.
I poliedri regolari delimitati da triangoli equilateri congruenti sono:
- il ***tetraedro regolare***, avente 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli (Fig. 4);
- l'***ottaedro regolare***, avente 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli (Fig. 5);

- l'***icosaedro regolare***, avente 20 facce, 12 vertici e 30 spigoli (Fig. 6).

L'unico poliedro regolare delimitato da pentagoni regolari congruenti è il ***dodecaedro regolare***, avente 12 facce, 20 vertici e 30 spigoli (Fig. 7).

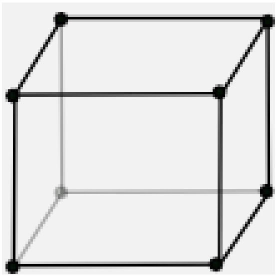


FIG. 3

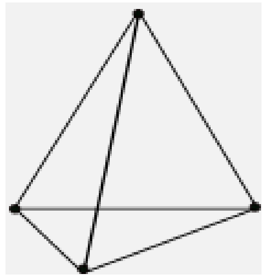


FIG. 4

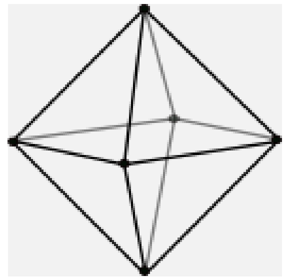


FIG. 5

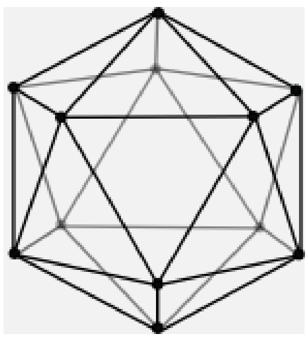


FIG. 6

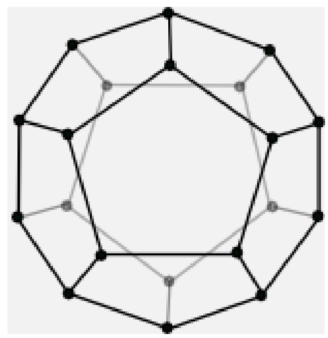


FIG. 7

32.2.2 NOTA STORICA. La costruzione dei poliedri regolari, che costituisce la parte conclusiva del XIII libro degli *Elementi* di Euclide, era attribuita nell'antichità al filosofo ateniese Platone (per questa ragione ancor oggi i poliedri regolari sono detti talvolta *solidi platonici*), poiché costui ne tratta in un suo dialogo, il *Timeo*.

In uno scolio [1] al XIII libro degli *Elementi*, di datazione incerta, si dichiara però che la loro scoperta non deve essere attribuita a Platone (427-347 a.C.), poiché tre di essi (cubo, tetraedro e dodecaedro) erano noti ai Pitagorici (VI sec. a.C.) e gli altri due (ottaedro e icosaedro) erano dovuti a un matematico ateniese di nome **Teeteto** (circa 415-369 a.C.), seguace di **Teodoro** di Cirene, matematico di scuola pitagorica, attivo intorno al 390 a.C. Insomma, secondo lo scoliaste, i cinque poliedri regolari sono scoperte dei Pitagorici.

32.2.3 Ti proponiamo alcuni esercizi sui poliedri regolari.

a) Descrivi il solido avente per vertici i centri delle facce di un:
1) tetraedro regolare; 2) esaedro regolare; 3) ottaedro regolare;
4) dodecaedro regolare; 5) icosaedro regolare.

b) Determina lo spigolo del tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce di un tetraedro regolare di spigolo s. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{s}{3}\right]$

[1] Uno "scolio" è una nota critica ad un autore classico.

c) Determina lo spigolo dell'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle facce di un esaedro regolare di spigolo s. $\left[\mathbf{R.}\ s\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

d) Determina lo spigolo dell'esaedro regolare avente per vertici i centri delle facce di un ottaedro regolare di spigolo s. $\left[\mathbf{R.}\ s\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

32.3 POLIEDRI E SOLIDI GEOMETRICI

32.3.1 Esistono figure solide limitate da poligoni qualsiasi e non necessariamente da poligoni regolari uguali come nel caso dei poliedri regolari. Queste figure si chiamano genericamente *poliedri*. Precisamente, vale la seguente definizione:

Si dice **poliedro** (2) una parte finita di spazio limitata da poligoni tali che due qualsiasi di essi non siano complanari, ogni loro lato sia comune a due e soltanto due di essi e il piano di ciascuno di essi lasci da una stessa parte tutti gli altri.

I poligoni che delimitano un poliedro si dicono le sue ***facce***. I vertici e i lati delle facce si dicono rispettivamente ***vertici*** e ***spigoli*** del poliedro.

Qual è il minimo numero di facce necessario per avere un poliedro?

Un poliedro prende il nome dal numero delle sue facce. In particolare, un poliedro di quattro, cinque, sei, … , facce si dice rispettivamente *tetraedro, pentaedro*, *esaedro*, … .
Ci soffermiamo adesso a descrivere due particolari poliedri: il *prisma* e la *piramide*.

32.3.2 Incominciamo col riprendere il cubo (Fig. 8). I suoi 12 spigoli possono essere ripartiti in 3 classi, ciascuna formata da 4 spigoli paralleli tra loro. Ad esempio, una classe è formata dagli spigoli A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8. Se, in maniera del tutto arbitraria, allunghiamo o accorciamo di una stessa lunghezza i 4 spigoli di una delle 3 classi e di un'altra lunghezza quelli di una delle due classi rimanenti, otteniamo un solido geometrico delimitato da 6 rettangoli, due a due congruenti (Fig. 9): si chiama **parallelepipedo rettangolo**.
Un libro, un mattone, uno scatolone sono modelli di parallelepipedi rettangoli.

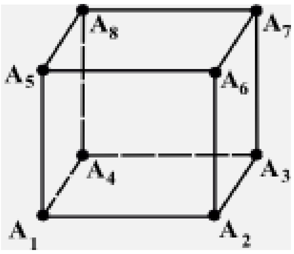


FIG. 8

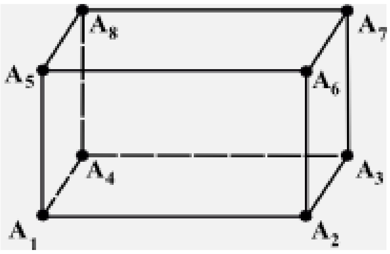


FIG. 9

Due qualsiasi facce parallele del parallelepipedo, come ad esempio le facce $A_1A_2A_3A_4$ e $A_5A_6A_7A_8$, si possono assumere come ***basi***, mentre uno qualsiasi degli spigoli che non appartengono alle basi, come A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8, si assume come ***altezza***.

[2] Correttamente si dovrebbe parlare di **poliedro convesso** per distinguere dal **poliedro concavo** in cui è possibile che esista una faccia il cui piano non lascia da una medesima parte le altre facce. Non ci occuperemo di tali figure, per cui quando parleremo di poliedro lo faremo con riferimento al poliedro convesso.

Ogni spigolo laterale è *perpendicolare* ai piani delle basi del parallelepipedo ed a tutte le rette di tali piani passanti per il punto in cui la perpendicolare li interseca.

I 4 rettangoli $A_1A_2A_6A_5$, $A_2A_3A_7A_6$, $A_3A_4A_8A_7$, $A_4A_1A_5A_8$, diversi dalle basi, si chiamano ***facce laterali*** del parallelepipedo.

Un parallelepipedo rettangolo ha dunque due rettangoli come basi. Se i due rettangoli sono in particolare dei quadrati, il parallelepipedo si chiama anche **prisma regolare** a base *quadrata*.

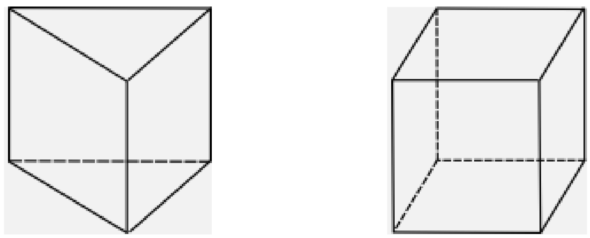
In questo caso *le facce laterali sono rettangoli uguali*.

Se poi, invece di quadrati, le basi sono triangoli equilateri, pentagoni regolari, esagoni regolari, eccetera, si ha un **prisma regolare** a base *triangolare*, *pentagonale*, *esagonale*, eccetera.

Anche in questo caso *le facce laterali sono rettangoli uguali*. Esse sono tante quanti sono gli spigoli di una base. La somma delle aree delle facce laterali è l'*area laterale* del prisma.

In figura 10 sono rappresentati: (a) un prisma regolare a base triangolare, (b) un prisma regolare a base quadrata.

Se le basi non sono poligoni regolari e/o se gli spigoli laterali sono inclinati rispetto alle basi il prisma *non è regolare* ed in tal caso si chiama semplicemente **prisma**.



(a) (b)

FIG. 10

32.3.3 Consideriamo adesso un quadrato ABCD e, detto H il suo centro, conduciamo per H la retta perpendicolare al piano del quadrato e su di essa prendiamo un punto V, distinto da H (Fig. 11).

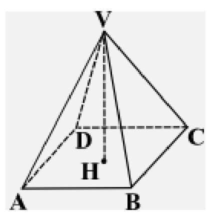


FIG. 11

Congiungiamo V con i vertici del quadrato: si vengono a formare quattro triangoli. Essi e il quadrato delimitano un solido geometrico che si chiama **piramide regolare** a base *quadrata*.

Il quadrato si chiama per l'appunto *base* della piramide, il segmento VH, vale a dire il segmento condotto da V perpendicolarmente alla base della piramide, si chiama *altezza* della piramide, mentre i 4 triangoli si dicono *facce laterali*; il punto V si chiama *vertice* della piramide.

Le facce laterali di una piramide regolare a base quadrata sono triangoli isosceli congruenti.

L'altezza, uscente dal vertice della piramide, di una qualunque di tali facce laterali si chiama *apotema* della piramide. In figura 4 essa è il segmento VM, essendo M il punto medio dello spigolo AB.

Se fossimo partiti da un triangolo equilatero invece che da un quadrato, ripetendo la costruzione precedente avremmo ottenuto una **piramide regolare** a base *triangolare*.

Ugualmente si possono ottenere piramidi regolari aventi per basi poligoni regolari qualsiasi.
Anche adesso la somma delle aree delle facce laterali di una piramide è l'*area laterale* della piramide.
Se la base non è un poligono regolare e/o se la perpendicolare ad essa condotta per il vertice non cade nel centro della base la piramide *non è regolare* e in tal caso si chiama semplicemente **piramide**.

32.3.4 NOTA BENE. Un prisma regolare o una piramide regolare non sono poliedri regolari. O meglio, non lo sono in generale. C'è infatti un prisma regolare che è anche un poliedro regolare: il cubo. E c'è una piramide regolare che è anche un poliedro regolare: il tetraedro regolare. Ma sono le uniche eccezioni.

32.3.5 Esiste una proprietà che lega il numero delle facce, quello dei vertici e quello degli spigoli di un poliedro. Di questa proprietà, attribuita ad Eulero [3], ci limitiamo a fornire il solo enunciato [4].

♦ **RELAZIONE DI EULERO**. Indicati con f, v, s rispettivamente il numero delle facce di un poliedro, quello dei suoi vertici e quello dei suoi spigoli, vale la seguente relazione:

$$\mathbf{f + v = s + 2\ .}$$

Ti proponiamo alcuni esercizi in cui puoi utilizzare, se vuoi, la formula di Eulero e, in ogni caso, puoi verificarla:

1) Ammesso che una piramide abbia n vertici, qual è il numero delle sue facce? Quale il numero dei suoi spigoli?
2) Ammesso che un prisma abbia n vertici, qual è il numero delle sue facce? Quale il numero dei suoi spigoli?
3) Se una piramide e un prisma hanno lo stesso numero di vertici, quale relazione sussiste fra i numeri delle loro facce? Quale relazione fra i numeri dei loro spigoli?

32.3.6 Ogni poliedro, come pure ogni figura che possa essere contenuta in un poliedro, si definisce **solido geometrico**. Un solido geometrico è dunque una porzione "limitata" di spazio.
La misura dello spazio occupato da un solido geometrico si chiama **volume** del solido.
Invece la misura della superficie che delimita il solido si chiama **area** del solido. A volte l'area di un solido si denomina **area totale**, per distinguerla dalla cosiddetta **area laterale**. Così accade, ad esempio, nei casi del prisma e della piramide, come anche del cilindro e del cono.
Nelle prossime pagine ci occuperemo, ma a livello prevalentemente nozionistico, delle formule che forniscono le aree e i volumi dei principali solidi geometrici.

32.4 AREE DEL PRISMA E DELLA PIRAMIDE

32.4.1 Incominciamo con il prisma.
L'area laterale A_L di un ***prisma regolare***, avente per base un poligono di n lati, non è altro che la somma delle aree delle sue n facce laterali. Siccome queste, essendo rettangoli uguali, hanno tutte la stessa altezza (che è anche l'altezza h del prisma) e basi uguali di lunghezza s, risulta: $A_L=n\cdot sh$. Poiché ns è uguale al perimetro 2p di una base, l'area del prisma è data dalla seguente formula:

$$\mathbf{A_L = 2\,p\,h\ .}$$

In realtà questa formula vale anche se il prisma non è regolare, a condizione però che gli spigoli latera-

[3] **Euler**, Leonhard; matematico svizzero, 1707-1783.
[4] Ma chi volesse può trovarne una dimostrazione nell'unità 48: Solidi geometrici. Proprietà, N° 48.4.2.

li siano perpendicolari alle basi, nel qual caso il prisma si dice ***retto***.
Naturalmente, indicate con A_T e A_B l'area totale e quella di una base, si ha:

$$\mathbf{A_T = A_L + 2\,A_B\,.}$$

32.4.2 Come per il prisma anche l'area laterale di una ***piramide regolare*** si trova sommando le aree delle sue n facce laterali. Queste sono adesso triangoli aventi la medesima altezza a (che è l'apotema della piramide) e basi uguali di lunghezza s. Per cui, indicata con A_L l'area laterale della piramide, risulta: $A_L = n\cdot\frac{1}{2}sa$. Poiché ns è uguale al perimetro 2p della base, l'area della piramide regolare è data dalla seguente formula:

$$\mathbf{A_L = p\,a\,.}$$

In genere, se la piramide non è regolare, questa formula non vale, ma ci sono delle situazioni particolari in cui è ancora valida. E precisamente tutte le volte che la piramide è "retta".
Una piramide si dice **retta** quando la sua base è circoscrivibile ad un cerchio e l'altezza della piramide cade nel centro di tale cerchio (Fig. 12).

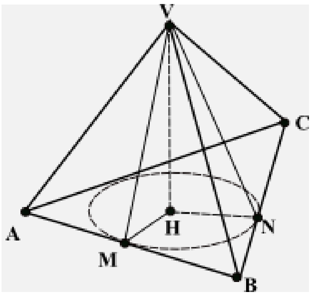


FIG. 12

In una piramide retta le facce laterali hanno la stessa altezza (cosa che qui non possiamo dimostrare), la quale si chiama ancora *apotema* della piramide ed è la congiungente il vertice con il punto in cui il cerchio tocca il lato della base. In figura, H è il centro del cerchio inscritto nella base della piramide di vertice V e base ABC; VH è l'altezza della piramide, mentre VM è l'altezza della faccia VAB e VN lo è della faccia VBC; risulta VM=VN.
Calcolata l'area laterale A_L di una piramide e chiamate A_T e A_B la sua area totale e quella della base, si ha evidentemente:

$$\mathbf{A_T = A_L + A_B\,.}$$

32.5 VOLUMI DEL PRISMA E DELLA PIRAMIDE

32.5.1 Consideriamo un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3-4-5. Dividiamo in 3 parti congruenti uno degli spigoli di misura 3 e mandiamo per i punti di divisione i piani perpendicolari allo spigolo stesso. Facciamo altrettanto con uno spigolo di misura 4 (dopo averlo diviso in 4 parti congruenti) e con uno spigolo di misura 5 (dopo averlo diviso in 5 parti congruenti). Con questo procedimento il parallelepipedo assegnato viene suddiviso in 3×4×5 cubi di spigolo 1 (Fig. 13). Sicché, se il cubo di spigolo 1 è assunto come *solido unitario* (ossia come *unità di misura dei solidi*), possiamo concludere che la misura del parallelepipedo in esame é: 3×4×5=60.
Hai notato certamente che questo procedimento ne richiama alla mente un altro: quello per il calcolo

dell'area di un rettangolo.

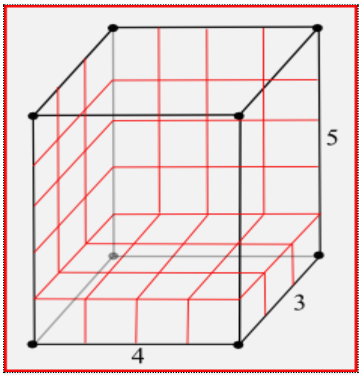


FIG. 13

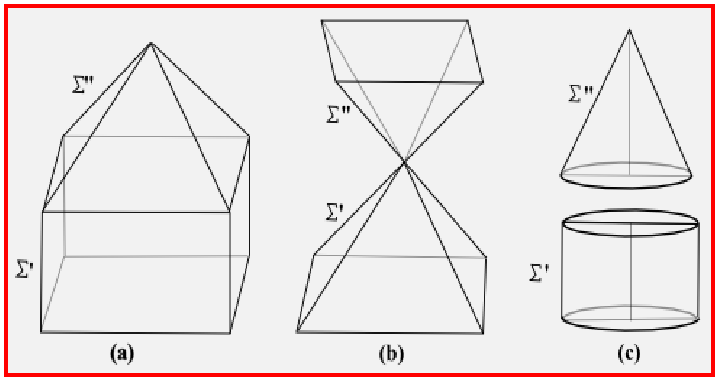


FIG. 14

Ebbene, come allora, anche adesso il fatto su descritto, molto intuitivo, è assunto da noi come punto di riferimento per una regola non dimostrata, che definisca la misura di un solido.

Prima, però, è necessario mettersi d'accordo sul concetto di "somma di due solidi". La definizione è analoga a quella di "somma di due superfici", già trattata nel biennio.

Precisamente, se esistono due solidi Σ' e Σ" tali che (Fig. 14):

$$\Sigma' \cup \Sigma'' = \Sigma \quad \text{e} \quad \Sigma' \cap \Sigma'' = \varnothing \,,$$

il solido Σ si chiama *somma* dei solidi Σ' e Σ" e si scrive: $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$.

Ecco allora la regola relativa alla misura di un solido.

♦ **REGOLA PER IL CALCOLO DEL VOLUME:**

Ad ogni solido Σ è associato uno ed un solo numero reale non negativo – è indicato con V(Σ) e chiamato **volume** (o *misura*) del solido – tale che:

- se Σ è una superficie allora V(Σ) = 0;
- se Σ è un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c allora **V(Σ) = a b c**;
- se Σ' e Σ" sono due solidi congruenti allora V(Σ') = V(Σ");
- se Σ è la somma dei due solidi Σ' e Σ" allora V(Σ) = V(Σ') + V(Σ") .

Due solidi aventi ugual volume si dicono ***equivalenti***.

In conseguenza di questa regola, il volume del ***cubo*** è immediato.

Potendosi infatti considerare questo poliedro come un parallelepipedo rettangolo di dimensioni s, s, s – dove s è la lunghezza dello spigolo del cubo – il suo volume V è chiaramente:

$$\mathbf{V = s^3}.$$

32.5.2 Una unità di misura dei solidi è il **metrocubo**, vale a dire il cubo, il cui lato misura 1 m. Si indica con la scrittura:

$$\mathbf{1\ m^3}.$$

Nella pratica sono usati anche, come unità di misura dei solidi, sottomultipli o multipli del metrocubo. Per esempio:

$$1\ \text{cm}^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3\,,\ \ 1\ \text{dm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3\,,\ \ 1\ \text{km}^3 = 10^{9}\ \text{m}^3\,.$$

Ricordiamo, inoltre, che 1 dm³ equivale anche ad 1 **litro**, che è una misura di capacità ed è considera-

ta l'unità di misura per i volumi nel Sistema Internazionale. Evidentemente 1 m^3 equivale a 1000 litri.
A titolo di curiosità segnaliamo alcuni particolari volumi:
- una mela di medie dimensioni occupa un volume di circa 35 cm^3;
- un'automobile di media cilindrata ha un serbatoio della capacità di circa 70 litri;
- la piramide di Cheope, a Giza in Egitto, occupa attualmente uno spazio di circa $2{,}4\times10^6$ m^3;
- la Terra occupa un volume pari a circa $1{,}08\times10^{21}$ m^3.

32.5.3 Il volume V di un ***prisma*** di area di base A_b e di altezza h è dato dalla seguente formula:

[1] $$\mathbf{V = A_b h}.$$

Se il prisma è un parallelepipedo rettangolo, la spiegazione della formula è immediata. Basta constatare che la formula del volume del parallelepipedo rettangolo, V=abc, può essere scritta nella forma [1] pensando ab come l'area A_b di un rettangolo di base del parallelepipedo e c come la misura h della sua altezza.
La formula in realtà vale qualunque sia il prisma, anche non regolare, ma qui non possiamo dimostrarlo.

32.5.4 Il volume V di una ***piramide*** di area di base A_b e di altezza h è:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} A_b h}\,.$$

Sorvoliamo sulla dimostrazione di questa formula. Ci limitiamo, primo, ad affermare che essa vale anche se la piramide non è regolare e, secondo, a constatare che, proprio interpretandola geometricamente, possiamo concludere con la seguente proprietà:

Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente base equivalente e uguale altezza.

Il che significa pure, evidentemente, che un prisma è equivalente alla somma di tre piramidi di basi equivalenti e di altezze uguali a quelle del prisma.
Questo fatto è evidenziato nella figura 15, ancorché riferito a prisma e piramide triangolari.

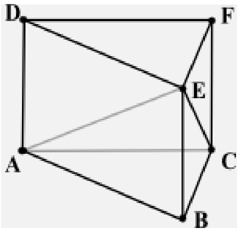


FIG. 15

Si può notare infatti che il piano EAC divide il prisma ABCDEF in due piramidi, una triangolare con vertice in E e base ABC e l'altra quadrangolare con lo stesso vertice e base ACFD: entrambe le piramidi evidentemente non sono regolari. La seconda piramide, a sua volta, è divisa dal piano ECD in due piramidi triangolari, aventi entrambe vertice in E e basi, una ACD e l'altra DCF. Queste due piramidi sono equivalenti per avere basi equivalenti e la medesima altezza. D'altro canto, la piramide di vertice E e base DCF può essere pensata come avente vertice C e base DEF e, come tale, è evidentemente equivalente alla piramide di vertice E e base ABC. In sostanza, il prisma risulta formato da tre piramidi equivalenti: (E,ABC), (C,DEF), (E,ACD). Considerato che la piramide (E,ABC) ha base uguale a quella del prisma e la medesima altezza, rimane spiegato quanto detto sopra.

32.6 CORPI ROTONDI E LORO MISURE

32.6.1 Considerata una qualsiasi retta r ed una figura piana F, di area non nulla, disposta nello stesso piano con r ma senza attraversarla, la figura geometrica descritta da F in una rotazione di 360° intorno ad r si chiama **solido di rotazione**. La retta r si chiama ***asse di rotazione***.
In questa nostra veloce carrellata ci limitiamo a prendere in esame solo alcuni elementari solidi di rotazione. Facciamo affidamento sui tuoi ricordi riguardo al cerchio, nel senso che supponiamo che ti sia noto di cosa si tratti.

- Il solido generato da un rettangolo in una rotazione di 360° intorno alla retta di uno dei suoi lati si chiama **cilindro circolare retto** (Fig. 16). I due lati perpendicolari a quello di rotazione generano, nella rotazione medesima, due cerchi che si dicono ***basi*** del cilindro, mentre il lato intorno a cui ruota il rettangolo si dice ***altezza*** del cilindro.
- Il solido generato da un triangolo rettangolo in una rotazione di 360° intorno alla retta di uno dei suoi cateti si chiama **cono circolare retto** (Fig. 17). Il cerchio generato dal cateto che ruota si dice ***base*** del cono. L'altro cateto si chiama ***apotema*** del cono.
- Il solido generato da un cerchio in una rotazione di 180° intorno ad una retta passante per il suo centro si chiama **sfera** (Fig. 18). Il centro del cerchio si chiama anche ***centro*** della sfera.

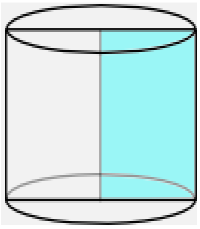


FIG. 16

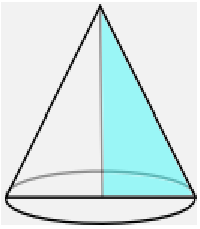


FIG. 17

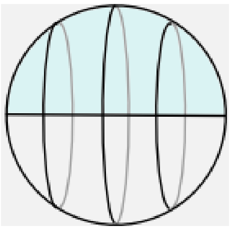


FIG. 18

32.6.2 Per le misure dei corpi rotondi è indispensabile conoscere in via preliminare quelle della circonferenza e del cerchio. Ci occuperemo di ciò in futuro e per il momento ci accontentiamo di fornire le formule necessarie. Tali formule, indicate con **C** ed **A** la lunghezza di una circonferenza di raggio **r** e l'area del cerchio che essa racchiude, sono le seguenti:

$$\mathbf{C = 2\pi r},\quad \mathbf{A = \pi r^2},$$

dove π (pigreco) è una costante il cui valore approssimato fino al 5° decimale è il seguente:

$$\pi \approx 3{,}14159.$$

A questo punto possiamo fornire le formule per l'area laterale e totale e per il volume del cilindro e del cono e una loro spiegazione intuitiva.

♦ Ai fini del calcolo dell'area laterale di un <u>cilindro</u> di raggio r ed altezza h, consideriamo un prisma regolare inscritto nel cilindro e avente per base un poligono di n lati. Vale a dire un prisma avente la stessa altezza del cilindro e per basi due poligoni inscritti nelle circonferenze di base del cilindro.
Il cilindro può essere pensato come la posizione limite del prisma quando n tende ad infinito. Per cui la sua area laterale A_L si calcola come quella del prisma: solo che adesso, al posto del perimetro di base del prisma, ci sarà la lunghezza della circonferenza di base del cilindro.
Pertanto:

$$\mathbf{A_L = 2\pi rh.}$$

Il calcolo dell'area totale del cilindro è del tutto immediato:

$$\mathbf{A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2}.$$

Ragionando come per il calcolo dell'area laterale, si conclude che il volume V del cilindro si trova come quello del prisma: solo che adesso, al posto dell'area di base del prisma, ci sarà quella del cerchio di base del cilindro. Pertanto:

$$\mathbf{V = \pi r^2 h}.$$

♦ Ai fini del calcolo dell'area laterale di un <u>cono</u> di raggio r e di apotema a, consideriamo una piramide regolare inscritta nel cono e avente per base un poligono di n lati. Vale a dire una piramide avente lo stesso vertice del cono e per base un poligono inscritto nella base del cono.
Il cono può essere pensato come la posizione limite della piramide quando n tende ad infinito. Per cui la sua area laterale A_L si calcola come quella di una piramide retta: solo che adesso, al posto del semiperimetro di base della piramide, avremo la lunghezza della semicirconferenza di base del cono.
Pertanto:

$$\mathbf{A_L = \pi ra.}$$

Il calcolo dell'area totale del cono è banale:

$$\mathbf{A_T = \pi ra + \pi r^2}.$$

Ragionando come abbiamo fatto per il cilindro, si arriva a concludere che il suo volume V è espresso dalla formula seguente:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}.$$

32.6.3 Per quanto concerne l'area A di una superficie sferica di raggio r, si ha la seguente formula:

$$\mathbf{A = 4\pi r^2}.$$

Ossia, detto a parole:

L'area di una superficie sferica è **4 volte l'area del suo cerchio massimo.**

Il volume V di una sfera è espresso dalla seguente formula:

$$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}.$$

32.7 PROBLEMI

- PROBLEMA 1. Una piramide triangolare regolare ha vertice nel punto V ed ha per base il triangolo ABC di perimetro uguale a $30\sqrt{3}$ cm. L'apotema della piramide misura 13 cm. Calcolare l'area totale ed il volume della piramide. Calcolare inoltre la distanza del vertice C dalla faccia VAB.

RISOLUZIONE. Forniamo una rappresentazione della piramide (Fig. 19).
I dati ci permettono di calcolare immediatamente l'area laterale della piramide:

$$A_L = \frac{1}{2}\cdot 30\sqrt{3}\cdot 13 = 195\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2).$$

La misura del lato AB del triangolo equilatero ABC, il cui perimetro è $30\sqrt{3}$ cm, è evidentemente $10\sqrt{3}$ cm. Di conseguenza l'altezza CM di tale triangolo misura 15 cm.
L'area del triangolo ABC, base della piramide, è pertanto:

$$A_B = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{CM} = \frac{1}{2}\cdot 30\sqrt{3}\cdot 15 = 225\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2).$$

Abbiamo tutti gli elementi per calcolare l'area totale della piramide:

$$A_T = A_L + A_B = 195\sqrt{3} + 225\sqrt{3} = 420\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2).$$

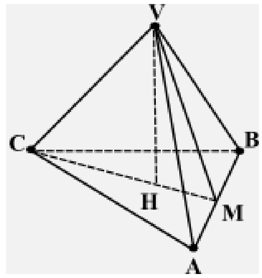


FIG. 19

Essendo il centro H del triangolo anche baricentro, risulta che il segmento HM è lungo $1/3$ di CM e perciò 5 cm. Nel triangolo VHM, rettangolo in H, si ha pertanto:

$$\overline{VH} = \sqrt{\overline{VM}^2 - \overline{HM}^2} = \sqrt{13^2 - 5^5} = 12\ (\mathrm{cm}).$$

Abbiamo tutti gli elementi per il calcolo del volume della piramide:

$$V = \frac{1}{3}\,A_b\cdot\overline{VH} = \frac{1}{3}\cdot 225\sqrt{3}\cdot 12 = 900\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^3).$$

Indicata ora con d la distanza del vertice C dalla faccia VAB, essa non è altro che l'altezza della piramide triangolare di vertice C e base VAB, che un altro modo di concepire la piramide assegnata. Costatato allora che l'area S della faccia VAB è $1/3$ di A_L , cioè $65\sqrt{3}$ cm^2 e che si ha: $V=\frac{1}{3}Sd$, risolvendo rispetto a d si ottiene:

$$d = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot 900\sqrt{3}}{65\sqrt{3}} = \frac{540}{13}\ (\mathrm{cm}).$$

- PROBLEMA 2. Un acquario a forma di parallelepipedo contiene dell'acqua. Le dimensioni interne della base, misurate in centimetri, sono numeri interi. Giovanna pone in fondo all'acquario un cubo avente lo spigolo di 10 centimetri. Il livello dell'acqua è esattamente uguale all'altezza del cubo.

Sostituisce questo cubo con un cubo avente lo spigolo di 20 centimetri. Il livello dell'acqua è ancora uguale all'altezza di questo cubo.

Quali sono le dimensioni della base dell'acquario e quanti litri di acqua esso contiene?

[Tratto da "*Matematica senza Frontiere*", 2006]

RISOLUZIONE (indicazioni). Indichiamo con a, b i numeri interi che esprimono le misure, in centimetri, delle dimensioni interne della base del parallelepipedo e con V il volume d'acqua contenuto nell'acquario.

Nel primo caso, quando vi si immerge un cubo avente lo spigolo $s = 10$ cm, tale volume è: $V=sab-s^3=10ab-10^3$ (cm^3).

Nel secondo caso, quando vi si immerge un cubo avente lo spigolo $t = 20$ cm, il volume dell'acqua, che rimane comunque invariato, è: $V=tab-t^3=20ab-20^3$ (cm^3).

Deve essere pertanto: $10ab-10^3=20ab-20^3$, da cui segue facilmente: $ab=700$ (cm^2).

Il volume dell'acqua contenuta nell'acquario è pertanto: $V=10\times 700-10^3=6000$ (cm^3), vale a dire 6

litri.
Per determinare le dimensioni della base dell'acquario si tratta adesso di stabilire quali interi a, b sono tali che $ab=700$, tenendo però presente che deve essere $a>20$ e $b>20$, altrimenti non è possibile inserire il secondo cubo nell'acquario. Si può procedere solo per tentativi, magari con l'ausilio di una calcolatrice. Si trova comunque una sola soluzione: le dimensioni cercate sono 25 cm e 28 cm.

• PROBLEMA 3. Un trapezio rettangolo, ruotando di un giro completo attorno alla base maggiore, genera un solido di volume V'; ruotando di un giro completo intorno alla base minore, genera un solido di volume V". Determinare le basi del trapezio sapendo che la somma delle loro misure è 2a, dove a è una lunghezza assegnata, e sapendo che V': V"=3 : 4.

RISOLUZIONE. Considerato il trapezio rettangolo ABCD (Fig. 20), notiamo anzitutto che il solido generato da esso in una rotazione completa attorno alla base maggiore AB è formato dal cilindro di raggio AD ed altezza DC sormontato dal cono di raggio HC ed altezza HB, mentre il solido generato dal trapezio medesimo in una rotazione completa attorno alla base minore DC è formato dal cilindro di raggio AD ed altezza DK incavato dal cono di raggio BK ed altezza CK.
Pertanto, constatato che HC≅BK≅AD e CK≅HB, si ha:

$$\frac{V'}{V''}=\frac{\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{DC}+\frac{1}{3}\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{HB}}{\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{AB}-\frac{1}{3}\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{HB}}=\frac{3\,\overline{DC}+\overline{HB}}{3\,\overline{AB}-\overline{HB}}\ ;$$

e poiché $HB = AB - DC$, si ha:

$$\frac{V'}{V''}=\frac{\overline{AB}+2\,\overline{DC}}{2\,\overline{AB}+\overline{DC}}.$$

Perciò i dati del problema si traducono nel seguente sistema di due equazioni nelle incognite $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$:

$$\begin{cases}\overline{AB}+\overline{DC}=2a\\ \dfrac{\overline{AB}+2\,\overline{DC}}{2\,\overline{AB}+\overline{DC}}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

Esso, una volta risolto, dà la seguente soluzione: $\overline{AB}=\frac{10}{7}a,\ \ \overline{DC}=\frac{4}{7}a.$

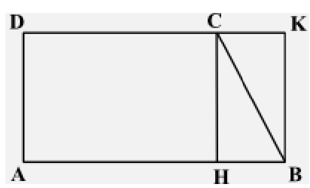


FIG. 20

• PROBLEMA 4. La base maggiore, la base minore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine: 12 m, 6 m, 28 m.
Spiegare se i dati assegnati sono sufficienti, insufficienti, sovrabbondanti o incompatibili per calcolare:
a) l'area del trapezio;
b) il raggio del cerchio inscritto nel trapezio;
c) il raggio del cerchio circoscritto al trapezio;
d) il volume del solido Σ generato dal trapezio in una rotazione di mezzo giro intorno alla retta che unisce i punti medi delle sue basi;

e) l'area totale di un cono circolare retto equivalente al solido Σ;
f) il rapporto fra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore.

RISOLUZIONE (indicazioni).

a) I dati assegnati sono sufficienti per determinare l'area S del trapezio. Si trova: $S = 36\ m^2$.
b) I dati assegnati sono incompatibili per la richiesta del problema. In effetti, nel trapezio non si può inscrivere un cerchio.
c) I dati assegnati sono sufficienti. Si trova che il raggio del cerchio circoscritto al trapezio è:

$$R = \frac{5}{8}\sqrt{97}\ m.$$

d) I dati assegnati sono sufficienti per determinare il volume V del solido richiesto. Si trova:

$$V = 84\ \pi\ m^3.$$

e) I dati sono insufficienti.
f) I dati sono sovrabbondanti per la richiesta: basterebbe conoscere il rapporto tra le basi del trapezio e non occorre neppure sapere che esso è isoscele. Si trova in ogni caso:

$$\frac{V'}{V''} = \frac{4}{5}.$$

- PROBLEMI da risolvere.

1. Determinare le misure di due segmenti sapendo che la differenza tra il maggiore e il minore misura 2 cm, mentre la differenza tra il cubo avente come spigolo il maggiore e quello avente come spigolo il minore misura 218 cm^3.
2. Un tetraedro regolare ed un cubo hanno gli spigoli ugualmente lunghi. È possibile calcolare il rapporto fra le loro superfici e quello fra i loro volumi? In caso di risposta affermativa, eseguire il calcolo.
3. Le dimensioni interne della base di un acquario a forma di parallelepipedo rettangolo sono 9 cm e 12 cm, mentre la sua altezza misura 10 cm. L'acqua che vi è contenuta lo riempie fino al livello di 8 cm. Si immerge nell'acquario un solido di marmo a forma di cubo e l'acqua si solleva riempiendolo completamente fino all'orlo, ma senza traboccare. Quanto misura lo spigolo del cubo?

VERIFICHE [5]

1. Un solido è ottenuto incollando uno sopra l'altro due cubi (Fig. 21), uno di spigolo a e l'altro di spigolo b, con a>b. Calcolare l'area totale del solido.
[Ispirato ad un problema assegnato a prove INVALSI 2013]

[5] **NOTA BENE**. Qualche problema ha come risolvente un'equazione di 2° grado o un'equazione in cui l'incognita figura sotto il segno di radice quadrata. In tal caso ci sono due possibilità: a) l'argomento è già stato studiato e la risoluzione del problema non presenta difficoltà; b) l'argomento non è stato ancora studiato e perciò la risoluzione, una volta ottenuta l'equazione risolvente, deve essere provvisoriamente accantonata.

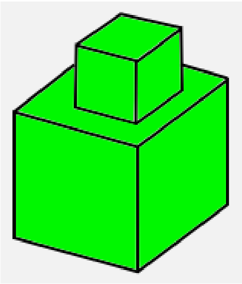


FIG. 21

2. Calcolare il rapporto fra l'area di un tetraedro regolare e quella del tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo.
3. Calcolare il rapporto fra l'area di un esaedro regolare e quella dell'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle facce dell'esaedro.
4. Calcolare il rapporto fra l'area di un ottaedro regolare e quella dell'esaedro regolare avente per vertici i centri delle facce dell'ottaedro.
5. Una piramide quadrangolare regolare ha il perimetro di base uguale ad $8a$ e l'apotema uguale ad $a\sqrt{2}$. Calcolarne l'area totale e il volume.
6. Il rapporto tra il lato obliquo e l'altezza di un trapezio rettangolo circoscritto ad un cerchio è $13/12$ e il perimetro del trapezio è $25a$. Considerata la piramide avente per base il trapezio e per vertice un punto distante $4a$ dalla base e situato sulla perpendicolare ad essa condotta per il centro del cerchio inscritto, calcolare l'area totale ed il volume di questa piramide.
7. Un trapezio rettangolo, di perimetro $\frac{20}{3}r$, è circoscritto ad un semicerchio di raggio r, in modo che la sua base maggiore ne contenga il diametro. Il trapezio è la base di una piramide di altezza uguale al suo lato obliquo. Calcolare il volume di tale piramide.
8. Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa AC è lunga $20a$ ed il cateto AB è $4/3$ del cateto BC. Tracciata la circonferenza di diametro AB, si dica D l'ulteriore punto in cui la retta AC la interseca e si chiami E il punto simmetrico di D rispetto ad AB. Quindi, condotta la perpendicolare in B al piano della figura, si stacchi su di essa un segmento BV lungo quanto AB. Considerata, infine, la piramide di vertice V e di base il quadrilatero AEBC, se ne calcoli il volume.
9. Le diagonali di un quadrilatero ABCD sono perpendicolari; inoltre si ha:
$$B\hat{A}D = 90°,\ \overline{AB} = 4b,\ \overline{AD} = 3b,\ \overline{BC} = 2b\sqrt{17},$$
essendo b una lunghezza assegnata.
Costruito il quadrilatero avente per vertici i punti medi del quadrilatero dato, dopo aver dimostrato che esso è un rettangolo, calcolare l'area laterale ed il volume del prisma retto che ha basi uguali a questo rettangolo ed altezza uguale a $5b$.
10. In un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio r, la base maggiore supera la minore di un segmento lungo $3r$. Calcolare il volume di un prisma retto avente basi uguali al trapezio ed area laterale uguale a $30\ r^2$. [**R.** $15\ r^3$]
11. Nel trapezio ABCD, di base maggiore AD, il lato obliquo AB e la diagonale AC sono lunghi rispettivamente a e 2a. Inoltre, detto E il punto intersezione delle rette dei lati non paralleli, l'altezza del triangolo BCE, relativa a BC, è uguale a quella del trapezio ed è la metà del segmento CD. Calcolare l'area ed il volume del prisma retto avente basi uguali al trapezio ed altezza uguale a 3a.
12. Dimostrare che le basi di due prismi equivalenti sono inversamente proporzionali alle rispettive altezze.

13. Le sei piramidi, aventi per vertice il punto d'incontro delle diagonali di un parallelepipedo e per basi le sue facce, sono equivalenti: è vero o è falso?

14. I triangoli ABC e ABD hanno il lato AB in comune e sono equivalenti. È vero o è falso che i solidi generati da essi in una rotazione completa intorno ad AB sono equivalenti?

15. I triangoli ABC e ABD, rettangoli e isosceli sulla base AB, giacciono in piani perpendicolari. Sapendo che AB misura 2a, dove a è una lunghezza assegnata, calcolare la distanza del punto A dal piano dei punti B, C, D. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{2}{3}a\sqrt{3}\right]$

16. Considerato un tetraedro regolare, descrivere il poliedro avente per vertici i centri delle sue facce e calcolare il rapporto fra i volumi dei due solidi. [**R.** Tetraedro regolare; 27]

17. Considerato un cubo, descrivere il poliedro avente per vertici i centri delle sue facce e calcolare il rapporto fra i due solidi. [**R**. Ottaedro regolare; 6]

18. Un prisma ha per base un triangolo equilatero di lato lungo a, essendo a una lunghezza data. Determinare di quanto bisogna aumentare la lunghezza dello spigolo di base affinché il volume del prisma raddoppi. $\left[\mathbf{R.}\ a\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

19. La sezione di un prisma triangolare regolare con il piano contenente una mediana della base e perpendicolare alla base stessa è un quadrato di lato lungo a. Calcolare il volume e l'area totale del prisma. $\left[\mathbf{R.}\ a^3/\sqrt{3}, \dots\right]$

20. Il raggio di base e l'altezza di un cono circolare retto sono direttamente proporzionali ai numeri 4 e 3 e l'area totale del cono è $9\pi a^2$. Calcolare l'area laterale ed il volume del cono.

21. Considerato un triangolo equilatero ABC di lato lungo a, determinare sul lato AB un punto P tale che, condotte per esso le corde PR e PS parallele rispettivamente ai lati AC e BC, l'area della superficie del solido generato dal quadrilatero PRCS in una rotazione completa intorno a BC sia doppia di quella del solido generato, nella stessa rotazione, dal triangolo PBR. [**R.** $\overline{AP} = a/2$]

22. La base maggiore di un trapezio è lunga 2b e gli angoli adiacenti ad essa sono ampi uno 30° e l'altro 120°. Sapendo che la base minore è congruente al minore dei lati obliqui, calcolare l'area e il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione completa intorno alla base maggiore.

$\left[\mathbf{R.}\ \frac{3}{2}\pi b^2\left(1+\sqrt{3}\right),\ \pi\, b^3\right]$

23. Un trapezio rettangolo, di perimetro $\frac{20}{3}r$, è circoscritto ad un semicerchio di raggio r, in modo che la sua base maggiore ne contenga il diametro. Calcolare l'area ed il volume del solido generato dal trapezio quando ruota di un giro completo intorno alla base minore.

24. In un cerchio è inscritto un triangolo equilatero. Calcolare il rapporto fra la sfera ed il cono descritti rispettivamente dal cerchio e dal triangolo quando la figura ruota di mezzo giro intorno ad un diametro del cerchio passante per un vertice del triangolo.

25. I due triangoli ABC e ABD hanno il lato AB in comune e sono equivalenti. È vero o è falso che i solidi generati da essi in una rotazione completa intorno ad AB sono equivalenti?

26. Sezionata una sfera di raggio assegnato r con un piano, si considerino i due coni aventi come base comune il cerchio sezione e come vertici gli estremi del diametro della sfera perpendicolare al piano secante. Sapendo che le aree laterali di questi coni stanno nel rapporto 3:4, calcolare i loro volumi. $\left[\mathbf{R.}\ \frac{3456}{15625}\pi r^3, \frac{6144}{15625}\pi r^3\right]$

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È vero che un qualunque prisma regolare è un poliedro regolare?
2. Si consideri il poliedro avente per vertici i centri delle facce di un tetraedro regolare. Di che poliedro si tratta?
3. Si consideri il poliedro avente per vertici i centri delle facce di un ottaedro regolare. Di che poliedro si tratta?
4. È vero che due solidi si dicono equivalenti se hanno la stessa area totale?
5. È vero che il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto delle sue tre dimensioni?
6. Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono tutte dimezzate: è vero che anche il volume del parallelepipedo risulta dimezzato? E se non è vero, quanto diventa tale volume?
7. Un tetraedro regolare ha spigolo lungo il doppio di quello di un cubo. Quale dei due solidi ha volume maggiore?
8. Posto che V sia il volume di un cono circolare retto, r il raggio della sua base ed h l'altezza, è vero che risulta: $r=\sqrt{\frac{\pi h}{3V}}$?
9. Un cilindro circolare retto in cui l'altezza è uguale al diametro di base si dice **equilatero**. Che figura si ottiene intersecandolo con un piano passante per il suo asse di rotazione? Qual è il volume del cilindro se il raggio di base è r? Quale la sua area totale?
10. Un cono circolare retto in cui l'apotema è uguale al diametro di base si dice **equilatero**. Che figura si ottiene intersecandolo con un piano passante per il suo asse di rotazione? Qual è il volume del cono se il raggio di base è r? Quale la sua area totale?
11. È dato un triangolo rettangolo. Facendolo ruotare di un giro completo una volta intorno ad un cateto ed una volta intorno all'altro cateto si ottengono due solidi. È vero che il rapporto dei loro volumi è uguale al rapporto dei cateti che ruotano?

RISPOSTE.

1. No. Tra i prismi regolari solo il cubo è un poliedro regolare.
2. Si tratta di un tetraedro regolare.
3. Si tratta di un cubo.
4. No. Due solidi si dicono equivalenti se hanno lo stesso volume.
5. Sì.
6. È falso. In realtà il volume del parallelepipedo diventa 8 volte più piccolo. In effetti, se il volume del parallelepipedo originario era V quello del nuovo parallelepipedo è V/8. Ciò si spiega facilmente. Basta costatare che, se le dimensioni del parallelepipedo sono a, b, c, il suo volume è V=abc, mentre il volume del parallelepipedo con le dimensioni dimezzate è:
$$V' = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2} = \frac{abc}{8} = \frac{V}{8}.$$
7. Se lo spigolo del cubo è lungo s, il suo volume è s^3, mentre il volume del tetraedro si trova che è $\frac{2\sqrt{2}}{3}s^3$. Siccome $2\sqrt{2}<3$, si deve concludere che il cubo ha volume maggiore.

8. No. Si capisce che la relazione è sbagliata anche senza conoscere quella corretta, dal momento che non sono soddisfatte le condizioni di omogeneità: il rapporto tra una lunghezza ed un volume non può essere il quadrato di una lunghezza, come dovrebbe invece essere. Ad ogni modo la relazione corretta è:

$$r=\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}.$$

9. Si ottiene un quadrato. Essendo poi $V=\pi r^2 h$ ed $h=2r$, risulta: $V=2\pi r^3$. Inoltre: $A_t=2\pi r^2+2\pi r\cdot 2r=6\pi r^2$.

10. Si ottiene un triangolo equilatero. Essendo poi $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ed $h=r\sqrt{3}$, risulta: $V=\frac{1}{3}\pi r^3\sqrt{3}$. Inoltre: $A_t=\pi r^2+\pi r\cdot 2r=3\pi r^2$.

11. Incominciamo ad indicare con a e b le lunghezze dei cateti del triangolo. Detto che i due solidi ottenuti dalla rotazione sono due coni, indichiamo con V_a il volume del cono ottenuto supponendo che sia a il cateto che ruota e con V_b quello del cono ottenuto supponendo che sia b il cateto che ruota. Si ha:

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{\frac{1}{3}\pi a^2 b}{\frac{1}{3}\pi b^2 a}=\frac{a}{b}.$$

La risposta all'interrogativo è affermativa.

COMPLMENTI: POLIEDRI PSEUDO-REGOLARI.

Si possono costruire poliedri non regolari, aventi tuttavia per facce poligoni regolari uguali, ma di almeno due tipi diversi e per questo si chiamano **poliedri pseudo-regolari**.

Forniamo alcuni esempi di tali poliedri, precisando una volta per tutte che in ciascuno di essi i lati delle facce, ovvero gli spigoli dei poliedri, sono fra loro uguali.

- Poliedro formato da 32 facce, di cui 20 esagoni regolari uguali e 12 pentagoni regolari uguali (Fig. 22). È probabilmente il poliedro pseudo-regolare più famoso, se non altro perché il tradizionale pallone del gioco del calcio è, di norma, un solido siffatto.
- Poliedro formato da 14 facce, di cui 6 quadrati uguali e 8 triangoli equilateri uguali (Fig. 23). Qualcuno lo chiama ***cubottaedro***.
- Poliedro ottenuto recidendo convenientemente in un cubo 8 piramidi triangolari regolari uguali, aventi i vertici propriamente detti nei vertici del cubo. Questo ***cubo troncato*** è formato da 14 facce, di cui 6 ottagoni regolari uguali e 8 triangoli equilateri uguali (Fig. 24).

Ma, lo ribadiamo, questi solidi non sono poliedri regolari.

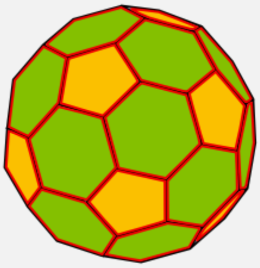


FIG. 22

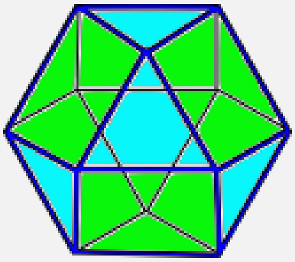


FIG. 23

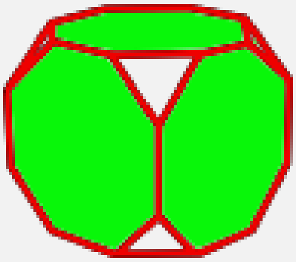


FIG. 24