Prerequisiti:
- Conoscere e utilizzare le coordinate cartesiane nel piano
- Conoscere e utilizzare le nozioni fondamentali di geometria piana

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *rappresentare un punto nello spazio cartesiano*
- *impiegare con proprietà i principi, i metodi e le convenzioni proprie delle rappresentazioni grafiche*

Questa unità è riservata al primo biennio del Liceo Artistico.

Rappresentazione di figure solide

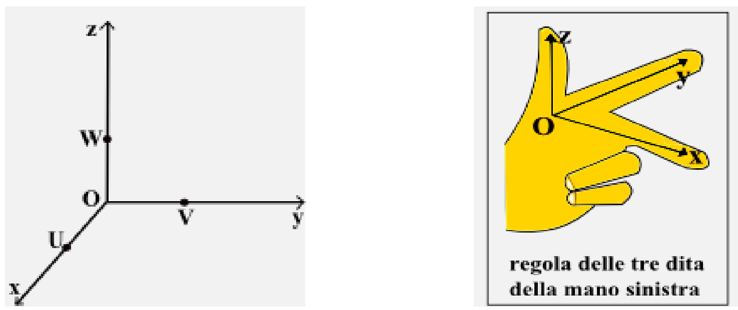
Unità 33

33.1 COORDINATE CARTESIANE NELLO SPAZIO

33.1.1 Prima di andare all'argomento di studio di questa unità si rende necessario, per la sua comprensione, qualche nozione preliminare.

Il procedimento atto a rappresentare un punto in un piano, dopo averlo riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, può essere esteso allo spazio ordinario. È quello che vogliamo far vedere, ma in maniera assai concisa e veloce.

Prendiamo allora nello spazio ordinario Σ un qualunque piano α e fissiamo su α un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy), indicando con U il punto unità sull'asse x e con V il punto unità sull'asse y. Condotta, poi, per l'origine O di questo sistema la retta z perpendicolare ad α, fissiamo su z un riferimento che abbia in O l'origine e il punto unità nel punto W tale che – disposti il pollice, l'indice e il medio della mano sinistra in modo che ciascuno delle tre dita appaia perpendicolare alle altre due – avvenga che il medio sia orientato nel verso positivo delle x e l'indice nel verso positivo delle y: ebbene, il pollice indica il verso positivo dell'asse z (Fig. 1).



(a) (b)

FIG. 1

Di solito i punti U, V, W sono scelti in modo che risulti OU≅OV≅OW.

Con la costruzione descritta si dice che lo spazio Σ è stato riferito ad un ***sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali*** (Oxyz) e lo spazio è chiamato a volte **spazio cartesiano**.

Salvo eventuale avviso contrario, noi supporremo di avere a che fare con un sistema cartesiano ortogonale monometrico.

33.1.2 Nello spazio, riferito ad un sistema cartesiano (Oxyz), ad ogni punto P rimane associata una ed una sola terna ordinata (a,b,c) di numeri reali: i primi due corrispondenti alle coordinate cartesiane (a,b) del punto Q – proiezione ortogonale di P sul piano α (Fig. 2) – proprio nel riferimento cartesiano (Oxy) stabilito su α; la terza coordinata c corrispondente alla misura del segmento orientato (Q,P), effettuata rispetto all'unità di misura OW.

Viceversa, ad ogni terna ordinata (a,b,c) di numeri reali rimane associato uno ed un solo punto P dello spazio cartesiano (Oxyz): basta prendere nel piano (Oxy) il punto Q di coordinate (a,b) e poi, sulla perpendicolare a questo piano condotta per Q, il punto P tale che la misura del segmento orientato (Q,P), effettuata rispetto all'unità di misura OW, sia c.

Insomma, si stabilisce, con le costruzioni suddette, una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti dello spazio cartesiano (Oxyz) e l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali.

Per questo, qualche volta si dice che ***lo spazio cartesiano è un*** $\mathbb{R}^3$.

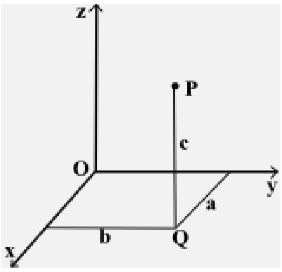


FIG. 2

Se, in tale corrispondenza, sono associati il punto P e la terna ordinata (a,b,c), si scrive:

P(a,b,c)

e si legge: «il punto P di coordinate cartesiane (a,b,c)».
In sostanza, come nel caso del piano cartesiano.
Evidentemente risulta:

$$O(0,0,0),\quad U(1,0,0),\quad V(0,1,0),\quad W(0,0,1).$$

I numeri a, b – prima e seconda componente della terna – si continuano a chiamare ***ascissa*** e ***ordinata*** di P. Il numero c – terza componente della terna – si chiama ***quota*** di P.

33.1.3 In uno spazio cartesiano (Oxyz) vi sono tre rette e tre piani privilegiati.

Le tre rette, dette ***assi coordinati*** (o ***assi cartesiani***), sono:
- l'asse x: ogni suo punto ha coordinate del tipo (a,0,0), con $a\in\mathbb{R}$;
- l'asse y: ogni suo punto ha coordinate del tipo (0,b,0) con $b\in\mathbb{R}$;
- l'asse z: ogni suo punto ha coordinate del tipo (0,0,c), con $c\in\mathbb{R}$.

I tre piani, chiamati ***piani coordinati***, sono:
- il piano delle rette xy: ogni suo punto ha coordinate del tipo (a,b,0), con $a,b\in\mathbb{R}$;
- il piano delle rette yz: ogni suo punto ha coordinate del tipo (0,b,c) con $b,c\in\mathbb{R}$;
- il piano delle rette zx: ogni suo punto ha coordinate del tipo (a,0,c), con $a,c\in\mathbb{R}$.

Questi tre piani dividono lo spazio in 8 parti, ognuna delle quali è chiamata ***ottante***.

In figura 3 è disegnato il parallelepipedo rettangolo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, avente il centro nell'origine O del sistema di riferimento e i tre assi mediani coincidenti con gli assi cartesiani. Asse mediano è la retta che unisce i centri di due facce opposte.

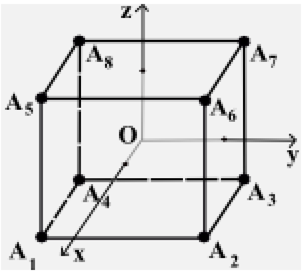


FIG. 3

Gli 8 vertici di questo parallelepipedo sono situati ciascuno in uno ed uno soltanto degli 8 ottanti in cui i piani coordinati dividono lo spazio. Ebbene, se il vertice situato nell'ottante formato dai punti di coordinate tutte e tre positive (è chiamato di solito ***primo ottante***) ha coordinate (a,b,c), constatato che questo vertice è A_6, le coordinate dei vertici del parallelepipedo sono le seguenti:

$A_6(a,b,c)$, $A_7(-a,b,c)$, $A_8(-a,-b,c)$, $A_5(a,-b,c)$, $A_2(a,b,-c)$, $A_3(-a,b,-c)$, $A_4(-a,-b,-c)$, $A_1(a,-b,-c)$.

33.1.4 Al momento è tutto ciò che ci serve. Nella prosecuzione degli studi avrai modo di approfondire l'argomento con alcune nozioni di "geometria analitica nello spazio".

Ti proponiamo adesso di risolvere il seguente esercizio.
Un cubo è situato nel 1° ottante di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (Oxyz) e due suoi vertici opposti sono i punti di coordinate (0,0,0) e (1,1,1). Rappresentarlo graficamente.

33.2 RAPPRESENTAZIONE DI FIGURE SOLIDE

33.2.1 La rappresentazione piana delle figure solide è fatta con il ricorso a regole precise, che danno luogo a veri e propri metodi. Questi metodi hanno un precursore illustre in Euclide (III sec. a.C.), ben conosciuto per un'opera squisitamente geometrica come gli *Elementi*, di cui ci siamo occupati a più riprese. In un'altra opera, l'*Ottica*, egli descrisse regole di rappresentazione della realtà. Tale opera avrebbe influenzato le future tecniche di rappresentazione.
Ci proponiamo di descrivere un paio di metodi, benché per sommi capi, elaborati però molti secoli dopo Euclide, giusto per farti comprendere lo stretto legame che sussiste fra tali metodi e le proprietà della geometria dello spazio. D'altra parte, le stesse cose, ma in modo più approfondito, hai modo di apprenderle nello studio delle "Discipline Geometriche".
I metodi di rappresentazione piana delle figure solide che descriveremo nelle prossime pagine sono i seguenti:

- metodo delle *proiezioni ortogonali*;
- metodo dell'*assonometria ortogonale* e *cavaliera*.

Sul metodo della *prospettiva* avremo modo di ritornare nel prosieguo degli studi.

33.2.2 Il **metodo delle proiezioni ortogonali** è detto anche **metodo di Monge** [1].

- Incominciamo col riproporre alcune definizioni:
  - Dati un piano α e un punto P, di definisce *proiezione ortogonale* di P su α il piede P' della perpendicolare condotta da P ad α (Fig. 4).
  - Il piano α si dice *piano di proiezione*, la retta PP' *raggio proiettante*.
  - La proiezione ortogonale di una qualsiasi figura F sul piano di proiezione α non è altro che la figura F' che si ottiene proiettando ortogonalmente su α tutti i punti di F (Fig. 5).

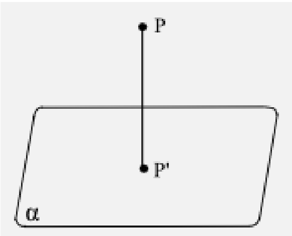


FIG. 4

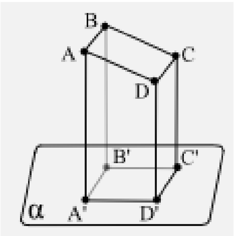


FIG. 5

Qualche esercizio di verifica:

---

[1] **Monge**, Gaspard, matematico e uomo politico francese, 1746-1818.

a) Un cilindro circolare retto poggia sul piano del disegno secondo una generatrice. Fornire la proiezione ortogonale del cilindro su tale piano
b) Un cilindro circolare retto poggia sul piano del disegno secondo una base. Fornire la proiezione ortogonale del cilindro su tale piano.
c) Un cubo poggia sul piano del disegno secondo una faccia. Fornire la proiezione ortogonale del cubo su tale piano.
d) Una diagonale di un cubo è perpendicolare al piano del disegno. Fornire la proiezione ortogonale del cubo su tale piano.
e) Con riferimento al cubo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (Fig. 3), si consideri la poligonale formata dai segmenti A_1A_8, A_8A_6, A_6A_3. Dire in quale figura è proiettata tale poligonale quando il cubo è proiettato ortogonalmente sul piano della faccia: a) $A_1A_2A_3A_4$, b) $A_1A_3A_8A_5$, c) $A_4A_3A_7A_8$.

♦ Per la rappresentazione piana di una figura tridimensionale, il metodo delle proiezioni ortogonali utilizza, di regola, tre piani di proiezione, ciascuno perpendicolare agli altri due (Fig. 6): un *piano orizzontale* (PO), un *piano verticale* (PV) e un *piano laterale* (PL). La retta x, in cui si secano il piano orizzontale e il piano verticale, e la retta y, in cui si secano il piano laterale e il piano orizzontale, sono dette *linee di terra*. Se indichiamo con z la retta secondo cui si secano il piano verticale e il piano laterale, è evidente che:
- il piano orizzontale PO coincide col piano delle rette x, y: è detto anche piano xy;
- il piano verticale PV coincide col piano delle rette x, z: è detto anche piano xz;
- il piano laterale PL coincide col piano delle rette y, z: è detto anche piano yz.

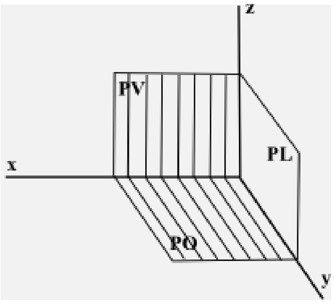


FIG. 6

Per ottenere la rappresentazione piana, in proiezione ortogonale, di un oggetto tridimensionale, si procede secondo le seguenti fasi:
a) dell’oggetto, immaginato sospeso nello spazio, si costruiscono le proiezioni ortogonali sui tre piani xy, xz, yz (Fig. 7);

b) supposto di far coincidere il piano del disegno con il piano verticale xz, si ribaltano su di esso il piano orizzontale xy, facendolo ruotare nel verso giusto di 90° intorno alla linea di terra x, e il piano laterale yz, facendolo ruotale di 90° intorno alla linea di terra z (Fig. 8).
c) In questo modo i tre piani xz, xy e yz coincidono con il piano del disegno, ma contengono proiezioni diverse dell’oggetto. In particolare:
   - la *prima proiezione* ortogonale, quella effettuata sul piano orizzontale xy, prende il nome di *vista dall’alto* (o *pianta*),
   - la *seconda proiezione* ortogonale, quella ottenuta sul piano verticale xz, si chiama *vista di fronte* (o *prospetto*),

- la *terza proiezione* ortogonale, quella ricavata sul piano laterale yz, è detta *vista da sinistra* (o *profilo*).

Da queste "viste" si può poi risalire alle caratteristiche reali dell'oggetto.

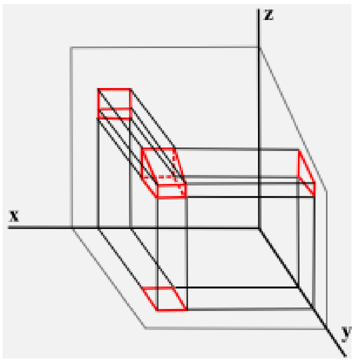


FIG. 7

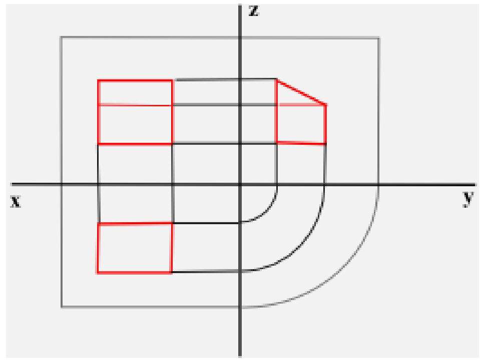


FIG. 8

Due semplici esercizi di verifica.

a) Un cilindro circolare retto si suppone sospeso nello spazio in modo, però, che il suo asse di rotazione sia perpendicolare al piano orizzontale. Fornire la rappresentazione ortogonale del cilindro mediante le tre viste dall'alto, di fronte e di profilo.

b) Un cilindro circolare retto si suppone sospeso nello spazio in modo, però, che il suo asse di rotazione sia perpendicolare al piano verticale. Fornire la rappresentazione ortogonale del cilindro mediante le tre viste dall'alto, di fronte e di profilo.

33.2.3 Un'*assonometria* è la proiezione di un oggetto su un piano, ottenuta con proiettanti parallele fra loro. Il metodo delle proiezioni assonometriche, per la rappresentazione piana delle figure solide, si articola in più fasi:

a) dapprima si riferisce lo spazio ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sui quali assi sono prefissati i punti unità U, V, W;

b) si proietta, quindi, la figura oggetto, per esempio il punto P, ortogonalmente sui tre piani xy, yz, zx, ottenendo le proiezioni P_1, P_2, P_3 (Fig. 9);

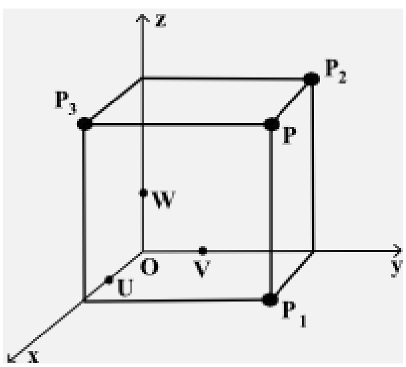


FIG. 9

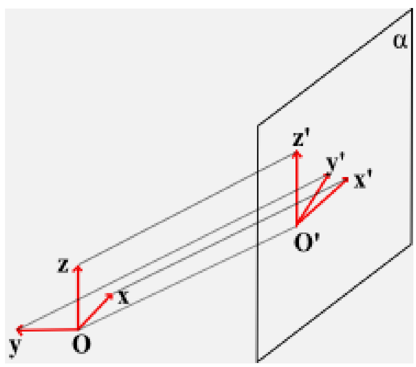


FIG. 10

c) infine si proietta sul piano α del disegno (detto anche *piano proiettante*), secondo una determinata direzione d (chiamata *direzione di proiezione*), la terna (Oxyz), unitamente alla figura P e alle sue proiezioni P_1, P_2, P_3 sopraddette, nella terna (O'x'y'z') con figure annesse (Fig. 10): sono queste le "proiezioni assonometriche" nella direzione prefissata.

Da queste proiezioni assonometriche si può risalire poi alla figura reale.

In genere la direzione di proiezione è obliqua rispetto al piano del disegno: l'assonometria si dice, per questo, *obliqua*.

Vi sono, tuttavia, da considerare due situazioni particolari:

1) Il piano proiettante è perpendicolare alla direzione di proiezione, e però è intersecato da tutti e tre gli assi x, y, z: l'assonometria si dice *ortogonale*.
2) Il piano proiettante è parallelo ad uno dei piani xy, yz, zx: l'assonometria si dice *cavaliera*.
   In particolare si dice:
   - *cavaliera militare* se il piano proiettante è parallelo al piano xy;
   - *cavaliera frontale* se il piano proiettante è parallelo al piano yz o al piano zx.

Posto che i punti unità U, V, W siano proiettati nei punti U', V', W', le misure dei segmenti O'U', O'V', O'W' si chiamano *unità assonometriche*. Si capisce che le loro misure dipendono dagli angoli che gli assi x, y, z formano col piano proiettante.

- Se tali angoli sono uguali fra loro allora i tre segmenti unitari O'U', O'V' e O'W' hanno misure uguali: l'assonometria si dice *monometrica* (o *isometrica*).
- Se solo due degli angoli suddetti sono uguali allora solo due dei tre segmenti unitari considerati hanno uguali misure: l'assonometria si dice *dimetrica*.
- Se, infine, i tre angoli sono diversi fra loro, allora anche i segmenti unitari hanno misure disuguali l'una dalle altre: l'assonometria si dice *trimetrica*.

Nelle figure 11, 12 e 13 sono riportate su un piano proiettante le rappresentazioni, in assonometria ortogonale (rispettivamente monometrica, dimetrica e trimetrica) degli assi x', y', z' e di un cubo disposto, nella realtà, con le sue facce parallele ai piani xy, yz, zx.

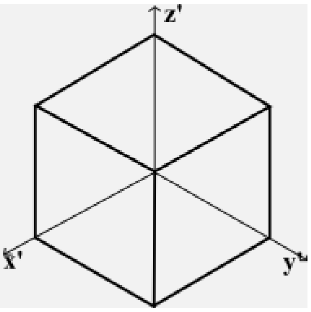


FIG. 11

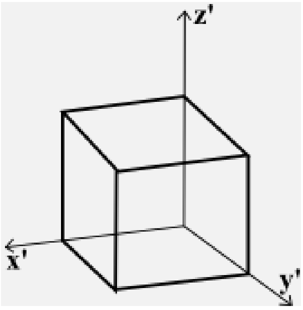


FIG. 12

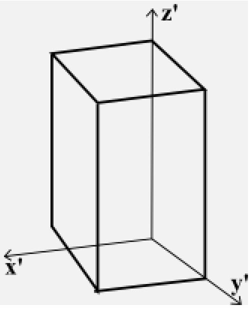


FIG. 13

VERIFICHE

N.B.: Quando non è detto esplicitamente, lo spazio si suppone riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz).

Coordinate cartesiane nello spazio (nn. 1-3):

1. Di ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa:

a) Il punto (1,1,0) appartiene all'asse z.

b) Il punto (a,0,0), dove a è un numero reale, appartiene al piano xy.
c) I punti (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) sono vertici di un triangolo equilatero di lato lungo 1.
d) Il punto (0,0,-2) appartiene al semiasse negativo z.
e) Il punto (1,0,p), dove p è un numero reale positivo, appartiene al piano zx.

2. Un cubo, il cui spigolo ha lunghezza 2, ha un vertice nel punto O ed i tre spigoli che concorrono in O sono contenuti nei tre assi coordinati; inoltre il vertice opposto ad O è situato nel primo ottante. Determinare le coordinate dei vertici del cubo.
3. Il tetraedro regolare ABCD, il cui spigolo ha lunghezza 1, ha il vertice A nel punto O, il vertice B sulla semiretta positiva delle y e il vertice C nel semipiano formato dai punti di coordinate (x,y,0) con x>0. Inoltre il vertice D è situato nel primo ottante. Determinare le coordinate dei vertici del tetraedro.

Rappresentazione piana di figure solide (nn. 4-12):

4. La proiezione ortogonale di un segmento non nullo su un piano:
   a) è sempre un segmento minore del segmento dato; [V] [F]
   b) può essere un segmento uguale al segmento dato; [V] [F]
   c) può essere un punto. [V] [F]

   Per ciascuna affermazione dire se è vera o falsa, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
5. La proiezione ortogonale conserva il parallelismo delle rette? Conserva l'ortogonalità delle rette? Fornire una spiegazione esauriente delle risposte.
6. Costruire la proiezione ortogonale di un quadrato, distinguendo i casi che esso sia contenuto in un piano parallelo al piano di proiezione oppure ortogonale ad esso oppure, infine, obliquo.
7. Costruire la proiezione ortogonale di un cono circolare retto, distinguendo i casi che il suo asse di rotazione sia parallelo al piano di proiezione oppure ortogonale ad esso oppure, infine, obliquo.
8. Costruire la proiezione ortogonale di un cilindro circolare retto, distinguendo i casi che il suo asse di rotazione sia parallelo al piano di proiezione oppure ortogonale ad esso oppure, infine, obliquo.
9. Un cono circolare retto si suppone sospeso nello spazio. Fornirne la rappresentazione ortogonale mediante le tre viste dall'alto, di fronte e di profilo, distinguendo i casi che il suo asse di rotazione sia perpendicolare al piano orizzontale oppure a quello verticale oppure, infine, al piano laterale.
10. Come si definisce un'assonometria? Quando si dice obliqua? Quando ortogonale?
11. Come si definisce una assonometria cavaliera? Quando si dice cavaliera militare? Quando cavaliera frontale?
12. Quando una assonometria si dice monometrica? Quando dimetrica? Quando trimetrica?

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Un parallelepipedo rettangolo ha il centro nell'origine O del sistema di riferimento cartesiano e i suoi spigoli sono paralleli agli assi coordinati. Ammesso che un vertice del parallelepipedo abbia coordinate (1,2,3), quali sono le coordinate degli altri vertici?
2. È possibile che la proiezione ortogonale di un quadrato sia un segmento?
3. Come deve essere disposto un cilindro circolare retto affinché la sua proiezione ortogonale sia un cerchio?

4. Che figura si ottiene proiettando un cubo ortogonalmente su un piano perpendicolare ad una sua diagonale?

5. Quando un'assonometria si dice ortogonale? Quando si dice cavaliera?

RISPOSTE.

1. Le coordinate degli 8 vertici del parallelepipedo, compreso quello assegnato, si ottengono combinando i segni "+" e "–" in tutti i modi possibili nelle tre coordinate del punto assegnato. Per cui sono le seguenti:

$$(1,2,3),\ (-1,2,3),\ (1,-2,3),\ (1,2,-3),\ (-1,-2,3),\ (-1,2,-3),\ (1,-2,-3),\ (-1,-2,-3).$$

2. È possibile. Basta che il quadrato sia contenuto in un piano perpendicolare al piano del disegno. In realtà, una qualsiasi figura, contenuta in un piano perpendicolare al piano del disegno, ha come proiezione ortogonale un segmento, salvo eccezioni banali.

3. Deve essere disposto in modo che il suo asse di rotazione sia perpendicolare al piano del disegno.

4. La proiezione ortogonale di un cubo su un piano perpendicolare ad una sua diagonale è un esagono regolare.

5. Un'assonometria si dice ortogonale quando il piano proiettante è perpendicolare alla direzione di proiezione e, nello stesso tempo, interseca i tra assi cartesiani x, y, z. Si dice, invece, cavaliera quando il piano proiettante è parallelo ad uno dei piani xy, yz, zx. In particolare l'assonometria cavaliera si dice "militare" se il piano proiettante è parallelo al piano xy, altrimenti si dice "frontale".