Prerequisiti:

- Conoscere e utilizzare le proprietà delle figure piane (in particolare: parallelogrammi)
- Conoscere e utilizzare le coordinate cartesiane nel piano

Questa unità riguarda i Licei ed alcuni indirizzi degli Istituti Tecnici. Gli studenti dei Licei scientifici ne affronteranno lo studio nel 1° biennio, quelli dei Licei non scientifici e degli Istituti Tecnici nel 2° biennio.
Gli indirizzi degli Istituti Tecnici, Settore Tecnologico, interessati sono i seguenti:

- **Meccanica, Meccatronica ed Energia**
- **Costruzioni, Ambiente e Territorio**

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *spiegare i concetti di vettori linearmente dipendenti e linearmente indipendenti*
- *dimostrare che tre vettori non nulli, comunque scelti in un piano, sono linearmente dipendenti*
- *definire il prodotto scalare di due vettori ed elencarne le proprietà fondamentali*
- *dimostrare che se e solo se due vettori sono ortogonali il loro prodotto scalare è nullo*
- *definire il prodotto vettoriale di due vettori nello spazio ed enunciarne qualche proprietà*

34.1 Richiami.
34.2 Somma di vettori. Scomposizione.
34.3 Prodotto di un numero reale per un vettore.
34.4 Dipendenza e indipendenza lineare.
34.5 Vettori nel piano cartesiano.
34.6 Prodotti scalare e vettoriale.
34.7 Nota storica.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Nozioni di calcolo vettoriale

Unità 34

34.1 RICHIAMI

34.1.1 Il *vettore*, come forse già sai, è uno strumento molto importante non solo in matematica ma anche nelle scienze sperimentali ed è precisamente utile a rappresentare molte grandezze fisiche, in particolare quelle che non è possibile determinare soltanto con l'attribuzione di una misura (come le cosiddette *grandezze scalari*, quali per esempio: lunghezza, area, massa, ecc.); ma richiedono, per la loro completa determinazione, oltre alla misura, la conoscenza della direzione e del verso in cui agiscono. Sono tali, per esempio, la velocità, l'accelerazione, la forza, eccetera: sono dette, per l'appunto, *grandezze vettoriali*. Di esse hai modo di occuparti nello studio dei fenomeni fisici.
In questa unità, mentre riproponiamo concetti che ti potrebbero essere già familiari, cogliamo l'occasione per un loro approfondimento.

34.1.2 Incominciamo riprendendo la definizione di vettore:
VETTORE è un insieme di segmenti orientati equipollenti, aventi cioè uguale direzione, modulo e verso.
Ogni elemento dell'insieme dei segmenti orientati equipollenti può essere assunto come "rappresentante" del vettore con cui l'insieme si identifica, ma il segmento orientato che rappresenta il vettore non si identifica col vettore medesimo.
Il vettore individuato dal segmento orientato (A, B) si indica con la scrittura:

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\,.$$

Più genericamente, un vettore si può indicare pure con una lettera (minuscola o maiuscola) sovrastata da una freccia; in questo modo:

$$\vec{\mathbf{u}},\ \vec{\mathbf{v}},\ \vec{\mathbf{w}},\ \vec{\mathbf{x}},\ \vec{\mathbf{y}},\ \vec{\mathbf{F}},\ \vec{\mathbf{E}},\ \vec{\mathbf{B}}$$

e anche in altri modi, di cui però non ci occupiamo.
I punti A, B del vettore $\overrightarrow{AB}$ si dicono, nell'ordine, *primo* e *secondo estremo* del vettore.
La direzione, il verso e la lunghezza del segmento orientato (A, B) – che individua il vettore – si chiamano rispettivamente *direzione*, *verso* e *modulo* del vettore.
Generalmente il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$ si indica con la scrittura: $|\overrightarrow{AB}|$, ed è evidente che risulta: $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$.
Se il vettore è indicato con $\vec{u}$, il suo modulo si indica con $|\vec{u}|$ oppure, quando non si creano equivoci, semplicemente con u.
Conveniamo di considerare il *vettore nullo*, che indichiamo con $\vec{0}$, come il vettore avente modulo nullo e direzione e verso indeterminati.

34.1.3 Il vettore $\overrightarrow{AB}$ si dice *uguale* al vettore $\overrightarrow{CD}$ se e solo se il segmento orientato (A, B) è equipollente al segmento orientato (C, D). In sostanza due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, tali che $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sono lo stesso vettore.
Se, invece, i due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno direzione e modulo uguali ma versi opposti (Fig. 1) si dicono *opposti* e si scrive: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.
Considerati un vettore $\vec{u}$ e un qualsiasi punto P, si definisce somma del punto e del vettore il punto Q tale che $\overrightarrow{PQ}=\vec{u}$ (Fig. 2). Si scrive: $Q=P+\vec{u}$.

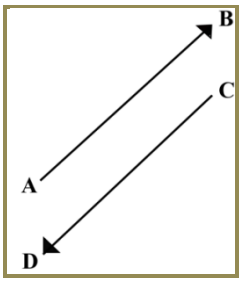

FIG. 1

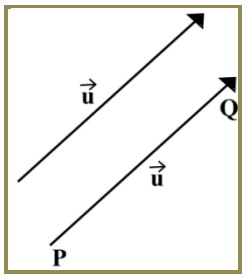

FIG. 2

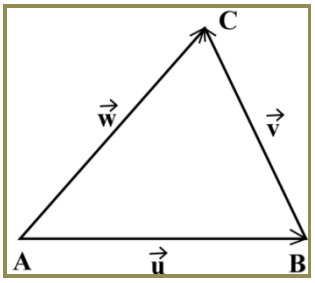

FIG. 3

34.2 SOMMA DI VETTORI. SCOMPOSIZIONE

34.2.1 Siano $\vec{u}, \vec{v}$ due vettori non aventi la stessa direzione. Scelto un qualsiasi punto A, costruiamo i punti B, C tali che (Fig. 3): $B=A+\vec{u}$, $C=B+\vec{v}$.

Il vettore $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$ si dice *somma* dei due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ e si scrive:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\,.$$

Se i due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ hanno la stessa direzione, o come si dice se sono *paralleli*, procediamo esattamente come nel caso precedente. In questa circostanza il vettore somma $\vec{u}+\vec{v}$ è parallelo ai vettori $\vec{u}, \vec{v}$.

Lasciamo a te l'analisi dettagliata di tutti i possibili casi che si possono presentare. Noi ci limitiamo a dire che **la somma di due vettori non dipende dalla particolare scelta del punto A, ma solo dai vettori coinvolti**. Questo si può dimostrare, ma noi non lo facciamo.

Così come non ci soffermiamo sulle seguenti proprietà della somma, la cui verifica lasciamo a te.

Comunque siano scelti i vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ed indicato con $\vec{0}$ il vettore nullo, valgono le seguenti proprietà:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (*proprietà commutativa*)
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (*proprietà associativa*)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ (*esistenza dell'elemento neutro*)
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ (*simmetrizzabilità degli elementi*)

34.2.2 Consideriamo due vettori non paralleli $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, applicati nello stesso punto A (Fig. 4) e costruiamo il parallelogramma ABDC. Allora:

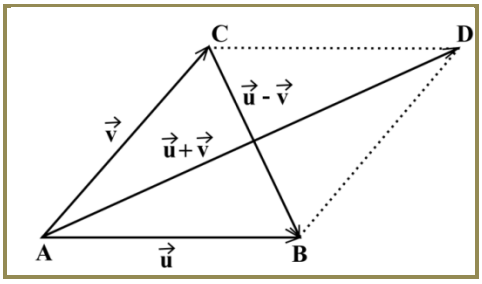

FIG. 4

a) il segmento orientato (A, D) rappresenta il vettore *somma* dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
b) il segmento orientato (C, B) rappresenta un nuovo vettore, il vettore $\vec{u}+(-\vec{v})$, chiamato ***differenza*** tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ed indicato con $\vec{u}-\vec{v}$.

La costruzione del vettore somma di due vettori con il procedimento descritto è assunta solitamente, nelle scienze sperimentali e particolarmente in Fisica, come regola ed è denominata ***regola del parallelogramma***.

34.2.3 Se si devono sommare n vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$, in base alle proprietà della somma dei vettori e segnatamente della proprietà associativa, è possibile sommare il secondo al primo, il terzo alla somma ottenuta e, così via, l'ultimo vettore alla nuova somma ottenuta.
Nelle scienze sperimentali e specificamente in Fisica il vettore somma così costruito è denominato anche il ***vettore risultante*** dei vettori assegnati.
È interessante constatare che se il primo vettore, $\vec{v}_1$, è applicato in un punto O ottenendo il punto $A_1 = O + \vec{v}_1$; il secondo vettore, $\vec{v}_2$, è applicato nel punto A_1 ottenendo il punto $A_2 = A_1 + \vec{v}_2$, e così via, l'n-esimo vettore, $\vec{v}_n$, è applicato nel punto A_{n-1} ottenendo il punto $A_n = A_{n-1} + \vec{v}_n$, il segmento orientato (O, A_n) rappresenta il vettore risultante $\vec{s}$ (Fig. 5, dove n=4): $\vec{s} = \vec{v}_1, + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_n$.

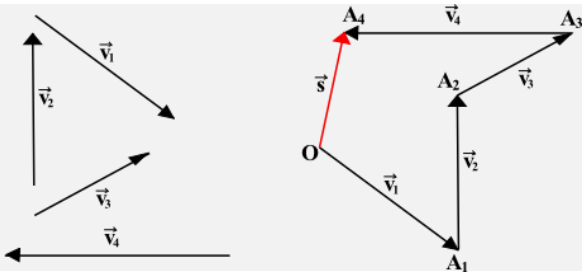

FIG. 5

34.2.4 Assegnato un vettore $\vec{w}$, è possibile determinarne in maniera opportuna due altri, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tali che $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Si dice allora che il vettore $\vec{w}$ è **scomposto** nei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e questi si dicono **i componenti** del vettore $\vec{w}$.
Descriviamo due casi: nel primo supponiamo note le direzioni dei vettori componenti, nel secondo supponiamo noto uno dei due vettori componenti.

a) Note le direzioni dei vettori componenti del vettore assegnato $\vec{w}$, basta prendere un qualsiasi segmento orientato (O, A) in rappresentanza del vettore $\vec{w}$ (Fig. 6) e condurre per i punti O ed A le rette aventi le direzioni assegnate: si ottengono i punti B e C. I vettori rappresentati dai segmenti orientati (O, B) e (O, C) sono quelli cercati. Si ha infatti: $\vec{w} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

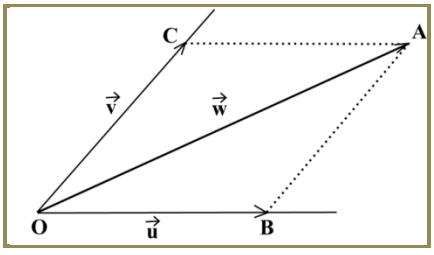

FIG. 6

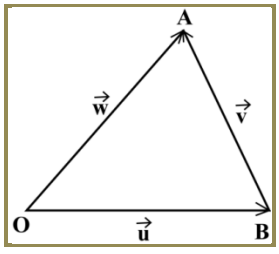

FIG. 7

b) Se oltre al vettore $\vec{w}$ è assegnato uno dei suoi componenti, ad esempio il vettore $\vec{u}$, basta scegliere un arbitrario punto O (Fig. 7) e costruire i punti $A = O + \vec{w}$ e $B = O + \vec{u}$. Il vettore rappresentato dal segmento orientato (B, A) è il secondo componente cercato. Si ha infatti: $\vec{w} = \vec{u} + \overrightarrow{BA}$.

34.3 PRODOTTO DI UN NUMERO REALE PER UN VETTORE

34.3.1 Si chiama **prodotto di un numero reale α per un vettore $\vec{v}$** il vettore – indicato con **$\alpha\vec{v}$** – avente la stessa direzione di $\vec{v}$, lo stesso verso o verso opposto a seconda che sia $\alpha>0$ o $\alpha<0$, e modulo uguale a $|\alpha||\vec{v}|$, cioè uguale al valore assoluto di α per il modulo di $\vec{v}$.
Se $\alpha=0$ conveniamo che $\alpha\vec{v}$ sia il vettore nullo.
In figura 8 sono rappresentati i vettori **$\vec{v}$, $3\vec{v}$, $-2\vec{v}$**, che avendo la stessa direzione sono *paralleli*.

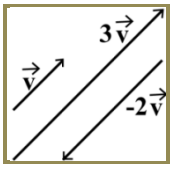

FIG. 8

34.3.2 Utilizzando il teorema di Talete si possono dimostrare (cosa che però non facciamo) le seguenti proprietà.

Proprietà del prodotto di un numero reale per un vettore:

- $1\,\vec{v} = \vec{v}$
- $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
- $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
- $\alpha(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$

dove α, β sono numeri reali qualunque e $\vec{v}, \vec{w}$ sono vettori qualunque.

34.4 DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

34.4.1 Consideriamo i due vettori $\vec{u}$ e $-\vec{u}$. Si ha evidentemente: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.
Ugualmente, presi i tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, dove $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$, si ha: $\vec{u}+\vec{v}+(-\vec{w})=\vec{0}$.
Ancora, considerati i vettori $3\vec{u}$ e $-2\vec{u}$, si ha: $\frac{2}{3}(3\vec{u})+(-2\vec{u})=\vec{0}$.
I vettori $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ del 1° caso, come i vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ del 2° ed i vettori $3\vec{u}$ e $-2\vec{u}$ del 3° si dicono *linearmente dipendenti*.
In generale, vale la seguente definizione:

- Si dice che n vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ (con $n\geq 2$), almeno due dei quali non nulli, sono **linearmente dipendenti** se esistono n numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, non contemporaneamente nulli, tali che:
  [1] $$\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\dots+\lambda_1\vec{u}_n=\vec{0}\,.$$
  Quando, al contrario, la [1] è vera se e solo se $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$, allora gli n vettori considerati si dicono **linearmente indipendenti**.

Così, ad esempio, sono linearmente indipendenti due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, non paralleli, in quanto se e solo se $\lambda_1=\lambda_2=0$ risulta $\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2=\vec{0}$.
Il vettore $\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\dots+\lambda_1\vec{u}_n$ si dice ***combinazione lineare*** dei vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$. I numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono chiamati i ***coefficienti*** della combinazione lineare.
Vale il seguente teorema.

♦ TEOREMA. **Condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori (non nulli) siano linearmente dipendenti è che siano paralleli.**

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che *la condizione è necessaria*. Se i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, non nulli, sono linearmente dipendenti, esistono due numeri reali λ e μ, non nulli, tali che: $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0}$. Da qui segue:

$$\vec{u} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{v}.$$

I due vettori sono pertanto paralleli.

Dimostriamo che *la condizione è sufficiente*. Se i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, non nulli, sono paralleli, allora esiste un numero reale α, non nullo, tale che $\vec{u}=\alpha\vec{v}$. Da qui segue:

$$-1\cdot\vec{u}+\alpha\vec{v}=\vec{0}.$$

I due vettori sono pertanto linearmente dipendenti.

34.4.2 Il teorema precedente ha un'immediata conseguenza:

Nel piano esistono infinite coppie di vettori linearmente indipendenti, tutte quelle che sono costituite da due vettori non paralleli.

Non esistono invece nel piano terne di vettori linearmente indipendenti. Vale infatti il seguente teorema.

♦ TEOREMA. **Tre vettori, comunque scelti in un piano, sono linearmente dipendenti.**

DIMOSTRAZIONE. Siano $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ tre vettori qualsiasi. Se almeno due di essi, ad esempio $\vec{u},\vec{v}$, sono paralleli allora esiste un numero reale α, non nullo, tale che $\vec{u}=\alpha\vec{v}$. Si ha quindi $-1\cdot\vec{u}+\alpha\,\vec{v}+0\cdot\vec{w}=\vec{0}$ e perciò i tre vettori sono linearmente dipendenti. Accantonato questo caso, prendiamo un qualsiasi punto O del piano e costruiamo i punti A, B, C in modo che sia (Fig. 9): $A=O+\vec{u}$, $B=O+\vec{v}$, $C=O+\vec{w}$.

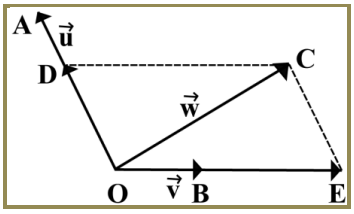

FIG. 9

Scomponendo il vettore $\vec{w}$ secondo le direzioni di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e detti $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$ i due vettori componenti, si ha evidentemente: $\overrightarrow{OD}=\alpha\,\vec{u}$, $\overrightarrow{OE}=\beta\,\vec{v}$, dove α e β sono numeri reali. Quindi $w=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$. Di conseguenza: $\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}+(-1)\,\vec{w}=\vec{0}$ e perciò anche in questo caso i tre vettori sono linearmente dipendenti.

34.4.3 L'ultimo teorema ha un'immediata conseguenza. Assegnata nel piano una coppia ordinata $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ di vettori non paralleli ed un qualsiasi vettore $\vec{u}$, esiste una ed una sola coppia ordinata (u_1,u_2) di numeri reali tali che:

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2\ .$$

La coppia $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ si chiama **base** per i vettori del piano. I numeri u_1,u_2 si dicono **le componenti** del vettore $\vec{u}$ secondo quella base.

In tal modo si viene a stabilire una corrispondenza biunivoca tra i vettori del piano e l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali. In particolare:

- al vettore $\vec{e}_1=1\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2$ corrisponde la coppia (1,0);

- al vettore $\vec{e}_2=0\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2$ corrisponde la coppia $(0,1)$;
- al vettore $\vec{0}=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2$ corrisponde la coppia $(0,0)$.

In generale, per esprimere che sono associati il vettore $\vec{u}$ e la coppia ordinata di numeri reali (u_1,u_2), si scrive: $\vec{u}(u_1,u_2)$ e si legge: "vettore $\vec{u}$ di componenti (u_1,u_2)".
In virtù della suddetta corrispondenza biunivoca, dette (x_1,y_1) e (x_2,y_2) ordinatamente le componenti dei due vettori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ secondo la stessa base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, risulta:

$$\vec{u}_1=\vec{u}_2 \text{ se e solo se } (x_1,y_1)=(x_2,y_2), \text{ ossia se e solo se } x_1=x_2 \text{ e } y_1=y_2.$$

Dette inoltre (x_3, y_3) le componenti di un terzo vettore $\vec{u}_3$ secondo la stessa base, si ha:

$$\vec{u}_3=\vec{u}_1+\vec{u}_2 \text{ se e solo se } x_3=x_1+x_2 \text{ e } y_3=y_1+y_2.$$

34.5 VETTORI NEL PIANO CARTESIANO

34.5.1 Occupiamoci adesso di alcune proprietà dei vettori attraverso la loro rappresentazione in un piano cartesiano.
In un piano cartesiano ortogonale (Oxy) siano U_1 ed U_2 i punti unità rispettivamente dell'asse x e dell'asse y (Fig. 10). Ebbene, si può assumere come base dei vettori del piano la coppia $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ tale che $\vec{e}_1=\overrightarrow{OU_1}$ ed $\vec{e}_2=\overrightarrow{OU_2}$.

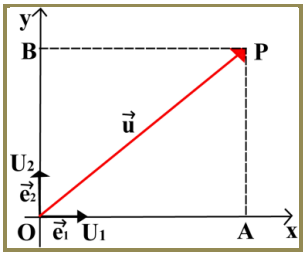

FIG. 10

In questo modo, indicato con $P(x,y)$ un qualsiasi punto del piano cartesiano, le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}=\vec{u}$ secondo la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ non sono altro che le coordinate cartesiane di P. Tali componenti si dicono anche ***componenti del vettore secondo gli assi cartesiani***.
Si dimostra immediatamente che si ha: $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

34.5.2 Valgono due importanti teoremi.

♦ TEOREMA 1. Se il vettore $\vec{v}$ è rappresentato dal segmento orientato (A,B) e se $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ allora le componenti del vettore secondo gli assi cartesiani prefissati (Fig. 11) sono:

$$\mathbf{x_B - x_A,\ \ y_B - y_A}.$$

Lasciamo a te la semplice dimostrazione e ci limitiamo a fornire qualche esempio:

- Il vettore $\vec{v}$, rappresentato dal segmento orientato (A,B) di figura 12, ha come componenti secondo gli assi cartesiani la coppia ordinata $(2,2)$; dunque $\vec{v}(2,2)$.
- Il vettore $\vec{v}$, rappresentato dal segmento orientato (A,B) di figura 13, ha come componenti secondo gli assi cartesiani la coppia ordinata $(6,-3)$; dunque $\vec{v}(6,-3)$.

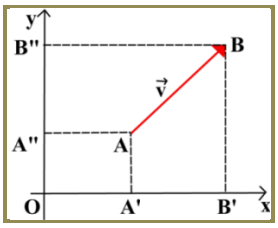

FIG. 11

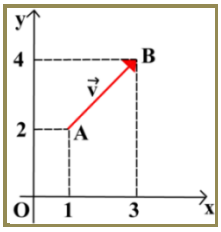

FIG. 12

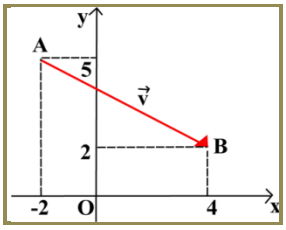

FIG. 13

♦ TEOREMA 2. Se le componenti di un vettore $\vec{v}$ secondo gli assi coordinati prefissati sono (a, b), quelle del vettore $k\vec{v}$ sono (ka, kb).

DIMOSTRAZIONE. Sia (O, A) il segmento orientato rappresentativo del vettore $\vec{v}$ (Fig. 14).

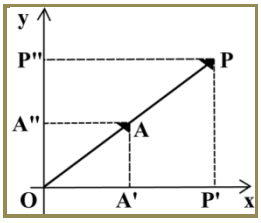

FIG. 14

Indicate con A' ed A" le proiezioni di A rispettivamente sull'asse x e sull'asse y, le misure dei segmenti orientati (O, A'), $(O, A")$ sono rispettivamente a, b . Pertanto: $\overline{OA'}=|a|$, $\overline{OA"}=|b|$.

Ammesso che sia $k\,\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}$, è evidentemente:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = |k|.$$

Ora, in virtù del teorema di Talete, risulta:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{OP"}}{\overline{OA"}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}\ ; \quad \text{per cui} \quad \frac{\overline{OP'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OP"}}{\overline{OA"}} = |k|.$$

Da qui segue poi: $\overline{OP'} = |k||a|, \overline{OP"} = |k||b|$.

D'altra parte, il prodotto dei valori assoluti di due numeri reali è uguale al valore assoluto del prodotto dei due numeri, per cui $|k||a|=|ka|$, $|k||b|=|kb|$. Dunque $\overline{OP'} = |ka|, \overline{OP"} = |kb|$.

Ora consideriamo due casi, a seconda che sia $k>0$ oppure $k<0$ (il caso $k=0$ è banale).

- Se $k>0$, il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha lo stesso verso del vettore $\overrightarrow{OA}$, per cui anche i segmenti orientati (O, P') e (O, A') hanno lo stesso verso, così come hanno lo stesso verso i segmenti orientati $(O, P")$ e $(O, A")$. Se ne desume che le misure dei segmenti orientati (O, P'), $(O, P")$ sono rispettivamente ka, kb .
- Se invece $k<0$, il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha verso opposto a quello di $\overrightarrow{OA}$; per cui anche i segmenti orientati (O, P') e (O, A') hanno versi opposti, così come i segmenti orientati $(O, P")$ e $(O, A")$. Ne deriva la stessa conclusione precedente.

In ogni caso le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}=k\vec{v}$ sono (ka, kb). [c.v.d.]

Come ricorderai, a questi due teoremi più volte si è fatto ricorso. Alcuni esempi in cui il ricorso ai due teoremi è stato determinante:

- equazione della retta,
- determinazione del punto che divide internamente un dato segmento in parti proporzionali a due

numeri reali assegnati,
- equazioni dell'omotetia di dato centro,

eccetera.

34.6 PRODOTTI SCALARE E VETTORIALE [1]

34.6.1 In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) siano assegnati i due vettori $\vec{u}_1(x_1, y_1)$ e $\vec{u}_2(x_2, y_2)$ (Fig. 15). Per comodità indichiamo con u_1 e u_2 i loro moduli.

Si definisce **prodotto scalare** dei due vettori (si indica con la scrittura $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ o semplicemente con $\vec{u}_1\vec{u}_2$, ma si legge comunque "$\vec{u}_1$ scalare $\vec{u}_2$") il numero reale ottenuto sommando i prodotti delle componenti omologhe dei due vettori; vale a dire:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Per convenzione si scrive: $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2$. Di modo che, se (x, y) sono le componenti del vettore $\vec{u}$, si ha:

$$\vec{u}^2 = x^2 + y^2 = u^2,$$

avendo indicato con u il modulo del vettore.

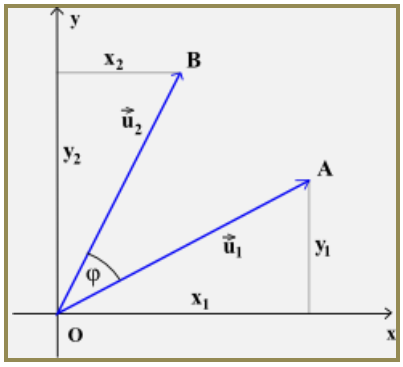

FIG. 15

34.6.2 In virtù del teorema del coseno applicato al triangolo OAB, indicato con φ l'angolo $A\hat{O}B$, che poi non è altro che l'angolo dei due vettori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,\cos\varphi\,,$$

da cui segue:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2u_1u_2\cos\varphi\,,$$

e a conti fatti:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = u_1u_2\cos\varphi\,,$$

e perciò:

$$\boldsymbol{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = u_1u_2\cos\varphi}\,.$$

Si tratta, evidentemente, di una proprietà notevole del prodotto scalare che, a volte, è assunta proprio come definizione di prodotto scalare di due vettori. Anzi, è esattamente in questo modo che si fa in Fisica.

[1] Lo studio di questo paragrafo deve essere preceduto da quello dell'unità 36: Nozioni di goniometria.

Premesso che due vettori si dicono ***ortogonali*** se le loro direzioni sono perpendicolari, dalla precedente relazione si desume immediatamente un'altra notevole proprietà del prodotto scalare di due vettori che peraltro può essere agevolmente dimostrata:

Il prodotto scalare di due vettori (non nulli) è nullo se e solo se i due vettori sono ortogonali.

34.6.3 Il *prodotto scalare* di due vettori non genera un vettore bensì un numero reale. Esiste però un altro tipo di prodotto di due vettori, il cui risultato è ancora un vettore, ed è chiamato *prodotto vettoriale*. Esso è definito in uno spazio ordinario nel modo seguente.
Siano assegnati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, non nulli, e sia φ l'angolo da essi formato, con $0° \leq \varphi \leq 180°$. Preso un qualsiasi punto O del piano, costruiamo i punti A, B in modo che sia: $A=O+\vec{u}$, $B=O+\vec{v}$ (Fig. 16).

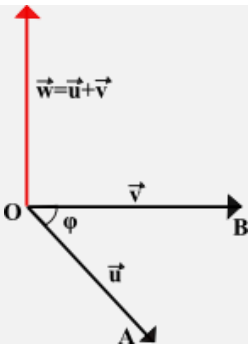

FIG. 16

FIG. 17

Si definisce **prodotto vettoriale** dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il vettore $\vec{w}$ avente le seguenti caratteristiche:

- il suo modulo è $w = uv \sin \varphi$, vale a dire il doppio dell'area del triangolo OAB ovvero, se si vuole, uguale all'area del parallelogramma costruito sui lati OA e OB;
- la sua direzione è data dalla perpendicolare al piano OAB;
- il suo verso è tale che, rispetto ad esso, il vettore $\vec{u}$ deve ruotare di un angolo di ampiezza φ in senso antiorario per sovrapporsi al vettore $\vec{v}$; ovvero, detto in termini di regola pratica, disposti il pollice, l'indice e il medio della mano sinistra (Fig. 17) in modo che il pollice appaia perpendicolare al piano delle altre due dita, il medio sia orientato nel verso positivo del vettore $\vec{u}$ e l'indice nel verso positivo del vettore $\vec{v}$, allora il pollice indica il verso positivo del vettore $\vec{w}$.

Si scrive [(2)]:

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$$

e si legge: "$\vec{w}$ è uguale ad $\vec{u}$ vettore $\vec{v}$".
Si capisce che se i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione (nel qual caso: $\varphi=0°$ oppure $\varphi=180°$) il loro prodotto vettoriale è il vettore nullo.
Il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa né della proprietà commutativa. In effetti, dati tre vettori qualsiasi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, nello spazio ordinario, si ha:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}; \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}).$$

34.6.4 Sia il prodotto scalare sia il prodotto vettoriale svolgono un ruolo fondamentale in Fisica, non solo nella definizione di grandezze fisiche (lavoro di una forza, momento di una forza, momento della

[2] Alcuni autori preferiscono, per il prodotto vettoriale, la scrittura $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

quantità di moto, …) ma anche nella spiegazione di loro importanti proprietà. Puoi constatarlo da solo nel corso dello studio di quella disciplina.

34.7 NOTA STORICA.

Il concetto di vettore sembra essere nato con **Galileo Galilei** (1564-1642), che lo usava col significato di "ciò che trasporta" da un punto ad un altro, per descrivere fenomeni connessi al moto dei corpi. In realtà, ancora oggi con il termine "vettore" si intende chi esegue trasporti di merci (e anche di viaggiatori) per conto di terzi.
Si servirono dei vettori altri studiosi, tra i quali lo svizzero **Daniel Bernoulli** (figlio di Jakob, 1700-1782), al quale si deve la regola del parallelogramma (delle forze), e l'italo-francese **Giuseppe Luigi Lagrange** (1736-1813). Ma lo fecero esclusivamente nel campo della Fisica e senza indagare sui fondamenti del concetto.
Solo più tardi, e con lo stesso significato di "ciò che trasporta da un punto A ad un punto B", è stato ripreso in Matematica e particolarmente nello studio della Geometria.
Lo studioso che, forse, più d'ogni altro ha il merito di avere elaborato un sistema di calcolo vettoriale, benché ancora primitivo e perciò non esattamente uguale a quello attuale, ma ad esso sostanzialmente equivalente, fu un matematico italiano, il sacerdote **Domenico Chelini** (1802-1878), nell'opera *Saggio di geometria analitica trattata con nuovo metodo*, pubblicata a Roma nel 1838.
Agli studi sul calcolo vettoriale diedero contributi significativi altri studiosi, tra i quali il francese **Michel Chasles** (1793-1880) e il tedesco **Hermann Günther Grassmann** (1809-1877). Decisiva fu poi l'azione del torinese **Giuseppe Peano** (1858-1932), con il quale il calcolo vettoriale trovò una sua definitiva sistemazione verso la fine dell'Ottocento, anche se all'epoca il riconoscimento di questo fatto non ci fu e quella che venne considerata la prima sistemazione ufficiale risale a circa 30 anni dopo, cioè al 1920, e fu attribuita al matematico tedesco **Hermann Weyl** (1885-1955).

VERIFICHE

NOTA BENE. Quando occorre, ma non è detto esplicitamente, si suppone che il piano sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

1. Dimostra che, comunque vengano scelti i punti A, B, C, il vettore $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ è il vettore nullo.
2. Di ciascuna delle coppie di vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, rappresentati nella figura sottostante (Fig. 18), disegna il vettore somma.

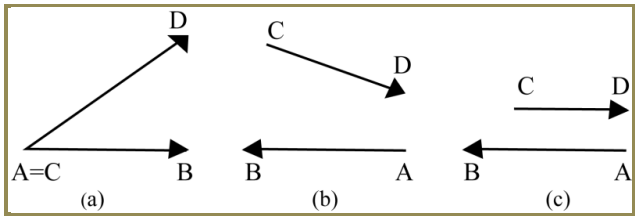

FIG. 18

3. In figura 19, dove ogni quadratino corrisponde ad una unità, sono disegnati i vettori $\vec{a}, \vec{b}$. Costruisci i vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tali che: $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{w}=\vec{b}-\vec{a}$ e calcolane i moduli.

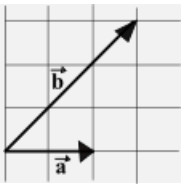

FIG. 19

4. Dimostra che, comunque vengano scelti i punti A, B ed il vettore $\vec{u}$, risulta:

$$(A+\vec{u})-(B+\vec{u})=\overrightarrow{BA}\,.$$

5. In ciascuna delle situazioni rappresentate nella figura sottostante (Fig. 20), scomponi il vettore $\vec{u}$ secondo le direzioni r ed s.

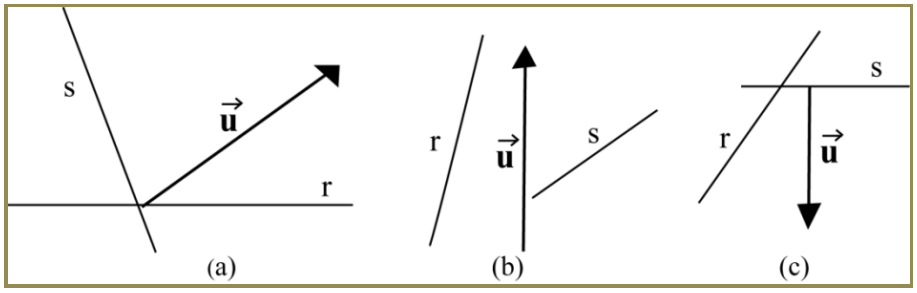

FIG. 20

6. Dimostra che, dati due vettori paralleli qualunque, ogni loro combinazione lineare è un vettore parallelo ad essi.

7. PROBLEMA RISOLTO. Dimostra le seguenti proprietà mediante l'uso del calcolo vettoriale:

a) Il segmento che unisce i punti medi di due lati di un qualunque triangolo è parallelo al terzo lato ed è lungo la metà di esso.

b) Il segmento che unisce i punti medi dei lati obliqui di un trapezio è parallelo alle basi ed ha una lunghezza uguale alla semisomma delle basi stesse.

RISOLUZIONE. Ci occupiamo solamente del primo quesito dal momento che il secondo non ne differisce che per dettagli. Preso allora il triangolo ABC e detti M ed N rispettivamente i punti medi dei lati AB e AC, risulta immediatamente:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}.$$

Da qui, sommando membro a membro segue:

$$2\,\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\right)+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right).$$

D'altro canto, risulta: $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$ e $\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{CN}$. Pertanto: $2\,\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$, ovvero:

$$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}.$$

E questo conclude la nostra dimostrazione.

8. Posto che $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sia una base per i vettori del piano e ammesso che i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abbiano rispetto ad essa componenti rispettivamente $(-2,3)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, trova le componenti dei seguenti vettori:

a) $2\,\vec{u}-\vec{v}$; b) $\vec{u}+3\,\vec{v}$; c) $2\,\vec{u}-3\,\vec{v}$.

$\left[\textbf{R. } a)\ \left(-\frac{9}{2},\frac{20}{3}\right);\ \ldots\right]$

9. Disegna un segmento orientato che rappresenti il vettore $\vec{v}$ di componenti a, b sapendo che:

1) $a = 2,\ \ b = 3;$ 2) $a = -1,\ \ b = 2;$ 3) $a = -\frac{3}{2},\ \ b = -2;$ 4) $a = \frac{2}{3},\ \ b = -\frac{5}{2}.$

10. Trova le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ secondo gli assi cartesiani e rappresenta il vettore medesimo, sapendo che:

a) $A(2,3),\ \ B(1,-1).$ b) $A\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right),\ \ B\left(\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right).$

11. Sono assegnati i punti: $A(2,-1),\ B(1,3),\ C(-3,-2)$. Determina il punto D in modo che il quadrilatero ABCD sia un parallelogramma.

12. Sono dati i punti $A(5,2)$ e $B(1,4)$. Determina graficamente e analiticamente il punto C tale che:

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB};$ b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA};$ c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$

[**R.** a) $C(3,3)$; b) ...; c) impossibile]

13. Sono dati i punti $A(1,-2)$, $B(2,1)$ e $C(-2,0)$. Determina graficamente e analiticamente il quarto vertice D del parallelogramma:

a) ABCD; b) ABDC; c) ADBC.

[**R.** a) $D(-3,-3)$; b) $D(-1,3)$, c) $D(5,-1)$]

14. Determina le coordinate del vertice D del parallelogramma ABCD, sapendo che:

a) $A(2,3), B\left(-\frac{1}{2},-2\right), C(0,1).$ b) $A(1,1), B(2,2), C(3,0).$

c) $A(-2,1), B(1,-2), C\left(\frac{5}{3},1\right).$ d) $A\left(\frac{5}{3},0\right), B\left(0,\frac{7}{4}\right), C\left(-\frac{7}{5},-\frac{7}{4}\right).$

15. È assegnato il vettore $\vec{v}$, rappresentato dal segmento orientato (A, B). Determina le componenti del vettore $k\vec{v}$ e disegna un segmento orientato che lo rappresenti, sapendo che:

1) $A(0,0),\ \ B(2,3),\ \ k=2;$ 2) $A(0,0),\ \ B(2,3),\ \ k=-\frac{3}{2};$

3) $A(1,0),\ \ B(2,3),\ \ k=\frac{1}{2};$ 4) $A(1,0),\ \ B(2,3),\ \ k=-\frac{1}{2}.$

16. Sono dati i punti $A(2,0)$ e $B(0,1)$. Calcola la tangente dell'angolo che il vettore $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ forma con l'asse x [3].

17. Dopo aver chiarito che risulta [4]:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = a^2 + b^2 + 2\,\vec{a}\,\vec{b}\,,$$

verifica che, comunque siano scelti i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, si ha:

a) $(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2=2\,(u^2+v^2);$ b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}[(\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2].$

- Come applicazione della proprietà a), dimostra che «in ogni parallelogramma la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui quattro lati».
- Come applicazione della proprietà b) dimostra che «se un parallelogramma è un rettangolo allora le sue diagonali sono uguali e, viceversa, se un parallelogramma ha le diagonali uguali allora è un rettangolo».

---

[3] La risoluzione di questo esercizio, così come quella degli esercizi 17, 19, 20, 21 e delle domande 5 e 6 della successiva sezione "una breve sintesi per domande e risposte" presuppone la conoscenza delle funzioni circolari (vedi unità 36: Nozioni di goniometria).

[4] Vedi precedente nota 3.

[**R.** Per la prima delle dimostrazioni, considerato il parallelogramma ABCD, basta prendere $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$; per cui …]

18. Utilizzando lo sviluppo del quadrato $(\vec{u}-\vec{v})^2$, verifica il teorema di Pitagora.

[**R.** Indicato con ABC il triangolo, si pone $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, per cui …]

19. Verifica che, comunque vengano scelti i punti A, B, C, D, vale la seguente relazione [5]:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\vec{0}\,.$$

Come applicazione di questa relazione dimostra che le altezze di un triangolo passano per uno stesso punto (*ortocentro*).

[**R.** Per la prima parte: Poiché $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$, ...

Per la seconda parte: Indicato con ABC il triangolo e chiamato D il punto in cui si secano le altezze relative ai lati AB e BC, nella relazione considerata due dei tre prodotti scalari sono nulli in quanto …; per cui …]

20. Determina direzione, modulo e verso del vettore $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ sapendo che [6]:

a) A(3,0), B(0,2); b) A(0,1), B(2,1); c) A(1,−1), B(2,1).

21. ESERCIZIO RISOLTO. Siano a_1, a_2, b_1, b_2 numeri reali qualunque.

a) Dimostrare la seguente relazione:

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2\le({a_1}^2+{a_2}^2)\left({b_1}^2+{b_1}^2\right).$$

b) In quale caso vale il segno di uguaglianza?

NOTA. La relazione è un caso particolare di una più generale, che va sotto il nome di ***disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*** [7], della quale però non ci possiamo occupare.

Ci soffermeremo su due dimostrazioni della relazione. Della prima, di natura prettamente algebrica, forniremo solamente qualche spunto, lasciando a te il compito di completarla. La seconda dimostrazione è invece un'occasione per mostrare la potenza del calcolo vettoriale. Richiede però la conoscenza di alcune nozioni di goniometria (Vedi precedente nota 3).

DIMOSTRAZIONE 1. Una volta sviluppati i prodotti, si può constatare che svolge un ruolo determinante la seguente evidente disuguaglianza: $(a_1b_1-a_2b_2)^2\ge0$, dalla quale si evince pure che vale il segno di uguaglianza quando $b_1=ka_1$ e $b_2=ka_2$, dove k è un parametro reale.

DIMOSTRAZIONE 2. Si considerano le coppie ordinate (a_1, a_2) e (b_1, b_2) come le componenti di due vettori, rispettivamente $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Si constata quindi che:

$$a_1b_1+a_2b_2=\vec{a}\cdot\vec{b}\,,\quad {a_1}^2+{a_2}^2=|\vec{a}|^2,\quad {b_1}^2+{b_2}^2=\left|\vec{b}\right|^2.$$

Si tratta perciò di dimostrare che si ha:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\le|\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\quad\text{o anche:}\quad\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|.$$

Il che è del tutto evidente dal momento che si ha:

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot|\cos\varphi|\,,$$

essendo φ l'angolo dei due vettori e, com'è noto, $-1\le\cos\varphi\le1$.

In particolare risulta: $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$ se e solo se $|\cos\varphi|=1$. Il che accade solamente quando $\varphi=0°$ oppure $\varphi=180°$, ossia quando i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli. E pertanto esiste un numero reale k tale che: $\vec{b}=k\vec{a}$, vale a dire quando $b_1=ka_1$ e $b_2=ka_2$.

---

[5] Vedi precedente nota 3.

[6] Vedi precedente nota 3.

[7] **Cauchy**, Augustin Louis, matematico francese, 1789-1857. **Schwarz**, Karl Hermann Amandus, matematico tedesco, 1843-1921.

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. È corretto affermare che ogni vettore è rappresentato da un segmento orientato?
2. Cosa sono **i componenti** di un vettore? Cosa **le componenti**?
3. Che senso bisogna dare alla frase: «I due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente indipendenti»? Che senso alla frase «I due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente dipendenti»?
4. In un piano esistono coppie di vettori linearmente indipendenti ma non esistono terne di vettori linearmente indipendenti. È vero o è falso?
5. Si consideri il triangolo ABC e sia α la misura dell'angolo in A. È vero che il prodotto scalare $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ è uguale al doppio dell'area del triangolo? [8]
6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti $A(2,1)$ e $B(-1,2)$. Quali sono le caratteristiche del vettore $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$? [9]

RISPOSTE.

1. Sì, è corretto. In effetti un vettore è una classe di segmenti orientati equipollenti e può essere rappresentato da uno qualsiasi dei segmenti della classe ma non si identifica con esso. Allo stesso modo una classe di alunni può essere rappresentata da un alunno ma non si identifica con l'alunno che la rappresenta.
2. Dato un vettore, **i suoi componenti**, per esempio secondo due direzioni assegnate, sono due vettori la cui somma è il vettore dato. Invece **le sue componenti**, rispetto ad una data base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, sono i numeri reali che formano la coppia ordinata (a,b), tali che, se $\vec{u}$ è il vettore, si abbia $\vec{u}=a\,\vec{\imath}+b\,\vec{\jmath}$. Nel caso specifico in cui il vettore $\vec{u}$ è rappresentato dal segmento orientato (A,B) ed A,B hanno coordinate rispettivamente (x_A,y_A), (x_B,y_B) rispetto al un sistema di assi cartesiani ortogonali associato alla base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, allora:
   - **le componenti** del vettore $\overrightarrow{AB}$ secondo tali assi sono $(x_B-x_A,\,y_B-y_A)$,
   - **i suoi componenti** secondo gli assi medesimi sono i vettori $(x_B-x_A)\,\vec{\imath}$, $(y_B-y_A)\,\vec{\jmath}$.
3. Dire che "i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente indipendenti" significa che, per ogni scelta dei numeri reali a,b, purché non contemporaneamente nulli, si ha: $a\,\vec{u}+b\,\vec{v}\neq\vec{0}$. Dire invece che essi sono linearmente dipendenti significa che esiste almeno una coppia di numeri reali a,b, non contemporaneamente nulli, tali che: $a\,\vec{u}+b\,\vec{v}=\vec{0}$.
4. È vero. In effetti, tre vettori del piano, comunque scelti, sono linearmente dipendenti, mentre ci sono coppie di vettori linearmente dipendenti (due vettori paralleli) e coppie linearmente indipendenti (due vettori non paralleli).
5. È falso. Il prodotto scalare $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ è uguale infatti a $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\,\cos\alpha$, mentre l'area del triangolo è $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\,\sin\alpha$.
6. Ammesso, per comodità, che il piano cartesiano sia orizzontale, il vettore $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ ha direzione verticale, è orientato dal basso verso l'alto ed ha modulo uguale a $\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,\sin\varphi$, essendo φ l'angolo $A\hat{O}B$,

[8] Vedi precedente nota 3.
[9] Vedi precedente nota 3.

che nel caso specifico è $90°$. Pertanto, essendo OA ed OB lunghi entrambi $\sqrt{5}$, il modulo del vettore è 5.