Prerequisiti:

- Conoscenze approfondite delle operazioni con i numeri e delle loro proprietà

I contenuti di questa unità sono rivolti al Liceo Scientifico, compresa l'opzione scienze applicate, ed all'indirizzo Informatica e Telecomunicazioni del Settore Tecnologico degli Istituti Tecnici. Gli studenti dei Licei scientifici ne affronteranno lo studio nel 1° biennio, quelli degli Istituti Tecnici nel 2° biennio.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

Una volta completata l'unità, gli allievi devono essere in grado di:

- *calcolare somme e prodotti di matrici*
- *calcolare il valore di un determinante, eventualmente con l'uso di un apposito software matematico*
- *fornire la notazione matriciale di un sistema lineare*
- *utilizzare matrici e determinanti per la risoluzione di un sistema lineare*
- *risolvere problemi che si traducono in sistemi lineari*

35.1 Matrici.

35.2 Somma e prodotto di matrici.

35.3 Determinanti.

35.4 Il metodo di Cramer e la forma matriciale di un sistema lineare.

Verifiche.

Una breve sintesi per domande e risposte.

Complementi: determinanti e geometria

Nozioni di calcolo matriciale

Unità 35

35.1 MATRICI

35.1.1 Una "matrice" generalizza in un certo senso il concetto di vettore. Vedremo fra breve in che senso. Diciamo subito però, tanto per incominciare, che è una "matrice", per esempio, la tabella che fornisce la classifica generale del nostro campionato di calcio.
Qui sotto è riportata la tabella che fornisce la classifica finale del campionato italiano di calcio 2010/11, ancorché limitata alle sole prime 7 squadre.

Squadra	Punti	Partite vinte	Partite pari	Partite perse	Gol fatti	Gol subiti
MILAN	82	24	10	4	65	24
INTER	76	23	7	8	69	42
NAPOLI	70	21	7	10	59	39
UDINESE	66	20	6	12	65	43
LAZIO	66	20	6	12	55	39
ROMA	63	18	9	11	59	52
JUVENTUS	58	15	13	10	57	47

È ancora una "matrice" la tabella i cui elementi sono i coefficienti delle incognite di un sistema lineare, come ad esempio il seguente:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x - 5y + 3z = 2 \end{cases}$$

La matrice è quella riportata qui sotto:

Equazione	Coefficiente di x	Coefficiente di y	Coefficiente di z
prima	2	–1	1
seconda	1	–2	1
terza	4	–5	3

35.1.2 Una **matrice** è insomma una tabella di mn elementi distribuiti su m righe ed n colonne, che di solito si rappresenta in uno dei seguenti modi:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il generico elemento della matrice si indica con a_{ik}, dove l'indice "i" specifica il numero di riga mentre l'indice "k" specifica il numero di colonna. Per esempio, l'elemento a_{23} è quello situato nell'incrocio fra la 2ª riga e la 3ª colonna.
Le matrici trovano diritto di cittadinanza non solo in matematica ma anche in altri settori, in particolare in informatica, dove di solito sono chiamate col termine ***array bidimensionale***. Sempre in informatica,

il termine ***array monodimensionale*** è riservato, invece, ad una n-upla ordinata di oggetti: concetto che generalizza quello di **vettore**, conosciuto come coppia ordinata di numeri reali, e che noi possiamo concepire come "matrice di una riga ed n colonne" (***vettore riga***) o come "matrice di n righe ed una colonna" (***vettore colonna***). Ed è in questo senso che una matrice generalizza il concetto di vettore.
Gli elementi di un "array" possono essere numeri, caratteri, stringhe di caratteri. Da qui in poi, però, per quel che riguarda la nostra questione, supporremo che i termini a_{ik} di una matrice (o di un vettore) siano solo ed esclusivamente numeri o comunque espressioni con valori numerici.

35.1.3 Una matrice di m righe ed n colonne, con m≠n, si dice più propriamente **matrice rettangolare** di *ordine* mn. Se m=n si ha una **matrice quadrata** di *ordine* n.
Una matrice di m righe e 2 colonne può essere usata per rappresentare la scomposizione in fattori primi di un determinato numero naturale. Per esempio:

$$2^4 \cdot 3^5 \cdot 7 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

In una matrice quadrata di ordine n gli elementi a_{ii} (vale a dire gli elementi a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) si dice che ne costituiscono la *diagonale principale*.
Ecco, di seguito, due esempi: uno di matrice rettangolare 3×4, uno di matrice quadrata di ordine 3:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} \mathbf{3} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 1 \\ 2 & -2 & \mathbf{5} \end{Vmatrix}$$

Nella matrice quadrata, i termini della diagonale principale – $3, 4, 5$ – sono indicati in grassetto.
Due matrici si dicono ***uguali*** se sono dello stesso tipo ed ogni elemento dell'una è uguale al corrispondente elemento dell'altra.
Una matrice, i cui elementi sono tutti nulli, si dice ***matrice nulla***.

35.2 SOMMA E PRODOTTO DI MATRICI

35.2.1 Considerate due matrici A e B, dello stesso tipo e dello stesso numero m di righe ed n di colonne, siano a_{ik} il generico elemento della matrice A e b_{ik} il generico elemento della matrice B. La matrice S, il cui generico elemento s_{ik} è tale che $s_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$, si chiama ***somma*** delle matrici A e B.
Per esempio:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Due matrici possono essere dunque sommate se e solo se hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne. In caso contrario, l'operazione non è possibile.
La somma di due matrici gode della proprietà commutativa. Vale a dire che, se A e B sono due matrici qualsiasi dello stesso ordine, risulta: **A+B=B+A**. Cosa che si spiega agevolmente poiché è ricondotta alla proprietà commutativa dell'addizione di numeri reali.

Considerati un numero reale ρ ed una matrice A, il cui generico elemento sia a_{ik}, si definisce ***prodotto*** di ρ per A la matrice B i cui elementi b_{ik} sono tali che $b_{ik}=\rho a_{ik}$.
Per esempio:

$$3 \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \end{Vmatrix}$$

35.2.2 Considerata una matrice A, la matrice che si ottiene da A scambiando tra loro le righe con le colonne si chiama ***matrice trasposta*** di A: si indica con la scrittura A^T.

Per esempio, posto che sia:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

la sua trasposta è la matrice:

$$A^T = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Si capisce che, se una matrice ha m righe ed n colonne, la sua trasposta ha n righe ed m colonne. Ragion per cui due matrici, una trasposta dell'altra, non possono essere sommate. A meno che non si tratti di due matrici quadrate dello stesso ordine, nel qual caso non c'è alcuna difficoltà a sommarle.

Ebbene, ammesso che sia: $A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & -6 & 7 \end{Vmatrix}$ si ha: $A^T = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -6 \\ -4 & 1 & 7 \end{Vmatrix}$

In questo caso le due matrici possono essere sommate e si ha: $A + A^T = \begin{Vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & -5 \\ -2 & -5 & 14 \end{Vmatrix}$

Si nota una particolarità, che è in realtà una proprietà generale:

- **Nella matrice somma di una matrice quadrata con la sua trasposta, gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono uguali.**

Una matrice, come quella precedente, in cui gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono numeri uguali si dice ***matrice simmetrica***.

Se poi tali elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono tutti nulli, mentre almeno uno degli elementi della diagonale principale non è nullo, la matrice si denomina ***matrice diagonale***.

35.2.3 Consideriamo la matrice A, di m righe ed h colonne, il cui generico elemento sia a_{ik}, e la matrice B, di h righe ed n colonne, il cui generico elemento sia b_{ik}. Si definisce **prodotto di A per B** la matrice P, di m righe ed n colonne, il cui generico elemento p_{ik} è dato dalla seguente espressione:

$$\mathbf{p_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ih}b_{hk}}$$

Si scrive: **P=A·B** o anche **P=AB**.

Per esempio, posto che sia: $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix}$ e $B = \begin{Vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{Vmatrix}$

risulta: $AB = \begin{Vmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 9 & 1\cdot 8 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 7 + 4\cdot 9 & 3\cdot 8 + 4\cdot 0 \\ 5\cdot 7 + 6\cdot 9 & 5\cdot 8 + 6\cdot 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 25 & 8 \\ 57 & 24 \\ 89 & 40 \end{Vmatrix}$

Un altro esempio. Posto che sia: $A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ e $B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$

risulta: $AB = \begin{Vmatrix} 4\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 3 \\ 1\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3 \\ 2\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 11 \\ 13 \\ 5 \end{Vmatrix}$

Nell'ultimo esempio si constata che, in particolare, quando la matrice A ha m righe ed h colonne e la matrice B ha h righe ed una colonna (essa è cioè un *vettore colonna*, che a volte è pure chiamato *matrice colonna*), allora la matrice prodotto AB ha m righe ed una colonna, ossia è ancora un vettore colonna.
Il prodotto di due matrici non gode della proprietà commutativa. Vale a dire che, se A è una qualsiasi matrice di m righe ed h colonne e B è una qualsiasi matrice di h righe ed n colonne, risulta in genere: **AB≠BA**. È sufficiente un controesempio per provarlo.

35.2.4 Di ogni matrice quadrata, ma solamente di essa, si definisce anche la **potenza** con esponente un numero naturale. Precisamente, se A è una matrice quadrata di un qualsiasi ordine k, si definisce potenza n-esima di A si indica con A^n la matrice (che è ancora una matrice di ordine k) tale che:

$$A^n = \begin{cases} \text{matrice nulla se } n=0 \\ A \text{ se } n=1 \\ \underbrace{AA\ldots A}_{\text{n fattori}} \text{ se } n>1 \end{cases}$$

Risolvere il seguente esercizio.
Posto che A, B siano due qualsiasi matrici quadrate dello stesso ordine, dimostrare che sono **false** entrambe le seguenti uguaglianze:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2\,, \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

[Suggerimento: sviluppare i prodotti e tenere presente che il prodotto delle matrici non gode della proprietà … oppure fornire, per ogni uguaglianza, un controesempio]

35.3 DETERMINANTI

35.3.1 Siano $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ quattro numeri reali assegnati. Il numero rappresentato con il simbolo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

il cui valore è:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

si dice ***determinante di ordine 2***.

Per esempio: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 1(-3) = -1$.

Se invece di $4=2^2$ numeri, ne sono assegnati n^2, indicati con a_{ik} $(i, k = 1,2, \ldots, n)$, si parla di **determinante di ordine n**. Esso è il numero rappresentato con il simbolo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

I numeri a_{ik} si dicono gli ***elementi*** del determinante.

MA QUAL È IL SUO VALORE?

Chiaramente se n=2 il valore del determinante è quello definito sopra.
Se n=1 (nel qual caso il determinante si identifica con il suo unico elemento a_{11}), il suo valore è assunto

proprio uguale ad a_{11}.
Se n>2 le cose si complicano. Arriveremo lo stesso alla conclusione, ma è necessaria qualche considerazione preliminare e un po' di pazienza.

35.3.2 Considerato un determinante D di ordine n, diciamo ***minore complementare*** del suo elemento a_{ik} il determinante, di ordine $n-1$, che si ottiene da D sopprimendo in esso la riga e la colonna che si incrociano in a_{ik}. Indichiamo con D_{ik} il minore complementare di a_{ik}.
Per esempio, considerato il determinante di ordine 4:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

il minore complementare del suo elemento $a_{23}=7$ è il determinante di ordine 3:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix}$$

ottenuto dal precedente determinante, sopprimendo in esso la riga e la colonna che s'incrociano in $a_{23}=7$.
Considerato ancora un determinante D di ordine n, diciamo ***aggiunto*** (o ***complemento algebrico***) del suo elemento a_{ik} il numero A_{ik} tale che:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$$

dove D_{ik} è il minore complementare di a_{ik}.
Per esempio, con riferimento al caso precedente, il complemento algebrico di $a_{23}=7$ è il numero:

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\, D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix}$$

35.3.3 A questo punto siamo in grado di fornire una definizione operativa di un qualunque determinante di ordine n>2. Vale a dire una definizione che permette di calcolarne il valore. Valore che è precisamente il numero:

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}.$$

Come caso particolare si ha il valore di D quando n=2. Adesso infatti è: $A_{11}=a_{22}$ e $A_{12}=-a_{21}$, per cui: $D=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$. Come deve essere.
La definizione precedente permette di calcolare il valore di un determinante di ordine 3, giacché il calcolo è ricondotto a quello di determinanti di ordine 2, che si sanno calcolare.
Una volta che si sa calcolare il valore di un determinante di ordine 3 si può calcolare quello di un determinante di ordine 4. E così via.

<u>Esempio</u>. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} =$

$$= 1\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 0 = -7-16 = -23\,.$$

35.3.4 Il calcolo del valore di un determinante di ordine n>2 è facilitato da due importanti proprietà che ci limitiamo ad enunciare senza fornirne alcuna dimostrazione (cosa che comunque si potrebbe fare):

- ♦ PROPRIETÀ 1. **Ogni determinante D di ordine n è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi linea (riga o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.**

Vale a dire:

[1] $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$ (qualunque sia i, compreso fra 1 ed n);

[2] $D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\ldots+a_{nk}A_{nk}$ (qualunque sia k, compreso fra 1 ed n).

- ♦ PROPRIETÀ 2. **Se ad una qualsiasi linea (riga o colonna) di un determinante si sostituisce una combinazione lineare di quella linea con una o più altre linee parallele, il valore del determinante risulta moltiplicato per il coefficiente della combinazione lineare della linea che si sostituisce.**

Per esempio, se si sostituisce la seconda riga con una combinazione lineare di questa riga con la terza riga e i coefficienti della combinazione lineare sono a (coefficiente della seconda riga) e b (coefficiente della terza riga), il determinante risulta moltiplicato per a.
Vediamo come queste due proprietà facilitino il calcolo del valore di un determinante con riferimento a qualche esempio.

Esempio 1. Sia il determinante di ordine 4: $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 3\\ 2 & -2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$

In virtù della proprietà 1 possiamo scrivere:

$$D=a_{41}A_{41}+a_{42}4+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}$$

e siccome gli elementi della 4ª riga del determinante sono tutti nulli, si ha evidentemente $D=0$.
Questo accade ogni volta che una linea del determinante (sia essa riga o colonna) è formata da elementi tutti uguali a 0. In altri termini:

- ♦ **Se almeno una linea (riga o colonna) di un determinante è costituita da elementi tutti nulli allora il determinante è nullo.**

Esempio 2. Sia il determinante di ordine 4: $D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4 & 5\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$

In virtù della proprietà 1 possiamo scrivere:

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$$

e siccome tutti gli elementi della 2ª riga sono nulli, tranne a_{22} che è uguale a 2, risulta:

$$D=a_{22}A_{22}=2\cdot(-1)^4D_{22}.$$

D'altro canto: $D_{22}=\begin{vmatrix}2 & -4 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}$

o anche, sempre per la proprietà 1:

$$D_{22}=b_{31}B_{31}+b_{32}B_{32}+b_{33}B_{33}=1\cdot(-1)^4(-4-15)+(-1)\cdot(-1)^6(6+4)=-29$$

Pertanto: $D=2(-29)=-58$.

<u>Esempio 3</u>. Sia il determinante di ordine 4: $\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

Non sembra che ci siano linee preferenziali. Tuttavia, utilizzando la proprietà 2, eventualmente più volte, si può fare in modo che tutti gli elementi di una linea (tranne uno) diventino uguali a 0.
Prendiamo la seconda riga e sostituiamo ad essa quella che si ottiene sommandola con la quarta riga; il determinante diventa:

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Adesso moltiplichiamo la seconda colonna per 4 e la quarta colonna per -5 e, dopo aver sommato le due colonne così modificate, sostituiamo la seconda colonna con la somma ottenuta. In questo modo, però, il determinante risulta moltiplicato per 4, che è il coefficiente per cui è stata moltiplicata la seconda colonna, quella sostituita. Ragion per cui risulta:

$$\mathrm{D}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -7 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Da qui in poi si procede come nell'esempio 2. A conti fatti si trova. D$=-170$.

<u>Esempio 4</u>. Sia il determinante di ordine 4: $\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

Sostituendo la terza riga con quella che si ottiene dopo averla moltiplicata per -1 e sommata alla seconda, il determinante diventa:

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Sicché evidentemente D$=0$.
Quello che abbiamo visto nell'esempio 4 accade ogni volta che il determinante presenta due linee parallele tali che risulti costante il rapporto fra gli elementi corrispondenti. In altri termini:

- **Se due linee parallele (righe o colonne) di un determinante sono tali che gli elementi di una di esse si ottengono moltiplicando i corrispondenti elementi dell'altra per uno stesso numero, allora il determinante è nullo.**

NOTA BENE. Le proprietà enunciate e i corollari che abbiamo evidenziato sono un utile strumento per semplificare il procedimento per il calcolo del valore di un determinante. Ma nonostante ciò, i calcoli rimangono certamente lunghi e noiosi, specialmente quando il determinante è di un ordine elevato. Una volta, neanche tanto tempo fa, questo fatto procurava fastidi e inconvenienti (quando ci sono molti calcoli, la probabilità di commettere errori aumenta), ma oggigiorno non ci sono più problemi al riguardo. Infatti, idonei software matematici permettono di calcolare rapidamente il valore di un qualsiasi determinante. Puoi utilizzare un tale software per controllare l'esattezza dei calcoli che andrai a fare negli esercizi che ti sono proposti nella sezione "verifiche".

35.3.5 Dimostriamo ora una proprietà dei determinanti che ci tornerà utile nel prossimo paragrafo.

- PROPRIETÀ 3. **In ogni determinante la somma degli elementi di una linea (riga o colonna) per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra linea parallela è uguale a 0.**

Vale a dire, posto che sia $i \neq j$:

[3] $$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=0\ ;$$

e posto che sia $k \neq j$:

[4] $$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\ldots+a_{nk}A_{nj}=0\ .$$

DIMOSTRAZIONE. Confrontata con l'espressione:

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\ldots+a_{jn}A_{jn}\ ,$$

che – come noto – fornisce lo sviluppo del determinante D, la [3] si può pensare come lo sviluppo del determinante che si ottiene da D sostituendo alla riga j-esima la riga i-esima. Cosicché questo determinante ha due righe uguali e per questo è nullo.
Il discorso è analogo per la [4].

Come verifica di questo teorema, sei invitato a controllare – riguardo al determinante del precedente esempio 4 – che risultano uguali a 0:

a) la somma degli elementi della prima riga per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti della seconda riga;
b) la somma degli elementi della prima colonna per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti della seconda colonna.

35.4 IL METODO DI CRAMER E LA FORMA MATRICIALE DI UN SISTEMA LINEARE

35.4.1 A questo punto vogliamo proporre un metodo di risoluzione dei sistemi lineari che utilizzi matrici e determinanti. Consideriamo il seguente sistema lineare di n equazioni in n incognite:

[5] $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Osserviamo anzitutto che i coefficienti a_{ik} ($i,k=1,2\ldots,n$) danno luogo al seguente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si chiama **determinante della matrice dei coefficienti del sistema** (o, più semplicemente: **determinante del sistema**).
Costruiamo ora la matrice A' formata dai complementi algebrici A_{ik} degli elementi a_{ik} di D e quindi la matrice trasposta di A'. Otteniamo la matrice seguente:

$$A^* = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2,n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Per le proprietà 1 e 3 dei determinanti risulta:

$$A \cdot A^* = \begin{Vmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{Vmatrix} = D \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = D \cdot U,$$

dove abbiamo posto evidentemente:

$$U = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Si può verificare agevolmente che, presa una qualsiasi matrice quadrata A di ordine n, risulta: AU=UA=A, per cui U è l'elemento neutro rispetto all'operazione prodotto (righe per colonne) di due matrici quadrate: si chiama ***matrice unità***.

Ora, se D≠0, risulta:

$$A \cdot \left(\frac{1}{D} A^*\right) = U\,,$$

per cui la matrice $\frac{1}{D}A^*$ è la ***matrice inversa*** A^{-1} di A rispetto all'operazione prodotto (righe per colonne) di due matrici quadrate: essa, pertanto, esiste se e solo se D≠0.

35.4.2 Adesso, con riferimento al sistema [5], consideriamo, assieme alla matrice A dei suoi coefficienti, i seguenti vettori colonna, X e B, detti rispettivamente "vettore delle incognite" e "vettore dei termini noti":

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b \end{Vmatrix}.$$

Osserviamo che risulta:

$$AX = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{Vmatrix}.$$

Ebbene, il sistema [5] esprime in forma estesa la seguente condizione:

$$\mathbf{A\,X = B},$$

che è la cosiddetta **forma matriciale** (o **notazione matriciale**) di un sistema lineare.

Ora, se la matrice quadrata A è ***regolare*** (ammette cioè la matrice inversa A^{-1} e perciò se D≠0), osservando che: $A^{-1}{\cdot}A{=}A{\cdot}A^{-1}=U$, si ha: $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$, da cui segue:

$$\left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}B \quad \text{ossia:} \quad UX=A^{-1}B$$

e infine, tenendo presente che UX=X, si ottiene:

$$X = A^{-1}B\,.$$

Di conseguenza, ritornando alla forma estesa:

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}\right\|$$

da cui si ricava immediatamente:

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{D},$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{D},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}}{D}.$$

Ora si può constatare che la somma dei prodotti:

$$b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj} \quad (\text{con } j = 1,2, \dots, n)$$

non è altro che lo sviluppo del determinante D_j che si ottiene dal determinante D del sistema [5] dopo aver sostituito in esso la colonna j-esima con la colonna dei termini noti. Pertanto, in sintesi, la soluzione del sistema [5] è costituita dalla seguente n-upla di numeri:

[6] $$\mathbf{x_1 = \frac{D_1}{D}}, \quad \mathbf{x_2 = \frac{D_2}{D}}, \dots, \quad \mathbf{x_n = \frac{D_n}{D}}.$$

Tutto questo accade però se, come abbiamo specificato, $D\neq0$.
Se invece $D=0$, si deve prima di tutto osservare che se uno dei determinanti $D_1, D_2, \dots, D_n$ è nullo, tutti gli altri lo sono. Per cui si possono presentare due casi:

- nel 1° caso tutti i determinanti D_j sono nulli: il sistema [5] è ***indeterminato***;
- nel 2° caso nessun determinante D_j è nullo: il sistema [5] è ***impossibile***.

Detto che un sistema lineare di n equazioni in n incognite si dice **normale** se il suo determinante è non nullo e si dice **non normale** (o **singolare**) se invece il suo determinante è nullo, dal ragionamento precedente si desume la seguente proposizione, nota come teorema di Cramer [1]:

♦ **TEOREMA DI CRAMER.** Se un sistema lineare di n equazioni in n incognite è normale allora ammette una ed una sola soluzione, se è singolare esso risulta indeterminato o impossibile.

La regola per determinare la soluzione del sistema, quando è posto nella forma [5] ed è normale, è sintetizzata dalle formule [6]: si chiama **regola di Cramer**, benché sembra che a scoprirla per primo non sia stato lui ma lo scozzese McLaurin [2].

Come applicazione del teorema di Cramer, sei invitato a riprendere e discutere il seguente sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

già affrontato nei tuoi studi precedenti.

---

[1] **Cramer**, Gabriel, matematico svizzero, 1704-1752.
[2] **McLaurin**, Colin, matematico scozzese, 1698-1746.

Sei invitato inoltre a risolvere, ancora col metodo di Cramer, il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - y + 1 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

VERIFICHE [3]

Matrici (nn. 1-5):

1. Considerate le due matrici A e B, calcolare le matrici $2A$, $\frac{1}{2}B$, $A + B$, sapendo che:

a) $A = \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{Vmatrix}$

b) $A = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$

c) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$

2. Scrivere due matrici quadrate del 4° ordine, che siano una trasposta dell'altra e trovare la matrice S somma delle due matrici. La matrice S ha una particolarità: quale?

3. Calcolare il prodotto della matrice A per la matrice B sapendo che:

a) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$

b) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}$

c) $A = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{Vmatrix}$

d) $A = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{Vmatrix}$

4. Determinare il vettore colonna X tale che AX=B, sapendo che:

a) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$

b) $A = \begin{Vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix}$

5. Sono date le seguenti matrici quadrate di ordine 2:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

Calcolare: $A^2,\ B^2,\ AB,\ BA,\ (A+B)^2,\ A^2 + 2AB + B^2,\ (A+B)(A-B),\ A^2 - B^2$.
Quali considerazioni si possono fare, analizzando i vari risultati ottenuti?

---

[3] I problemi (o gli esercizi) contrassegnati col simbolo ® sono risolti (totalmente o parzialmente) e la risoluzione è situata nella cartella "Integrazione 2", file "Matematica – Integrazione 2, unità 28-88", pubblicata in questo medesimo sito e scaricabile gratuitamente.

Matrici e determinanti. Metodo di Cramer (nn. 6-9):

6. Calcolare i valori dei seguenti determinanti:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

7. È dato il seguente determinante, dove a, b, c, m, n, p, k sono numeri reali assegnati:

$$\begin{vmatrix} a & a+m & a+km \\ b & b+n & b+kn \\ c & c+p & c+kp \end{vmatrix}.$$

Spiegare, senza calcolarlo, perché il suo valore è 0.

8. Calcolare, se esistono, i valori del parametro reale a per cui il seguente determinante è nullo:

a) $\begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a-1 & 2a & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ a-1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

9. Risolvere i seguenti sistemi col metodo di Cramer e controllare mediante un idoneo software matematico l'esattezza dei risultati ottenuti:

a) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x+y-z=1 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y-z=3 \\ 2x-4y+z=2 \\ 2x+6y-2z=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+z-t=4 \\ x+y-z-t=3 \\ x-y-z+t=2 \\ x-y-z-t=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y+3z-t=1 \\ -x+3y-z+t=2 \\ 3x-y+z+2t=3 \\ -x+y+2z+3t=4 \end{cases}$

Questioni varie:

10. Andrea ha un "bonus" di € 150, che può spendere al supermercato. Decide di impegnarlo integralmente nell'acquisto di 15 capi di biancheria fra camicie, cravatte e fazzoletti. Trova scritti i seguenti prezzi unitari: € 33 per una camicia, € 18 per una cravatta ed € 1,5 per un fazzoletto. Quanti pezzi per ciascun capo di biancheria può comprare?

[**R**. Una soluzione è (3 camicie, 2 cravatte, 10 fazzoletti). Ce ne sono altre?]

11. Si consideri la seguente matrice:

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & c \end{Vmatrix}.$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b, c essa è invertibile.

12. Il seguente esercizio è riportato da Giamblico di Calcide (IV sec. d.C.), che lo attribuisce al pitagorico **Timarida** di Paro (vissuto probabilmente nel V-IV sec. a.C.):
«Si sa che, sommando una quantità incognita x con ciascuna di n-1 quantità incognite $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, si ottengono nell'ordine n–1 quantità note $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Si sa, inoltre, che la somma delle n quantità incognite $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ è uguale alla quantità nota S. Calcolare x.»
Timarida risolse l'esercizio senza disporre di alcun simbolismo. Tu prova a risolverlo con gli strumenti dell'algebra.

13. In un'opera attribuita a **Metrodoro** di Bisanzio, grammatico e aritmetico vissuto fra il V e il VI sec. d.C., figura il seguente problema, che gli antichi dovevano risolvere senza disporre del nostro agile simbolismo e che tu sei invitato a risolvere utilizzando al meglio lo strumento algebrico:
«Devi fabbricare una corona di 60 mine (la "mina" era un'unità di peso), mescolando opportunamente oro, rame, stagno e zinco. Precisamente: oro e rame costituiscono complessivamente i 2/3 della corona; oro e stagno i $3/4$; oro e ferro i $3/5$. Quanto oro, rame, stagno e zinco devi impiegare?»

14. Sommando a tre a tre, in tutti i modi possibili, le lunghezze dei lati di un quadrilatero, si ottengono i seguenti valori:

$$9\,a\,,\,10\,a\,,\,11\,a\,,\,12\,a\,,$$

dove a è una lunghezza assegnata. Calcolare il perimetro del quadrilatero.
Stabilire, inoltre, se, disponendo in un ordine opportuno i lati del quadrilatero, esso risulta circoscrivibile ad un cerchio. [**R.** 14 a ; ...]

15. La somma dei due angoli adiacenti ad uno dei lati di un quadrilatero misura 170°; quella degli angoli adiacenti ad uno dei lati consecutivi al precedente misura 210°; infine, quella degli angoli adiacenti all'altro dei due lati consecutivi al primo misura 150°. Ammesso che il quadrilatero sia inscrivibile in un cerchio, determinare i suoi angoli. [**R.** 70°, 100°, …]

16. ® LABORATORIO DI MATEMATICA. Un numero di tre cifre, scritto nell'usuale sistema di numerazione decimale, è un quadrato perfetto (è, cioè, il quadrato di un numero naturale). Se ciascuna delle sue cifre è aumentata di una unità, si ottiene ancora un quadrato perfetto. Bisogna trovare i due numeri. Come pensi di procedere? [Problema ad alto coefficiente di difficoltà]

17. PROBLEMA RISOLTO. Un numero m di quattro cifre, scritto nel consueto sistema di numerazione decimale, è tale che, indicato con n il numero che si ottiene leggendo m al contrario, da destra a sinistra, il numero m+n è divisibile per 11^2.
Le prime due cifre a sinistra del numero m formano un numero uguale all'età di Mario nell'anno 2008, le ultime due cifre a destra formano invece un numero che indica l'anno (del secolo 1900) in cui è nata Silvia.
Trovare le età di Mario e Silvia sapendo che Mario ha 4 anni in più di Silvia e l'età di Mario è espressa da un numero divisibile per 5.
RISOLUZIONE. Incominciamo col dire che si tratta di un problema con un altissimo coefficiente di difficoltà. Il numero m può essere indicato nel modo seguente:

$$m = 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d,$$

dove a, b, c, d sono numeri naturali compresi fra 0 e 9 inclusi, ma con $a \neq 0$.
Di conseguenza il numero n è tale che:

$$n = 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a.$$

Ragion per cui:

$$m + n = 1001\,(a+d) + 110\,(b+c);$$

vale a dire:

$$m+n = 7\times 11\times 13(a+d) + 2\times 5\times 11(b+c) = 11[7\times 13(a+d) + 2\times 5(b+c)].$$

Affinché $m+n$ sia divisibile per 11^2 è necessario e sufficiente che $a+d$ e $b+c$ siano divisibili per 11. Questo è possibile solo se $a+d=11$ e $b+c=0$ oppure $b+c=11$.

Considerato poi che nell'anno 2008 l'età di Mario è $10a+b$, mentre l'età di Silvia è $2008-(1900+10c+d)$, per le condizioni imposte dal problema deve essere b=0 o b=5 e inoltre:

$$10a+b=[2008-(1900+10c+d)]+4, \text{ vale a dire: } 10a+b+10c+d=112.$$

Si tratta allora di risolvere il sistema delle seguenti equazioni:

$$a+d=11,\ b+c=0,\ 10a+b+10c+d=112,$$

e il sistema delle seguenti equazioni:

$$a+d=11,\ b+c=11,\ 10a+b+10c+d=112,$$

tenendo ovviamente presenti i vincoli già posti per le incognite a, b, c, d.

Il primo sistema non ammette soluzioni intere.

Occupiamoci del secondo, risolvendolo dapprima rispetto alle incognite a, c, d. Si ottiene:

$$a = b-1,\quad c = 11-b,\quad d = 12-b.$$

Ricordiamo che b può assumere i soli valori 0 e 5. Per $b=0$ non si hanno valori delle altre incognite compatibili con i vincoli posti. Per b=5 si ottiene: a=4, c=6, d=7. Pertanto l'età di Mario, in anni, è $10a+b=45$, mentre quella di Silvia è $2008-(1900+10c+d)=41$.

18. ® Il perimetro del pentagono ABCDE è 30 m. Si sa poi che:

$$AB+BC = 7\ m,\quad BC+CD = 10\ m,\quad CD+DE = 15\ m,\quad DE+EA = 17\ m.$$

Calcolare le misure dei lati del pentagono.

[N.B.: Fra i procedimenti possibili ce n'è uno semplice ed immediato]

19. ® Se si somma ciascuno di tre numeri assegnati alla media aritmetica degli altri due si ottengono i seguenti numeri: 33, 36, 45. Calcolare la media aritmetica dei tre numeri assegnati.

[Attenzione! Non si chiede la determinazione dei tre numeri ma la loro media aritmetica]

20. PROBLEMA RISOLTO. Aldo, Giovanni e Michele giocano con le figurine dei calciatori: Aldo dà a Giovanni tante delle sue figurine quante ne possiede già Giovanni; quest'ultimo dà a Michele tante figurine quante ne possiede già Michele; il quale infine dà ad Aldo tante figurine quante ne possiede Aldo a questo punto. In seguito a questa operazione, i tre amici si trovano ad avere lo stesso numero di figurine. a) Qual è il minimo numero complessivo di figurine affinché ciò sia possibile? b) In tal caso quante figurine possiede ciascuno dei due amici? c) Quante ne possedeva in origine? d) L'operazione è possibile se il numero complessivo delle figurine è 300? [Problema ad alto coefficiente di difficoltà]

RISOLUZIONE. Indichiamo con x, y, z il numero delle figurine possedute in origine da Aldo, Giovanni e Michele rispettivamente ed indichiamo con 3a il numero complessivo delle figurine.

Intanto deve essere ovviamente: $x+y+z=3a$.

Dopo che Aldo ha dato le figurine a Giovanni, le figurine in possesso dei tre amici sono nell'ordine:

$$x-y,\ 2y,\ z.$$

Dopo che Giovanni ha dato le figurine a Michele, la nuova situazione è questa:

$$x-y,\ 2y-z,\ 2z.$$

E, infine, dopo che Michele ha dato le figurine ad Aldo, le figurine in possesso dei tre amici sono rispettivamente:

$$2(x-y),\ 2y-z,\ 2z-(x-y).$$

Deve risultare: $2(x-y) = 2y-z = 2z-(x-y) = a$.

Basta allora risolvere il sistema delle seguenti equazioni nelle incognite x, y, z, che chiaramente devono assumere valori naturali:

$$x+y+z = 3a,\quad 2(x-y) = a,\quad 2y-z = a.$$

A conti fatti si trova:

$$x=\frac{11}{8}a,\quad y=\frac{3}{4}a,\quad z=\frac{7}{8}a.$$

Si capisce che solamente se a è un multiplo di 8, i numeri x, y, z sono interi. Ed il più piccolo multiplo (non nullo) di 8 è ovviamente 8. Nel qual caso 8 sono le figurine possedute dai tre amici alla fine dell'operazione; 24 è il minimo numero complessivo di figurine, ed infine le figurine possedute dai tre amici in origine sono: $x=11, y=6, z=7$. Si capisce inoltre che solo se il numero complessivo delle figurine è esso pure un multiplo di 8 l'operazione è possibile. Siccome 300 non lo è, l'operazione in tal caso non è possibile.

21. È dato il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z, essendo k un parametro reale:

$$\text{a) } \begin{cases} x+y+z=1 \\ kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x+y+z=2 \\ kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} x+y+z=k \\ kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \end{cases}$$

Calcolare per quali valori di k esso è determinato, indeterminato o impossibile. Nel caso in cui il sistema è determinato, trovarne la soluzione.

[**R.** a) determinato per $k\neq1$, sol. $(0,0,1)$; indeterminato per $k=1$; impossibile mai.

b) determinato per $k\neq1$, sol. $\left(\frac{1}{1-k}, \frac{1}{1-k}, \frac{2k}{k-1}\right)$; indeterm. per $k=1$; imp. mai.

c) determinato per … , sol. $(-1,-1,k+2)$; indeterminato …; impossibile …]

22. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il triangolo di vertici A, B, C. Determinare i vertici del triangolo i cui lati hanno come punti medi i vertici del triangolo dato. Si sa che:

a) $A(0,0),\ B(3,0),\ C(2,2)$; b) $A(-1,1),\ B(1,-1),\ C(2,2)$.

23. I coniugi Rossi sono a passeggio con due dei loro figli, Paolo e Laura, e con la cugina Maria. Incontrano l'amico Pietro, un matematico, il quale chiede incuriosito: «Ma quanti siete in famiglia?» Le risposte sono quelle giuste per un matematico.

Sig. Rossi: «Effettivamente non siamo pochi. Poi attualmente ospitiamo anche alcune cugine ed il numero è pure aumentato. Comunque complessivamente non raggiungiamo la dozzina.»

Paolo: «Io ti posso dire che ho tanti fratelli e altrettante sorelle.»

Laura: «Il numero delle cugine è esattamente uguale alla metà del numero complessivo dei miei fratelli e sorelle.»

Maria: «Se sommo il numero di noi cugine a quello dei figli maschi dei signori Rossi ottengo un numero primo, se lo sommo invece a quello delle figlie ottengo un numero composto.»

Ammesso di scegliere a caso, due fra tutti i personaggi attualmente presenti nella famiglia Rossi - genitori, figli e figlie, cugine – qual è la probabilità che siano dello stesso sesso? [**R.** 4/9]

UNA BREVE SINTESI PER DOMANDE E RISPOSTE

DOMANDE.

1. Cosa s'intende per matrice trasposta di una matrice data?
2. Una matrice quando si dice simmetrica?
3. Si può eseguire il prodotto (righe per colonne) di una matrice di 4 righe e 3 colonne per una matrice quadrata di ordine 4?
4. In un determinante, cosa s'intende per minore complementare di un suo elemento?
5. Enuncia due condizioni sufficienti per concludere che il valore di un determinante è 0?
6. Una matrice quadrata quando si dice regolare?
7. Un sistema lineare quando si dice non normale (o singolare)?
8. Cosa s'intende per matrice inversa di una matrice data?

RISPOSTE.

1. È la matrice che si ottiene dalla matrice data scambiando tra loro le righe con le colonne.
2. Una matrice si dice simmetrica quando gli elementi simmetrici rispetto alla sua diagonale principale sono numeri uguali.
3. No. È necessario infatti che, nel prodotto (righe per colonne) della matrice A per la matrice B, il numero delle colonne della matrice A sia uguale al numero delle righe della matrice B.
4. S'intende il determinante che si ottiene da quello dato, cancellando la riga e la colonna che s'intersecano nell'elemento considerato.
5. Un determinante è nullo se: a) sono nulli tutti gli elementi di una sua linea qualsiasi; b) se è costante il rapporto fra gli elementi di una linea e quelli corrispondenti di un'altra linea parallela.
6. Quando il suo determinante ha un valore diverso da 0.
7. Quando è indeterminato o impossibile.
8. Se A è una matrice quadrata di determinante $D \neq 0$ e se è A^* la matrice avente per elementi i suoi complementi algebrici allora la matrice inversa di A è la matrice $\frac{1}{D}A^{\circ}$.

COMPLEMENTI: DETERMINANTI E GEOMETRIA. (4)

Il concetto di determinante permette di dare una veste diversa ad alcuni concetti di geometria.

In particolare, una volta riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è possibile esprimere per mezzo di un determinante l'area di un triangolo di dati vertici. Precisamente, dati i vertici $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ di un triangolo, la sua area S è tale che:

$$S = \frac{1}{2}|\Delta| \text{ dove } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Questo si può dimostrare anche se noi non lo facciamo.

[4] Argomento opzionale.

Ti proponiamo, ad ogni buon conto, di verificare la formula, utilizzandola per calcolare l'area del triangolo di vertici $A(1,0), B(0,1), C(2,2)$, dopo averla calcolata con un altro procedimento.

Naturalmente, se i tre punti $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ sono allineati, il triangolo degenera in un segmento e la sua area è ovviamente nulla. Ragion per cui risulta $\Delta=0$. E viceversa, se $\Delta=0$ allora i tre punti sono allineati.
In altri termini: la condizione $\Delta=0$ è necessaria e sufficiente per concludere che i tre punti sono allineati.

Ti proponiamo di verificare questa proprietà con riferimento ai seguenti punti:
a) $A(1,0), B(0,1), C(2,-1)$. b) $A(0,0), B(1,1), C(2,2)$. c) $A(0,1), B(1,2), C(2,3)$

Si capisce poi facilmente che se al posto del punto particolare A_3 si prende un generico punto $A(x, y)$, la condizione $\Delta=0$ è quella dell'allineamento di tale punto con i punti $A_1(x_1, y_1)$ e $A_2(x_2, y_2)$, vale a dire che è l'equazione della retta passante per questi due punti. Equazione che pertanto può essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ti invitiamo a verificare che questa equazione è un modo diverso di scrivere la nota equazione della retta passante per i due punti $A_1(x_1, y_1)$ e $A_2(x_2, y_2)$, ossia:

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}\,.$$